arXiv:2601.20057v1 [math.LO] 27 Jan 2026

富有想象力的基础

TOBY MEADOWS

Abstract. 我们证明，可数集合论 $ZFC^- + \forall x\ |x| \leq \omega$ 无法消除虚元。换言之，该理论无法为任意可定义等价关系提供代表元。我们还发现， ZFC^- 和 $ZFC^- + \exists \kappa\ (Inacc\ (\kappa)\ \wedge \forall x\ |x| \leq \kappa)$ 也无法消除虚元。

在以奠定基础为目标的数学理论中，我们经常定义等价关系。通常，为每个底层等价类定义某种公认的典范代表元会很方便。有时，这些代表元属于相应的等价类，有时则不然。在皮亚诺算术或任何其他定义域上存在可定义良序的理论中，我们只需取等价关系每个等价类中的最小元素即可。在 ZFC 中，我们并不总是有这样的序，[1] 不过，我们可以借助 Scott 技巧，使用每个等价类中由最小秩元素构成的子类。在这种情况下，我们得到的不是等价类中的一个元素，但仍能得到一个对象，也就是一个集合；借助它，我们可以对等价关系的等价类进行量化，从而相当自由地对这些等价类展开理论研究。能够做到这一点的理论被称为可以消除虚元。本文的目标是证明，可数集的自然理论无法消除虚元。这个理论通过从 ZFC 中移除幂集公理，并添加一条新公理——每个集合都是可数集——来构造。我们将此理论称为可数集合论，并记作 ZFC^-_{count}。这是一个实用的理论，可以在其中开展大量数学研究。例如，众所周知，它等价于二阶算术理论，因此为逆向数学中使用的更强公理提供了另一种框架 [Enayat 和 Le-lyk，2024 年；Simpson， 1999]。根据我们的结果，常用的 ZFC^- 也无法消除虚元。

我们将在第 1 节从一些基本定义开始。接着在第 2 节，我们将给出一个预备定理，说明二阶算术无法消除虚元。感谢 Asaf Karagila 分享了这一论断背后的关键思路。最后，在第 3 节，我们将推广第 2 节中的思路，以证明我们的主要论断。

1. Motivating remarks

让我们从主要定义开始。

[1]不过请注意，如果我们将 $V = HOD$ 或 $V = L$ 加入 ZFC ，就确实能得到宇宙的一个可定义良序。此外，在 ZF之上，$V = HOD$ 等价于这种良序的存在。

定义 1. 我们称一个理论 T 消除虚构对象[2]，如果 T 证明某个公式 E定义了一个等价关系，那么就存在一个公式 F，使得 T 证明 F 定义了一个保持 E 的函数；也就是说， T证明对于所有 $\bar{x}$， $\bar{y}$，$\bar{x}E\bar{y}$当且仅当 $F(\bar{x}) = F(\bar{y})$。

在上述定义中， $\bar{x}$ 意在表示变量的有限序列 x_0，..... x_n。不过，由于我们将研究能够把有限序列表示为对象的理论，因此可以忽略这一点，改用这个定义的版本，其中只有单个变量 x和 y。

不难看出， PA、 ZF 及其扩张都能够消除虚元。此外，这一特性在基础语境中经常会用到。举两个经典例子来说，可以考虑 Scott 技巧的用途：在 ZF中无选择公理地定义基数；以及在 ZFC中从大基数定义超幂。消除虚元还使我们能够在解释其他理论时避免使用商集。[3] 或者用 Barrett 和 Halvorson 的说法， [2016], 无法消除虚元会导致莫里田完备性失效，尤其会导致无法提供商类型。消除虚元的能力也在近期许多研究中发挥了作用，这些研究探讨了与范畴性有关的理论性质。例如，在 Freire 和 Hamkins 的工作基础上， [2020], Enayat 和 ̈Le-lyk [2024]证明，消除虚元的内部范畴序列理论是紧的。通俗地说，内部范畴的理论是指能够看出自身在同构意义下只有一个模型的理论。[4] 如果某理论的任意一对双可解释扩张都是同一个理论，也就是说，它们具有相同的推论，那么该理论就是紧的 。不那么形式化地说，紧理论无法以有实质差异的方式扩张。于是，下面的证明表明，存在一个内部范畴的理论 ZFC^{-}_{count}，它无法消除虚元，却仍然是紧的。[5] 因此，内部范畴理论要成为紧理论，并不要求它能够消除虚元。

2. A WARMUP THEOREM

令 SOA 为二阶算术理论，具有完全概括公理，并对由自然数索引的所有可定义的实数集满足选择公理。[6] 作为我们关于 ZFC^{-}_{count} 的主要结果的预备，我们旨在通过基于力迫法的自同构论证，证明 SOA 不能消除虚元。更具体地说，我们将在 $\mathbb{R}$ 上定义一个等价关系 E，然后反设我们能够定义 $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$，且该定义与 E相容。接着，我们将构造某个 $g \in \mathbb{R}$ 和一个自同构

[2]如需了解更多信息以及该概念的历史讨论，请参见 [Hodges, 1997] 第4.4节。在该语境中，这被称为 *uniform elimination of imaginaries*。不过，在这一基础语境下，省略对一致性的提及似乎更为方便，因为非一致版本在此处看起来不那么有趣。[3]在商解释中，恒等关系并未得到保留；从解释理论的角度看，它被解释为一个等价类。[4]它通过复制语言并将相同的公理添加到新语言中，以一阶而非二阶的方式实现这一点。公理模式随后使用合并后语言中的公式。更多详情请参见 [V ̈a ̈an ̈anen, 2019, Maddy 和 V ̈a ̈an ̈anen, 2023]。[5]关于 ZFC^{-}_{count} 是内部范畴的证明，请参见 [Meadows, 2025] 的定理19；关于 ZFC^{-}_{count}的证明，请参见[Enayat, 2017] 的推论2.5.1，或 [Meadows, 2025] 的定理29。随后， [Enayat 和 ̈Le-lyk, 2024] 的注8(b)指出，坚实理论总是紧的。 [Enayat 和 ̈Le-lyk, 2024] 以及 [Simpson, 1999] 中有更多详情。在后者中，该理论记作 $\Sigma^1_\infty - AC_0$；可定义选择原理最终会推出概括原理。更多信息请参见 [Simpson, 1999] 的第VII.6节和引理 VII.6.6。另请注意， SOA 也常记作 Z_2，而 PA 常记作 Z_1 [Hilbert 和 Bernays, 1934]。

它来自底层力迫法，并将 g 移至某个 g^*，使得 gEg^*，但 $F(g) \neq F(g^*)$，从而得到我们所需的矛盾。

首先，我们描述所需的力迫法以及一些有用的技术术语。令 $\mathbb{Q} = Add(\omega, \omega_2)$，于是 $\mathbb{Q}$ 由有限偏函数组成，其中 $p\colon \omega \times \omega_2 \rightharpoonup 2$ 按反向包含排序。给定 $p \in \mathbb{Q}$，我们称 $\omega\text{-}domain$ of p（缩写为 $\omega\text{-}dom(p)$）为满足以下条件的 n 的集合：对于某个 $\alpha < \omega_2$，$p(n, \alpha)$ 有定义。或者用更正式的记号，我们写作

$$\omega\text{-}dom(p) = \{n \in \omega \mid p(n, \alpha)\downarrow \text{ for some } \alpha \in \omega_1\}.$$

于是我们称自同构 $\sigma\colon \mathbb{Q} \cong \mathbb{Q}$ 若其由条件 $\mathbb{Q}$ 的第一坐标（即 ω-domain）的一个置换所决定，则称其为 $\omega\text{-}based$。更具体地说，σ 满足：存在某个置换 $\sigma : \omega \to \omega$，使得

$$\sigma(p)(\sigma(n), \alpha) = p(n, \alpha)$$

只要右侧有定义即可。下面的引理是该断言的关键。我们将利用它来确保下文中 $F(g) \neq F(g^*)$。

引理 2。 （*Karagila*）[7] 假设 G 是 $\mathbb{Q}$-*generic over* V。令 $x \subseteq V$ 满足 $x \in V[G]\backslash V$。那么，对于所有满足 $\dot{x}_G = x$ 的 $p \in G$ 和 $\dot{x} \in V^{\mathbb{Q}}$，存在某个 ω *-based* 自同构 σ：$\mathbb{Q} \cong \mathbb{Q}$，满足 $\sigma \in V$，使得 $\sigma(p) = p$ 以及 $(\sigma\dot{x})_G \neq x$。

证明。设 x 和 $\dot{x}$ 如定理陈述中所假设。由于 $x \subseteq V$ 不是 V 的元素，x 必定是无限的，因此必定存在某个 $u \in x$，使得 p 无法迫使 $u \in \dot{x}$。于是，我们可以固定 q，$r \leq p$，使得 $q \in G$

$$q \Vdash u \in \dot{x} \text{ and } r \Vdash u \notin \dot{x}.$$

不失一般性，假设 $\omega\text{-}dom(p) = m$ 且 $\omega\text{-}dom(q) = \omega\text{-}dom(r) = m + n$。利用 G 的泛型性，我们可以固定一个条件 $r^* \in G$，其 ω-定义域为 $[k, k + n)$（其中某个 $k > m + n$），并且 r^* 是 r 的平移，它将 r 中出现在 $[m, m + n)$ 的部分移至 $[k, k + n)$。更准确地说，$r^* \in G$ 满足对所有 $i \in \omega$ 和 $\alpha \in \omega_2$

$$r^*(i, \alpha) = \begin{cases} r(i, \alpha) & \text{if } i < m \text{ and } r(i, \alpha)\downarrow, \\ r(i - (k - m), \alpha) & \text{if } i \geq k \text{ and } r(i, \alpha)\downarrow. \end{cases}$$

接着令 $s = q \cup r^*$，并注意到根据滤子条件 $s \in G$。然后令 σ：$\omega \to \omega$ 为一个置换，它将区间 $[m, m + n)$ 与 $[k, k + n)$ 互换，并令 $\sigma\colon \mathbb{Q} \cong \mathbb{Q}$ 为由它确定的基于 ω 的自同构。于是注意到 $\sigma(s) \leq r$，因此我们看到

$$\sigma(s) \Vdash u \notin \dot{x}$$

然后，注意到 σ 是自反的，

$$s \Vdash u \notin \sigma\dot{x}.$$

因此，$u \notin (\sigma\dot{x})_G$，所以 $(\sigma\dot{x})_G \neq x$，如所需。 □

有了这一点，关于 SOA 的结果便可直接得出。

[7] 感谢 Asaf 允许我在此收录这个证明。其基本思想显然十分优雅。呈现方式中任何不够妥当之处都归咎于我。

定理 3. *SOA* 无法消除虚元。

证明。我们先做一些准备：令 G 在 L上是 $\mathbb{Q}$-泛的，$g = \bigcup G\colon \omega \times \omega_2 \to 2$，并且对所有$\alpha < \omega_2$，$g_\alpha\colon \omega \to 2$ 满足 $g_\alpha(n) = g(n,\ \alpha)$。接着，我们为每个 g_α取其典范名称 $\dot{g}_\alpha$。然后，通过令 $E \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ 为相互可构造性来固定等价关系；也就是说，令 xEy当且仅当 $L[x] = L[y]$。注意，这是一个 Δ^1_2 关系，因此可以在二阶算术中定义。还要注意，如果 $\sigma\colon \mathbb{Q} \cong \mathbb{Q}$ 是从 L出发的一个基于 ω的自同构，那么对所有 $\alpha < \omega_2$，$(\dot{g}_\alpha)_G E (\sigma\dot{g}_\alpha)_G$。只需证明，不存在函数 $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 可以在 $L[G]$ 上定义，使得对所有 $x,\ y \in \mathbb{R}$

$$yEz \leftrightarrow F(y) = F(z).$$

这就足够了，因为如果无法在 $L[G]$ 中定义这样的函数，那么在 $L[G]$ 的 SOA 标准模型版本中也无法定义，而后者本身可在 $L[G]$ 内定义。我们反设存在这样一个函数 F，从而导出矛盾。由于 $|L_{\omega_1}|^{L[G]} = \omega_1$，我们可以固定 $\alpha < \omega_2$，使得 $F(g_\alpha) \notin L$。因此，对于某个 $x \in \mathbb{R} \cap (N \backslash L)$，有 $F(g_\alpha) = x$。接下来，令 $\dot{x} \in L^{\mathbb{P}}$ 满足 $\dot{x}_G = x$，并固定 $p \in G$，使得

$$p \Vdash F(\dot{g}_\alpha) = \dot{x}.$$

利用引理 2，我们可以接着固定一个以 ω 为基的自同构 $\sigma\colon \mathbb{Q} \cong \mathbb{Q}$，它从 L 出发，满足 $\sigma(p) = p$ 且 $(\sigma\dot{x})_G \neq x$。因此，我们得到

$$p \Vdash F(\sigma\dot{g}_\alpha) = \sigma\dot{x}$$

因此，如果令 $g^*_\alpha = (\sigma\dot{g}_\alpha)_G$ 和 $x^* = (\sigma\dot{x})_G$，我们可以看到 $F(g^*_\alpha) = x^*$，$g_\alpha E g^*_\alpha$ 但 $x \neq x^*$，这就产生了矛盾。□

还值得指出的是，我们也可以为定理 3 给出一种较为温和、但不那么直接的证明。[8] 我们先回顾文献中的几个事实。首先注意，如果一对序贯理论通过保恒等解释实现双重可解释，那么这两个理论定义等价 [Friedman 和 Visser，2025]。[9] 接着注意到，SOA 和 ZFC^-_{count} 都是序贯的、双可解释的，但并非定义等价 [Enayat 和 Łełyk，2024，Chen 和 Meadows，2025]。根据 Visser 和 Friedman 定理，我们可以看出，证明它们双重可解释的解释不可能是保恒等的。事实上，正如我们将在下文更详细讨论的，SOA通过商解释解释了 ZFC^-_{count}，而 ZFC^-_{count}确实通过将论域限制为自然数及其幂集，以保恒等解释解释了 SOA。现在，反设 SOA 能够消除虚元。那么，SOA就可以为每个等价类提供代表元，从而将其对 ZFC^-_{count} 的商解释替换为保恒等解释。但这样一来，SOA 和 ZFC^-_{count} 就能通过保恒等解释实现双重可解释，而 Visser 和 Friedman 定理将告诉我们，它们定义等价；然而我们已经知道这是不可能的。[10] 尽管如此，采用更直接的证明或许仍有价值，而且它也为下文较长的证明提供了一种简单的策略视角。

[8]这一观察是 Ali Enayat 和作者分别独立得出的。[9]参见 [Friedman 和 Visser 的定理 5.4，2025]。[10]请注意，严格来说，我们不能反过来用类似的间接策略证明 ZFC^-_{count}无法消除虚元。原因在于，ZFC^-_{count}已经通过保恒等解释解释了 SOA。因此，并不存在需要消除的虚元。

3. The main theorem

现在我们可以来考察ZFC^-_{count}了。为明确起见，我们从以收集公理而非替代公理为基础的 ZFC 标准公理出发。[11] 然后我们舍弃幂集公理，改用一条新公理，断言所有对象都是可数的；更形式化地说，$\forall x\ |x| \leq \omega$。在开始讨论之前，我们先谈谈为什么这个定理看起来比乍看之下更难一些。ZFC^-_{count} 理论众所周知与 SOA双重可解释。因此，我们或许会希望，只需对上文的证明做些表面上的修改，就能解决我们要处理的问题。但情况似乎并非如此。要理解原因，不妨看看尝试最直接做法时会发生什么。ZFC^-_{count} 和 SOA 的双重解释依赖于这样一个事实：ZFC^-_{count} 的模型中的每个集合，都可以用其自然数版本上的一个良基外延关系来编码。基于这一点，我们或许会希望如下修改上文的证明。使用同一个等价关系E，并注意到 $\mathbb{HC}$ 是ZFC^-_{count}的一个自然模型，我们可以反设存在一个可定义函数 $G : \mathbb{R} \to \mathbb{HC}$，它保持 E。然后我们或许会希望找到一个可定义函数，使得 $H : \mathbb{HC} \to \mathbb{R}$，该函数将 $x \in \mathbb{HC}$ 映射为某个能够编码 x的良基外延 $R_x \subseteq \omega^2$。这样，论证的其余部分基本上就可以照着相同思路进行。然而，这一策略的问题在于，会有许多不同的集合 $S \subseteq \omega^2$ 都能编码 x。此外可以看出，在 ZFC^-_{count}中不存在以统一方式定义类似 H 的函数的方法。[12] 基于这些原因，我们将采用更直接的路径，通过推广 Karagila 引理 2，来推广定理 3 证明中的策略。

人们可能还会想知道，我们是否可以不用相互可构造性，而改用一种不那么特别的等价关系。显然，还会有其他同样有效的关系，但似乎必须采用与此相近的某种关系。思考一下为什么会这样将很有启发性。首先，我们注意到，任何等价关系 E 在 $\mathbb{R}$ 上若其等价类总是集合而不是真类，就注定会失败。要看清这一点，只需注意，我们可以令 F，使得对所有 $x \in \mathbb{R}$、$F(x) = [x]_E$，其中后者恰好是那些满足 yEx 的 y 所组成的集合。作为这类关系中或许最典型的例子，[13] 令 $\mathbb{R} = 2^\omega$，并考虑关系 E_0：若实数最终始终相同，则称它们等价；也就是说，xE_0y当且仅当存在某个 $n \in \omega$，使得对所有 $m > n$，$x(m) = y(m)$。[14] 因此，很明显，我们的等价关系必须是一个真类；所以在可数集合论的语境中，这意味着它的等价类必须是不可数的。那么，对于这样的等价关系，一个自然的选择是什么呢？令 $\mathbb{R} = \mathcal{P}(\omega^2)$，我们可以把实数看作是在编码自然数上的二元关系。于是，一个显而易见的等价关系选择就是这些关系之间的同构。将其记为 E_{iso}。显然，对于所有 $x \in \mathbb{R}$，$[x]_{E_{iso}}$都是不可数的，因此我们绕过了第一个障碍，但还有另一个障碍。[15]

---

[11]参见 [Gitman 等人， 2016] 他们生动地讨论了仅有替换模式时会出现的病态现象。[12]这源自一种证明策略，用于说明 ZFC^-_{count} 和 SOA 并非定义等价 [Enayat 和 Le-lyk， 2024]。具体而言，如果我们从一个 $V = L$ 模型出发，然后通过强迫添加一个 Cohen 实数 c，便可看出 $L[c]$ 无法定义 $\mathbb{HC}^{L[c]}$的线性序。但我们显然可以定义 $L[c]$中实数的线性序，因此 $L[c]$无法定义从 $\mathbb{HC}^{L[c]}$ 到 $\mathbb{R}^{L[c]}$的单射。更多细节请参见 [Chen 和 Meadows， 2025] 。[13]事实上，这是我最先尝试的方法，也是我与他人讨论这个问题时，他们首先向我提出的方法。[14]要看出 $[x]_{E_0}$ 是可数的，只需注意到它与 $\bigcup_{n\in\omega} D_n$ 相同，其中每个 D_n 都是由那些 $y \in \mathbb{R}$ 构成的集合，而这些 $y \in \mathbb{R}$ 仅在 n以下与 x 不同。[15]感谢 Jason Chen 指出了这一点。

定理 4。 *(ZFC^-，Friedman，2000年)* 存在一个可定义函数 F_{iso}： $\mathbb{R} \to \mathbb{HC}$，使得对所有$x$、$y \in \mathbb{R}$

$$xE_{iso}y \Leftrightarrow F_{iso}(x) = F_{iso}(y).$$

这个证明妙不可言地简单，不把它陈述出来简直是罪过。我们令 $F_{iso}(x)$ 表示 $\mathcal{L}_{\omega_1\omega}$ 的无穷逻辑句子 φ_x，它被称为将 x 视为 ω 上的二元关系时的 Scott 句子。某个 $x \in \mathbb{R}$ 的 Scott 句子 φ_x 自然地编码为实数集 $\mathbb{HC}$ 的一个元素，并且满足 $y \models \varphi_x$ 当且仅当 $y \cong x$。此外，我们可以设计一种定义 Scott 句子的一致过程，它只取决于某个 $x \subseteq \omega \times \omega$ 的结构层面或模型论层面。因此，如果 $x \cong y$，那么我们也能看到 $\varphi_x = \varphi_y$。[16]

于是，又一个自然等价关系就此告终。究竟该归咎于什么并不那么清楚，不过或许值得指出，E_{iso} 相对复杂，因为它是一种解析关系，也就是 Σ^1_1 关系，而且不是博雷尔关系。相比之下，相互可构造性则更为复杂，因为它是一种 Δ^1_2 关系。这种额外的复杂性似乎正是奏效的关键，除此之外还有其他因素。

现在，我们可以陈述并证明这篇短文的主定理了。

定理 5. ZFC^-_{count} 无法消除虚元。

在着手证明之前，我想值得一提的是——尽管上文已有评论——这个断言让人觉得显然为真。没有幂集，斯科特的巧妙技巧便不复存在，而且似乎没有什么能取而代之。此外，我认为，定理 3 的证明只要稍作推广，显然就应该奏效。然而，魔鬼藏在细节里，正如读者将看到的，细节还真不少。有鉴于此，我打算把证明倒过来呈现。首先，我会单独提出几个关键引理，但暂不证明。然后，我会说明定理 5 如何相对迅速地由它们推出。若读者觉得其中任一引理显而易见，欢迎就此打住。至于不那么轻信的读者，我们接下来会在后续章节中证明这些引理。

在本文余下部分，我们令 $\mathbb{P} = Add(\omega, 1)$ 和 $\mathbb{B} = ro(\mathbb{P})$ 表示称为 $\mathbb{P}$ 完备化的完备布尔代数，它由 $\mathbb{P}$ 的正则开子集构成。在方便时，我们会滥用这一记号，假定 $\mathbb{P}$ 是 $\mathbb{B}$ 的稠密子集；不过，使用这一记号时，语境或上下文中的说明会使其含义清楚。对于实数 x，$y \in \mathbb{R}$，我们令 $x \sim_c y$ 表示 x 与 y 是**相互可构造的**；即，$L[x] = L[y]$。[17] 对于 $x \in \mathbb{R}$，我们令

$$[x]_c = \{y \in \mathbb{R} \mid y \sim_c x\}$$

并将其称为**可构造性度**。现在我们可以陈述关键的引理了。

引理 6。设 G 在 L 上是 $\mathbb{P}$-泛型的。在 $L[G]$ 中，不存在可定义函数 F： $\mathbb{R} \to L$，使得 $F(x) = F(y)$ 当且仅当 $x \sim_c y$。

在主要证明中，我们将在某个 $L[G]$ 中工作，并利用这一点证明，任何满足 $\sim_c$ 的假定函数 F 都必须将某个实数映到 L之外。在定理 3 的证明中，我们实现这一点要容易一些，因为我们利用 $Add(\omega, \omega_2)$ 在 L 上进行强迫，因此加入的实数比 L_{ω_1}中的集合还多。

[16]参见 [Keisler, 1971]或 [Barwise, 1975]，以了解有关 Scott 句子和无穷逻辑 $\mathcal{L}_{\omega_1\omega}$ 的更多信息。[17]在定理 3 的证明中，我们将这一关系记为 E。

引理 7。设 G 在 V 上是 $\mathbb{B}$-泛型的。若 $x \in H(\omega_1)^{V[G]} \backslash V$，则存在某个 $\dot{x} \in V^{\mathbb{B}}$ 使得 $\dot{x}_G = x$，并且对所有 $b \in \mathbb{B}$，都存在某个 $\sigma \in Aut(\mathbb{B})^V$，使得 $\sigma(b) = b$ 且 $b \Vdash \sigma\dot{x} \neq \dot{x}$。

这个引理将在下面的证明中发挥类似于 Karagila 引理 2 的作用。我们将用它来证明，假定存在一个满足 $\sim_c$ 的函数 F，对于相互可构造的输入，其输出会被某个自同构移动。这将使我们得到所寻求的矛盾。下面给出主要证明。

证明。（定理 5 的）只需证明存在一个模型 N，它满足 ZFC^-_{count}，且其中有一个可定义的等价关系，但不存在尊重该关系的可定义函数。这个模型将通过取 L 的 Cohen 实数泛型扩张中的遗传可数集得到。更具体地说，令 G 在 L 上是 $\mathbb{B}$-泛型，并令 $N = H(\omega_1)^{L[G]}$。接着令我们的等价关系为相互可构造性，$\sim_c$。

现在在 N 中工作，我们反设 $F\colon \mathbb{R} \to N$ 是一个在 N 上可定义的函数，并且对所有 $x,\ y \in \mathbb{R}$

$$x \sim_c y \ \Leftrightarrow\ F(x) = F(y).$$

引理 6 告诉我们，可以固定某个 $d \in \mathbb{R}$，使得对某个 $x \in N\backslash L$，有 $F(d) = x$。于是，$d \in L$ 或 $d \notin L$。若 $d \notin L$，则 $L[d] = L[G]$ 或 $L[d] \subsetneq L[G]$。为了推进论证，我们先处理其中第一种情况，因为它与上文定理 3 的证明最为相似。之后，我们将完成分类讨论，并逐一处理其余情况。现在假设 $L[d] = L[G]$，并令 $\dot{d}$ 为一个 $\mathbb{B}$-名称，使得 $\dot{d}_G = g$。由于 $L[d] = L[G]$，我们可以固定某个 $b_0 \in G$，使得 $b_0 \Vdash \dot{d} \sim_c \dot{G}$，其中 $\dot{G}$ 是 G 的典范名称。接着，利用引理 7，我们固定一个 $\mathbb{B}$-名称 $\dot{x}$，使得 $\dot{x}_G = x$；并且对所有 $b \in \mathbb{B}$，都存在某个 $\sigma\colon \mathbb{B} \cong \mathbb{B}$，满足 $\sigma \in L$，使得 $\sigma(b) = b$ 且 $b \Vdash \sigma\dot{x} \neq \dot{x}$。于是我们看到

$$L[G] \models F(d) = x \Leftrightarrow \exists b_1 \in G\ \Vdash F(\dot{d}) = \dot{x}.$$

固定这样的 b_1 后，我们便可得到 $b \in G$ 以及 $b \leq b_0,\ b_1$。随后，我们可以固定一个σ 自同构 $\mathbb{B}$，以见证上述所描述的适当性质。于是我们看到

$$b = \sigma(b) \Vdash F(\sigma\dot{d}, \sigma\dot{x}) \wedge \sigma\dot{d} \sim_c \sigma\dot{G}.$$

现在令 $d^* = (\sigma\dot{d})_{G_d}$ 以及 $x^* = (\sigma\dot{x})_{G_d}$。于是我们有 $d^* \sim_C (\sigma G)_G \sim_c G \sim_c d$。但由于 $b \Vdash \sigma\dot{x} \neq \dot{x}$，我们还可看到 $x^* \neq x$，因此 F 不尊重 $\sim_c$。这就完成了我们的预备情形。

在接下来的分类讨论中，注意到如果 $L[d] \subsetneq L[G]$，可以看出存在 G_d 和 G_e，它们在 L 上相互 $\mathbb{B}$-一般，使得 $L[G_d] = L[d]$ 和 $L[G] = L[G_d][G_e]$。这样还剩下三种情形需要考虑。分别是：$d \notin L$ 和 $x \in L[G_d]$；$d \notin L$ 和 $x \in L[G]\backslash L[G_d]$；或 $d \in L$。

首先，假设 $d \notin L$ 和 $x \in L[G_d]$。这里的证明与我们的预备情形类似。首先，我们固定 $b_0 \in G_d$，使得 $b_0 \Vdash \dot{d} \sim_c \dot{G}_d$。然后，利用引理 7，固定一个 $\mathbb{B}$名称 $\dot{x}$，使得 $\dot{x}_{G_d} = x$，并且对于所有$b \in \mathbb{B}$，在 L 中存在一个自同构 σ，它固定 b，而 b 强制 $\sigma\dot{x} \neq \dot{x}$。接着可以看出，利用 $\mathbb{B}$ 的齐次性，

$$\begin{aligned} L[G] \models F(d) = x &\Leftrightarrow L[G_d] \models \text{“} \Vdash F(\dot{d}) = x\text{”} \\ &\Leftrightarrow \exists b_1 \in G_d\ b \Vdash \Phi(\dot{d}, \dot{x}) \end{aligned}$$

其中 $\Phi(d,x)$ 表示 $\Vdash F(d) = x$，而 d 是 G_d 所添加的 Cohen 实数的典范名称。固定这样一个 $b_1 \in G$ 后，我们便可得到 $b \in G$，使得 $b \leq b_0, b_1$。然后，利用 $\dot{x}$ 的特殊性质，我们固定一个自同构 σ，它是从 L 取自 $\mathbb{B}$ 的，并且满足 $\sigma(b) = b$ 和 $b \Vdash \sigma\dot{x} \neq \dot{x}$。于是我们看到

$$b = \sigma(b) \Vdash \Phi(\sigma\dot{d}, \sigma\dot{x}) \wedge \sigma\dot{d} \sim_c \sigma\dot{G}_d.$$

令 $d^* = (\sigma d)^{G_d}$ 和 $x^* = (\sigma\dot{x})^{G_d}$。由此可见，$L[G] \models F(d^*) = x^*$。此外，我们看到 $L[d] = L[d^*]$，因此 $d \sim_c d^*$。然而，由于 $b \Vdash \sigma\dot{x} \neq \dot{x}$，我们也看到 $x^* \neq x$，这意味着 F不尊重 $\sim_c$。

接下来，假设 $d \notin L$ 和 $x \in L[G]\backslash L[G_d]$。注意，$L[G]$ 是通过 G_e 得到的 $L[G_d]$的 $\mathbb{B}^*$-泛型扩张，其中 $\mathbb{B}^*$ 是 $L[G_d]$版本的 $\mathbb{B} = ro(\mathbb{P})$。然后，使用引理 7——这次相对于 $L[G_d]$和 $\mathbb{B}^*$，而非 L 和 $\mathbb{B}$——我们可以固定一个 $\mathbb{B}^*$-名称 $\dot{x} \in L[G_d]^{\mathbb{B}^*}$，使得 $\dot{x}_{G_e} = x$，并且对于所有 $b \in \mathbb{B}^*$，都存在一个 $\mathbb{B}^*$ 的自同构 $\sigma \in L[G_d]$，它固定 b，同时满足 $b \Vdash \sigma\dot{x} \neq \dot{x}$。于是我们看到：

$$\begin{aligned} L[G] \models F(d) = x &\Leftrightarrow L[G_d][G_e] \models F(d) = x \\ &\Leftrightarrow \exists b \in G_e \ (b \Vdash F(d) = \dot{x})^{L[G_d]}. \end{aligned}$$

固定这样一个 b，于是我们便可得到 $\sigma \in L[G_d]$，使得 $\sigma(b) = b$ 且 $b \Vdash \sigma\dot{x} \neq \dot{x}$。接着我们看到，在 $L[G_d]$ 中有

$$b = \sigma(b) \Vdash F(d) = \sigma\dot{x}$$

因此，若令 $x^* = (\sigma\dot{x})^{G_e}$，便可看到 $L[G] \models F(d) = x^*$；由于 $x^* \neq x$，这就导致了矛盾。最后，假设 $d \in L$，则可见 $x \in L[G]\backslash L$，而采用前一种情形中的基本相同的论证即可。□

因此，我们得到了定理 3 的一种相对自然的推广。注意，这也意味着 ZFC^- 同样无法消除虚元。现在我们可以证明这些引理了。18此外，读者会注意到，下面的证明也可以加以改编，从而证明：ZF^- 再加上“存在一个不可达基数，使得每个集合都能单射到其中”这一陈述，同样无法消除虚元。[18]

3.1. 引理 6。这里我们的目标是证明，在 L 的 Cohen 实数泛型扩张中，任何保持相互可构造性的函数都必须将某个实数映射到 L之外的集合。为此，我们注意到 L 是可定义良序的，然后运用自同构论证，证明 Cohen 扩张中的可构造度不存在可定义的良序。首先，假设 G是 L上的 $\mathbb{P}$-泛型。接着，对任意 $x \in \mathbb{R} \cap L$，令 $0_c = \mathbb{R}^L = [x]_c$，并令 $g_c = [\bigcup G]_c$。以下论断众所周知，但为了使本文自足，我们仍简要给出证明。

命题 8。（实质上归功于 *Abraham* 和 *Shore*，*1986*）在 $L[G]$中，除0_c 和 g_c 之外，没有可构造度是可定义的。

证明。我们将 G 理解为 $G_0 \times G_1$。那么 G_0和 G_1都是在 L上 $\mathbb{P}$-通用的。令 g_0，g_1 分别为 $\bigcup G_0$ 和 $\bigcup G_1$。注意，由于它们彼此通用，$g_0 \nsim_c g_1$ 成立。令 $\dot{g}_0$ 为典范

[18]我们将在论文末尾讨论所需的修改。

名称 g_0。现在反设 $[g_0]_c$ 可在 $L[G_0 \times G_1]$中定义。那么我们可以固定一个公式 $\varphi(x)$ 和 $\langle p_0, p_1\rangle \in G_0 \times G_1$，使得

$$\langle p_0, p_1\rangle \Vdash \varphi([\dot{g}_0]_c).$$

令 $H_0 \times H_1$ 由 $G_0 \times G_1$ 构成： H_0 是 G_1，但在 $dom(p_0)$ 上与 p_0 一致； H_1也同理。本质上，$H_0 \times H_1$ 是通过对 $\mathbb{P} \times \mathbb{P}$ 进行自同构得到的，该自同构交换 G_0 与G_1，并进行一些位翻转，以确保 $p_0 \in H_0$ 和 $p_1 \in H_1$。由此我们便看到$\langle p_0, p_1\rangle \in H_0 \times H_1$，因此

$$L[H_0 \times H_1] \models \varphi([(\dot{g}_0)_{H_0\times H_1}]_c).$$

但由于 $(\dot{g}_0)_{H_0\times H_1}$是 g_1的有限变体，我们看到 $(\dot{g}_0)_{H_0\times H_1} \sim_c g_1$；又由于 $L[H_0 \times H_1] = L[G_0 \times G_1]$，我们看到

$$L[G_0 \times G_1] \models \varphi([g_1]_c)$$

因此 φ 并不定义 $[g_0]_c$。 □

由此，我们很容易看出：

推论 9。在 $L[G]$中，其可构造度不存在可定义良序。

由此很快就能推出引理 6。为看出这一点，在 $L[G]$ 中考虑，并注意到，如果存在可定义函数 F: $\mathbb{R} \to L$，使得 $F(x) = F(y)$ 当且仅当 $x \sim_c y$，那么我们就可以用它来定义可构造度上的良序：令 $[x]_c \lhd [y]_c$ 当且仅当 $F(x) <_L F(y)$，这与上面的推论矛盾。因此，我们看到，对于任何满足 $F(x) = F(y)$ 当且仅当$x \sim_c y$ 的可定义函数 F: $\mathbb{R} \to L[G]$，必定存在某个 $x \in \mathbb{R}$，使得 $F(x) \in L[G]\backslash L$。

3.2. **引理 7**。我们的目标现在是证明引理 7。我们想要为泛型扩张中的 $\mathbb{HC}$ 元素找到一些名称，使它们足够灵活，从而很容易被自同构移动。随后，这些名称将成为上述反证证明中假定存在的函数的输出。在引理 2 的基本情形中，我们处理的只是基模型子集的名称，只需一个能移动名称所指对象的自同构就足够了。然而，现在我们还要处理更多迭代的 $\in$-结构，这样做便不再奏效。此外，下面的论证似乎要求这些名称必定会被移动，而不只是它们在某个特定泛型扩张中发生偏移。为解决这些问题，我们引入以下定义。在本节中，令 G为 V上的 $\mathbb{B}$-泛型。

定义10。称 $y \in V[G]$ 具有灵活名称 $\dot{y} \in V^{\mathbb{B}}$，如果 $\dot{y}_G = y$，并且对于所有 $p \in \mathbb{B}$，都存在某个 $\mathcal{A}_p \subseteq Aut(\mathbb{B})^V$，使得 $|\mathcal{A}| > \omega$，且对于所有 $\sigma \neq \tau \in \mathcal{A}_p$:

- $\sigma(p) = p$;
- $p \Vdash \sigma\dot{y} \neq \tau\dot{y}$。

下文考虑的所有自同构都是二阶的，因此我们基本可以忽略逆元带来的恼人问题，从而保持记号相对简洁。那么，我们的目标是证明以下结论：

定理 11. 每个 $x \in H(\omega_1)^{V[G]}\backslash V$都有一个灵活名称。

显然，引理 7 可由这一断言直接推出。它是我们问题的核心。我们的计划是采用归纳法，因此先花点时间为我们感兴趣的集合建立一个合适的排序。在 $V[G]$ 中，我们先通过如下方式归纳地定义集合 A：

- A_0 是满足 $X \subseteq V$ 的那些 $x \in H(\omega_1)$ 的集合；
- $A_{\alpha+1}$ 是满足 $x \subseteq A_\alpha$ 的那些可数 x 的集合；并且

当 λ 是极限序数时，• $A_\lambda = \bigcup_{\alpha\in\lambda} A_\alpha$。

接着我们注意到，只要 $\alpha \geq \omega_1$，就有 $A_\alpha = A_{\omega_1}$。因此，我们令 $A = A_{\omega_1}$，并令集合 $x \in A$ 的 A-秩为满足 $x \in A_\alpha$ 的最小 α。注意， $A = H(\omega_1)^{V[G]}$。接下来，我们通过令以下内容来定义集合 B：

- B_0 是满足 $x \subseteq V$ 但不满足 $x \notin V$ 的那些 $x \in H(\omega_1)$ 的集合；
- $B_{\alpha+1}$ 是满足 $x \subseteq A_\alpha$ 和 $x \cap B_\alpha \neq \emptyset$ 的可数 x 集合；并且
- B_λ 对于极限序数 λ，为 $\bigcup_{\alpha<\lambda} B_\alpha$。

与 A-序列一样，我们看到，对于所有 $\alpha \geq \omega_1$， $B_\alpha = B_{\omega_1}$ 都成立，因此令 $B = B_{\omega_1}$。于是我们注意到， B 是泛型扩张中加入的遗传可数集的集合，因此 $B = H(\omega_1)^{V[G]}\backslash V$。定理 11 的证明依赖于两个分别针对基础情形和后继情形的技术引理。与主定理一样，我们将倒过来进行：先陈述这些引理（不加证明），再以它们为基础证明定理 11。随后，论文余下的篇幅将用于证明这些引理。

引理 12. 如果 $x \in V[G]\backslash V$ 满足 $x \subseteq V$，那么 x 有一个灵活名称。

引理 13. 如果 $x \in V[G]\backslash V$ 是可数的，并且有一个成员 $y \in x$ 带有灵活名称，那么 x 带有灵活名称。

证明。（定理 11 的证明）我们对 B 中元素的 A-秩进行归纳。首先，假设 x 的 A-秩为 0。那么 $x \in V[G]\backslash V$ 且 $x \subseteq V$，因此由引理 12 可知， x 带有灵活名称。接下来，假设 x 的 A-秩为 $\alpha + 1$。那么我们可以固定某个 $y \in x \cap B_\alpha$，归纳假设告诉我们 y 带有灵活名称。由于 $x \in V[G]\backslash V$ 是可数的，我们可以使用引理 13 得知 x 带有灵活名称。最后，假设对于某个可数极限序数， x 的 A-秩为 λ。那么我们看到，对于某个 $\alpha < \lambda$，有 $x \in B_\alpha$，因此归纳假设告诉我们 x 带有灵活名称。□

4. The Induction Step Lemma

我们先从引理 13 开始，因为它的证明稍短一些。

证明。设 $\dot{x}_0 \in V^{\mathbb{B}}$ 满足 $(\dot{x}_0)_G = x$ 且 $\Vdash |\dot{x}_0| \leq \omega$。固定一个灵活名称为 $\dot{y} \in V^{\mathbb{B}}$ 的 $y \in x$，并令

$$\dot{x} = \dot{x}_0 \cup \{\langle \dot{y}, 1\rangle\}.$$

然后注意到 $\Vdash \dot{y} \in \dot{x}$ 和 $\Vdash |\dot{x}| \leq \omega$。我们反设 $\dot{x}$ 不是 x的灵活名称。因此，我们可以固定某个 $b \in \mathbb{B}$，使得对于所有 $\mathcal{A} \subseteq Aut(\mathbb{B})^V$，如果每个 $\sigma \neq \tau \in \mathcal{A}$ 都满足 $\sigma(b) = b = \tau(b)$且 $b \Vdash \sigma\dot{x} \neq \tau\dot{x}$，那么 $|\mathcal{A}| \leq \omega$。这意味着我们可以固定一个序列 $\langle \pi_n \dot{x}\rangle_{n\in\omega}$

其中每个 $\pi_n \in Aut(\mathbb{B})^V$ 和 $\pi_n(b) = b$ 都是极大的，具体来说，若 $\sigma \in Aut(\mathbb{B})^V$ 满足$\sigma(b) = b$，则存在某个 $n \in \omega$ 使得 $b \nVdash \sigma\dot{x} \neq \pi_n\dot{x}$。

现在，由于 $\dot{y}$ 是一个灵活名称，我们可以固定某个 $\mathcal{A}_b \subseteq Aut(\mathbb{B})^V$，使得 $|\mathcal{A}_b| > \omega$ 满足：对于所有$\sigma \neq \tau \in \mathcal{A}_b$，$\sigma(b) = b = \tau(b)$且 $b \Vdash \sigma\dot{y} \neq \tau\dot{y}$。回想一下，我们可以认为 $\mathbb{P}$ 在 $\mathbb{B}$中稠密，于是注意到，对于所有 $\sigma \in \mathcal{A}_b$，我们可以固定 n_σ 和 $r_\sigma \leq b$，使得 $r_\sigma \in \mathbb{P}$ 且 $r_\sigma \Vdash \sigma\dot{y} \in \pi_{n_\sigma}\dot{x}$。这是因为我们知道 $\Vdash \dot{y} \in \dot{x}$，所以 $\Vdash \sigma\dot{y} \in \sigma\dot{x}$。此外，我们可以固定某个 $n \in \omega$ 使得$b \nVdash \sigma\dot{x} \neq \pi_n\dot{x}$；利用这一点，再固定某个 $r \leq b$，使得 $r \in \mathbb{P}$ 且 $r \Vdash \sigma\dot{x} = \pi_n\dot{x}$。因此，$r \Vdash \sigma\dot{y} \in \pi_n\dot{x}$，如所需。

那么，由于 $|\mathcal{A}_b| > \omega = |\mathbb{P}|$，我们可以固定某个 $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}_b$，使得 $|\mathcal{B}| > \omega$，并且对所有 $\sigma \in \mathcal{B}$，都有 $r_\sigma = r^*$，其中某个 $r \leq b$。但这样一来，我们就有一个不可数的 $\mathcal{B}$，使得对所有 $\sigma \neq \tau \in \mathcal{B}$:

(1) $r^* \Vdash \sigma\dot{y} \neq \tau\dot{y}$; (2) 对某个 $n \in \omega$,
$r^* \Vdash \sigma\dot{y} \in \pi_n\dot{x}$；以及 (3)
$r^* \Vdash |\pi_n\dot{x}| \leq \omega$。

这就产生了矛盾。 □

5. The Base Case Lemma

引理 2 的证明相对简单而优雅，但引理 12 所需的推广似乎要曲折得多，尽管其基本策略仍然相同。这一次，我们希望有足够多的自同构，迫使某个名字出现不可数多个移位指称。一个自然的策略由此浮现：我们将沿着 $2^{<\omega}$的初始片段归纳地定义自同构，从而构造一棵完美树。这有望给我们带来连续统多个自同构，进而满足引理 12 的要求。然而，正如引理 13 的证明所示，重要的是这些移位后的名字必须被强迫为彼此不同，而不仅仅是在某个泛型扩张中彼此不同。因此，转向完备布尔代数这一领域会更加方便，因为其中的自同构丰富得多。在证明引理 12 之前，我们先回顾布尔代数的一些事实；这些事实为我们提供了一种提升性质，它在主要证明中发挥着重要作用。

5.1. 关于布尔代数的一个提升事实。 我们的目标是证明，$\mathbb{B}$的任意可数无原子稠密子代数上的自同构都可以提升到 $\mathbb{B}$。这会很有帮助，因为下文的证明会定义 $\mathbb{B}$ 的这样一个子代数，而我们希望利用它上的自同构。我想指出，我认为下面这个小序列对业内人士来说应该相当显而易见，但我在文献中没有找到它，也没有找到足够相似的结果。首先，我们回顾一下 Sikorski 扩张定理。

事实 14。 ***(Sikorski)*** 设 $\mathbb{A}$ 是 $\mathbb{A}^*$ 的一个子代数，且 $f: \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ 是一个单同态，其中$\mathbb{B}$ 是一个完备布尔代数。那么，f 可以扩张为一个单同态 $f^*: \mathbb{A}^* \to \mathbb{B}$，其中 $f^* \restriction \mathbb{A} = id$.[19]

引理 15。 设 $\mathbb{C}$ 是稠密于 $\mathbb{B}$ 中的可数无原子布尔代数。令 $\mathbb{D} = ro(\mathbb{C})$ 且$i: \mathbb{C} \to \mathbb{D}$ 为典范嵌入。那么存在某个 $j: \mathbb{D} \cong \mathbb{B}$ 使得 $j \circ i = id$。

[19]参见 [Monk 等人的《 1989]》中的定理 5.9 和引理 5.11。

证明。 根据 Sikorski 扩张定理，我们得到一个嵌入 $j\colon \mathbb{D} \to \mathbb{B}$，使得 $j \circ i = id$。只需证明 j 是满射。我们分阶段进行。首先，我们声称 j 是稠密嵌入。为此，设 $b \in \mathbb{B}$。然后取定 $c \in \mathbb{C}$，使得 $c \leq b$。于是我们看到 $j \circ i(c) \leq b$，因此有 $i(c) \in \mathbb{D}$，其中 $j(i(c)) \leq b$，如所需。由于 j 是完备布尔代数之间的稠密嵌入，我们看到 j 是完备嵌入。[20] 要证明 j 是满射，设 $b \in \mathbb{B}$。由于 j 是稠密的且 $\mathbb{D}$是完备的，我们看到，若令

$$X = \{d \in \mathbb{D} \mid j(d) \leq b\}$$

在 b 下稠密，因此 $b = \bigvee j[X] = j(\bigvee X)$，其中 $\bigvee X \in \mathbb{D}$。

□

引理 16。 设 $\mathbb{C}$ 是一个可数无原子布尔代数。令 $\mathbb{D} = ro(\mathbb{C})$ 且 $i\colon \mathbb{C} \to \mathbb{D}$ 为典范嵌入。那么每当 $f\colon \mathbb{C} \cong \mathbb{C}$ 时，都存在某个 $g\colon \mathbb{D} \cong \mathbb{D}$，使得对于所有 $c \in \mathbb{C}$、$f(c) = i^{-1} \circ g \circ i(c)$。

证明。 回忆一下，$\mathbb{D}$ 由 $\mathbb{C}$ 的正则开子集组成。更具体地说，当且仅当 $A \in \mathbb{D}$，其中 $A \subseteq \mathbb{C}$ 满足：

- A 是开集；也就是说，对于所有 $c \in A$，若 $d \leq c$，则 $d \in A$；并且
- A 是正则的；也就是说，若 $c \in \mathbb{C}$ 满足 A 在 c 下稠密，则 $c \in A$。[21]

此外，$i\colon \mathbb{C} \to \mathbb{D}$ 满足 $i(c) = c{\downarrow}$。[22] 对于 $A \in \mathbb{D}$，令 $g(A) = f[A]$。我们声称，g 是一个同构。为说明这一点，我们只需证明 $g(A)$是 $\mathbb{C}$ 中的一个正则开集，其余部分留给读者。如果 $A \in \mathbb{C}$，那么 A 是正则开集。我们声称 $f[A]$ 是正则开集。为证明$f[A]$是开集，假设 $c \in f[A]$且 $d \leq c$。于是我们看到 $f^{-1}(d) \leq f^{-1}(c)$，因此，由于$f^{-1}(c) \in A$且 A是开集，我们有 $f(d) \in A$。因此，$d \in f[A]$，如所需。为证明 $f[A]$是正则的，假设 $c \in \mathbb{C}$ 满足：对于所有 $d \leq c$，都存在某个 $e \leq d$ 使得 $e \in f[A]$。只需证明$c \in f[A]$，换句话说，证明 $f^{-1}(c) \in A$。令 $d \leq f^{-1}(c)$，于是有 $f(d) \leq c$。接着，根据我们的假设，可以取某个 $e \leq f(d)$使得 $e \in f[A]$。但这样我们就看到 $f^{-1}(e) \leq d$，因此我们已经证明 A在 $f^{-1}(c)$之下稠密。这意味着，根据 A的正则性，$f^{-1}(c) \in A$，如所需。□

引理 17。 设 $\mathbb{C}$ 是一个在 $\mathbb{B}$中稠密的可数无原子布尔代数。那么每个 $f\colon \mathbb{C} \cong \mathbb{C}$都可以提升到 $\mathbb{B}$，从而得到某个$\sigma_f\colon \mathbb{B} \cong \mathbb{B}$，使得 $\sigma_f \restriction \mathbb{C} = f$。

证明。 令 $\mathbb{D} = ro(\mathbb{C})$，并令 $i\colon \mathbb{C} \to \mathbb{D}$ 为典范嵌入。利用引理 15，固定 $j\colon \mathbb{D} \cong \mathbb{B}$，使得 $j \circ i = id$。然后利用引理 16，得到 $g\colon \mathbb{D} \cong \mathbb{D}$，使得对于所有 $c \in \mathbb{C}$, $f(c) = i^{-1} \circ g \circ i(c)$。令 $\sigma_f\colon \mathbb{B} \cong \mathbb{B}$，使得对于所有 $b \in \mathbb{B}$, $\sigma_f(b) = j^{-1} \circ g \circ j$。于是我们看到，对于所有 $c \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} f(c) &= i^{-1} \circ g \circ i(c) \\ &= i^{-1} \circ j^{-1} \circ \sigma_f \circ j \circ i(c) = \sigma_f(c). \end{aligned}$$

□

[20]参见 [Kunen, 2006]中的引理 VII.8 和习题 VII.C7。[21]这实质上就是 [Jech, 2003]中定理 7.13 所采用的“割”定义。[22]即，$c{\downarrow} = \{c^* \in \mathbb{C} \mid c^* \leq c\}$。

5.2. **证明引理 12**。 现在，我们已经准备好证明定理 11 的最后一部分，这也将完成主定理 5 的证明。先介绍一些技术记号：对于 $b \in \mathbb{B}$ ，我们用$\neg^0 b$ 表示 b ，并用 $\neg^1 b$ 表示 $\neg b$。我们先陈述一个引理，由此显然可得引理 12。

引理 18. 设 $\dot{x} \in V^{\mathbb{B}}$ 满足 $\Vdash \dot{x} \subseteq \check{V} \wedge \dot{x} \notin \check{V}$ ，且 $\dot{x}$ 的每个元素均可表示为 $\langle \check{n}, c\rangle \in \check{V} \times \mathbb{B}$。那么，对于所有 $b \in \mathbb{B}$ ，都存在某个 $\mathcal{A} \subseteq Aut(\mathbb{B})^V$ ，使得 $|\mathcal{A}| > \omega$ ，并且对于所有 $\sigma \neq \tau \in \mathcal{A}$, $\sigma(b) = b = \tau(b)$ 以及 $b \Vdash \sigma\dot{x} \neq \tau\dot{x}$。

证明。 不失一般性，我们可以假设 $b = \top$。由引理 17 可知，只需定义一个可数无原子布尔代数 $\mathbb{C}$ ，使其在 $\mathbb{B}$ 中稠密，且由一组元素 $\{b_n\}_{n\in\omega}$ 生成，并满足对于所有 $f, g\colon\ \omega \to 2$

$$\Vdash \sigma_f \dot{x} \neq \sigma_g \dot{x}$$

其中 $\sigma_f\colon\ \mathbb{B} \cong \mathbb{B}$ 满足 $\sigma_f b_{2n} = \neg^{f(n)} b_{2n}$ ，而 σ_g 的定义方式类似。因此，我们关注的是 $\mathbb{C}$ 的自同构，它们会翻转独立生成元集中的偶数元素。只需定义集合 $\{b_n\}_{n\in\omega}$ ，便可由此生成这样的 $\mathbb{C}$ 。我们将采用归纳法来定义，使得：在偶数步中，我们进行分割，以确保在是否属于 $\dot{x}$这一点上产生分歧；在奇数步中，我们则致力于确保在 $\mathbb{B}$中稠密。

令 $\langle p_n\rangle_{n\in\omega}$ 枚举 $\mathbb{P}$ ，它是 $\mathbb{B}$的稠密子集。对于 $n = 0$的情形，我们先固定$k_0 \in V$，使得 $\nVdash k_0 \in \dot{x}$ 且 $\nVdash k_0 \notin \dot{x}$。由于 $\Vdash \dot{x} \notin \check{V}$，这样的 k_0 必定存在。接着令$b_0 = [\![k_0 \in \dot{x}]\!]$。对于 $n = 1$的情形，我们注意到 $\{b_0, \neg b_0\}$ 是一个极大反链，因此其中至少有一个元素与 p_0相容。为明确起见，设它是 b_0。接着令 $b^* \leq p_0$ 满足 $b^* < b_0$。然后令 $c^* < \neg b_0$。再令 $b_1 = (b_0 \wedge b^*) \vee (\neg b_0 \wedge c^*)$。注意， b_0 和 b_1 彼此独立。

对于归纳步骤，我们的目标是在定义本质上是一个无限二叉树的结构时，重现上面的操作。这些定义有些繁琐，因此记住基例可能会有所帮助。首先，我们引入一些技术记号。对于 $b \in \mathbb{B}$，令

$$X(b) = \{\langle u, 1\rangle \mid b \Vdash u \in \dot{x}\} \cup \{\langle u, 0\rangle \mid b \Vdash u \notin \dot{x}\}.$$

因此， $X(b)$提供了一种记录如下集合的方法：它们是否属于 $\dot{x}$ ，已由 b以某种方式确定。接着，令 $X(b) \curlywedge X(c)$当且仅当存在某个 u 和 $i \in 2$ ，使得 $\langle u,\ i\rangle \in X(b)$且 $\langle u,\ 1 - i\rangle \in X(c)$。因此，当 b 和 c 以不同方式判定 $\dot{x}$ 是否属于集合时， $X(b) \curlywedge X(c)$成立。我们还称 $s\colon\ n \to 2$ 是一个奇数固定序列，简记为 $s\colon\ n \to_{odd} 2$ ，若对所有奇数 $m < n$，都有 $s(m) = 0$。这里的想法是，对所有奇数 $m < n$, $\neg^{s(m)} b_m = b_m$，因此我们序列中的奇数项都是固定的。

开始吧。假设我们已经定义了一个具有以下性质的独立序列 $\{b_m\}_{m<n}$ ：

(1) 若 $s \neq t : n \to_{odd} 2$，则

$$X(\bigwedge_{i<n} \neg^{s(i)} b_i) \curlywedge X(\bigwedge_{i<n} \neg^{s(i)} b_i);\ \text{and}$$

(2) 对所有满足 $m = 2k + 1$ 的奇数 $m < n$，都存在某个 $s\colon\ m \to 2$，使得

$$\bigwedge_{i<(m+1)} \neg^{s(i)} b_i \leq p_k.$$

第一个条件旨在确保，对 $\{b_m\}_{m<n}$ 的偶坐标进行任何翻转，都会为 $\dot{x}$ 产生不同的扩张。第二个条件旨在确保完成序列生成的代数在 $\mathbb{B}$ 中稠密。现在我们证明可以找到 b_n，使得 $\{b_m\}_{m<(n+1)}$ 具有类似的性质。

首先，假设 n 是偶数。接着注意，对于所有 $s\colon n \to 2$，我们可以固定 $k_s \in V$ 和 $c_s \in \mathbb{B}$，使得

$$\bigwedge_{i<n} \neg^{s(i)} b_i \wedge c_s \Vdash k_s \in \dot{x}$$

and

$$\bigwedge_{i<n} \neg^{s(i)} b_i \wedge \neg c_s \Vdash k_s \notin \dot{x}.$$

这样的 k_s 和 c_s 存在，因为 $\Vdash \dot{x} \notin \check{V}$。接着令

$$b_n = \bigvee_{s:n\to 2} (\bigwedge_{i<m} \neg^{s(i)} b_i \wedge c_s)$$

并注意到

$$\neg b_n = \bigvee_{s:n\to 2} (\bigwedge_{i<m} \neg^{s(i)} b_i \wedge \neg c_s).$$

由此可见，$\{b_m\}_{m<(n+1)}$ 是一个满足 (1) 的独立序列。

接下来，假设 n 是奇数，其中 $n = 2k + 1$。那么不难看出

$$\{\bigwedge_{i<n} \neg^{s(i)} b_i \mid s : n \to 2\}$$

是 $\mathbb{B}$ 中的一个极大反链，因此对于某个 $s\colon\ n \to 2$，$\bigwedge_{i<n} \neg^{s(i)} b_i$ 与 p_k相容。固定这样一个 s。那么对于所有 $t\colon\ n \to 2$: 如果 $t \neq s$，固定 $c_t \in \mathbb{B}$ 使得$c_t < \bigwedge_{i<n} \neg^{t(i)} b_i$; 如果 $t = s$，则固定$c_t < \bigwedge_{i<n} \neg^{t(i)} b_i \wedge p_k$。令

$$b_n = \bigvee_{t:n\to 2} \bigwedge_{i<n} (\neg^{t(i)} b_i \wedge c_t).$$

那么 $\{b_m\}_{m<(n+1)}$ 是满足 (2) 的独立序列。接着可以看出，$\{b_n\}_{n\in\omega}$ 自由生成一个可数无原子布尔代数 $\mathbb{C}$，它在 $\mathbb{B}$中稠密。因此，只需证明每当 $f \neq g\colon\ \omega \to 2$，$\Vdash \sigma_f \dot{x} \neq \sigma_g \dot{x}$。我们用稠密性论证来证明这一点。因此，对于 $f \neq g\colon\ \omega \to 2$，我们证明满足 $b \Vdash \sigma_f \dot{x} \neq \sigma_g \dot{x}$ 的 $b \in \mathbb{B}$ 的集合在 $\mathbb{B}$中稠密。

Su设 $e \in \mathbb{B}$。那么根据我们的构造，可以固定某些 $n \in \omega$ 和 $t\colon\ n \to 2$ 使得 t

$$\bigwedge_{i<(n+1)} \neg^{t(i)} b_i \leq e.$$

现在我们给一些对象命名，以便论证能够顺利进行。首先，固定 $m \in \omega$，使得 f 和 g 一致到 m 为止，但不再更进一步；也就是说，也就是说，$f \restriction m = g \restriction m$，但比如说，$f（m）= 0 \neq 1 = g（m）$。然后我们令:

- $k = max(2m + 1, n)$;

- $t^*: k \to 2$ 使得对于所有 $i < k$: $t^*(i) = t(i)$（如果 $i < n$）；否则为 $t(i) = 0$；
- $f^*: k \to 2$使得对于所有 $i \in \omega$: $f^*(i) = f(\frac{i}{2})$（如果 $i < k$是偶数）；否则 $f(i) = 0$；
- $g^* : \omega \to 2$ 以类似方式定义；
- $s_* = f^* \restriction (2m+1) = g^* \restriction (2m+1)$；并且
- $t_* = t^* \restriction (2m+1)$。

注意，f^*，g^* 和 s_* 都保持奇数。现在注意到，上述构造保证了 :

$$\bigwedge_{i<2m} \neg^{s_* \circ t_*(i)} b_i \wedge b_{2m} \Vdash k_{s_* \circ t_*} \in \dot{x} \text{ and } \bigwedge_{i<k} \neg^{s_* \circ t_*(i)} b_i \wedge \neg b_{2m} \Vdash k_{s_* \circ t_*} \notin \dot{x}$$

因此

$$\bigwedge_{i<k} \neg^{f^* \circ t^*(i)} b_i \Vdash k_{s_* \circ t_*} \in \dot{x} \text{ and } \bigwedge_{i<k} \neg^{g^* \circ t^*(i)} b_i \Vdash k_{s_* \circ t_*} \notin \dot{x}.$$

此外，我们看到

$$\sigma_f(\bigwedge_{i<k} \neg^{f^* \circ t^*(i)} b_i) = \bigwedge_{i<k} \neg^{t^*(i)} b_i = \sigma_g(\bigwedge_{i<k} \neg^{g^* \circ t^*(i)} b_i).$$

因此，

$$\bigwedge_{i<k} \neg^{t^*(i)} b_i \Vdash k_{s_* \circ t_*} \in \sigma_f \dot{x} \ \wedge \ k_{s_* \circ t_*} \notin \sigma_g \dot{x}$$

这就足够了，因为 $\bigwedge_{i<k} \neg^{t^*(i)} b_i \leq e$。 □

至此，我们看到引理 12 得证，引理 11 也随之得证，最后还有定理 5。因此，我们看到 ZFC^-_{count} 无法消除虚元。最后，我们来处理上文遗留的几个问题。第一个问题可由定理 5 的证明立即得到。

推论 19。 ZFC^- 无法消除虚元。

第二个是对上述工作的温和推广。

定理 *20*。*</style}*理论 ZFC^- 再加上存在不可达基数 κ，使得 $\forall x \ |x| \leq \kappa$ 无法消除虚元。

由于证明策略基本相同，我们只简要说明所需的修改。

证明。 主要的变化在于，我们假设存在一个不可达基数 κ，然后使用$Add(\kappa, 1)$进行强迫，而不是使用 $Add(\omega, 1)$。关键在于，不可达基数的性质与ω 足够相似，因此下文的论证可以自然地移植到新的情形中。[23] 对此我们作几点说明。对于命题 8，只需用 κ 的子集替代ω的子集，证明即可直接调整。对于定理 11 下面的归纳定义，归纳步骤现在取 κ，而不是 ω。我们修改引理 13 的陈述，假设我们有一个基数为 $< \kappa$ 的集合，而不是基数为 $< \omega_1$的集合。对证明作相应的显然修改后，仍可照常进行。引理 16 涉及这样一个事实：如何将从可数无原子布尔代数到其完备化的嵌入提升。容易看出，这种提升性质适用于任意布尔代数及其完备化。不过，我们不再使用（1）可数无原子布尔代数，以及（2）它的同构变体——由可数多个原子自由生成的布尔代数，而是使用（1^*）κ大小的无原子布尔代数

[23]事实上，我们只用到了正则性。

它在 $<\kappa$ 交与并运算下封闭；以及（2）它的同构变体，即基于无穷命题逻辑 $\mathcal{L}_\kappa$ （含有 κ 多个原子命题）的林登鲍姆代数构造的布尔代数。[24]随后，证明可以直接移植。最后，我们通过构造一棵基于函数 $f\colon \kappa \to 2$ 而非 $f\colon \omega \to 2$的树，来调整引理 18 的证明。原证明依赖于这样一个事实：我们可以取 $\mathbb{B}$的一个可数稠密子集。在不可达语境中，我们用 κ 的一个 κ 大小的稠密子集代替它。□

References

Uri Abraham 和 Richard A. Shore。《实数的可构造度》。伦敦数学会会刊，s3-53(2):193–208，1986。Thomas William Barrett 和 Hans Halvorson。《莫里田等价》。《符号逻辑评论》，9 (3):556–582，2016。Jon Barwise。《容许集与结构》。施普林格出版社，柏林，1975。Jason Chen 和 Toby Meadows。《剖析定义等价》，2025。URL https://arxiv.org/abs/2508.03956。Ali Enayat。《维瑟尔主题的变体》，2017。Ali Enayat 和 Mateusz ́Le ́lyk。《一阶领域中的范畴性类性质》。《数学哲学杂志》，1:63–98，2024年9月。Ilijas Farah。《style id='11'>扩张子代数与 Σ^2_1-绝对性，《逻辑讲义》第4卷，第141–176页。剑桥大学出版社，2020年。Alfredo Roque Freire 和 Joel David Hamkins。《弱集合论中的双重解释》，2020。Harvery Friedman 和 Albert Visser。《双重可解释性何时蕴含同义性》。《符号逻辑评论》，18(4):971–990，2025。Harvey Friedman。《博雷尔可约性与贝尔可约性》。《数学基础》，164(1):61–69，2000年。Victoria Gitman、Joel David Hamkins 和 Thomas A. Johnstone。《不含幂集公理的 ZFC 理论是什么？》《数学逻辑季刊》，62(4-5):391–406，2016。David Hilbert 和 Paul Bernays。《style id='24'>《数学基础》。J. Springer，柏林”1934。Wilfrid Hodges。《style id='26'>《简明模型论》。剑桥大学出版社，剑桥，1997。Thomas Jech。《style id='28'>《集合论》。施普林格出版社，海德堡，2003。H. Jerome Keisler。《style id='30'>《无穷逻辑模型论》。北荷兰出版公司，阿姆斯特丹，1971。Kenneth Kunen。《style id='32'>《集合论：独立性证明导论》。爱思唯尔，悉尼，2006。Penelope Maddy 和 Jouko V ̈a ̈an ̈anen。《style id='37'>《范畴性论证的哲学用途》。《数学哲学要素》。剑桥大学出版社，2023年。Toby Meadows。《内部范畴性与泛型多重宇宙》，2025年。URL https://arxiv.org/abs/2508.21202。J.D. Monk、R. Bonnet 和 S. Koppelberg。《style id='39'>《布尔代数手册》。《布尔代数手册》第1卷。北荷兰，1989。Stephen G. Simpson。《style id='41'>《二阶算术的子系统》。施普林格出版社，柏林，1999。

[24]参见 [Barwise，1975，Farah， 2020] 以了解关于这一逻辑的讨论。

Jouko V¨a¨an¨anen。《策梅洛定理的一个扩展》。符号逻辑通报，25(2):208–212，2019。