arXiv:2601.20111v1 [math.QA] 27 Jan 2026

由交替蛇实现幺半范畴化

MATHEUS BRITO 和 VYJAYANTHI CHARI

Abstract. 在近期的一篇论文中，作者引入了交替蛇的概念，以及与 A_n相关的量子仿射代数的一族相应的有限维模。我们证明，在某些限制条件下，交替蛇定义了一个典范单项范畴。我们证明，这个范畴只有有限多个素对象。因此，我们证明，对于适当的高度函数，Grothendieck 环与范畴 $\mathscr{C}_\xi$ 的 Grothendieck 环同构。特别地，由此可知，对于 N的适当取值，这一特殊的交替蛇族为A_N 型簇代数提供了一种幺半范畴化。

1. Introduction

三十多年来，量子仿射代数有限维表示的研究一直备受关注，这得益于其丰富的结构，以及它与代数几何、组合学和数学物理中的可积系统等多个领域的深刻联系。

Hernandez 和 Leclerc 在这一领域取得了一项近期的重要突破：他们证明，有限维表示的某些张量子范畴可为簇代数提供幺半范畴化。具体而言，他们通过对单根指标集上定义的高度函数施加兼容性条件，构造了量子仿射代数 A_n 型表示的这类子范畴。他们证明，在采用二分高度函数的情况下，相应的 Grothendieck 环是一个 A_n 型、具有 n 个冻结变量的簇代数的幺半范畴化。后来， [1] 中的工作将这一结果推广到了任意高度函数的情形。

大约在同一时期，Mukhin 和 Young 在 [13] 中为量子仿射 A_n引入了蛇模。这一族模推广了 Kirillov–Reshetikhin 模，乃至更一般的极小仿射化，并具有非常好的性质。除了少数特殊情形外，它们并非 Hernandez 和 Leclerc 的工作中出现的那类模。不过，本文作者注意到这两族模之间存在有趣的规律。由此，他们在 [2]中为 A_n型量子仿射代数引入了交替蛇模的概念。研究证明，这些模是实的，并给出了它们为素模的充要条件。此外，在适当条件下，还给出了其特征的显式交替公式。

本文的主要目标是建立交替蛇模、张量子范畴与幺半范畴化之间的联系。更准确地说，本文证明，在

M.B. 的研究部分得到了 CNPq 项目 405793/2023-5 的资助。V.C. 的研究部分得到了 Simons Foundation 提供的差旅资助。

适当条件下，素交替蛇形$\mathbf{s}$ 确定了量子仿射代数$\mathbf{U}_q(\mathfrak{sl}_{n+1})$的有限维表示的典范幺半子范畴$\mathscr{C}_n(\mathbf{s})$。与之相关的 Grothendieck 环同构于一个类型为 A_N 的簇代数，其中 N 由该交替蛇显式确定。这一方法的核心特点是，通过给出一种算法来描述该范畴中任意不可约模的张量积分解，从而证明这些结果。为此，本文系统地运用了 ℓ-最高权理论以及由归一化 R-矩阵 [10] 的分母产生的 Kashiawara–Kim–Oh–Park 不变量 $\mathfrak{d}$。

这些分解结果表明，Grothendieck 环由素对象的类生成，且所有不可约类都能唯一地表示为这些生成元的乘积。因此，可以证明 Grothendieck 环与来自某一特定高度函数类的 Grothendieck 环同构。该同构将不可约（素）对象映射为不可约（素）对象。因此， [1] 的结果现在表明，由这族交替蛇定义的幺半子范畴实际上是一个簇代数的幺半范畴化。

本文组织如下。第2节首先介绍量子仿射代数的背景知识。在引入适当的一族交替蛇以及与素交替蛇形$\mathbf{s}$相关的范畴 $\mathscr{C}_n(\mathbf{s})$ 后，陈述主要结果。第3节给出定理 1 的第 (i) 和 (ii) 部分的证明；也就是说， $\mathscr{C}_n(\mathbf{s})$ 是一个幺半范畴，并且给出 $\mathscr{C}_n(\mathbf{s})$ 中一个有限的素对象集合。第4节探讨 $\mathscr{C}_n(\mathbf{s})$ 中不可约模的素因子分解理论，是本文的技术核心。随后，第5节利用这些结果研究由不同交替蛇产生的 Grothendieck 环之间的同构；第6节则证明，由此得到的范畴给出一个 A 型簇代数的幺半范畴化。

2. Main Results

我们首先回顾量子环代数 $\mathbf{U}_n$ 的表示论$\widehat{\ }$中的一些基本定义和结果，该代数与 $\mathfrak{sl}_{n+1}$ 相关。通常， $\mathbb{C}$ （分别地， $\mathbb{C}^\times$、 $\mathbb{Z}$、 $\mathbb{Z}_+$、 $\mathbb{N}$）表示复数集合（分别为非零复数集合、整数集合、非负整数集合、正整数集合）。给定 $\ell \in \mathbb{N}$ ，我们用 Σ_ℓ 表示作用在 ℓ 个字母上的对称群。以下始终假设 q 是非零复数且不是单位根。

2.1. 代数 $\mathbf{U}_n$ 与范畴 $\mathscr{F}_n$。 对于 $n \in \mathbb{N}$, 令 $\mathbf{U}_n$ 为与 $\mathfrak{sl}_{n+1}(\mathbb{C})$ 相关的量子环代数；精确定义请参阅 [6] 。对我们的目的而言，只需回顾 $\widehat{\mathbf{U}}_n$ 是一个 Hopf 代数，具有无限生成元集合：$x_i^{\pm}$、s、$\phi_i^{\pm}$、s、 $1 \le i \le n$ 和 $s \in \mathbb{Z}$。由元素 $\phi_i^{\pm}$、s、 $1 \le i \le n$、$s \in \mathbb{Z}$ 生成的子代数 $\widehat{\mathbf{U}}_n^0$ 是交换的。

我们将关注有限维$\widehat{\mathbf{U}}_n$表示的张量范畴中的某些子范畴。回顾一下，若一个不可约模不能同构于非平凡表示的张量积，就称其为素模。若一个模的张量平方不可约，则称其为实模。众所周知（见 [5, 6]），$\mathbf{U}_n$ 的不可约$\widehat{\ }$有限维表示的同构类由一个乘法幺半群编

n-t码，该幺半群由变量 u的多项式（Drinfeld 多项式）组成，这些多项式的常数项为 1.

显然，任意有限维模都可以写成作用 $\widehat{\mathbf{U}}_n^0$ 的广义特征空间的直和。非零广义特征空间称为 ℓ-权空间，其特征值称为该模的 ℓ-权。文献 [7] 证明了，有限维模的 ℓ-权包含在由不定元 u 的有理函数的 n-元组构成的幺半群中。

2.2. 一种替代表述。令 $\mathbb{I}_n$为满足 $i,\ j \in \mathbb{Z}$且$0 \le j-i \le n+1$的区间 $[i,j]$的集合。对于 $r \ge 1$，令 $\mathbb{I}_n^r$为由 $\mathbb{I}_n$的元素构成的有序 r-元组的集合。给定元素 $\mathbf{s}_1 \in \mathbb{I}_n^{r_1}$和 $\mathbf{s}_2 \in \mathbb{I}_n^{r_2}$，令 $\mathbf{s}_1 \vee \mathbf{s}_2$为通过连接得到的 $\mathbb{I}_n^{r_1+r_2}$中的元素。

定义 $\mathcal{I}_n^+$（分别为 $\mathcal{I}_n$）为以 $\mathbf{1}$ 为单位元、以 $\boldsymbol{\omega}_{i,\ j}$ 为生成元的自由阿贝尔幺半群（分别为群），其中 $[i,j] \in \mathbb{I}_n$，并约定对于所有 $i \in \mathbb{Z}$，$\boldsymbol{\omega}_{i,\ i} = \boldsymbol{\omega}_{i,\ i+n+1} = \mathbf{1}$。定义映射 $\mathbb{I}_n^r \to \mathcal{I}_n^+$如下：$\mathbf{s} = ([i_1,j_1],\ \cdots,\ [i_r,j_r]) \mapsto \boldsymbol{\omega}_{\mathbf{s}} = \boldsymbol{\omega}_{i_1,\ j_1} \cdots \boldsymbol{\omega}_{i_r,\ j_r}$。显然，给定$\boldsymbol{\omega} \in \mathcal{I}_n^+$，存在唯一的正整数 r 以及唯一的（在置换意义下）元素$\mathbf{s} = ([i_1,j_1],\ \cdots,\ [i_r,j_r]) \in \mathbb{I}_n^r$，使得对于所有 $1 \le s \le r$ 都有 $0 < j_s - i_s < n+1$，从而令 $\operatorname{ht}\boldsymbol{\omega} = r$。

将 $\boldsymbol{\omega}_{i,j}$与 Drinfeld 多项式 $(1, \cdots, (1-q^{i+j}u)\, 1, \cdots, 1)$（此处，一次多项式出现在第 $(j-i)$ 个位置）对应起来，我们将子范畴 $\mathscr{F}_n$ 定义为有限维表示的满子范畴，其单对象由 $\mathcal{I}_n^+$中的元素索引。对于 $\mathscr{F}_n$ 中的任意对象 V，令 $[V]$ 表示 Grothendieck 群 $\mathcal{K}(\mathscr{F}_n)$中的对应元素；对于 $\boldsymbol{\omega} \in \mathcal{I}_n^+$，令 $V(\boldsymbol{\omega})$表示唯一的（在同构意义下）不可约 $\mathbf{U}_n$-模。

文献 [8] 证明了 $\mathscr{F}_n$ 是一个刚性幺半范畴，因此 $\mathcal{K}(\mathscr{F}_n)$具有环结构。文献 [7] 的结果表明，该环是由生成元 $[V(\boldsymbol{\omega}_{i,j})]$,$[i,j] \in \mathbb{I}_n$生成的多项式环。此外，它以单对象的类为基。

[7] 的结果表明，$\mathscr{F}_n$ 中对象 V 的 ℓ-权集合 $\operatorname{wt}_\ell V$ 可以视为 $\mathcal{I}_n$ 的一个子集，并且

$$\operatorname{wt}_\ell(V \otimes V') = (\operatorname{wt}_\ell V)(\operatorname{wt}_\ell V'),\quad (V \otimes V')_{\boldsymbol{\omega}} = \bigoplus_{\boldsymbol{\omega}_1 \in \mathcal{I}_n} V_{\boldsymbol{\omega}_1} \otimes V'_{\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{\omega}_1^{-1}}.$$

令 $\operatorname{wt}_\ell^+ V = \operatorname{wt}_\ell V \cap \mathcal{I}_n^+$，我们注意到，如果 V（$\boldsymbol{\omega}$）是 V的一个 Jordan–H¨older 构成因子，那么$\boldsymbol{\omega} \in \operatorname{wt}_\ell^+ V$。

2.3. 交替蛇。交替蛇和交替蛇模的概念在 [2] 中被引入，现在我们回顾一类特殊交替蛇的定义。

2.3.1. 汇源型。给定$\mathbf{s} = ([i_1,j_1], \cdots, [i_r,j_r]) \in \mathbb{I}_n^r$，令

$$a_{\max} = \max\{a_s : 1 \le s \le r\},\quad a_{\min} = \min\{a_s : 1 \le s \le r\},\quad a \in \{i,j\},$$
$$\mathbf{s}(p-1,\ell) = ([i_p,j_p], \cdots, [i_\ell,j_\ell]),\quad 1 \le p \le \ell \le r.$$

定义。如果一个元素$\mathbf{s}=([i_1,j_1],\ \cdots,\ [i_r,j_r])\in\mathbb{I}_n^r$满足以下条件，则称其为汇源型稳定交替蛇：

- 对于 $1\le s<p\le r$ 或 $i_s\neq i_p$ 或 $j_s\neq j_p$，
- 对于所有 $1\le s\le r$，存在 $\epsilon_s\in\{0,1\}$，使得对于 $1\le p\le r-1$，我们有 $\epsilon_p+\epsilon_{p+1}=1$，并且对于 $a\in\{i,j\}$，有 $a_{p+1-\epsilon_p}<a_{p+\epsilon_p}$。
- 对于所有 $1\le p\le s-2\le r-2$，我们有 $i_p\le i_s<j_s\le j_p$。

令 $\mathbf{S}_{\mathrm{alt}}^s$ 为 $\mathbb{I}_n$ 中汇源型稳定交替蛇的集合之并，对所有$n\ge 1$均如此。显然，$\mathbf{s}\in\mathbf{S}_{\mathrm{alt}}^s$ 当且仅当对于所有 $1\le p<\ell\le r$，$\mathbf{s}(p-1,\ell)\in\mathbf{S}_{\mathrm{alt}}^s$。

2.3.2. 连通与素。 若$\mathbf{s}\in\mathbf{S}_{\mathrm{alt}}^s$，则称其为连通的，当且仅当

$$i_{p+1-\epsilon_p}<i_{p+\epsilon_p}\le j_{p+1-\epsilon_p}<j_{p+\epsilon_p}\ \text{ and }\ j_{p+\epsilon_p}-i_{p+1-\epsilon_p}\le n+1,\ \ 1\le p\le r-1.$$

若$\mathbf{s}\in\mathbf{S}_{\mathrm{alt}}^s$，则称其为素的，当且仅当它是连通的且

$$a_s\neq a_{s+2}\ \text{ for }\ a\in\{i,j\},\ \ 1\le s\le r-2.$$

显然，$\mathbf{s}$是连通的（分别是素的），当且仅当对于所有$1\le p\le\ell\le r$，$\mathbf{s}(p-1,\ell)$是连通的（分别是素的）。

2.3.3. 素因子。

定义。我们称$\mathbf{s}(0,p)$，$1\le p<r$，是$\mathbf{s}\in\mathbf{S}_{\mathrm{alt}}^s$的一个素因子，如果$\mathbf{s}(0,p)$是素的，并且满足以下任一条件：

- $([i_p,j_p],[i_{p+1},j_{p+1}])$不连通，
- 或者，对于某个 $a\in\{i,j\}$，若 $b\in\{i,j\}$ 且 $b\neq a$，则$b_{p+1-2\epsilon_p}<b_{p-1+2\epsilon_p}$，
- 或者，对于某个 $a\in\{i,j\}$，若 $b\in\{i,j\}$ 且 $b\neq a$，则$b_{p+2-2\epsilon_p}<b_{p+2\epsilon_p}$。

2.4。集合 $\mathbb{I}_n(\mathbf{s})$ 和 $\mathbf{pr}(\mathbf{s})$。 假设 $\mathbf{s}=([i_1,j_1],[i_2,j_2])$ 是连通的。Se t

$$\mathbf{pr}(\mathbf{s})=\{[i_1,j_1],[i_2,j_2]\},\ \ \mathbf{fr}(\mathbf{s})=\{([i_1,j_1],[i_2,j_2]),\ [i_1,j_2],\ [i_2,j_1]\}.$$

若$\mathbf{s}\in\mathbf{S}_{\mathrm{alt}}^s\cap\mathbb{I}_n^r$ 是素的，且具有 $r\ge 3$ 集合

$$\tilde{\mathbb{I}}_n(\mathbf{s})=\{[i_p,j_\ell]\in\mathbb{I}_n:1\le p\le r,\ j_\ell\in\{j_{p-1-\epsilon_p},j_{p-\epsilon_p},j_{p+1-\epsilon_p},j_{p+2-\epsilon_p}\}\},$$
$$\mathbb{I}_n(\mathbf{s})=\tilde{\mathbb{I}}_n(\mathbf{s})\setminus\{[i,i],[i,n+1+i]:i\in\mathbb{Z}\}.$$

对于 $\varepsilon,\varepsilon'\in\{0,1\}$，以及对于 $0\le p+1<\ell\le r$ 集合

$$\mathbf{s}_{\varepsilon,\varepsilon'}(p,\ell+1)=([i_{p+\epsilon_p},j_{p+1-\epsilon_p}])^{\varepsilon}\vee\mathbf{s}(p+1,\ell)\vee([i_{\ell+1+\epsilon_\ell},j_{\ell+2-\epsilon_\ell}])^{\varepsilon'},$$

其中我们约定，

- 如果 $p=-1,0$，则第一项不存在；如果 $\varepsilon=0$，第一项也不存在，
- 如果 $\ell=r-1,r$，则第三项不存在；如果 $\varepsilon'=0$，第三项也不存在。

令$\mathbf{pr}(\mathbf{s})$为 he $\mathbb{I}_n(\mathbf{s})$与形如$\mathbf{s}_{\varepsilon,\varepsilon'}(p,\ell+1)$的元素集合之并，且这些元素满足 ，

- $\varepsilon=1$ 当且仅当 $i_{p+\epsilon_p}\neq i_{p+3}$ 且 $j_{p+1-\epsilon_p}\neq j_{p+3}$，
- $\varepsilon'=1$ 仅当 $i_{\ell-1}\neq i_{\ell+1+\epsilon_\ell}$ 且 $j_{\ell-1}\neq j_{\ell+2-\epsilon_\ell}$。

令 **fr(s)** 为 $\mathbb{I}_n \cup \mathbb{I}_n^2$ 的以下子集的并集：

$$[i_{\min}, j_{\max}],\quad [i_{\max}, j_{\min}],$$

$\{([i_1, j_1],\ [i_{2+\epsilon_1}, j_{3-\epsilon_1}]),\ ([i_s, j_s],\ [i_{s+1-2\epsilon_s}, j_{s-1+2\epsilon_s}]),\ ([i_r, j_r],\ [i_{r-2+\epsilon_r}, j_{r-1-\epsilon_r}])\colon\ 1 < s < r\},\ \{([i_{s-\epsilon_s}, j_{s-1+\epsilon_s}],\ [i_{s+1+\epsilon_s}, j_{s+2-\epsilon_s}])\colon\ 2 \le s \le r-2$ 和 $i_{s-1} \ne i_{s+2},\quad j_{s-1} \ne j_{s+2}\}$.

2.5. 主要结果。令 $\mathcal{I}_n^+(\mathbf{s})$ 为 $\mathcal{I}_n^+$ 中由满足 $[i_s, j_p] \in \mathbb{I}_n(\mathbf{s})$ 的元素 $\boldsymbol{\omega}_{i_s,\ j_p}$ 生成的含单位元子幺半群。令 $\mathscr{C}_n(\mathbf{s})$ 为 $\mathscr{F}_n$ 的全子范畴，其对象为模 V，这些模的 Jordan–Hölder 分量具有如下形式：$V(\boldsymbol{\omega})$，其中 $\boldsymbol{\omega} \in \mathcal{I}_n^+(\mathbf{s})$。以下是本文的主要结果。

定理 1. 令 $\mathbf{s} \in \mathbf{S}_{\mathrm{alt}}^s$ 为素的。

(i) 范畴 $\mathscr{C}_n(\mathbf{s})$ 是幺半范畴。(ii) 令 $\mathbf{s}' \in \mathbf{pr(s)} \sqcup \mathbf{fr(s)}$。模 $V(\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{s}'})$ 是素且为实的。(iii) 给定 $\mathbf{1} \ne \boldsymbol{\omega} \in \mathcal{I}_n^+(\mathbf{s})$，存在 $k \in \mathbb{N}$ 以及元素 $\mathbf{s}_1, \cdots, \mathbf{s}_k$ 属于 $\mathbf{pr(s)} \sqcup \mathbf{fr(s)}$，使得

t

$$V(\boldsymbol{\omega}) \cong V(\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{s}_1}) \otimes \cdots \otimes V(\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{s}_k}).$$

(iv) 假设 $\mathbf{s}$ 满足 $j_{\max} - i_{\min} = n+1$ 和 $j_{\min} = i_{\max}$。Grothendieck 环 $\mathcal{K}(\mathscr{C}_n(\mathbf{s}))$ 是一种 A_N 型簇代数的幺半范畴化，其中 $N = r + \#\{2 \le s \le r-3\colon\ i_{s-1} \ne i_{s+2}$ 和 $j_{s-1} \ne j_{s+2}\}$.

本文余下部分将证明该定理。

3. 定理 1(i),(ii) 的证明

3.1. 枚举。这一结果在 [2] 的更一般情形下已经得到证明。为方便读者，我们在这一特定情形下给出证明。

引理。设 $\mathbf{s} = ([i_1, j_1\}, \cdots, [i_r, j_r]) \in \mathbf{S}_{\mathrm{alt}}^s$ 是素数；那么对所有适当的 $1 \le s \le r$，有

$$i_{s+1-\epsilon_s} < i_{s+2\epsilon_s} \le i_{s+3-2\epsilon_s} < i_{s+2+2\epsilon_s},\quad j_{s+\epsilon_s} > j_{s+2-2\epsilon_s} > j_{s+1+2\epsilon_s} \ge j_{s+4-2\epsilon_s}.$$

特别地，

$$i_s < i_{r-\epsilon_r},\quad s \ne r-\epsilon_r,\quad i_{2-\epsilon_1} < i_p,\quad p \ne 2-\epsilon_1,$$
$$j_s < j_{1+\epsilon_1},\quad s \ne 1+\epsilon_1,\quad j_{r-1+\epsilon_r} < j_p,\quad p \ne r-1+\epsilon_r.$$

证明。设 $\epsilon_s = 0$，此时 $\epsilon_{s+2} = 0$ 也成立。$\mathbf{S}_{\mathrm{alt}}^s$ 的定义给出 $i_{s+1} < i_s \le i_{s+3} < i_{s+2}$。由于 $\mathbf{s}$ 是素数，我们还得到 $j_s > j_{s+2} > j_{s+1} \ge j_{s+4}$。当 $\epsilon_s = 1$ 时，证明完全相同。□

注。明确写出枚举会很有帮助。若 $\epsilon_1 = 0$，该引理断言

$$i_2 < i_1 \le i_4 < i_3 \le i_6 < i_5 < \cdots,\quad j_1 > j_3 > j_2 \ge j_5 > j_4 \ge j_7 > j_6 > \cdots,$$

而若 $\epsilon = 1$，则有

$$i_1 < i_3 < i_2 \le i_5 < i_4 \le i_7 < \cdots,\quad j_2 > j_1 \ge j_4 > j_6 > j_5 \ge j_8 > \cdots.$$

注意，引理 3.1 给出

若 $j_{\max} - i_{\min} \quad = n+1$，并且 $j_{\min} = i_{\max}$ 然后 $\mathbb{I}_n(\mathbf{s}) = \mathbb{I}_n(\mathbf{s}) \setminus \{[i_{\max}, j_{\min}], [i_{\min}, j_{\max}]\}.$ (3.1)

3.2. 集合 $\mathbb{I}_n(\mathbf{s})$。 我们需要 $\mathbb{I}_n(\mathbf{s})$ 的以下性质。

引理。 设$([i_p, j_\ell], [i_m, j_k])$ 是 $\mathbb{I}_n(\mathbf{s})$ 中的一对相连元素，且满足 $i_m < i_p \leq j_k < j_\ell$。那么 $[i_p, j_k]$ 和 $[i_m, j_\ell]$ 都属于 $\mathbb{I}_n(\mathbf{s})$。

证明。 对 r 使用归纳法证明该引理，显然归纳从$r = 1,2$ 开始。我们证明 $\epsilon_1 = 0$ 时的归纳步骤；另一种情形的证明只需作简单修改。我们将不加说明地多次使用注 3.1。

假设 $r > 2$，使得结论对 $\mathbb{I}_n(\mathbf{s}(1, r)) \subset \mathbb{I}_n(\mathbf{s})$ 成立。特别地，只需证明 $j_1 \in \{j_\ell, j_k\}$ 或 $i_1 \in \{i_m, i_p\}$ 时的情形即可得到该引理。若 $j_1 \in \{j_\ell, j_k\}$，则根据引理的假设，我们有 $j_\ell = j_1$，因此由 $\mathbb{I}_n(\mathbf{s})$ 的定义可得$i_p \in \{i_1, i_2\}$。由于 $i_m < i_p$，我们必有 $i_p = i_1$ 和 $i_m = i_2$。由 $\mathbb{I}_n(\mathbf{s})$ 的˜定义可知 $j_k \in \{j_2, j_3\}$。由于根据定义有 $\{[i_1, j_3], [i_2, j_1], [i_1, j_2]\} \subset \mathbb{I}_n(\mathbf{s})$，故此情形下引理成立。

从现在起，假设 $j_1 \notin \{j_\ell, j_k\}$。那么，我们还可以进一步假设 $p = 1$ 或 $m = 1$（否则，区间对 $([i_p, j_\ell], [i_m, j_k])$ 是 $\mathbb{I}_n(\mathbf{s}(1, r))$ 中的区间，而我们已知该情形下结论成立）。因此，结合引理的假设，我们得到以下蕴含关系：

$$p = 1, m = 2 \implies j_\ell \in \{j_2, j_3\},\ \ j_k \in \{j_2, j_3\} \setminus \{j_\ell\} \implies j_\ell = j_3,\ \ j_k = j_2,$$
$$m = 1 \implies j_k \in \{j_2, j_3\} \implies j_\ell = j_3,\ \ j_k = j_2 \implies i_p \in \{i_3, i_4\}.$$

˜如果 $p = 1$，则引理成立，因为 $[i_1, j_2]$ 和 $[i_2, j_3]$ 是 $\mathbb{I}_n(\mathbf{s})$ 的元素；而如果 $m = 1$，则结论成立，因为 $[i_1, j_3]$、$[i_3, j_2]$ 和 $[i_4, j_2]$ 都是 $\mathbb{I}_n(\mathbf{s})$ 的元素。□

注。 特别地，前面的引理给出了 $\mathbb{I}_n(\mathbf{s})$ 的替代刻画˜。具体而言，它是 $\mathbb{I}_n$ 的极小子集，其中包含所有 $1 \leq p \leq r$ 的 $[i_p, j_p]$，并满足以下条件：若 $[i, j]$ 和 $[i', j']$ 是该集合中的一对相连区间，则 $[i, j']$和 $[i', j]$ 也属于该集合。

3.3. 给定 $\boldsymbol{\omega} \in \mathcal{I}_n^+$，写作 $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_{p_1,\ell_1} \cdots \boldsymbol{\omega}_{p_k,\ell_k} \in \mathcal{I}_n^+$，使得以下条件之一成立：对于$1 \leq m \leq s \leq k$

- 要么数对 $([p_m, \ell_m], [p_s, \ell_s])$ 不连通，
- 要么 $p_m + \ell_m \geq p_s + \ell_s$。

Set,

$$W(\boldsymbol{\omega}) = V(\boldsymbol{\omega}_{p_1,\ell_1}) \otimes \cdots \otimes V(\boldsymbol{\omega}_{p_k,\ell_k}).$$

众所周知（见 [4, 15]），$W(\boldsymbol{\omega})$ 是一个 ℓ–最高权模；也就是说，它由一个向量 $w_{\boldsymbol{\omega}}$ 生成，该向量被生成元 $x_{i,m}^+$ 消去，其中 $i \in I$, $m \in \mathbb{Z}$，且 ˆ$\mathbf{U}_q^0$ 的元素在 $w_{\boldsymbol{\omega}}$ 上作用为标量，而这些标量由 $\boldsymbol{\omega}$ 决定。此外，模 $V(\boldsymbol{\omega})$ 是 $W(\boldsymbol{\omega})$ 的唯一不可约商模。

一般来说，若模 V 是一个具有 ℓ–最高权重$\boldsymbol{\omega}$ 的 ℓ–最高权模，则称其为 ℓ–最高权模，因为它是 $W(\boldsymbol{\omega})$ 的商。已知，若 $V(\boldsymbol{\omega}_1) \otimes V(\boldsymbol{\omega}_2)$ 和 $V(\boldsymbol{\omega}_2) \otimes V(\boldsymbol{\omega}_1)$ 都是 ℓ–最高权模，那么

$$V(\boldsymbol{\omega}_1\boldsymbol{\omega}_2) \cong V(\boldsymbol{\omega}_1) \otimes V(\boldsymbol{\omega}_2) \cong V(\boldsymbol{\omega}_2) \otimes V(\boldsymbol{\omega}_1).$$

3.4. 命题 定理 1(i) 的证明。 以下结果可由 [3, 定理 1]直接得到 .

命题。 设$\mathbf{s} \in \mathbf{S}^s_{\mathrm{alt}}$ 且 $\boldsymbol{\pi} \in \mathcal{I}_n^+(\mathbf{s})$。则 $\mathrm{wt}^+_\ell\, W(\boldsymbol{\pi}) \subset \mathcal{I}_n^+(\mathbf{s})$。 □

为证明定理 1(i)，设 $V(\boldsymbol{\omega}_1)$ 和 $V(\boldsymbol{\omega}_2)$ 是 $\mathscr{C}_n(\mathbf{s})$ 的对象；特别地$\boldsymbol{\omega}_1$，$\boldsymbol{\omega}_2 \in \mathcal{I}_n^+(\mathbf{s})$。在命题 3.4 中取 $\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\omega}_1\boldsymbol{\omega}_2$，我们看到 $\mathrm{wt}^+_\ell\, W(\boldsymbol{\pi})$ 包含于 $\mathcal{I}_n^+(\mathbf{s})$ 中。由于 $\mathrm{wt}^+_\ell\,(V(\boldsymbol{\omega}_1) \otimes V(\boldsymbol{\omega}_2)) \subset \mathrm{wt}^+_\ell\, W(\boldsymbol{\pi})$，可知，如果 $V(\boldsymbol{\omega})$ 出现在 $V(\boldsymbol{\omega}_1)\otimes V(\boldsymbol{\omega}_2)$ 的乔丹–赫尔德级数中，则 $\boldsymbol{\omega} \in \mathcal{I}_n^+(\mathbf{s})$。这证明了 $\mathscr{C}_n(\mathbf{s})$ 是一个幺半范畴。

3.5. 定理 1(ii) 的证明。

3.5.1. 以下结论已在 [2]中证明。

命题。 设$\mathbf{s}' \in \mathbf{S}^s_{\mathrm{alt}}$。若$\mathbf{s}'$ 是素元，则 $V(\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{s}'})$ 是素元且为实的。若$\mathbf{s}'$ 不是素元，则存在 $1 \le p < r$，使得$\mathbf{s}'(0,p)$ 是素元，并且

$$V(\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{s}'}) \cong V(\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{s}'(0,p)}) \otimes V(\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{s}'(p,r)}).$$

□

由该命题可知，只需证明若$\mathbf{s}' \in \mathbf{pr(s)} \sqcup \mathbf{fr(s)}$，则$\mathbf{s}'$ 是$\mathbf{S}^s_{\mathrm{alt}}$的素元。若$\mathbf{s}' \in \mathbf{fr(s)}$，则不难看出这些区间对是连通的，因此$\mathbf{s}'$ 是素元。

3.5.2. 设$\mathbf{s}' = \mathbf{s}_{\varepsilon,\varepsilon'}(p, \ell+1) \in \mathbf{pr(s)}$。若 $\varepsilon = 0 = \varepsilon' = 0$，则$\mathbf{s}' = \mathbf{s}(p+1, \ell)$，由$\mathbf{s}$ 是$\mathbf{S}^s_{\mathrm{alt}}$ 的素元这一事实可立即得出$\mathbf{s}'$ 也是$\mathbf{S}^s_{\mathrm{alt}}$的素元。以下引理将证明其余情形下的结论。

引理。 假设$\mathbf{s} \in \mathbf{S}^s_{\mathrm{alt}}$ 是素的，并设 $0 \le p+1 < \ell \le r$。那么，

$$a_p \ne a_{p+3} \implies \mathbf{s}_{1,0}(p, \ell+1) \text{ is a prime element of } \mathbf{S}^s_{\mathrm{alt}},$$
$$a_{\ell-1} \ne a_{\ell+2} \implies \mathbf{s}_{0,1}(p, \ell+1) \text{ is a prime element of } \mathbf{S}^s_{\mathrm{alt}},$$
$$a_p \ne a_{p+3} \text{ and } a_{\ell-1} \ne a_{\ell+2} \implies \mathbf{s}_{1,1}(p, \ell+1) \text{ is a prime element of } \mathbf{S}^s_{\mathrm{alt}}.$$

证明。若 $a_p \ne a_{p+3}$ 对于 $a \in \{i, j\}$ 成立，则由引理 3.1 可得

$$i_{p+\epsilon_p} < i_{p+3} < j_{p+3} < j_{p+1-\epsilon_p}, \quad i_{p+2\epsilon_p} < i_{p+2-\epsilon_p} \le j_{p+1+\epsilon_p} < j_{p+2-2\epsilon_p},$$
$$s > p+3 \implies i_{p+\epsilon_p} \le i_s < j_s \le j_{p+1-\epsilon_p}.$$

前述不等式表明，$\mathbf{s}^{1,0}(p, \ell+1) = [i_{p+\epsilon_p}, j_{p+1-\epsilon_p}] \vee \mathbf{s}(p+1, \ell)$ 是$\mathbf{S}^s_{\mathrm{alt}}$的一个素元。同样，若 $a_{\ell-1} \ne a_{\ell+2}$，则由引理 3.1 也可得，

$$i_{\ell-1} < i_{\ell+1+\epsilon_\ell} \le j_{\ell+2-\epsilon_\ell} < j_{\ell-1}, \quad i_{\ell+1-\epsilon_\ell} < i_{\ell+2\epsilon_\ell} \le j_{\ell+2-2\epsilon_\ell} < j_{\ell+\epsilon_\ell},$$
$$s < \ell - 1 \implies i_s \le i_{\ell+1+\epsilon_\ell} \le j_{\ell+2-\epsilon_\ell} \le j_s,$$

因此$\mathbf{s}^{0,1}(p, \ell+1) = \mathbf{s}(p+1, \ell) \vee ([i_{\ell+1+\epsilon_\ell}, j_{\ell+2-\epsilon_\ell}])$ 是$\mathbf{S}^s_{\mathrm{alt}}$的一个素元。第三个断言的证明现在显而易见。□

4. Proof of Theorem 1(iii)

我们开始 本节将回顾 [10] 的一些结果，这些结果将在我们的工作中用到 k.

4.1. 在 [10], 中，作者为 $\boldsymbol{\omega}_1$，$\boldsymbol{\omega}_2 \in \mathcal{I}_n^+$ 定义了一个非负整数 $\mathfrak{d}(V(\boldsymbol{\omega}_1)\ V(\boldsymbol{\omega}_2))$，它取决于 n。该整数对应于 $d_{\boldsymbol{\omega}_1,\ \boldsymbol{\omega}_2}(z)d_{\boldsymbol{\omega}_2,\ \boldsymbol{\omega}_1}(z)$ 的零点阶数，其中 $d_{\boldsymbol{\omega}_1,\ \boldsymbol{\omega}_2}(z)$ 表示 $V(\boldsymbol{\omega}_1)$ 和 $V(\boldsymbol{\omega}_2)$ 的归一化 R-矩阵的分母。我们在以下命题中总结了 $\mathfrak{d}$ 的若干重要性质。(i) 由 $\mathfrak{d}$ 的定义可得；(ii) 是 [10] 的推论 3.17；(iii) 是 [12] 的命题 4.2；(iv) 由 [11] 的命题 2.17 可得；(v) 已在 [14] 中证明。

命题。设 $\boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{\omega}_2 \in \mathcal{I}_n^+$，并假设 $V(\boldsymbol{\omega}_1)$ 是一个实 $\widehat{\mathbf{U}}_n$–模。那么，

(i) $\mathfrak{d}(V(\boldsymbol{\omega}_1)\ V(\boldsymbol{\omega}_2)) = \mathfrak{d}(V(\boldsymbol{\omega}_2)\ V(\boldsymbol{\omega}_1))$。*(ii)* $\mathfrak{d}(V(\boldsymbol{\omega}_1)\ V(\boldsymbol{\omega}_2)) = 0$ 当且仅当 $V(\boldsymbol{\omega}_1) \otimes V(\boldsymbol{\omega}_2)$ 是不可约的。*(iii)* 对所有 $\boldsymbol{\omega}_3 \in \mathcal{I}_n^+$，有

$$\mathfrak{d}(V(\boldsymbol{\omega}_1), V(\boldsymbol{\omega}_2\boldsymbol{\omega}_3)) \leq \mathfrak{d}(V(\boldsymbol{\omega}_1), V(\boldsymbol{\omega}_2)) + \mathfrak{d}(V(\boldsymbol{\omega}_1), V(\boldsymbol{\omega}_3)).$$

(iv) 若 $\mathfrak{d}(V(\boldsymbol{\omega}_1)\ V(\boldsymbol{\omega}_2)) \leq 1$，则 $\mathfrak{d}(V(\boldsymbol{\omega}_1\boldsymbol{\omega}_2)\ V(\boldsymbol{\omega}_1)) = 0$。*(v)* 假设 $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_{i_1,j_1} \cdots \boldsymbol{\omega}_{i_k,j_k}$ 满足 $i_s < i_{s+1}$，且对所有 $1 \leq s \leq k-1$ 都有 $j_s < j_{s+1}$。那么，若 $\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\omega}')^{-1} \in \mathcal{I}_n^+$，则 $V(\boldsymbol{\omega}') \otimes V(\boldsymbol{\omega})$ 不可约。

4.2. 定理 1 的 (iii) 部分可由下面的命题立即得到。

命题. 给定 $\boldsymbol{\omega} \in \mathcal{I}_n^+(\mathbf{s})$，存在 $\mathbf{s}_1 \in \mathbf{pr}(\mathbf{s}) \sqcup \mathbf{fr}(\mathbf{s})$ 使得

$$V(\boldsymbol{\omega}) \cong V(\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{s}_1}) \otimes V(\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{s}_1}^{-1}).$$

该命题的证明通过对 r 作归纳法进行；对于固定的 r，再对 $\mathrm{ht}\,\boldsymbol{\omega}$ 作进一步归纳（定义见第 2.2 节）。若 $r = 1$，则无需证明，因为此时有 $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_{i_1,j_1}^s$，其中某个 $s \geq 1$ 和 $V(\boldsymbol{\omega}_{i_1,j_1})^{\otimes s} \cong V(\boldsymbol{\omega}_{i_1,j_1}^s)$。归纳步骤的证明将在本节余下部分给出。

4.3. 我们先作一些准备性说明。我们将反复使用引理 3.1 中对 $\mathbf{s}$ 的枚举，而不再特别指出。我们也会频繁使用命题 4.1 的一些部分，同样不再特别指出。因此，我们不会证明 $V(\boldsymbol{\omega}_1) \otimes V(\boldsymbol{\omega}_2)$ 不可约，而是确立命题 4.1(ii) 中给出的等价表述。同样，如果要证明 $\mathfrak{d}(V(\boldsymbol{\omega}_1\boldsymbol{\omega}_2)\ V(\boldsymbol{\omega}_3)) = 0$，我们只需证明 $\mathfrak{d}(V(\boldsymbol{\omega}_s)\ V(\boldsymbol{\omega}_3)) = 0$ 对于$s = 1,2$。

显然可以观察到，如果

$\mathbb{I}_n(\mathbf{s}^{1,0}(1,\ r+1)) = \{[i_{1+\epsilon_1}, j_{2-\epsilon_1}], [i_{2+\epsilon_2}, j_{3-\epsilon_2}], [i_{2+2\epsilon_2}, j_{4-2\epsilon_2}], [i_{1+2\epsilon_1}, j_{3-2\epsilon_1}]\} \sqcup \mathbb{I}_n(\mathbf{s}(2,\ r))$。注意，对于所有满足 $\mathbf{s}' \in \mathbf{pr}(\mathbf{s}) \sqcup \mathbf{fr}(\mathbf{s})$ 的情形，我们有 $\mathbb{I}_n(\mathbf{s}') \subset \mathbb{I}_n(\mathbf{s})$，因此 $\mathcal{I}_n^+(\mathbf{s}')$ 是$\mathcal{I}_n^+(\mathbf{s})$ 的子幺半群。因此，在归纳步骤中，我们可以假设

$$\boldsymbol{\omega} \notin \mathcal{I}_n^+(\mathbf{s}(1,r)).$$

特别地，我们可以并且确实写作

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_{i_1,j_1}^{a_1} \boldsymbol{\omega}_{i_{1+\epsilon_1},j_{2-\epsilon_1}}^{a_2} \boldsymbol{\omega}_{i_{1+2\epsilon_1},j_{3-2\epsilon_1}}^{a_3} \boldsymbol{\omega}_{i_{2-\epsilon_1},j_{1+\epsilon_1}}^{b} \boldsymbol{\omega}', \quad \boldsymbol{\omega}' \in \mathcal{I}_n^+(\mathbf{s}(1,r)) \tag{4.1}$$

其中:

- where $a_2 = a_3 = 0$ if $\epsilon_1 = 0$ and $i_1 = i_4$ or $\epsilon_1 = 1$ and $j_1 = j_4$,

- $a_1+a_2+a_3+b>0$。

最后，我们将对 $\epsilon_1\in\{0,1\}$ 陈述所有结果，但为简化记号，只在 $\epsilon_1=0$ 时证明它们。另一种情况下的证明完全相同。

4.4. 回想一下，$i_{2-\epsilon_1}=i_{\min}$ 和 $j_{1+\epsilon_1}=j_{\max}$，因此对于所有 $1\le s,\ p\le r,\ [i_{2-\epsilon_1},j_{1+\epsilon_1}]$ 均不与任何 $[i_s,j_p]$ 连通。因此，若 $b\ge 1$，我们可以取 $\mathbf{s}_1=[i_{2-\epsilon_1},j_{1+\epsilon_1}]$。接下来讨论 $a_3\ge 1$ 的情形，为此我们需要以下命题。

命题。 ***(i)*** 区间 $[i_{1+2\epsilon_1},j_{3-2\epsilon_1}]$ 和 $[i_s,j_p]\in\mathbb{I}_n(\mathbf{s})$ 连通，当且仅当 $i_s=i_2$ 和 $j_p=j_2$。

(ii) 若 $[i_2,j_2]$ 和 $[i_s,j_p]\in\mathbb{I}_n(\mathbf{s})$ 连通，则

$$[i_s,j_p]\in\{[i_1,j_1],[i_{1+2\epsilon_1},j_{3-2\epsilon_1}],[i_3,j_3],[i_{4-\epsilon_1},j_{3+\epsilon_1}]\}.$$

（*iii*）我们有

$$\mathfrak{d}(V(\boldsymbol{\omega}_{i_{1+2\epsilon_1},j_{3-2\epsilon_1}}\boldsymbol{\omega}_{i_2,j_2}),V(\boldsymbol{\omega}_{i_s,j_p}))=0,\quad [i_s,j_p]\in\mathbb{I}_n(\mathbf{s}).$$

证明。假设 $\epsilon_1=0$。如果 $s\ge 3$，那么根据 $\mathbb{I}_n(\mathbf{s})$ 的定义，我们有 $p\ge 2$。因此 $i_1<i_s<j_p\le j_3$，所以区间 $[i_1,j_3]$ 和 $[i_s,j_p]$ 不连通。如果 $s=2$，那么根据 $\mathbb{I}_n(\mathbf{s})$ 的定义，我们有 $j_p\in\{j_1,j_2,j_3\}$。由此可知，$[i_2,j_p]$ 和 $[i_1,j_3]$ 连通当且仅当 $j_p=j_2$，这就证明了（i）。

对于（ii），我们必须有 $i_2<i_s\le j_2<j_p$，因此有 $j_p\in\{j_1,j_3\}$。如果 $j_p=j_1$，则 $\mathbb{I}_n(\mathbf{s})$ 的定义迫使 $i_s=i_1$；如果 $j_p=j_3$，则该定义迫使 $i_s\in\{i_1,i_3,i_4\}$，于是（ii）得证。

利用命题的（i）和（ii），我们看到，只需在以下情况下证明（iii）：

$$[i_s,j_p]\in\{[i_1,j_3],[i_2,j_2],[i_1,j_1],[i_3,j_3],[i_4,j_3]\}.$$

前两种情况下，结论由命题 4.1(v) 得出。在其余三种情况下，注意到（可能需要重新排列第一项和第三项之后），我们有 $([i_1,j_3],[i_2,j_2],[i_s,j_p])\in\mathbf{S}^s_{\mathrm{alt}}$，且它不是素的。利用定义 2.3.3 很容易验证，$([i_1,j_3],[i_2,j_2])$ 是一个素因子，因此结论由命题 3.5.1 得出。□

假设 $\epsilon_1=0$ 和 $a_3\ge 1$ 满足 (4.1)。命题 4.4(i) 给出

$$\mathfrak{d}(V(\boldsymbol{\omega}_{i_1,j_3}),V(\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{\omega}_{i_1,j_3}^{-1}))=0\quad\text{if}\quad \boldsymbol{\omega}'\boldsymbol{\omega}_{i_2,j_2}^{-1}\notin\mathcal{I}_n^+,$$

因此，当 $\boldsymbol{\omega}'\boldsymbol{\omega}_{i_2,j_2}^{-1}\notin\mathcal{I}_n^+$ 时，我们可以取 $\mathbf{s}_1=[i_1,j_3]$。否则，若 $\boldsymbol{\omega}'\boldsymbol{\omega}_{i_2,j_2}^{-1}\in\mathcal{I}_n^+$，则命题的 (iii) 部分表明，我们可以取 $\mathbf{s}_1=([i_1,j_3],[i_2,j_2])$。

4.5. 现在我们证明，当 $a_3=0=b$ 和 $\boldsymbol{\omega}'\boldsymbol{\omega}_{i_{3-\epsilon_2},j_{2+\epsilon_2}}^{-1}\in\mathcal{I}_n^+$ 时，该命题成立。这依赖于以下命题。

命题。 ***(i)*** 假设 $[i_1,j_1]$ 和 $[i_s,j_p]\in\mathbb{I}_n(\mathbf{s})$ 是连通的。如果 $\epsilon_1=0$（分别地，$\epsilon_1=1$），那么 $i_s=i_2$（分别地，$j_p=j_2$），且 $j_p\in\{j_2,j_3\}$（分别地，$i_s\in\{i_2,i_3\}$）。

(ii) 区间 $[i_{3-\epsilon_2}, j_{2+\epsilon_2}]$ 和 $[i_s, j_p]$ 连通，当且仅当 $i_s = i_1$ 和 $j_p = j_1$。特别地，对于 $[i,j] \in \mathbb{I}_n(\mathbf{s})$，我们有

$$\mathfrak{d}(V(\boldsymbol{\omega}_{i_{3-\epsilon_2}, j_{i+\epsilon_2}}), V(\boldsymbol{\omega}_{i,j})) = 0 \quad \text{if} \quad i \neq i_1 \quad \text{or} \quad j \neq j_1,$$
$$\mathfrak{d}(V(\boldsymbol{\omega}_{i_1,j_1}\boldsymbol{\omega}_{i_{3-\epsilon_2}, j_{2+\epsilon_2}}), V(\boldsymbol{\omega}_{i,j})) = 0.$$

证明。假设 $\epsilon_1 = 0$。根据定义，只有当 $j_p = j_1, j_2, j_3$ 时，$[i_2, j_p] \in \mathbb{I}_n(\mathbf{s})$ 才成立。对于 (i)，注意到 $j_p < j_1$，因此必有 $i_s < i_1$，这意味着 $i_s = i_2$，于是 $j_p = j_2, j_3$。

对于 (ii)，注意到由于 $i_2 < i_s$，必有 $j_3 < j_p$。这迫使 $j_p = j_1$；又由于只有当 $i_s = i_1, i_2$ 时，$[i_s, j_1] \in \mathbb{I}_n(\mathbf{s})$ 才成立，因此可知 $i_s = i_1$。

现在，(ii) 中其余结论都显而易见，除了第二个等式和 $[i,j] = [i_2, j_2]$ 的情形。这里我们注意到 $([i_2, j_3], [i_1, j_1], [i_2, j_2]) \in \mathbf{S}^s_{\mathrm{alt}}$ 不是素的，因此由命题 3.5.1 可得

$$\mathfrak{d}(V(\boldsymbol{\omega}_{i_1,j_1}\boldsymbol{\omega}_{i_2,j_3}), V(\boldsymbol{\omega}_{i_2,j_2})) = 0.$$

□

由命题 4.5 和命题 4.1(iii)可知，若$\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{\omega}^{-1}_{i_{3-\epsilon_2}, j_{2+\epsilon_2}} \in \mathcal{I}_n^+$则要么 $\mathbf{s}_1 = ([i_1, j_1], [i_{3-\epsilon_2}, j_{2+\epsilon_2}])$，要么 $\mathbf{s}_1 = [i_{3-\epsilon_2}, j_{2+\epsilon_2}]$。

因此，只需在以下情形下证明该命题：

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}^{a_1}_{i_1,j_1}\boldsymbol{\omega}^{a_2}_{i_{1+\epsilon_1}, j_{2-\epsilon_1}}\boldsymbol{\omega}^{c}_{i_2,j_2}\boldsymbol{\omega}', \quad a_1 + a_2 > 0, \tag{4.2}$$

其中

$$\boldsymbol{\omega}'\boldsymbol{\omega}^{-1}_{i,j} \notin \mathcal{I}_n^+ \quad \text{if} \quad [i,j] \in \{[i_2, j_2], [i_{2-\epsilon_1}, j_{1+\epsilon_1}], [i_{1+2\epsilon_1}, j_{3-2\epsilon_1}], [i_{3-\epsilon_2}, j_{2+\epsilon_2}]\}. \tag{4.3}$$

特别地，若 $[i_1, j_1]$ 和 $[i,j]$ 由 $\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{\omega}^{-1}_{i,j} \in \mathcal{I}_n^+$ 连通，则有 $[i,j] = [i_2, j_2]$。若 $a_1 > c$，令 $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}^{a_1-c}_{i_1,j_1}(\boldsymbol{\omega}_{i_1,j_1}\boldsymbol{\omega}_{i_2,j_2})^c\boldsymbol{\omega}''$，则得到

$$\mathfrak{d}(V(\boldsymbol{\omega}^{a_1-c}_{i_1,j_1}), V(\boldsymbol{\omega}^{c}_{i_1,j_1}\boldsymbol{\omega}^{c}_{i_2,j_2}\boldsymbol{\omega}'')) \leq \mathfrak{d}(V(\boldsymbol{\omega}^{a_1-c}_{i_1,j_1}), V(\boldsymbol{\omega}^{c}_{i_1,j_1}\boldsymbol{\omega}^{c}_{i_2,j_2})) + \mathfrak{d}(V(\boldsymbol{\omega}^{a_1-c}_{i_1,j_1}), V(\boldsymbol{\omega}'')) = 0,$$

其中第一个不等式由命题 4.1(iii)得出，最后一个等式由命题 4.1(v)和命题 4.5(i)得出；于是可取 $\mathbf{s}_1 = [i_1, j_1]$。

4.6. 从现在起，我们假设处于 (4.2)–(4.3) 的情形，并且 $a_1 \leq c$。我们证明，当 $a_2 > 0$ 时命题成立。照例，我们将证明 $\epsilon_1 = 0$ 的情形，因此根据 (4.1) 后面的条件，我们可以且确实假设 $i_1 \neq i_4$。特别地，$\mathbf{s}^{1,0}(1, r+1) \in \mathbf{S}^s_{\mathrm{alt}}$ 是素数，这由引理 3.5.2 可知。由于 $\boldsymbol{\omega}^{a_2}_{i_1,j_2}\boldsymbol{\omega}' \in \mathcal{I}_n^+(\mathbf{s}^{1,0}(1, r+1))$，归纳假设适用于此元素。具体而言，该假设表明存在

- integers $0 \leq d, d' \leq a_2$
- for $1 \leq k \leq a_2 - d - d'$, elements $\mathbf{s}_{1,\varepsilon_k}(1, s_k + 1) \in \mathbf{pr}(\mathbf{s}_{1,0}(1, r+1))$, $\varepsilon_k \in \{0, 1\}$

使得令

$$\boldsymbol{\omega}_3 = \boldsymbol{\omega}^{a_2}_{i_1,j_2}\boldsymbol{\omega}'\left(\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{s}_{1,\varepsilon_1}(1,s_1+1)} \cdots \boldsymbol{\omega}_{\mathbf{s}_{1,\varepsilon_k}(1,s_k+1)}\right)^{-1}\boldsymbol{\omega}^{-d'}_{i_4,j_3},$$

我们有

$$V(\boldsymbol{\omega}_{i_1,j_2}^{a_2}\boldsymbol{\omega}') \cong V(\boldsymbol{\omega}_{i_1,j_2})^{\otimes d} \otimes V(\boldsymbol{\omega}_{i_1,j_2}\boldsymbol{\omega}_{i_4,j_3})^{\otimes d'} \bigotimes_{k=1}^{a_2-d-d'} V(\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{s}_{1,\varepsilon_k}(1,s_k+1)}) \otimes V(\boldsymbol{\omega}_3). \tag{4.4}$$

若 $c=0$，则 $a_1=0$，因此无需证明任何内容。以下命题用于证明 $c \geq a_1 > 0$ 的情形。

命题。对于 $p \in \{1,2\}$，有

$$\mathfrak{d}(V(\boldsymbol{\omega}_{i_p,j_p}), V(\boldsymbol{\omega}_{i_1,j_2})) = 0 = \mathfrak{d}(V(\boldsymbol{\omega}_{i_p,j_p}), V(\boldsymbol{\omega}_{i_1,j_2}\boldsymbol{\omega}_{i_4,j_3})),$$
$$\mathfrak{d}(V(\boldsymbol{\omega}_{i_p,j_p}), V(\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{s}_{1,\varepsilon}(1,s)})) = 0, \quad \varepsilon \in \{0,1\}, \quad 2 \leq s \leq r+1.$$

证明。第一个等式显然，因为当 $p=1$ 时，2，区间 $[i_p,j_p]$ 和 $[i_1,j_2]$ 不连通。第二个等式在 $p=1$ 时成立，因为 $i_1 \leq i_4 \leq j_3 < j_1$。若 $p=2$，则注意到 $([i_2,j_2],\ [i_4,j_3],\ [i_1,j_2]) \in \mathbf{S}_{\mathrm{alt}}^s$ 且不是素的。应用命题 3.5.1 即得所求。

若 $p=1$，则由命题 4.5(i) 可得第三个等式。若 $p=2$，则应用命题 4.4(ii) 和命题 4.1(iii) 可知，只需证明若 $\epsilon_1 = 0$,

$$\mathfrak{d}(V(\boldsymbol{\omega}_{i_2,j_2}), V(\boldsymbol{\omega}_{i_1,j_2}\boldsymbol{\omega}_{i_3,j_3})) = 0.$$

这同样由命题 3.5.1 得出，因为 $([i_2,j_2],\ [i_3,j_3],\ [i_1,j_2]) \in \mathbf{S}_{\mathrm{alt}}^s$ 不是素的。

□

结合应用命题 4.1，前述命题现在给出

$$\mathfrak{d}(V, V(\boldsymbol{\omega}_{i_1,j_1}^{a_1}\boldsymbol{\omega}_{i_2,j_2}^{c}\boldsymbol{\omega}_3)) = 0$$

其中 V 是（4.4）中出现的张量因子之一，因此我们有

$$V(\boldsymbol{\omega}) \cong V(\boldsymbol{\omega}_{i_1,j_2})^{\otimes d} \otimes V(\boldsymbol{\omega}_{i_1,j_2}\boldsymbol{\omega}_{i_4,j_3})^{\otimes d'} \bigotimes_{k=1}^{a_2-d-d'} V(\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{s}_{1,\varepsilon_k}(1,s_k+1)}) \otimes V(\boldsymbol{\omega}_{i_1,j_1}^{a_1}\boldsymbol{\omega}_{i_2,j_2}^{c}\boldsymbol{\omega}_3). \tag{4.5}$$

特别地，若 $a_2 > 0$，命题 4.2 即得证。

4.7. 为完成 $\epsilon_1 = 0$ 情形下命题 4.2 的证明，我们现在有

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_{i_1,j_1}^{a_1}\boldsymbol{\omega}_{i_2,j_2}^{c}\boldsymbol{\omega}', \quad a \leq c$$

其中

$$\boldsymbol{\omega}'\boldsymbol{\omega}_{i,j}^{-1} \notin \mathcal{I}_n^+, \quad [i,j] \in \{[i_1,j_1],[i_1,j_2],[i_2,j_2],[i_2,j_1],[i_1,j_3],[i_2,j_3]\}.$$

关于 r 的归纳假设适用于$\boldsymbol{\omega}_{i_2,\ j_2}^{c}\boldsymbol{\omega}'$，因此存在

- (ℓ_s, ε_s) with $\ell_s \geq 2$, $\varepsilon_s \in \{0,1\}$ for $1 \leq s \leq c$,
- $\boldsymbol{\omega}'' \in \mathcal{I}_n^+(\mathbf{s}(1,r))$,

使得

$$V(\boldsymbol{\omega}_{i_2,j_2}^{c}\boldsymbol{\omega}')\cong V(\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{s}_{0,\varepsilon_1}(0,\ell_1+1)})\otimes\cdots\otimes V(\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{s}_{0,\varepsilon_c}(0,\ell_c+1)})\otimes V(\boldsymbol{\omega}''),\quad \boldsymbol{\omega}''\boldsymbol{\omega}_{i_2,j_2}^{-1}\notin\mathcal{I}_n^+. \tag{4.6}$$

特别地，对于 $1\le s,\ p\le c$，我们有

$$\mathfrak{d}(V(\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{s}_{0,\varepsilon_s}(0,\ell_s+1)}),V(\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{s}_{0,\varepsilon_p}(0,\ell_p+1)}))=0=\mathfrak{d}(V(\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{s}_{0,\varepsilon_s}(0,\ell_s+1)}),V(\boldsymbol{\omega}'')). \tag{4.7}$$

不失一般性，假设 $\ell_1,\ \cdots,\ \ell_c$ 按如下方式排列：

- 若 $\ell_s+\varepsilon_s$ 为奇数，则 $\ell_{s+1}+\varepsilon_{s+1}$ 也为奇数，且 $2\ell_s+\varepsilon_s\ge 2\ell_{s+1}+\varepsilon_{s+1}$
- 若 $\ell_s+\varepsilon_s$ 和 $\ell_{s+1}+\varepsilon_{s+1}$ 均为偶数，则 $2\ell_s+\varepsilon_s\le 2\ell_{s+1}+\varepsilon_{s+1}$。

命题 4.2 的最后一种情形可由证明以下结论推出：

$$V(\boldsymbol{\omega})\cong\bigotimes_{s=1}^{a_1}V(\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{s}_{0,\varepsilon_s}(-1,\ell_s+1)})\bigotimes_{s=a_1+1}^{c}V(\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{s}_{0,\varepsilon_s}(0,\ell_s+1)})\otimes V(\boldsymbol{\omega}'').$$

为此，只需证明对于 $1\le s\le s'\le a$ 和 $a+1\le s''\le c$，我们有

$$\mathfrak{d}(V(\boldsymbol{\omega}''),V(\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{s}_{0,\varepsilon_s}(-1,\ell_s+1)}))=0=\mathfrak{d}(V(\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{s}_{0,\varepsilon_s}(-1,\ell_s+1)}),V(\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{s}_{0,\varepsilon_{s''}}(0,\ell_{s''}+1)})),$$
$$\mathfrak{d}(V(\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{s}_{0,\varepsilon_s}(-1,\ell_s+1)}),V(\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{s}_{0,\varepsilon_{s'}}(-1,\ell_{s'}+1)}))=0.$$

命题 4.5 和我们的假设给出 $\mathfrak{d}(V(\boldsymbol{\omega}'')\ V(\boldsymbol{\omega}_{i_1,\ j_1}))\ =0$。由于 $\mathbf{s}_{0,\ \varepsilon_s}(-1,\ \ell_s+1)\ =[i_1,j_1]\vee\mathbf{s}_{0,\ \varepsilon_s}(0,\ \ell_s+1)$，第一个等式由 (4.7) 和命题 4.1(iii) 得出。假设第二个等式成立，我们看到结合命题 4.1(iii)、(v) 和命题 4.5，可得

$$\begin{aligned}\mathfrak{d}(V(\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{s}_{0,\varepsilon_s}(-1,\ell_s+1)}),V(\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{s}_{0,\varepsilon_{s'}}(-1,\ell_{s'}+1)}))&\le\mathfrak{d}(V(\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{s}_{0,\varepsilon_s}(-1,\ell_s+1)}),V(\boldsymbol{\omega}_{i_1,j_1}))\\&\le\mathfrak{d}(V(\boldsymbol{\omega}_{i_1,j_1}\boldsymbol{\omega}_{i_2,j_2}),V(\boldsymbol{\omega}_{i_1,j_1}))=0,\end{aligned}$$

并且第三个等式得证。

第二个等式显然是以下更强命题的推论。

命题。 假设 $r\ge 3$，并且 $2\le\ell_1$、$\ \ell_2\le r$ 和 $\ \varepsilon_1$、$\ \varepsilon_2\in\{0,1\}$ 满足以下条件之一：

$$2\ell_1+\varepsilon_1\ge 2\ell_2+\varepsilon_2\ \text{ and }\ \ell_2+\varepsilon_2\ \text{ is odd }\ \text{ or }\ 2\ell_1+\varepsilon_1\le 2\ell_2+\varepsilon_2\ \text{ and }\ \ell_1+\varepsilon_1\ \text{is even.}$$

Then

$$\mathfrak{d}(V(\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{s}_{0,\varepsilon_1}(-1,\ell_1+1)}),V(\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{s}_{0,\varepsilon_2}(0,\ell_2+1)}))=0.$$

本节余下部分将通过对 $\min\{\ell_1,\ell_2\}\ge 2$ 归纳来证明该命题。

4.7.1. 以下结果表明，当 $\ell_1=2$ 和 $\ \varepsilon_1=0$ 时，该命题成立。

引理。 假设 $r\ge 3$。对于 $\varepsilon\in\{0,1\}$ 和 $\ 2\le\ell\le r$，若 $\ \ell+\varepsilon\ge 3$，则有

$$\mathfrak{d}(V(\boldsymbol{\omega}_{i_1,j_1}\boldsymbol{\omega}_{i_2,j_2}),V(\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{s}_{0,\varepsilon}(0,\ell+1)}))=0.$$

证明。若 $\ell+\varepsilon=3$，则 $(\ell,\varepsilon)\in\{(3,0),(2,1)\}$，我们需要证明

$$\mathfrak{d}(V(\boldsymbol{\omega}_{i_1,j_1}\boldsymbol{\omega}_{i_2,j_2}),V(\boldsymbol{\omega}_{i_2,j_2}\boldsymbol{\omega}_{i_3,j_3}))=0=\mathfrak{d}(V(\boldsymbol{\omega}_{i_1,j_1}\boldsymbol{\omega}_{i_2,j_2}),V(\boldsymbol{\omega}_{i_2,j_2}\boldsymbol{\omega}_{i_4,j_3})). \tag{4.8}$$

这里我们认为，第二个等式仅在 $r\geq 4$ 时成立。首先假设 $\epsilon_1=0$和 $\ell=3$，则第 3.3 节中的讨论表明，这些模

$$V(\boldsymbol{\omega}_{i_p,j_p})\otimes V(\boldsymbol{\omega}_{i_s,j_s}\boldsymbol{\omega}_{i_2,j_2})\otimes V(\boldsymbol{\omega}_{i_2,j_2}),\quad \{s,p\}=\{1,3\}$$

是 ℓ–最高权的。此外，根据命题 4.1(v)，当 $s=1,3$ 时，模 $V(\boldsymbol{\omega}_{i_s,j_s}\boldsymbol{\omega}_{i_2,j_2})\otimes V(\boldsymbol{\omega}_{i_2,j_2})$ 是不可约的。因此，当 $\{s,p\}=\{1,3\}$ 时，模 $V(\boldsymbol{\omega}_{i_s,j_s}\boldsymbol{\omega}_{i_2,j_2})\otimes V(\boldsymbol{\omega}_{i_p,j_p}\boldsymbol{\omega}_{i_2,j_2})$ 是 ℓ–最高权的，因而是不可约的。若 $\epsilon_1=1$，且 $(\ell,\varepsilon)=(3,0)$，则该模

$$V(\boldsymbol{\omega}_{i_2,j_2})\otimes V(\boldsymbol{\omega}_{i_2,j_2}\boldsymbol{\omega}_{i_s,j_s})\otimes V(\boldsymbol{\omega}_{i_p,j_p}),\quad \{s,p\}=\{1,3\}$$

是 ℓ–最高权的，论证便如前所述完成。

若 $(\ell,\varepsilon)=(2,1)$，则论证类似：若 $\epsilon_1=0$，则考虑 ℓ–最高权模 $V(\boldsymbol{\omega}_{i,j})\otimes V(\boldsymbol{\omega}_{i_2,j_2}\boldsymbol{\omega}_{i',j'})\otimes V(\boldsymbol{\omega}_{i_2,j_2})$，其中 $\{[i,j],[i',j']\}=\{[i_1,j_1],[i_4,j_3]\}$；若 $\epsilon_1=1$，则考虑 $V(\boldsymbol{\omega}_{i_2,j_2})\otimes V(\boldsymbol{\omega}_{i_2,j_2}\boldsymbol{\omega}_{i,j})\otimes V(\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{\omega}_{i',j'})$，其中 V。

若 $\ell+\varepsilon>3$，则要么 $\ell>3$，要么 $\ell=3$ 且 $\varepsilon=1$。在这种情况下，我们注意到 $[i_s,j_s]$ 对于 $s=1,2$ 与 $[i_p,j_\ell]$ 不连通，且 $p,\ \ell\geq 4$，因此

$$\mathfrak{d}(V(\boldsymbol{\omega}_{i_1,j_1}\boldsymbol{\omega}_{i_2,j_2}),V(\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{s}_{0,\varepsilon}(2,\ell+1)}))=0.$$

由于 $\mathbf{s}_{0,\varepsilon}(0,\ \ell+1)=\mathbf{s}(1,\ 3)\vee\mathbf{s}_{0,\varepsilon}(2,\ \ell+1)$，我们采用 $\ell+\varepsilon=3$ 情形，并应用命题 4.1(iii) 推出此情形下的引理。□

4.7.2. 我们考虑 $\ell_1=2$ 且 $\varepsilon_1=1$ 的情形。由于 $\ell_1+\varepsilon_1$ 是奇数，我们必有$2\ell_2+\varepsilon_2\leq 5$。由于 $\ell_2\geq 2$，我们得到 $\ell_2=2$ 和 $\varepsilon_2=1$，因此需要证明

$$\mathfrak{d}(V(\boldsymbol{\omega}_{i_1,j_1}\boldsymbol{\omega}_{i_2,j_2}\boldsymbol{\omega}_{i_4,j_3}),V(\boldsymbol{\omega}_{i_2,j_2}\boldsymbol{\omega}_{i_4,j_3}))=0.$$

但这可由 (4.8) 及命题 4.1(v) 的应用得到。

4.7.3. 我们证明，当 $\ell_2=2$ 且 $\ell_1\geq 3$时，该命题成立。由于 $2\ell_1+\varepsilon_1\geq 6\geq 4+\varepsilon_2$，我们必须有 $2+\varepsilon_2$ 为奇数，从而得到 $\varepsilon_2=1$。回顾可知，

$$\mathbf{s}_{0,1}(0,3)=([i_2,j_2],[i_4,j_3]),\ \ \mathbf{s}_{0,\varepsilon_1}(-1,\ell_1+1)=([i_1,j_1],[i_2,j_2])\vee\mathbf{s}_{0,\varepsilon_1}(1,\ell_1+1),$$

以下等式证明了这一情形：

$$\mathfrak{d}(V(\boldsymbol{\omega}_{i_2,j_2}\boldsymbol{\omega}_{i_4,j_3}),V(\boldsymbol{\omega}_{i_1,j_1}\boldsymbol{\omega}_{i_2,j_2}))=0=\mathfrak{d}(V(\boldsymbol{\omega}_{i_2,j_2}\boldsymbol{\omega}_{i_4,j_3}),V(\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{s}_{0,\varepsilon_1}(1,\ell_1+1)})).$$

这里，第一个等式由引理 4.7.1 立即得出，而第二个等式则是将命题 4.5(ii)应用于$\mathbf{s}(1,r)$的结果。

4.7.4. 我们证明归纳步骤；假设 $\min\{\ell_1,\ell_2\}\geq 3$，并令

$$\tilde{\mathbf{s}}=\mathbf{s}(1,r),\quad \tilde{\ell_1}=\ell_2-1,\quad \tilde{\ell_2}=\ell_1-1.$$

不难验证

$$\tilde{\mathbf{s}}_{0,\varepsilon_2}(-1,\tilde{\ell_1}+1)=\mathbf{s}_{0,\varepsilon_2}(0,\ell_2+1),\qquad \tilde{\mathbf{s}}_{0,\varepsilon_1}(0,\tilde{\ell_2}+1)=\mathbf{s}_{0,\varepsilon_1}(1,\ell_1+1).$$

此外，

$$2\ell_1+\varepsilon_1\geq 2\ell_2+\varepsilon_2 \text{ and } \ell_2+\varepsilon_2 \text{ odd} \iff 2\tilde{\ell_1}+\varepsilon_2\leq 2\tilde{\ell_2}+\varepsilon_1 \text{ and } \tilde{\ell_1}+\varepsilon_2 \text{ even},$$
$$2\ell_1+\varepsilon_1\leq 2\ell_2+\varepsilon_2 \text{ and } \ell_1+\varepsilon_1 \text{ even} \iff 2\tilde{\ell_1}+\varepsilon_2\geq 2\tilde{\ell_2}+\varepsilon_1 \text{ and } \tilde{\ell_2}+\varepsilon_1 \text{ odd}.$$

~ ~由于 $\min\{\ell_1,\ell_2\}=\min\{\ell_1,\ell_2\}-1$，归纳假设适用于 ~s，因此

$$\mathfrak{d}(V(\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{s}_{0,\varepsilon_1}(1,\ell_1+1)}),V(\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{s}_{0,\varepsilon_2}(0,\ell_2+1)}))=0. \tag{4.9}$$

由引理 4.7.1

$$\mathfrak{d}(V(\boldsymbol{\omega}_{i_1,j_1}\boldsymbol{\omega}_{i_2,j_2}),V(\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{s}_{0,\varepsilon_2}(0,\ell_2+1)}))=0$$

因此，应用命题 4.1(iii)即可得到归纳步骤。

5. An isomorphism of Grothendieck rings

设$\mathbf{s}\in\mathbf{S}^s_{\mathrm{alt}}\cap\mathbb{I}^r_n$ 和$\mathbf{s}'\in\mathbf{S}^s_{\mathrm{alt}}\cap\mathbb{I}^r_N$，其中 $n,\ N\in\mathbb{N}$。我们给出一个必要条件，以保证 $\mathcal{K}(\mathscr{C}_n(\mathbf{s}))$与 $\mathcal{K}(\mathscr{C}_N(\mathbf{s}'))$之间存在环同构，且该同构将不可约表示的类映射为不可约表示的类。

5.1. 我们陈述本节的主要结果。

定理 2. 假设$\mathbf{s}$ 和$\mathbf{s}'$ 是$\mathbf{S}^s_{\mathrm{alt}}$ 中的素元，并且

$$\epsilon_m=\epsilon'_m,\quad 1\leq m\leq r, \tag{5.1}$$
$$i_{m-1}=i_{m+2}\iff i'_{m-1}=i'_{m+2},\quad j_{m-1}=j_{m+2}\iff j'_{m-1}=j'_{m+2},\quad 2\leq m\leq r-2, \tag{5.2}$$
$$[i_m,j_\ell]\in\mathbb{I}_n(\mathbf{s})\iff[i'_m,j'_\ell]\in\mathbb{I}_N(\mathbf{s}'). \tag{5.3}$$

(i) 赋值 $[i_m,j_\ell]\to[i'_m,j'_\ell]$ 定义了一个双射 $\mathbb{I}_n(\mathbf{s})\to\mathbb{I}_N(\mathbf{s}')$，并诱导出一个双射$\mathbb{I}^r_n(\mathbf{s})\to\mathbb{I}^r_N(\mathbf{s}')$，使得

$$\mathbf{pr}(\mathbf{s})\sqcup\mathbf{fr}(\mathbf{s})\leftrightarrow\mathbf{pr}(\mathbf{s}')\sqcup\mathbf{fr}(\mathbf{s}').$$

(ii) 赋值 $\boldsymbol{\omega}_{i_m,j_\ell}\to\boldsymbol{\omega}_{i'_m,j'_\ell}$ 诱导出幺半群 $\eta_{\mathbf{s},\mathbf{s}'}\colon\mathcal{I}^+_n(\mathbf{s})\to\mathcal{I}^+_N(\mathbf{s}')$ 的同构，以及环 $\tilde{\eta}_{\mathbf{s},\mathbf{s}'}\colon\mathcal{K}(\mathscr{C}_n(\mathbf{s}))\to\mathcal{K}(\mathscr{C}_N(\mathbf{s}'))$ 的同构，使得

$$\tilde{\eta}_{\mathbf{s},\mathbf{s}'}([V(\boldsymbol{\omega})])=[V(\eta_{\mathbf{s},\mathbf{s}'}(\boldsymbol{\omega}))],\quad\boldsymbol{\omega}\in\mathcal{I}^+_n(\mathbf{s}). \tag{5.4}$$

5.2. 我们证明映射 $[i_m, j_\ell] \to [i'_m, j'_\ell]$ 定义良好。设 $[i_m, j_\ell] \in \mathbb{I}_n(\mathbf{s})$，且 $i_m = i_p$ 和 $j_\ell = j_s$，其中某个 $1 \leq p, s \leq r$。由引理 3.1 可知，或者 $\epsilon_m = 0$ 且 $p = m+3$，或者 $\epsilon_p = 0$ 且 $m = p+3$；并且或者 $\epsilon_\ell = 1$ 且 $s = \ell+3$，或者 $\epsilon_s = 1$ 且 $\ell = s+3$。由 (5.2) 可得 $i'_m = i'_p$ 且 $j'_\ell = j'_s$，正如所需。证明该映射为单射的过程完全相同，而 (5.3) 表明该映射为满射。

利用 (5.1)-(5.3)，我们看到所诱导的双射 $\mathbb{I}_n\mathbf{s} \to \mathbb{I}_N\mathbf{s}'$ 将 $\mathbf{prs} \sqcup \mathbf{frs} \mapsto \mathbf{prs}' \sqcup \mathbf{frs}'$ 对应起来，命题 (i) 的证明至此完成。

对于命题 (ii)，注意到同构 $\eta_{\mathbf{s},\ \mathbf{s}'} \colon \mathcal{I}_n^+\mathbf{s} \to \mathcal{I}_N^+\mathbf{s}'$ 的存在现在显而易见，因为这些幺半群分别由 $\boldsymbol{\omega}_{i_m,\ j_\ell}$ 和 $\boldsymbol{\omega}_{i'_m,\ j'_\ell}$ 生成，对应于 $[i_m, j_\ell] \in \mathbb{I}_n\mathbf{s}$ 和 $[i_m, j_\ell] \in \mathbb{I}_N\mathbf{s}'$。

由 [7], 可知， $K(\mathscr{C}_n\mathbf{s})$ 是以变量 $[V(\boldsymbol{\omega}_{i_m,\ j_\ell})]$、$[i_m, j_\ell] \in \mathbb{I}_n\mathbf{s}$ 为变量的多项式环；对于 $K(\mathscr{C}_N\mathbf{s}')$}，也有类似结论。由定理的命题 (i) 可知，赋值 $[V(\boldsymbol{\omega}_{i_m,\ j_\ell})] \to [V(\boldsymbol{\omega}_{i'_m,\ j'_\ell})]$ 定义了环同构 $\tilde{\eta}_{\mathbf{s},\ \mathbf{s}'} \colon K(\mathscr{C}_n\mathbf{s}) \to K(\mathscr{C}_N\mathbf{s}')$。

本节其余部分致力于证明 $\tilde{\eta}_{\mathbf{s},\ \mathbf{s}'}$ 满足（5.4）；也就是说，它将一个不可约模的类映射为一个不可约模的类。

5.3. 我们先作一些初步观察。注意到元素 $\mathbf{s}_{\varepsilon,\ \varepsilon'}(p,\ \ell+1)$ 和 $\mathbf{s}'_{\varepsilon,\ \varepsilon'}(p,\ \ell+1)$ 也满足（5.1）—（5.3）。因此，我们得到相应的同构

$$\eta_{\mathbf{s}_{\varepsilon,\varepsilon'}(p,\ell+1),\mathbf{s}'_{\varepsilon,\varepsilon'}(p,\ell+1)} : \mathcal{I}_n^+(\mathbf{s}_{\varepsilon,\varepsilon'}(p,\ell+1)) \to \mathcal{I}_N^+(\mathbf{s}'_{\varepsilon,\varepsilon'}(p,\ell+1)),$$
$$\tilde{\eta}_{\mathbf{s}_{\varepsilon,\varepsilon'}(p,\ell+1),\mathbf{s}'_{\varepsilon,\varepsilon'}(p,\ell+1)} : K(\mathscr{C}_n(\mathbf{s}_{\varepsilon,\varepsilon'}(p,\ell+1))) \to K(\mathscr{C}_N(\mathbf{s}'_{\varepsilon,\varepsilon'}(p,\ell+1)).$$

由于

$$\mathbb{I}_n(\mathbf{s}_{\varepsilon,\varepsilon'}(p,\ell+1)) \subset \mathbb{I}_n(\mathbf{s}),\ \ \mathbb{I}_N(\mathbf{s}'_{\varepsilon,\varepsilon'}(p,\ell+1)) \subset \mathbb{I}_N(\mathbf{s}'),$$

现在显然，$\tilde{\eta}_{\mathbf{s},\ \mathbf{s}'}$ 限制在 $K(\mathscr{C}_n(\mathbf{s}_{\varepsilon,\ \varepsilon'}(p,\ \ell+1)))$ 上是 $\tilde{\eta}_{\mathbf{s}_{\varepsilon,\ \varepsilon'}(p,\ \ell+1),\ \mathbf{s}'_{\varepsilon,\ \varepsilon'}(p,\ \ell+1)}$。如果我们处理 $\mathbf{fr}(\mathbf{s})$ 的元素，也有类似的讨论。

5.4. 下一个命题中的第一个和第二个等式由 [2, 命题9] 取 $r_1 = 2$ 得到，第三个等式则由 [2, 引理 8.3] 得到。回想一下，$\epsilon_1 \in \{0, 1\}$ 的选取使得 $i_{1+\epsilon_1} > i_{2-\epsilon_1}$。下文中我们假设 $\mathbf{s}(2,\ r)$ 仅当$r \geq 3$时出现。

命题。 设 $\mathbf{s} \in \mathbf{S}^s_{\mathrm{alt}}$ 是素数。那么

$$[V(\boldsymbol{\omega}_{i_1,j_1})][V(\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{s}(1,r)})] = [V(\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{s}})] + [V(\boldsymbol{\omega}_{i_2,j_1}\boldsymbol{\omega}_{i_1,j_2}\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{s}(2,r)})], \tag{5.5}$$
$$[V(\boldsymbol{\omega}_{i_2,j_1}\boldsymbol{\omega}_{i_1,j_2}\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{s}(2,r)})] = [V(\boldsymbol{\omega}_{i_2,j_1}^{1-\epsilon_1}\boldsymbol{\omega}_{i_1,j_2}^{\epsilon_1})][V(\boldsymbol{\omega}_{i_2,j_1}^{\epsilon_1}\boldsymbol{\omega}_{i_1,j_2}^{1-\epsilon_1}\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{s}(2,r)})]. \tag{5.6}$$

此外，如果 $i_1 = i_4$ 或 $j_1 = j_4$，则

$$[V(\boldsymbol{\omega}_{i_2,j_1}^{\epsilon_1}\boldsymbol{\omega}_{i_1,j_2}^{1-\epsilon_1}\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{s}(2,r)})] = [V(\boldsymbol{\omega}_{i_2,j_1}^{\epsilon_1}\boldsymbol{\omega}_{i_1,j_2}^{1-\epsilon_1}\boldsymbol{\omega}_{i_3,j_3})][V(\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{s}(3,r)})]. \tag{5.7}$$

□

5.5. 我们通过对 r 进行归纳法来证明（5.4）成立；显然，当$r=1$时归纳法开始。如果 $r=2$，则利用（5.5）—（5.6）可得

$$[V(\boldsymbol{\omega}_{i_1,j_1})][V(\boldsymbol{\omega}_{i_2,j_2})]=[V(\boldsymbol{\omega}_{i_1,j_1}\boldsymbol{\omega}_{i_2,j_2})]+[V(\boldsymbol{\omega}_{i_1,j_2})][V(\boldsymbol{\omega}_{i_2,j_1})],$$
$$[V(\boldsymbol{\omega}_{i_1',j_1'})][V(\boldsymbol{\omega}_{i_2',j_2'})]=[V(\boldsymbol{\omega}_{i_1',j_1'}\boldsymbol{\omega}_{i_2',j_2'})]+[V(\boldsymbol{\omega}_{i_1',j_2'})][V(\boldsymbol{\omega}_{i_2',j_1'})].$$

将 $\tilde{\eta}$ 应用于第一个等式两边，并使用 $r=1$ 的结果，即可证明 $\tilde{\eta}([V(\boldsymbol{\omega}_{i_1,\ j_1}\boldsymbol{\omega}_{i_2,\ j_2})])=[V(\boldsymbol{\omega}_{i_1',\ j_1'}\boldsymbol{\omega}_{i_2',\ j_2'})]$。

若 $\boldsymbol{\omega}\in\mathcal{I}_n^+(\mathbf{s})$，则写作

$$\boldsymbol{\omega}=\boldsymbol{\omega}_{i_1,j_1}^{a_1}(\boldsymbol{\omega}_{i_1,j_1}\boldsymbol{\omega}_{i_2,j_2})^a\boldsymbol{\omega}_{i_2,j_2}^{a_2}\boldsymbol{\omega}_{i_1,j_2}^b\boldsymbol{\omega}_{i_2,j_1}^c,\quad\text{where}\quad a_1=0\quad\text{or}\quad a_2=0,$$

由此得出命题 4.1(iv)以及 $i_1<i_2<j_1<j_2$ 或 $i_2<i_1\le j_2<j_1$ 这一事实，便可得

$$[V(\boldsymbol{\omega})]=[V(\boldsymbol{\omega}_{i_1,j_1})]^{a_1}[V(\boldsymbol{\omega}_{i_1,j_1}\boldsymbol{\omega}_{i_2,j_2})]^a[V(\boldsymbol{\omega}_{i_2,j_2})]^{a_2}[V(\boldsymbol{\omega}_{i_1,j_2})]^b[V(\boldsymbol{\omega}_{i_2,j_1})]^c.$$

由于 $V(\eta(\boldsymbol{\omega}))$ 也有相同的分解，因此 $r=2$ 的情形证明完毕。特别地，利用第 5.3 节中的讨论，当 $\boldsymbol{\omega}=\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{s}}$ 且 $\mathbf{s}\in\mathbf{fr}(\mathbf{s})$ 时，等式 (5.4) 成立。

5.6. 假设对于所有满足 $\mathbf{s}_1\in\mathbf{S}_{\mathrm{alt}}^s\cap\mathbb{I}_n^{r-1}$ 为素数的 $\boldsymbol{\omega}'\in\mathcal{I}_n^+(\mathbf{s}_1)$，结论均成立。

先假设 $\boldsymbol{\omega}=\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{s}_{\varepsilon,\ \varepsilon'}(p,\ \ell+1)}$，其中 $p>-1$ 或 $\ell<r$。归纳假设适用于 $\boldsymbol{\omega}$，而第 5.3 节中的讨论表明

$$\tilde{\eta}_{\mathbf{s},\mathbf{s}'}([V(\boldsymbol{\omega})])=\tilde{\eta}_{\mathbf{s}_{\varepsilon,\varepsilon'}(p,\ell+1)}([V(\boldsymbol{\omega})])=[V(\eta_{\mathbf{s}'_{\varepsilon,\varepsilon'}(p,\ell+1)}(\boldsymbol{\omega}))]=[V(\eta_{\mathbf{s},\mathbf{s}'}(\boldsymbol{\omega}))],$$

按需进行。因此，只需证明 $\tilde{\eta}_{\mathbf{s},\ \mathbf{s}'}([V(\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{s}})])=[V(\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{s}'})]$。若 $i_1=i_4$ 或 $j_1=j_4$，则归纳假设适用于 (5.7)，并得到

$$\tilde{\eta}_{\mathbf{s},\mathbf{s}'}([V(\boldsymbol{\omega}_{i_2,j_1}^{\epsilon_1}\boldsymbol{\omega}_{i_1,j_2}^{1-\epsilon_1}\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{s}(2,r)})])=[V(\boldsymbol{\omega}_{i_2',j_1'}^{\epsilon_1'}\boldsymbol{\omega}_{i_1',j_2'}^{1-\epsilon_1'}\boldsymbol{\omega}_{i_3',j_3'})][V(\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{s}'(3,r)})].$$

否则，由 (5.6) 可得，

$$\tilde{\eta}_{\mathbf{s},\mathbf{s}'}([V(\boldsymbol{\omega}_{i_2,j_1}\boldsymbol{\omega}_{i_1,j_2}\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{s}(2,r)})])=[V(\boldsymbol{\omega}_{i_2',j_1'}^{1-\epsilon_1'}\boldsymbol{\omega}_{i_1',j_2'}^{\epsilon_1'})][V(\boldsymbol{\omega}_{i_2',j_1'}^{\epsilon_1'}\boldsymbol{\omega}_{i_1',j_2'}^{1-\epsilon_1'}\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{s}'(2,r)})].$$

对两边应用 $\tilde{\eta}_{\mathbf{s},\ \mathbf{s}'}$ 到 (5.5)，并利用前述观察，可得 $\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{s}}$的 (5.4)。

现在假设 $\boldsymbol{\omega}$ 不一定是素数，并且 $\boldsymbol{\omega}\notin\mathcal{I}_n^+(\mathbf{s}(1,\ r))$。我们对 $\operatorname{ht}\boldsymbol{\omega}$ 进行归纳。第4节的结果以及 $\eta_{\mathbf{s},\ \mathbf{s}'}$ 的定义表明，若

$$(*)\quad \boldsymbol{\omega}\boldsymbol{\omega}_1^{-1}\in\mathcal{I}_n^+,\ \ \boldsymbol{\omega}_1\in\{\boldsymbol{\omega}_{i_2,j_1},\ \ \boldsymbol{\omega}_{i_1,j_3}\boldsymbol{\omega}_{i_2,j_2},\ \ \boldsymbol{\omega}_{i_1,j_1}\boldsymbol{\omega}_{i_2,j_3}\}$$

我们有

$$V(\boldsymbol{\omega})\cong V(\boldsymbol{\omega}_1)\otimes V(\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{\omega}_1^{-1}),\ \ V(\eta_{\mathbf{s},\mathbf{s}'}(\boldsymbol{\omega}))\cong V(\eta_{\mathbf{s},\mathbf{s}'}(\boldsymbol{\omega}_1)))\otimes V(\eta_{\mathbf{s},\mathbf{s}'}(\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{\omega}_1^{-1})).$$

由于我们已经证明了$\mathbf{pr}(\mathbf{s})$中的元素，且 $\operatorname{ht}\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{\omega}_1^{-1}<\operatorname{ht}\boldsymbol{\omega}$我们有

$\tilde{\eta}_{\mathbf{s},\ \mathbf{s}'}([V(\boldsymbol{\omega})])=\tilde{\eta}_{\mathbf{s},\ \mathbf{s}'}([V(\boldsymbol{\omega}_1)])\tilde{\eta}_{\mathbf{s},\ \mathbf{s}'}([V(\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{\omega}_1^{-1})])=[V(\eta_{\mathbf{s},\ \mathbf{s}'}(\boldsymbol{\omega}_1))][V(\eta_{\mathbf{s},\ \mathbf{s}'}(\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{\omega}_1^{-1}))]=[V(\eta_{\mathbf{s},\ \mathbf{s}'}(\boldsymbol{\omega}))]$.如果 $\boldsymbol{\omega}$ 不满足（$*$），但满足

$$(**)\ \ \boldsymbol{\omega}\boldsymbol{\omega}_1^{-1}\in\mathcal{I}_n^+,\ \ \boldsymbol{\omega}_1\in\{\boldsymbol{\omega}_{i_1,j_3}\ \boldsymbol{\omega}_{i_2,j_3}\}$$

那么，同样的论证即可证明（5.4）。

否则，我们处于第4.6节的情形，并且有

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_{i_1,j_1}^{a_1}\boldsymbol{\omega}_{i_1,j_2}^{a_2}\boldsymbol{\omega}_{i_2,j_2}^{c}\boldsymbol{\omega}_2, \quad \boldsymbol{\omega}_2 \in \mathcal{I}_n^+(\mathbf{s}_{1,0}(1,r+1)), \quad c>0.$$

以及关于$\eta_{\mathbf{s},\ \mathbf{s}'}(\boldsymbol{\omega})$的类似结论。

假设 $a_2>0$，并令 $0\le d,\ d'\le a_2$、$s_k\in\mathbb{N}$、ε_p、$1\le k\le a_2-d-d'$ 和$\boldsymbol{\omega}_3\boldsymbol{\omega}_{i_1,\ j_2}^{-1}\notin\mathcal{I}_n^+$ 如（4.5）中所示，则有

$$[V(\boldsymbol{\omega})]=[V(\boldsymbol{\omega}_{i_1,j_2})]^d[V(\boldsymbol{\omega}_{i_1,j_2}\boldsymbol{\omega}_{i_4,j_3})]^{d'}\left(\prod_{k=1}^{a_2-d-d'}[V(\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{s}_{1,\varepsilon_k}(1,s_k+1)})]\right)[V(\boldsymbol{\omega}_{i_1,j_1}^{a_1}\boldsymbol{\omega}_{i_2,j_2}^{c}\boldsymbol{\omega}_3)], \tag{5.8}$$

类似地，

$$[V(\eta_{\mathbf{s},\mathbf{s}'}(\boldsymbol{\omega}))]=[V(\boldsymbol{\omega}_{i'_1,j'_2})]^d[V(\boldsymbol{\omega}_{i'_1,j'_2}\boldsymbol{\omega}_{i'_4,j'_3})]^{d'}\left(\prod_{k=1}^{a_2-d-d'}[V(\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{s}'_{1,\varepsilon_k}(1,s_k+1)})]\right)[V(\boldsymbol{\omega}_{i'_1,j'_1}^{a_1}\boldsymbol{\omega}_{i'_2,j'_2}^{c}\eta_{\mathbf{s},\mathbf{s}'}(\boldsymbol{\omega}_3))]. \tag{5.9}$$

将$\tilde{\eta}_{\mathbf{s},\ \mathbf{s}'}$ 应用于（5.8）的两边，并利用归纳假设，可得其右端等于（5.9）的右端，因此得到$\tilde{\eta}_{\mathbf{s},\ \mathbf{s}'}([V(\boldsymbol{\omega})])=[V(\eta_{\mathbf{s},\ \mathbf{s}'}(\boldsymbol{\omega}))]$，这就证明了此情形下的归纳步骤。

若 $a_2=0$，那么我们最终处于第4.7节的情形；这里的论证与上文给出的论证相同，细节从略。

6. Monoidal Categorification

本节证明，若$\mathbf{s}\in\mathbf{S}_{\mathrm{alt}}^s$ 是素的，则 $\mathcal{K}(\mathscr{C}_n(\mathbf{s}))$是一个簇代数的幺半范畴化。本节中，对于 $m\ge1$，我们设 $I_m=\{1,2,\cdots,m\}$。

6.1. 一个高度函数。 给定$\mathbf{s}=([i_1,j_1],\cdots,[i_r,j_r])\in\mathbf{S}_{\mathrm{alt}}^s$为素且 $r\ge3$，设

$$N(\mathbf{s})=r+\#\{2\le s\le r-2: i_{s-1}\ne i_{s+2}\ \text{ and }\ j_{s-1}\ne j_{s+2}\}.$$

为简化记号且在不存在歧义时，我们设 $N=N(\mathbf{s})$。定义 $\mathbb{Z}$的一个子集$\{p_1,\cdots,p_r\}$，令

$$p_1=1,\quad p_2=2,$$
$$p_{m+1}=p_m+\begin{cases}2, & i_{r-m+2}\ne i_{r-m-1}\ \text{ and }\ j_{r-m+2}\ne j_{r-m-1},\\ 1, & \text{otherwise},\end{cases}\qquad 2\le m\le r-2,$$
$$p_r=p_{r-1}+1.$$

引理。 我们有 $p_r=N$或等价地 $p_{r-1}=N-1$。特别地，$\{p_1,\cdots,p_r\}\subset I_N$.

证明。 通过对 r 进行归纳法可证该引理，其中情形 $r=3$ 显然。假设该引理对 $\mathbf{s}'=\mathbf{s}(0,r-1)$成立，我们注意到

$$N(\mathbf{s})=\begin{cases}N(\mathbf{s}')+2, & i_{r-3}\neq i_r \ \text{ and } \ j_{r-3}\neq j_r,\\ N(\mathbf{s}')+1, & \text{otherwise.}\end{cases}$$

此外，若令 $\{p'_1,\cdots,p'_{r-1}\}$ 为与 $\mathbf{s}'$ 相对应的子集，则由归纳假设可知，对于 $1\le s\le r-2$ 和 $p'_{r-2}=N(\mathbf{s}')$，有 $p'_s=p_s-1$。由此，根据定义 $p_{r-1}=N(\mathbf{s})-1$，即得所需结果，引理的证明也就完成了。□

6.2. 范畴 $\mathscr{C}(\xi_{\mathbf{s}})$。 回顾一下，若函数 $\xi\colon I_M\to\mathbb{Z}$ 满足对所有 $1\le s\le M-1$ 均有 $|\xi(s)-\xi(s+1)|\le 1$，则称其为高度函数。另回顾定义 2.3.1 中与元素 $\mathbf{s}\in\mathbf{S}^s_{\mathrm{alt}}$ 相关联的元素 $\{\epsilon_s\colon 1\le s\le r\}$。对于素 $\mathbf{s}\in\mathbf{S}^s_{\mathrm{alt}}$，令 $N=N(\mathbf{s})$；容易验证，下列公式定义了一个高度函数 $\xi_{\mathbf{s}}\colon I_N\to\mathbb{Z}$:

$$\xi_{\mathbf{s}}(p_r)=p_r,\ \ \xi_{\mathbf{s}}(p_m-1)=\xi_{\mathbf{s}}(p_m+1),\ \ \xi_{\mathbf{s}}(p_{m+1-\epsilon_{r-m}})-\xi_{\mathbf{s}}(p_{m+\epsilon_{r-m}})=p_{m+1}-p_m. \quad (6.1)$$

对于 $1\le s\le N$，注意到 $\xi_{\mathbf{s}}(s)-s\in 2\mathbb{Z}$ 并令

$$2i_s^{\xi_{\mathbf{s}}}=\xi_{\mathbf{s}}(s)-s,\ \ 2j_s^{\xi_{\mathbf{s}}}=\xi_{\mathbf{s}}(s)+s.$$

Set

$$\mathbb{I}_N(\xi_{\mathbf{s}})=\{[i_s^{\xi_{\mathbf{s}}},\ j_s^{\xi_{\mathbf{s}}}],[i_s^{\xi_{\mathbf{s}}}-1,\ j_s^{\xi_{\mathbf{s}}}-1]:1\le s\le N\},$$

and 令 $\mathcal{I}_N^+(\xi_{\mathbf{s}})$ 为由元素 $\boldsymbol{\omega}_{i,j}$, $[i,j]\in\mathbb{I}_N(\xi_{\mathbf{s}})$ 生成的 $\mathcal{I}_N^+$ 的子幺半群。

例。 假设 $r=5$，且 $\mathbf{s}\in\mathbf{S}^s_{\mathrm{alt}}\cap\mathbb{I}^5_n$ 是素数，使得 $\epsilon_1=0$, $a_1\neq a_4$, $a\in\{i,j\}$ 且 $j_2=j_5$。那么

$$N(\mathbf{s})=6,\ \ p_1=1,\ \ p_2=2,\ \ p_3=3,\ \ p_4=5,\ \ p_5=6,$$
$$\xi_{\mathbf{s}}(6)=6,\ \ \xi_{\mathbf{s}}(5)=5,\ \ \xi_{\mathbf{s}}(4)=6,\ \ \xi_{\mathbf{s}}(3)=7,\ \ \xi_{\mathbf{s}}(2)=6,\ \ \xi_{\mathbf{s}}(1)=7,$$
$$\mathbb{I}_{N(\mathbf{s})}(\xi_{\mathbf{s}})=\{[3,4],[2,3],[2,4],[1,3],[2,5],[1,4],[1,5],[0,4],[0,5],[-1,4],[0,6],[-1,5]\}.$$

在 [8] 中，作者定义了（更一般地，对于任意高度函数）$\mathscr{C}_{\xi_{\mathbf{s}}}$ 为 $\mathscr{F}_N$ 的子范畴，即由 Jordan–H¨older 构成因子为 $V(\boldsymbol{\omega})$ 且满足 $\boldsymbol{\omega}\in\mathcal{I}_N^+(\xi_{\mathbf{s}})$ 的模组成的满子范畴。以下结果在 [8] 中针对二分高度函数、在一般情形下于 [1] 中以 Drinfeld 多项式的语言得到了证明。

定理 3. (i) 范畴 $\mathscr{C}_{\xi_{\mathbf{s}}}$ 是一个幺半张量范畴，环 $\mathcal{K}(\mathscr{C}_{\xi_{\mathbf{s}}})$ 是类型为 $A_{N(\mathbf{s})}$、具有 $N(\mathbf{s})$ 个冻结变量的簇代数的幺半范畴化。(ii) 簇变量（分别为簇单项式）与 $\mathscr{C}_{\xi_{\mathbf{s}}}$ 的素对象（分别为 $\mathscr{C}_{\xi_{\mathbf{s}}}$的不可约对象）一一对应。

□

文献 [1] 用 Drinfeld 多项式的语言确定了 $\mathscr{C}_{\xi_{\mathbf{s}}}$ 中素对象和模的指标集。现在我们用本文的语言给出该指标集。

对于 $1\le m\le\ell\le r$ 集合

$$\boldsymbol{\omega}(p_m,p_\ell)=\prod_{k=m}^{\ell}\boldsymbol{\omega}_{i^{\xi}_{p_k}-\epsilon_{r-k+1},\,j^{\xi}_{p_k}-\epsilon_{r-k+1}}$$

给定 $1 \le s < s' \le N(\mathbf{s})$，令 $1 \le m, \ell \le r$ 为满足以下条件的唯一元素

$$1 \le m \le \ell \le r \quad \text{and} \quad p_{m-1} < s \le p_m \le p_\ell \le s' < p_{\ell+1}, \tag{6.2}$$

并设

$$\boldsymbol{\omega}(s,s') = \boldsymbol{\omega}^{1-\delta_{s,p_m}}_{i^\xi_{p_{m-1}-\epsilon_{r-m+1}}, j^\xi_{p_{m-2+\epsilon_{r-m+1}}}} \boldsymbol{\omega}(p_m,p_\ell) \ \boldsymbol{\omega}^{1-\delta_{s',p_\ell}}_{i^\xi_{p_{\ell+2-\epsilon_{r-\ell+1}}}, j^\xi_{p_{\ell+1+\epsilon_{r-\ell+1}}}}.$$

那么，指标集 $\mathbf{Pr}(\xi_{\mathbf{s}})$ 是以下两个集合的并：

$$\{\boldsymbol{\omega}_{i^\xi_s-1, j^\xi_s-1},\ \boldsymbol{\omega}_{i^\xi_s, j^\xi_s} :\ 1 \le s \le N(\mathbf{s})\} \cup \{\boldsymbol{\omega}(s,s') : 1 \le s < s' \le N(\mathbf{s})\},$$

以及冻结元素

$$\mathbf{Fr}(\xi_{\mathbf{s}}) = \{\boldsymbol{\omega}_{i^\xi_s, j^\xi_s}\boldsymbol{\omega}_{i^\xi_s-1, j^\xi_s-1} : 1 \le s \le N(\mathbf{s})\}.$$

6.3. 定理 1 的 (iv) 部分可由以下命题直接推出。

命题。假设 $\mathbf{s} = ([i_1,j_1],\cdots,[i_r,j_r]) \in S^s_{\mathrm{alt}} \cap \mathbb{I}^r_n$ 是素且稳定的，并且满足 $j_{\min} = i_{\max}$ 和 $n+1 = j_{\max} - i_{\min}$。存在幺半群的同构 $\eta_{\xi,\mathbf{s}} : \mathcal{I}^+_N(\mathbf{s})(\xi_{\mathbf{s}}) \to \mathcal{I}^+_n(\mathbf{s})$，以及相应的环同构 $\tilde{\eta}_{\xi,\mathbf{s}} : \mathcal{K}(\mathscr{C}_{\xi_{\mathbf{s}}}) \to \mathcal{K}(\mathscr{C}_n(\mathbf{s}))$，它将不可约（素）对象映射为不可约（素）对象。

本节余下部分将给出该命题的证明。

备注。注意，对于 $1 \le s < s' \le N(\mathbf{s})$ 以及 (6.2) 中的 $1 \le m \le \ell \le r$，这一对应关系

$$\boldsymbol{\omega}(s,s') \mapsto \boldsymbol{\omega}_{\tilde{\mathbf{s}}}, \quad \tilde{\mathbf{s}} = \mathbf{s}_{1-\delta_{s',p_\ell}, 1-\delta_{s,p_m}}(p_{r-\ell+1}-2, p_{r-m+1})$$

在 $\mathbf{Pr}(\xi_{\mathbf{s}}) \to \mathbf{Pr}(\mathbf{s})$ 之间定义了一个双射

6.3.1. 我们从定理 3 推出以下推论。

命题。设 $([i_m,j_\ell],[i_p,j_s]) \in \mathbb{I}_{N(\mathbf{s})}(\xi_{\mathbf{s}})^2$ 与 $i_p < i_m$ 连通。若 $j_\ell - i_p \le N(\mathbf{s})$（分别为 $i_m \ne j_s$），则区间 $[i_p, j_\ell]$（分别为 $[i_m, j_s]$）属于 $\mathbb{I}_{N(\mathbf{s})}(\xi_{\mathbf{s}})$。

证明。考察 $([i_m,j_\ell],[i_p,j_s]) \in \mathbf{S}^s_{\mathrm{alt}}$，由命题 5.4 可得

$$[V(\boldsymbol{\omega}_{i_m,j_\ell})][V(\boldsymbol{\omega}_{i_p,j_s})] = [V(\boldsymbol{\omega}_{i_m,j_\ell}\boldsymbol{\omega}_{i_p,j_s})] + [V(\boldsymbol{\omega}_{i_m,j_s}\boldsymbol{\omega}_{i_p,j_\ell})],$$
$$[V(\boldsymbol{\omega}_{i_m,j_s}\boldsymbol{\omega}_{i_p,j_\ell})] = [V(\boldsymbol{\omega}_{i_m,j_s})][V(\boldsymbol{\omega}_{i_p,j_\ell})].$$

由于 $\mathscr{C}_{\xi_{\mathbf{s}}}$ 是一个幺半张量范畴，第一个等式表明乘积 $\boldsymbol{\omega}_{i_m,j_s}\boldsymbol{\omega}_{i_p,j_\ell}$ 是 $\mathcal{I}^+_{N(\mathbf{s})}(\xi_{\mathbf{s}})$ 的一个元素。另一方面，定理 3 意味着 $\mathscr{C}_{\xi_{\mathbf{s}}}$ 中的每个不可约表示都同构于 $\mathscr{C}_{\xi_{\mathbf{s}}}$ 中素不可约表示的张量积。第二个等式表明，模 $V(\boldsymbol{\omega}_{i_m,j_s}\boldsymbol{\omega}_{i_p,j_\ell})$ 在 $\mathscr{F}_{N(\mathbf{s})}$ 中不是素的，因此在 $\mathscr{C}_{\xi_{\mathbf{s}}}$ 中也不是素的。显然，模 $V(\boldsymbol{\omega}_{i_m,j_s})$ 和 $V(\boldsymbol{\omega}_{i_p,j_\ell})$ 必须是 $\mathscr{C}_{\xi_{\mathbf{s}}}$ 的对象。特别地，我们有

$$\boldsymbol{\omega}_{i_m,j_s} \ne \mathbf{1} \implies i_m \ne j_s, \quad \boldsymbol{\omega}_{i_p,j_\ell} \ne \mathbf{1} \implies j_\ell - i_p \le n,$$

命题的证明至此完成。 □

6.3.2. 集合

$$s_m = p_{r-m+1}, \quad a'_{s_m} = a^{\xi_{\mathbf{s}}}_{s_m} - \epsilon_m, \quad a \in \{i, j\}, \quad 1 \le m \le r. \tag{6.3}$$

利用 (6.1)，我们有

$$0 < s_m - s_{m+1} = \xi_{\mathbf{s}}(s_{m+\epsilon_m}) - \xi_{\mathbf{s}}(s_{m+1-\epsilon_m}), \quad 1 \le m < r \tag{6.4}$$

$$s_m - s_{m+1} = 1 \iff a_{m-1} = a_{m+2}, \quad \text{for some } a \in \{i, j\}, \quad 2 \le m \le r-2. \tag{6.5}$$

引理。保留目前为止所建立的记号。则

$$\mathbf{s}_{\xi_{\mathbf{s}}} := ([i'_{s_1}, j'_{s_1}], \cdots, [i'_{s_r}, j'_{s_r}])$$

是 $\mathbf{S}^s_{\mathrm{alt}}$ 的素元，且 $(\mathbf{s}, \mathbf{s}^{\xi_{\mathbf{s}}})$ 满足 (5.1)-(5.3)。

证明。利用 (6.3) 和 (6.4)，容易验证下列不等式，并由此证明$\mathbf{s}_{\xi_{\mathbf{s}}} \in \mathbf{S}^s_{\mathrm{alt}}$ 是素元:

$$\begin{gathered}
a'_{s_{m+\epsilon_m}} > a'_{s_{m+1-\epsilon_m}}, \quad a \in \{i, j\}, \quad 1 \le p \le r-1, \\
j'_{s_m} - i'_{s_m} \ne j'_{s_p} - i'_{s_p}, \quad m \ne p, \\
i'_{s_{m+1-\epsilon_m}} < i'_{s_{m+\epsilon_m}} \le j'_{s_{m+1-\epsilon_m}} < j'_{s_{m+\epsilon_m}}, \quad 1 \le m \le r-1 \\
i'_{s_m} < i'_{s_{m+2}} < j'_{s_{m+2}} < j'_{s_m}, \quad i'_{s_m} \le i'_{s_{m+3}} < j'_{s_{m+3}} \le j'_{s_m}.
\end{gathered}$$

引理 3.1 给出

$$j'_{\max} = j'_{s_{1+\epsilon_1}}, \quad j'_{\min} = j'_{s_{r-1+\epsilon_r}}, \quad i'_{\min} = i'_{s_{2-\epsilon_1}}, \quad i'_{\max} = i'_{s_{r-\epsilon_r}}.$$

此外 r，因为 $(s_1, \ s_2) = (N(\mathbf{s}) \ N(\mathbf{s}) \ - 1)$ 且 $(s_{r-1}, \ s_r) = (2, \ 1)$，很容易验证 tha t

$$j'_{\min} = i'_{\max} \ \text{ and } \ j'_{\max} - i'_{\min} = N(\mathbf{s}) + 1. \tag{6.6}$$

令 $\mathbf{s}' = \mathbf{s}^{\xi_{\mathbf{s}}}$，由定义可知 $\epsilon_1 = \epsilon'_1$，因此 (5.1) 成立。注意，(3.1) 表明该对满足 (5.3)。接下来我们证明 (5.2) 成立；利用 (6.4)，注意到

$$\xi(s_p) + s_p = \xi(s_{p-1}) + s_{p-1} \ \text{ if } \ \epsilon_p = 0, \ \text{ and } \ \xi(s_p) - s_p = \xi(s_{p-1}) - s_{p-1} \ \text{ if } \ \epsilon_p = 1. \tag{6.7}$$

那么，若 $\epsilon_p = 0$，我们有

$$\begin{gathered}
j_{p-1} = j_{p+2} \overset{(6.5)}{\iff} s_p - s_{p+1} = 1 \overset{(6.4)}{\iff} \xi(s_p) - \xi(s_{p+1}) = 1 \\
\overset{(6.7)}{\iff} \xi(s_{p+2}) + s_{p+2} + 1 = \xi(s_{p-1}) + s_{p-1} - 1, \ \text{ i.e. } \ j'_{s_{p-1}} = j'_{s_{p+2}},
\end{gathered}$$

如所需。若 $\epsilon_p = 1$，则

$$\begin{gathered}
i_{p-1} = i_{p+1} \overset{(6.5)}{\iff} s_p - s_{p+1} = 1 \overset{(6.4)}{\iff} \xi(s_p) - \xi(s_{p+1}) = -1 \\
\overset{(6.7)}{\iff} \xi(s_{p+2}) - s_{p+2} - 1 = \xi(s_{p-1}) - s_{p-1} + 1 \ \text{ i.e. } \ i'_{s_{p-1}} = i'_{s_{p+2}}
\end{gathered}$$

由此完成证明。 □

例子。若$\mathbf{s}$ 如例 *6.1* 中所述，则$\mathbf{s}^{\xi_{\mathbf{s}}} = ([0,6], [-1,4], [2,5], [1,3], [3,4]) \in \mathbf{S}^s_{\mathrm{alt}} \cap \mathbb{I}^5_6$ 是素的。

6.3.3. 由引理 6.3.2 和定理 2 可知， $\mathcal{K}(\mathscr{C}_n(\mathbf{s}))$ 与 $\mathcal{K}(\mathscr{C}_{N(\mathbf{s})}(\mathbf{s}^{\xi_\mathbf{s}}))$ 同构，且该同构将素对象映射为素对象，将不可约模映射为不可约模。显然，只要证明范畴 $\mathscr{C}_{N(\mathbf{s})}(\mathbf{s}^{\xi_\mathbf{s}})$ 和 $\mathscr{C}_{\xi_\mathbf{s}}$ 相同，命题 6.3 即得证。只需证明

$$\mathbb{I}_{N(\mathbf{s})}(\xi_\mathbf{s}) = \mathbb{I}_{N(\mathbf{s})}(\mathbf{s}_{\xi_\mathbf{s}}). \tag{6.8}$$

我们首先验证 $\mathbb{I}_N(\xi_\mathbf{s}) \subset \mathbb{I}_N(\mathbf{s}^{\xi_\mathbf{s}})$。根据定义，有 $[i^\xi_{s_p} - \epsilon_p, j^\xi_{s_p} - \epsilon_p] = [i'_{s_p},\ j'_{s_p}]$，因此我们需要证明以下两个断言：

$$[i^\xi_{s_p} + \epsilon_p - 1, j^\xi_{s_p} + \epsilon_p - 1] \in \mathbb{I}_N(\mathbf{s}_{\xi_\mathbf{s}}), \tag{6.9}$$

$$s_p + 1 \neq s_{p-1} \implies [i^\xi_{s_p+1} - \epsilon, j^\xi_{s_p+1} - \epsilon] \in \mathbb{I}_N(\mathbf{s}_{\xi_\mathbf{s}}),\quad \epsilon \in \{0, 1\}. \tag{6.10}$$

利用 (6.4) 进行计算可得

$$[i^\xi_{s_1} + \epsilon_1 - 1, j^\xi_{s_1} + \epsilon_1 - 1] = [i'_{s_{2+\epsilon_1}}, j'_{s_{3-\epsilon_1}}],\quad [i^\xi_{s_r} + \epsilon_r - 1, j^\xi_{s_r} + \epsilon_r - 1] = [i'_{s_{r-2+\epsilon_r}}, j'_{s_{r-1-\epsilon_r}}]$$

对于 $1 < p < r$,

$$[i^\xi_{s_p} - 1, j^\xi_{s_p} - 1] = [i'_{s_{p+1}}, j'_{s_{p-1}}] \text{ if } \epsilon_p = 0, \text{ and } [i^\xi_{s_p}, j^\xi_{s_p}] = [i'_{s_{p-1}}, j'_{s_{p+1}}] \text{ if } \epsilon_p = 1.$$

现在很容易验证 (6.9) 成立。下面证明 (6.10)。设 $s_p - 1 \neq s_p$，或等价地设 $s_{p-1} - s_p = 2$; 若 $\epsilon_p = 0$，则根据 (6.1) 有 $\xi(s_p) - \xi(s_p + 1) = 1$，从而得到：

$$\begin{aligned}
2i^\xi_{s_p+1} = \xi(s_p + 1) - (s_p + 1) = \xi(s_p) - s_p - 2 &\overset{(6.7)}{=} \xi(s_{p+1}) - s_{p+1} - 2 = 2i'_{s_{p+1}},\\
2(i^\xi_{s_p+1} - 1) = \xi(s_p) - s_p - 4 = \xi(s_{p-1}) - s_{p-1} &\overset{(6.7)}{=} \xi(s_{p-2}) - s_{p-2} = 2i'_{s_{p-2}},\\
2j^\xi_{s_p+1} = \xi(s_p + 1) + (s_p + 1) = \xi(s_p) + s_p &= 2j'_{s_p},\\
2(j^\xi_{s_p+1} - 1) = \xi(s_p + 1) + (s_p + 1) - 2 = \xi(s_p) + s_p - 2 &\overset{(6.7)}{=} \xi(s_{p-1}) + s_{p-1} - 2 = 2j'_{s_{p-1}}.
\end{aligned}$$

现在可以直接验证，在这种情况下 (6.10) 成立。当 $\epsilon_p = 1$ 时情形类似，细节从略。

现在证明反向包含关系。若 $\epsilon_p = 0$，我们证明

$$\{[i'_{s_p}, j] \in \mathbb{I}_N(\mathbf{s}_{\xi_\mathbf{s}}) : j \in \{j'_{s_{p-1}}, j'_{s_p}, j'_{s_{p+1}}, j'_{s_{p+2}}\}\} \subset \mathbb{I}_N(\xi_\mathbf{s}).$$

观察可知这一结论成立，注意到 $[i'_{s_p}, j'_{s_{p+2}}] = [i^\xi_{s_{p+1}}, j^\xi_{s_{p+1}}]$，并且

$$[i'_{s_p}, j'_{s_{p-1}}] = \begin{cases} [i^\xi_{s_p-1}, j^\xi_{s_p-1}], & \text{if } s_p - 1 \neq s_{p-1},\\ [i^\xi_{s_{p+1}}, j^\xi_{s_{p+1}}], & \text{if } s_{p-1} = s_p - 1, \end{cases}$$

$$[i'_{s_p}, j'_{s_{p+1}}] = \begin{cases} [i^\xi_{s_{p+1}-1} - 1, j^\xi_{s_{p+1}-1} - 1], & \text{if } s_{p+1} - 1 \neq s_p,\\ [i^\xi_{s_{p+1}}, j^\xi_{s_{p+1}}], & \text{if } s_{p+1} - 1 = s_p, \end{cases}$$

类似地，若 $\epsilon_p = 1$，则可证明

$$\{[i'_{s_p}, j] \in \mathbb{I}_N(\mathbf{s}_{\xi_\mathbf{s}}) : j \in \{j'_{s_{p-2}}, j'_{s_{p-1}}, j'_{s_p}, j'_{s_{p+1}}\}\} \subset \mathbb{I}_N(\xi_\mathbf{s}),$$

由此完成命题 6.3 的证明。

References

[1] Matheus Brito 和 Vyjayanthi Chari。HL-模的张量积与 q-特征及单项范畴化。 *J. Éc. polytech. Math.*, 6:581–619，2019。[2] Matheus Brito 和 Vyjayanthi Chari。交替蛇模与行列式公式。 *Communications in Mathematical Physics* 406 9 218, 2025 ，（）：。

[3] Matheus Brito 和 Vyjayanthi Chari。量子仿射 A_n的支配 ℓ-权与 Weyl 模之间的映射。 *Journal of Algebra*, 687:352–379，2026。[4] Vyjayanthi Chari。辫群作用与张量积。 *Int. Math. Res. Not.*，（7）：357–382，2002。[5] Vyjayanthi Chari 和 Andrew Pressley。量子仿射代数。 *Comm. Math. Phys.* 142 2 261 283, ，（）：–1991。[6] Vyjayanthi Chari 和 Andrew Pressley。量子仿射代数及其表示。载于 *Representations of groups (Banff, AB, 1994)* 16 *CMS Conf. Proc.* 59 78 ，第 卷，页码–。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，1995。[7] Edward Frenkel 和 Nicolai Reshetikhin。量子仿射代数表示的 q-特征与 $\mathcal{W}$ *Recent developments in quantum affine algebras and related topics (Raleigh, NC, 1998)* 248 *Contemp. Math.* 163 205 -代数的变形。载于，第 卷，页码–。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，1999。[8] David Hernandez 和 Bernard Leclerc。簇代数与量子仿射代数。 *Duke Math. J.*，154 2 265 341，2010（）：–。[9] David Hernandez 和 Bernard Leclerc。以簇代数方法研究 Kirillov-Reshetikhin 模的 q-特征。 *Journal of the European Mathematical Society*，18，2013年3月。[10] Masaki Kashiwara、Myungho Kim、Se-jin Oh 和 Euiyong Park。单项范畴化与量子仿射代数。 *Compositio Mathematica*，156(5):1039–1077，2020。[11] Masaki Kashiwara、Myungho Kim、Se jin Oh 和 Euiyong Park。量子仿射代数上的模范畴的簇代数结构。 *Proceedings of the London Mathematical Society*，124(3):301–372，2022年3月。[12] Masaki Kashiwara、Myungho Kim、Se-jin Oh 和 Euiyong Park。量子仿射代数的 PBW 理论。*J. Eur. Math. Soc.*，26(7):2679–2743，2024。[13] Evgeny Mukhin 和 Charles A. S. Young。A 型 B q *Advances in Mathematics* 231 1119 1150, 2012 -特征的路径描述。，：–。[14] Katsuyuki Naoi。A 型的强对偶数据与扩展 T-系统。 *Transformation Groups*，2024。[15] Michela Varagnolo 和 Eric Vasserot。量子仿射代数的标准模。 *Duke Math. J.*，111 3 509 533，2002（）：–。

Departamento de Matematica, UFPR, Curitiba - PR - Brazil, 81530-015
Email address: mbrito@ufpr.br

Department of Mathematics, University of California, Riverside, 900 University Ave., River-side, CA 92521, USA*Email address*: chari@math.ucr.edu