arXiv:2601.20139v1 [math.PR] 28 Jan 2026

模型风险：静态对冲约束分布鲁棒优化方法

Nathan Sauldubois*

2026年1月29日

摘要

我们研究边缘分布和鞅约束下的模型风险与分布鲁棒优化（DRO）。本文自然延续了 Sauldubois & Touzi 的研究[25], ，该研究未解决的问题是：如何对到期日为第二期的普通期权进行静态对冲，以及如何采用涉及普通期权收益的对冲策略。我们将 Bartl, Drapeau, Obłój, & Wiesel [2]和 Bartl & Wiesel [3] 的结果推广到要求模型满足鞅耦合约束的情形。我们的方法依赖于隐函数定理的一个较弱版本，该定理使我们能够构造满足给定约束的测度族。我们给出了这些敏感性的闭式表达式，并刻画了基础过程取实数值时的对冲策略。

MSC2020。 49K45, 49Q22, 47J07。

关键词。 分布鲁棒优化、适应 Wasserstein 距离、最优传输、鞅最优传输、隐函数定理。

*纽约大学　　坦登工程学院 ns6982@n　　yu.edu

1 引言

通过分布鲁棒优化研究模型风险。 考虑一个准则 $g:\ \mathcal{P}(\mathbb{X}) \to \mathbb{R}$，其中空间为 $\mathbb{X}$。在许多情境下，我们希望在测度 g 处评估 μ，该测度可能代表由主体选择的模型，或通过校准方法确定的模型。无论是哪种情况，主体都不可避免地面临不确定性，这种不确定性可能源于合理模型的多样性，也可能是因为校准依赖于不完美的信息。这种被称为“奈特不确定性”的不确定性，由 Knight [19], 提出，已在经济学和决策理论中得到广泛研究。一个经典例子出现在随机优化中，此时准则具有如下形式$g(\mu) = \inf_{a\in A}\int_{\mathcal{X}} f(x,a)\mu(\mathrm{d}x)$。在这一设定中，$\mu$ 刻画环境中不确定性的分布，主体寻求一个行动 $a \in A$，使期望成本最小化。近年来，分布鲁棒优化（DRO）作为一种系统性方法应运而生，用于处理随机优化问题中的模型不确定性。在分布鲁棒优化中，主体与一个对手竞争，对手在给定的偏差集合 $D \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{X})$ 内扰动参考分布。这就得到如下极小极大形式

$$\inf_{a\in A}\sup_{\mu'\in D}\int_{\mathcal{X}} f(x,a)\mu'(\mathrm{d}x). \tag{1.1}$$

D 的选择至关重要，因为它决定了模型不确定性的范围和结构。关于分布鲁棒优化及其应用的全面综述，可参见 Rahimian & Mehrotra [24]、Kuhn, Shafiee, & Wiesemann [20], 和 Lin, Fang, & Gao [22] 对分布鲁棒优化的详尽回顾。在构造 D的众多方法中，基于最优传输准则的集合一直备受关注，其研究始于 Blanchet & Murthy [5]。本文聚焦于 p-Wasserstein距离及其 p-适应变体，并采用 Sauldubois & Touzi [25]提出的框架。针对 Wasserstein 型不确定集下的分布鲁棒优化，已有两种主要分析方法：将分布鲁棒优化问题 (1.1) 重写为有限维优化问题。这种方法已应用于 Zhang, Yang, & Gao[27], 、Ji & Lejeune [16], 、Blanchet & Murthy [6], 、Mohajerin Esfahani & Kuhn [23], ，而其因果变体则见 Han [14], 和 Jiang [17]。本文采用的另一种方法是敏感性分析。在此方法中，偏差集 D 定义为半径为 r的 Wasserstein球，并研究当 $r \to 0$时 (1.1) 的渐近行为。这种方法给出了易于处理的展开式，并揭示了稳健性方面的见解。该方法由 Bartl, Drapeau, Obłój, & Wiesel [2], 、Bartl & Wiesel [3], 以及 Jiang & Obłój [18], 发展而来，本文也采用这一视角。

通过受约束分布鲁棒优化进行模型风险对冲。 研究带约束的分布鲁棒优化（DRO）问题有两个主要原因。首先，从实践角度来看，在加入约束以限定所考虑的偏差范围时，完全舍弃模型校准过程中使用的所有信息是不现实的。此外，正如我们在 Sauldubois & Touzi [25], 中所讨论的，使用现有市场工具进行对冲可以降低风险敞口，从而有助于管理市场风险。通过对相应的对冲策略进行标准对偶化，稳健评估便转化为考虑同时满足鞅约束和/或边缘约束的邻近模型。后者代表了依据隐含波动率曲面所提供的当前市场信息进行校准。遵循鞅最优传输领域的文献，我们考虑以下两种情形：

- 买入并持有策略 $\mathfrak{H}_{\mathrm{M}} := \{h(X)\cdot(X_2 - X_1):\ h \in C_b^0(\mathbb{R}^d)\}$ 所生成的所有收益；
- 所有由到期日为 $T \in \{1,2\}$ 的普通期权收益产生的回报，构成零成本策略集合 $\mathfrak{H}_{\mathrm{mT}} := \{f(X_T) - \mu_T(f):\ f \in C_b^0(\mathbb{R}^d)\}$，其中 $\mu_T = \mu \circ X_T^{-1}$表示 μ 的第 T 个边缘分布。

当然，也存在其他工具。例如，还可以考虑 VIX 期货或 对数 合约，De Marco & Henry-Labordere [8]对此进行了研究。不过，本文不考虑这些工具。给定一组 $\mathfrak{H}$ 对冲工具以及 d 在 $\mathcal{P}(\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k)$ 上的距离，我们将上界和下界的模型分布鲁棒对冲问题定义如下

$$\overline{G}^{\mathfrak{H}}(r) := \inf_{\mathfrak{h}\in\mathfrak{H}} \sup_{\mathrm{d}(\mu,\mu')\le r} \{ \int g \mathrm{d}\mu' + \mu'(\mathfrak{h})\} \text{ and } \underline{G}^{\mathfrak{H}}(r) := \sup_{\mathrm{d}(\mu,\mu')\le r} \inf_{\mathfrak{h}\in\mathfrak{H}} \{ \int g \mathrm{d}\mu' + \mu'(\mathfrak{h})\}.$$

其中， $\mathfrak{H}$ 可以是 $\mathfrak{H}_{\mathrm{M}}$、 $\mathfrak{H}_{\mathrm{m}} := \mathfrak{H}_{\mathrm{m}_1} \cup \mathfrak{H}_{\mathrm{m}_2}$或 $\mathfrak{H}_{\mathrm{M}} \cup \mathfrak{H}_{\mathrm{m}}$。第二个问题是一个受约束分布鲁棒优化问题。具体而言，当对冲工具集仅限于买入并持有策略时，该问题属于 Sauldubois & Touzi [25] 和 Jiang & Obłój [18]的研究范围。值得注意的是，Lam[21] 研究了这样一种情形：对冲工具集由普通期权收益所产生的回报构成，且距离被 Kullback散度取代。然而，在 Sauldubois & Touzi [25] 中，我们将普通期权收益的到期日为 2、可用于部分对冲的情形留待后续研究。本文将研究这一问题。

我们的贡献：一种研究受约束分布鲁棒优化的新方法。事实证明，在 2–期设定下，研究偏差具有给定第二边缘分布的适应Wasserstein分布鲁棒优化问题颇为复杂。我们证明，对于任意一组对冲工具（或约束） $\mathfrak{H}$ ，若对所有 $\mathfrak{h} \in \mathfrak{H}$均有 $\mathbb{E}^{\mu}[\mathfrak{h}] = 0$ ，则其在零点处的导数满足

$$\overline{G}^{\mathfrak{H}\,\prime}(0) = \underline{G}^{\mathfrak{H}\,\prime}(0) = \inf_{\mathfrak{h}\in\mathfrak{H}} \|\partial_x^{\mathbf{d}}(g+\mathfrak{h})\|_{\mathbb{L}^{p'}(\mu)},$$

其中， $\partial_x^{\mathbf{d}}$ 是与$\mathbf{d}$相关的微分算子。我们提出了一种基于隐函数定理的受约束分布鲁棒优化新方法。与 Jiang & Obłój [18] 和 Sauldubois & Touzi [25]所研究的问题相比，该方法能够处理更广泛的约束分布鲁棒优化问题。此外，在对线性泛函导数的梯度施加稍弱的增长假设下，该方法还可恢复 Bartl, Drapeau, Obłój, & Wiesel [2] 的结果。随后，我们运用该方法计算函数泛函在鞅耦合约束下关于适应 Wasserstein 距离的敏感度。此外，我们还计算了耦合约束下概率测度集合上的函数泛函敏感度，这也是 Sauldubois & Touzi [25]留下的一个开放问题。

这一新方法的核心思想在于找到一个良好的近似

$$\mathrm{argmax}_{\mu',\mathrm{d}(\mu,\mu')\le r} \inf_{\mathfrak{h}\in\mathfrak{H}} \{ \int c \mathrm{d}\mu' + \mu'(\mathfrak{h})\}.$$

Bartl, Drapeau, Obłój, & Wiesel [2], Bartl & Wiesel [3] 以及 Sauldubois & Touzi [25] 所考虑的自然候选形式为 $\mu^{rT^{\mathfrak{h}}} := \mu \circ (X + rT^{\mathfrak{h}})$，其中映射 $T^{\mathfrak{h}}$ 由极小化子 $\mathrm{argmin}_{\mathfrak{h}\in\mathfrak{H}} \|\partial_x^{\mathbf{d}}(c+\mathfrak{h})\|_{\mathbb{L}^{p'}(\mu)}$定义。然而，与 Sauldubois & Touzi [25], 的情形不同，这一自然候选通常不满足与 $\mathfrak{H}$相关的约束，而在 Sauldubois & Touzi [25]中则是如此。为克服这一困难，我们采用隐函数定理的一种变体来求得.....的精确估计

$$\mathbf{d}(\mu^{rT^{\mathfrak{h}}}, \mathfrak{H}^{\perp}) = \inf_{\substack{\nu\in\mathcal{P}(\mathbb{X}) \\ \text{for all } \mathfrak{h}\in\mathfrak{H},\, \mathbb{E}^{\nu}[\mathfrak{h}]=0}} \mathbf{d}(\nu, \mu^{rT^{\mathfrak{h}}}).$$

最后，我们在第4 节展示我们的结果，并呈现一阶对冲策略，以及巴舍利耶模型和布莱克-斯科尔斯模型中的敏感度。我们发现，将第二边缘分布加入约束后，敏感度会显著降低。还值得注意的是，将普通期权收益纳入对冲策略的可能性，会显著影响买入并持有对冲策略。

2 记号与定义

在本文中，设 $p>1$ 为一个实数，$p'=\frac{p}{p-1}$ 表示 p的共轭指数。对于某个整数 $d\geq 1$，记 $S:=\mathbb{R}^d$ 和 $\mathbb{X}:=S\times S$，二者均赋予相应的标准欧几里得结构及由 $x\longmapsto |x|:=\sqrt{x\cdot x}$定义的相关范数。对于 $k\in\mathbb{N}$，令 $C_b^k(\mathbb{X},\mathbb{R})$ 表示从 $\mathbb{X}$ 到 $\mathbb{R}$ 的函数空间，其中函数 k–次连续可微，且所有不超过 k 阶的导数均有界。对于子集$\mathcal{E}\subset C_b^0(\mathbb{X},\mathbb{R})$（有界连续函数），我们定义

$$\mathcal{E}^{\perp}:=\{\mu'\in\mathcal{P}(\mathbb{X}),:\int f\mathrm{d}\mu'=0\text{ for all }f\in\mathcal{E}\}. \tag{2.2}$$

我们将 $\mathbb{X}$ 的一个元素写作 $x:=(x_1,\ x_2)\in\mathbb{X}$，并定义

$$\mathbf{N}(x):=\frac{\nabla(|\cdot|^{p'})(x)}{p'}=\frac{x}{|x|^{2-p'}},\mathbf{N}_{\mathrm{ad}}(x):=\begin{bmatrix}\mathbf{N}(x_1)\\ \mathbf{N}(x_2)\end{bmatrix}\text{ and }\mathbf{N}_{\mathbf{d}}:=\begin{cases}\mathbf{N}\text{ if }\mathbf{d}=\mathbb{W}_p\\ \mathbf{N}_{\mathrm{ad}}\text{ if }\mathbf{d}=\mathbb{W}_p^{\mathrm{ad}}\end{cases}. \tag{2.3}$$

下面给出距离 $\mathbb{W}_p$ 和 $\mathbb{W}_p^{\mathrm{ad}}$ 的定义。对于 $i=1,\ 2$，$\mathbf{N}(x_i):=\frac{1}{p'}\nabla(|\cdot|^{p'})(x_i)=\frac{1}{|x_i|^{2-p'}}x_i$。我们有意将记号 $\mathbf{N}(x_i)$ 和 $\mathbf{N}(x)$ 混用，因为根据变量的上下文可以确定 $\mathbf{N}$ 所定义的空间。注意，对于 $d=1$，$\mathbf{N}(x)=\mathrm{sgn}(x)|x|^{p'-1}$。

定义 2.1。设 $(E,|\cdot|)$ 是一个赋范向量空间。若函数 $f:\ E\to\mathbb{R}$ 满足 $f(x)\xrightarrow[|x|\to+\infty]{}+\infty$，则称其为强制函数。

设$\mathcal{P}(E)$ 表示欧几里得空间的子集 E 上所有概率测度 μ的集合。我们用 $\mathcal{P}_p(E)$ 表示其中具有有限 p–阶矩的子集：

$$\mathcal{P}_p(E):=\{\mu\in\mathcal{P}(\mathbb{X}):\ \mathbb{E}^{\mu}[|X|^p]<\infty\},\ \text{ for all }p\geq 1.$$

我们定义投影映射（X,X'），其在 $\mathbb{X}\times\mathbb{X}$ 上定义为 $X(x,x')=x$ 和 $X'(x,x')=x'$，对所有 $x,x'\in\mathbb{X}$ 均成立。对于 $\mu,\mu'\in\mathcal{P}(\mathbb{X})$，我们定义所有耦合的集合

$$\Pi(\mu,\mu'):=\{\pi\in\mathcal{P}(\mathbb{X}\times\mathbb{X}):\pi\circ X^{-1}=\mu\text{ and }\pi\circ X'^{-1}=\mu'\}.$$

p–Wasserstein 距离定义为 μ 与 μ' 之间的距离：

$$\mathbb{W}_p(\mu,\mu'):=\inf_{\pi\in\Pi(\mu,\mu')}\mathbb{E}^{\pi}\left[|X-X'|^p\right]^{\frac{1}{p}},\ \text{ for all }\ \mu,\mu'\in\mathcal{P}_p(\mathbb{X}).$$

本文中，定义在$\mathcal{P}_p$ 上的映射的连续性均指相应的 p–Wasserstein 距离 $\mathbb{W}_p$。与 μ 的 Wasserstein 距离为 r 的概率测度集合记为

$$B_{\mathbb{W}_p}(\mu,r):=\{\mu'\in\mathcal{P}(\mathbb{X}):\mathbb{W}_p(\mu,\mu')\leq r\}.$$

在动态情形中，我们使用定义在 $\mathbb{X}\times\mathbb{X}$ 上的投影映射 X_i、X_i' 提取时间分量：

$$X_i(x,x')=x_i\text{ and }X_i'(x,x')=x_i',\ i=1,2,\text{ for all }(x,x')\in\mathbb{X}\times\mathbb{X}.$$

我们定义 $L^p(\mu):=\{\varphi\text{ 可测，满足 }\int_{\mathbb{X}}|\varphi|^p\mathrm{d}\mu<\infty\}$，而 $\mathbb{L}^p(\mu)$ 随后定义为 $L^p(\mu)$ 关于等价关系 μ–几乎处处相等的商。注意，$\mathbb{L}^p(\mu)$ 是巴拿赫空间，而 $L^p(\mu)$ 不是。对于 $\mathbb{L}^p(\mu)$ 中的一个元素 $T:\mathbb{X}\to\mathbb{X}$，定义推前测度 $\mu^T\in\mathcal{P}(\mathbb{X})$ 为

$$\mu^T:=\mu\circ(X+T)^{-1}. \tag{2.4}$$

定义 2.2. 概率测度 $\mathbb{P} \in P(\mathbb{X}\times\mathbb{X})$ 是因果的，如果 $\mathbb{F}^X := \sigma(X)$ 与 $\mathbb{F}^{X'} := \sigma(X')$ 相容，即对于所有有界博雷尔可测的 $f\colon \mathbb{X}\to\mathbb{R}$ 和 $g\colon S\to\mathbb{R}$,

$$\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[f(X_1,X_2)g(X_1')|X_1] = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[f(X_1,X_2)|X_1]\,\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[g(X_1')|X_1].$$

我们引入双因果耦合的集合

$$\Pi^{\mathrm{bc}}(\mu,\nu) := \{\pi\in\Pi(\mu,\nu) \text{ such that } \pi \text{ and } \pi\circ(X',X)^{-1} \text{ are causal}\},$$

以及相应的适应 Wasserstein 距离

$$\mathbb{W}_p^{\mathrm{ad}}(\mu,\mu') := \inf_{\pi\in\Pi^{bc}(\mu,\mu')} \mathbb{E}^{\pi}\Big[\big|X-X'\big|^p\Big]^{\frac{1}{p}}, \quad \text{for all} \quad \mu,\mu'\in\mathcal{P}_p(\mathbb{X}).$$

我们将半径为 r 的相应球记为

$$B_{\mathbb{W}_p^{\mathrm{ad}}}(\mu,r) := \{\mu'\in\mathcal{P}_p(\mathbb{X}) : \mathbb{W}_p^{\mathrm{ad}}(\mu,\mu')\le r\}.$$

我们引入以下记号。对于 $u\in C^1(\mathbb{X},\ \mathbb{R})$，我们对 $i=1,\ 2, \mathbb{E}_i^{\mu}[u] := \mathbb{E}^{\mu}[u(X)|X_i]$ 进行定义。此外，对于 $\mathbf{d}\in\{\mathbb{W}_p,\ \mathbb{W}_p^{\mathrm{ad}}\}$，定义相应的梯度为 $\partial_x^{\mathbf{d}} := \partial_x$，若 $\mathbf{d}=\mathbb{W}_p$，以及 $\partial_x^{\mathbf{d}}u :$ $= \begin{pmatrix}\mathbb{E}_1^{\mu}[\partial_{x_1}u]\\ \partial_{x_2}u\end{pmatrix} =: \partial_x^{\mathrm{ad}}u$，若 $\mathbf{d}=\mathbb{W}_p^{\mathrm{ad}}$。最后定义

$$J_1 := \begin{bmatrix}\mathrm{Id}_S\\ 0\end{bmatrix}, \quad J_2 := \begin{bmatrix}0\\ \mathrm{Id}_S\end{bmatrix} \quad \text{and} \quad J := J_2 - J_1. \tag{2.5}$$

我们注意到，当 $d=1, J_1 = e_1 = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, J_2 = e_2 = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ 和 $J = J_2 - J_1 = \begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$ 时。

定义 2.3. 我们称 $\varphi :\ \mathbb{X}\to\mathbb{X}$ 是适应的，当且仅当对所有 $x\in\mathbb{X}, \varphi(x) =(\varphi_1(x_1)\ \varphi_2(x_1,x_2))$

接下来，我们考虑 $\mathbb{L}^p{}_{\mathrm{ad}}(\mu)$

$$\mathbb{L}^p_{\mathrm{ad}}(\mu) := \{\varphi\in\mathbb{L}^p(\mu) \text{ such that } \varphi \text{ is adapted}\} \tag{2.6}$$

赋予范数 $\|T\|^p_{\mathbb{L}^p{}_{\mathrm{ad}}(\mu)} := \|T_1\|^p_{\mathbb{L}^p(\mu_1)} + \|T_2\|^p_{\mathbb{L}^p(\mu)}$。在本文余下部分，

$$\mathbb{L}^p_{\mathbf{d}}(\mu) := \mathbb{L}^p(\mu) \text{ if } \mathbf{d}=\mathbb{W}_p, \text{ and } \mathbb{L}^p_{\mathbf{d}}(\mu) := \mathbb{L}^p_{\mathrm{ad}}(\mu) \text{ if } \mathbf{d}=\mathbb{W}_p^{\mathrm{ad}}. \tag{2.7}$$

对于 $p=\infty$，我们还定义

$$\mathbb{L}^{\infty}_{\mathrm{loc}}(\mu_1) := \big\{f : S\to\mathbb{R} \,\text{measurable, s.t for all } K\subset S \text{ compact}, f\mathbb{1}_K\in\mathbb{L}^{\infty}(\mu_1)\big\}. \tag{2.8}$$

最后，对于子集 $U\subset\mathcal{P}_p(\mathbb{X})$，定义 μ 与 U 之间的距离为

$$\mathbf{d}(\mu,U) := \inf_{u\in U}\mathbf{d}(\mu,u). \tag{2.9}$$

在本文中，我们考虑函数 $g:\ \mathcal{P}_p(\mathbb{X})\longrightarrow\mathbb{R}$，它具有如下意义上的适当光滑性。若函数一致有界于某个常数 C 乘以 $C(1+|x|^p)$，则称其具有 $p-$多项式增长。

定义 2.4。 我们称 g 存在线性泛函导数，如果存在连续函数 $\delta_m g:\ P_p(\mathbb{X})\times\mathbb{X}\longrightarrow\mathbb{R}$，其关于 x 具有 $p-$多项式增长，且关于 m 局部一致；使得对所有 μ、$\mu'\in P_p(\mathbb{X})$，并记 $\bar{\mu}^\lambda:=\mu+\lambda(\mu'-\mu)$，有

$$\frac{g(\bar{\mu}^\lambda)-g(\mu)}{\lambda}\longrightarrow\langle\delta_m g(\mu,x),\mu'-\mu\rangle:=\int_{\mathbb{X}}\delta_m g(\mu,x)(\mu'-\mu)(dx),\ \ as\ \lambda\searrow 0.$$

显然，线性泛函导数只定义到一个常数，而该常数在本文中始终无关紧要。在线性情形下，若 $g(\mu)=\int_{\mathbb{X}}f\mathrm{d}\mu$，其中某个连续映射 f 具有p-多项式增长，则线性泛函导数为常值映射（取值于 μ） $\delta_m g(\mu,x)=f(x)$对所有 $\mu\in\mathcal{P}_p(\mathbb{X}),\ x\in\mathbb{X}$均成立。我们回顾一下，在满足一定技术条件时，Lions 导数与 Wasserstein 梯度一致。因此，它可表示为 $\partial_x\delta_m$，参见 Carmona 与 Delarue[7]。此外，该定义等价于存在这样一个连续函数 $\delta_m g$满足：

$$g(\mu')-g(\mu)=\int_0^1\int_{\mathbb{X}}\delta_m g(\bar{\mu}^\lambda,x)(\mu'-\mu)(dx)d\lambda,\ \ \text{for all}\ \ \mu,\mu'\in\mathcal{P}_p(\mathbb{X}).$$

注 2.5。 本文中，我们始终假设 $\mathbb{X}=S\times S$，无论是在 $p-$Wasserstein 情形还是 $p-$适应的 Wasserstein 情形。这样做是为了清晰起见：由于记号已经十分繁杂，若根据所考虑的距离改变底层空间，只会徒增困惑。然而，在经典 Wasserstein 情形下，没有理由将 $\mathbb{X}$ 限制为乘积空间。因此，第3.1 小节和第5.1 小节中的所有结果都可以推广到任意有限维 $\mathbb{X}$，论证思路与本文所述相同。

3 主要结果

我们将结果分为四个部分。首先，研究在一般约束下，针对适应 Wasserstein 距离和经典 Wasserstein 距离的分布鲁棒优化（DRO）的敏感度。这一设定也为介绍我们的新方法提供了自然的背景。接下来，我们纳入边缘约束，然后是鞅耦合约束，最后将结果推广至美式期权。

假设 3.1。 映射 g 具有线性泛函导数，使得 $\delta_m g$ 在 x中 C^1，且 $\partial_x\delta_m g$ 联合连续，其中 $(p-1)-$关于 $x-$变量具有多项式增长，且这种增长在 $m-$变量的局部范围内成立。

3.1 有限矩与条件分布约束

Let $\varphi:\ \mathcal{P}(\mathbb{X})\to\mathbb{R}^k$ 且 $\psi:\ \mathbb{X}\to\mathbb{R}^l$。对于 $h\in C_b^0(S,\mathbb{R}^k)$ 和 $x=(x_1,x_2)\in S\times S$，定义

$$h^{\otimes\psi}(x)=h(x_1)\cdot\psi(x),$$

并且还设 $\mathcal{E}_\psi:=\{h^{\otimes\psi},\ \ h\in C_b^1(S,\ S)\}$。注意，根据定义（2.2），有 $\mu'\in\mathcal{E}_\psi^\perp$当且仅当 $\mathbb{E}_1^{\mu'}[\psi]=0$。

注 3.2。 • 例如，如果在分布鲁棒优化中加入均值约束，则可以取 $\varphi(\mu)=\int x\mu(\mathrm{d}x)$。

• 类似地，对于条件矩约束，对于 $x=(x_1,\ x_2)$，可以选择 $\psi(x)=x_2-x_1$，这对应于鞅约束。

对于 $\mathbf{d} \in \{\mathbb{W}_p,\ \mathbb{W}_p^{\mathrm{ad}}\}$，定义以下约束分布鲁棒优化问题：

$$\overline{G}_{\mathbf{d}}(r) := \inf_{(\lambda,f)\in\mathbb{R}^k\times\mathcal{E}_\psi} \sup_{B_{\mathbf{d}}(\mu,r)} g(\mu') + \lambda\cdot\varphi(\mu') + \int f \mathrm{d}\mu' \text{ and } \underline{G}_{\mathbf{d}}(r) := \sup_{\mu'\in B_{\mathbf{d}}^{\varphi,\psi}(\mu,r)} g(\mu'),$$

其中 $B^{\varphi,\psi}{}_{\mathbf{d}}(\mu,r) := B_{\mathbf{d}}(\mu,r) \cap \varphi^{-1}(\{0\}) \cap \mathcal{E}_\psi^\perp$。对于 $A, B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$，当且仅当 $\lambda_{\min}(A-B) \geq 0$ 时，我们记作 $A \geq B$。现在我们引入以下两个假设。

假设 $\mathrm{A}^{\mathbb{W}_p}$。 $\psi = 0$ 且 $\mathbb{E}^\mu\Big[(\partial_x\delta_m\varphi)\big(\frac{\partial_x\delta_m\varphi}{|\partial_x\delta_m\varphi|^{2-p'}}\big)^\intercal\Big] \geq c$ 恒等算子 对某个 $c>0$成立。

假设 $\mathrm{A}^{\mathbb{W}_p^{\mathrm{ad}}}$。 (i) 测度 μ 满足 $\mathbb{E}_1^\mu[|X_2|] \in \mathbb{L}^\infty_{\mathrm{loc}}(\mu_1)$。

(ii) ψ 是一个 C^2 函数，其一阶和二阶导数有界，其中， $\mathbb{E}_1^\mu[\psi] = 0$.

(iii) 矩阵 $\mathbb{E}_1^\mu[(\partial_{x_2}\psi)(\partial_{x_2}\psi)^\intercal] \geq c$ 恒等算子 μ_1-几乎处处成立，对某个 $c>0$。

(iv) 存在 $c>0$，使得对所有 $z\in\mathbb{R}^l, h\in\mathbb{L}^{p'}(\mu_1)$，

$$\|\partial_x^{\mathrm{ad}}\delta_m(\lambda\cdot\varphi) + \partial_x^{\mathrm{ad}}\psi^\intercal h\|_{\mathbb{L}^{p'}(\mu)} \geq c(|\lambda| + \|h\|_{\mathbb{L}^{p'}(\mu)}).$$

(v) 下列 $k\times k$ 矩阵可逆：

$$H := \mathbb{E}^\mu\Big[\Lambda\mathbf{N}^{\mathrm{ad}}(\Lambda)^\intercal - (\partial_{x_2}\delta_m\varphi)(\partial_{x_2}\psi)^\intercal\mathbb{E}_1^\mu[(\partial_{x_2}\psi)(\partial_{x_2}\psi)^\intercal]^{-1}\mathbb{E}_1^\mu\big[\partial_x\psi\mathbf{N}^{\mathrm{ad}}(\Lambda)^\intercal\big]\Big],$$

其中 $\Lambda := \partial_x^{\mathrm{ad}}\delta_m\varphi$ 且 $\mathbf{N}^{\mathrm{ad}}$ 由方程 (2.3)定义。

我们先给出一个命题，用于估计测度 $\mu^{r\Theta}$ 与集合 $\varphi^{-1}(\{0\})\cap\mathcal{E}_\psi^\perp$之间的距离。该估计对于计算所需的敏感度至关重要，其依据是一个基于隐函数定理的论证。定义如下算子

$$\mathcal{L}_{\varphi,\psi}^{\mathbf{d}} : \Theta\in\mathbb{L}_{\mathbf{d}}^p(\mu) \mapsto \begin{pmatrix}\mathbb{E}^\mu[(\partial_x^{\mathbf{d}}\delta_m\varphi)\Theta]\\ \mathbb{E}_1^\mu[(\partial_x^{\mathbf{d}}\psi)\Theta]\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^k\times\mathbb{L}^p(\mu_1). \tag{3.10}$$

命题 3.3. 固定 $\mathbf{d}\in\{\mathbb{W}_p,\mathbb{W}_p^{\mathrm{ad}}\}$。设 φ 满足假设 *3.1*, ψ 且 μ 满足假设 $\mathrm{A}_{\mathbf{d}}$，并且 Θ 是一个紧支撑 C^1 函数，定义在 $\mathbb{L}^p{}_{\mathbf{d}}(\mu)$中，由 (2.7)定义。则存在 $C>0$ 使得下列结论成立：

$$\limsup_{r\to 0}\frac{1}{r}\mathbf{d}(\mu^{r\Theta}, \varphi^{-1}(\{0\})\cap\mathcal{E}_\psi^\perp) \leq C\|\mathcal{L}_{\varphi,\psi}^{\mathbf{d}}(\Theta)\|, \tag{3.11}$$

其中 $\mathcal{L}_{\varphi,\psi}^{\mathbf{d}}$ 由 (3.10) 定义，且

$$\|\mathcal{L}_{\varphi,\psi}^{\mathbf{d}}(\Theta)\| = |\mathbb{E}^\mu[(\partial_x^{\mathbf{d}}\delta_m\varphi)\Theta]| + \|\mathbb{E}_1^\mu[(\partial_x^{\mathbf{d}}\psi)\Theta]\|_{\mathbb{L}^p(\mu_1)}.$$

命题 3.4。 设 $\mathbf{d}\in\{\mathbb{W}_p,\mathbb{W}_p^{\mathrm{ad}}\}$，设 ψ 满足假设 $\mathrm{A}_{\mathbf{d}}$， φ 且 g 满足假设*3.1*，其中 $\varphi(\mu)=0$。则映射 $G_{\mathbf{d}}$ 和 $G_{\mathbf{d}}$ 在 0处均可微，并且有：

$$\overline{G}_{\mathbf{d}}{}'(0) = \underline{G}_{\mathbf{d}}{}'(0) = \inf_{(\lambda,h)\in\mathbb{R}^k\times\mathbb{L}^{p'}(\mu_1)} U_{\mathbf{d}}(\lambda,h)^{1/p'}, \tag{3.12}$$

其中 $U_{\mathbf{d}}$ 由以下方式定义 $U_{\mathbf{d}}(\lambda,h)$: $= \|\partial_x^{\mathbf{d}}\delta_m(g+\lambda\cdot\varphi) + (\partial_x^{\mathbf{d}}\psi)^\intercal h\|_{\mathbb{L}^{p'}(\mu)}^{p'}$。此外， $U_{\mathbf{d}}$ 是严格凸、连续且强制的（见定义 *2.1*）。因此，优化问题 (3.12) 存在唯一解 $(\hat\lambda,\hat h)$，该解由一阶条件刻画

$$\mathcal{L}_{\varphi,\psi}^{\mathbf{d}}(T_{\mathbf{d}}) = 0 \text{ where } T_{\mathbf{d}} := \frac{1}{c}\mathbf{N}_{\mathbf{d}}(\partial_x^{\mathbf{d}}\delta_m(g+\hat\lambda\cdot\varphi) + (\partial_x^{\mathbf{d}}\psi)^\intercal\hat h), \tag{3.13}$$

$L_{\varphi,\ \psi}^{\mathbf{d}}$ 由(3.10) 定义， c 是满足 $\|T_{\mathbf{d}}\|_{\mathbb{L}^p(\mu)} = 1$的唯一常数。在$p=2$的情况下，

- 对于 $\mathbf{d}=\mathbb{W}_2$，我们得到 $\hat{\lambda}=-\mathbb{E}^{\mu}[(\partial_x\delta_m\varphi)(\partial_x\delta_m\varphi)^{\intercal}]^{-1}\mathbb{E}^{\mu}[(\partial_x\delta_m\varphi)\partial_x\delta_m g]$ 和 $\hat{h}=0$。
- 对于$\mathbf{d}=\mathbb{W}_2^{\mathrm{ad}}$，我们得到

$$\mathbb{E}^{\mu}[(\partial_x^{\mathrm{ad}}\delta_m\varphi)(\partial_x^{\mathrm{ad}}\delta_m\varphi)^{\intercal}]\hat{\lambda}+\mathbb{E}^{\mu}[(\partial_x^{\mathrm{ad}}\delta_m\varphi)(\partial_x^{\mathrm{ad}}\psi)^{\intercal}\hat{h}]=-\mathbb{E}^{\mu}[(\partial_x^{\mathrm{ad}}\delta_m\varphi)\partial_x^{\mathrm{ad}}\delta_m g]$$
$$\mathbb{E}_1^{\mu}[(\partial_x^{\mathrm{ad}}\delta_m\psi)(\partial_x^{\mathrm{ad}}\delta_m\psi)^{\intercal}]\hat{h}+\mathbb{E}_1^{\mu}[(\partial_x^{\mathrm{ad}}\delta_m\psi)(\partial_x^{\mathrm{ad}}\varphi)^{\intercal}]\hat{\lambda}=-\mathbb{E}_1^{\mu}[(\partial_x^{\mathrm{ad}}\delta_m\psi)\partial_x^{\mathrm{ad}}\delta_m g].$$

注 3.5。 • 若 $\mathbf{d}=\mathbb{W}_p$，则可得到 Bartl, Drapeau, Obłój, & Wiesel 的定理 15 [2]，因为 $\psi=0$。在他们的论文中，他们通过紧致性论证证明了这一点。具体而言，他们降低了目标函数的多项式增长以实现紧致性，从而能够应用 Fan 极小极大定理 Fan [11] 并使用 Gamma 收敛论证。我们的方法避免了对 $\partial_x\delta_m\varphi$ 和 $\partial_x\delta_m g$增长性的额外假设。

• 假设 $\mathrm{A}\mathbb{W}_{\mathrm{ad}p}$ (iv) 确保约束中不存在冗余。例如，如果 $\psi(x_1,x_2)=x_2-x_1$ 和 $\varphi(\mu)=\int x_2-x_1\mu(\mathrm{d}x)$，则该假设不成立，因为满足鞅条件意味着 X_1 和 X_2具有相同的均值。

• 命题 3.4 的结论在仅对 φ 或 ψ施加约束时也成立，前提是对非冗余条件 $\mathrm{A}\mathbb{W}\mathrm{ad}_p$ (iv) 作适当调整。若 $\varphi=0$，$\mathrm{A}\mathbb{W}\mathrm{ad}_p$ (iv) 可简化为：对于所有 $h\in\mathbb{L}^{p\prime}(\mu_1)$，$\|\partial\mathrm{ad}_x\ \psi^{\intercal}h\|_{\mathbb{L}^p}{}'(\mu)\geq c\|h\|_{\mathbb{L}^p}{}'(\mu)$，且可删除条件 $\mathrm{A}\mathbb{W}\mathrm{ad}_p$ (v)。若 $\psi=0$，条件 $\mathrm{A}\mathbb{W}\mathrm{ad}_p$ (iv) 可简化为 $\mathbb{E}^{\mu}[(\partial\mathrm{ad}_x\ \delta_m\varphi)\mathrm{Nad}(\partial\mathrm{ad}_x\ \delta_m\varphi)^{\intercal}]\geq c\mathrm{Id}$，且可删除条件 $\mathrm{A}\mathbb{W}\mathrm{ad}_p$ (i)-(iii)-(v)。

• 命题 3.4 中，$(\hat{\lambda},\hat{h})$ 这一对的唯一性应理解为在 $\mathbb{R}^k\times\mathbb{L}^p(\mu_1)$ 中成立；尤其是，分量 h 仅在 μ_1-几乎处处相等的意义下唯一。
• 如果 ψ 是线性的，则不再需要条件 $\mathrm{A}\mathbb{W}_{\mathrm{ad}p}$ (i) 。在这种情况下，令 $\psi(x_1,\ x_2)=x_2-x_1$，即可得到 Jiang & Obłój 的结果以及 Sauldubois & Touzi 的命题 [18] 和命题3.3。 [25]，即

$$\overline{G}_{\mathrm{ad}}^{\mathrm{M}}{}'(0)=\underline{G}_{\mathrm{ad}}^{\mathrm{M}}{}'(0)=\inf_{h\in\mathbb{L}^{p'}(\mu)}\|\partial_x^{\mathrm{ad}}\delta_m g+Jh\|_{\mathbb{L}^{p'}(\mu)},$$

其中 J 由式（2.5）定义。 • 条件$\mathrm{A}^{\mathbb{W}_p^{\mathrm{ad}}}$(v) 本质上是技术性的。例如，取$\psi(x_1,\ x_2)=x_2-x_1$，$\varphi(\mu'):=\int\varphi(x)\mu'(\mathrm{d}x)$并且 $p=2$，$H=-\mathbb{E}^{\mu}[\mathbb{E}_1^{\mu}[\partial_{x_1}\varphi]\mathbb{E}_1^{\mu}[\partial_{x_1}\varphi]^{\intercal}]$因此 $\mathrm{A}^{\mathbb{W}_p^{\mathrm{ad}}}$(v)在此情况下是一个非冗余条件。
• 也可以考虑相对于 p–因果 Wasserstein 距离的偏差，该距离$\mathbf{d_c}$对 μ，$\mu\prime\in\mathcal{P}_p(\mathbb{X})$ 定义为

$$\mathbf{d_c}(\mu,\mu')=\inf_{\pi\in\Pi_{\mathbf{c}}(\mu,\mu')}\mathbb{E}^{\pi}[|X-X'|^p],$$

以及

$$\overline{G}_{\mathbf{c}}(r):=\sup_{\mu'\in B_{\mathbf{dc}}^{\varphi,\psi}(\mu,r)}g(\mu')\ \text{ and }\ \underline{G}_{\mathbf{c}}(r):=\inf_{(\lambda,f)\in\mathbb{R}^k\times\mathcal{E}_{\psi}}\sup_{B_{\mathbf{dc}}(\mu,r)}g(\mu')+\lambda\cdot\varphi(\mu')+\int f\mathrm{d}\mu'.$$

在这种情况下，$G_{\mathbf{c}}$ 和 $G_{\mathbf{c}}$ 在0 处均可微，且满足与命题3.4相同的条件，但条件 $\mathbb{W}_p^{\mathrm{ad}}$(v)可以省略。此外，

$$\overline{G}_{\mathbf{c}}{}'(0)=\underline{G}_{\mathbf{c}}{}'(0)=\overline{G}_{\mathbb{W}_p^{\mathrm{ad}}}{}'(0)=\underline{G}_{\mathbb{W}_p^{\mathrm{ad}}}{}'(0).$$

• 先前的结果与受约束分布鲁棒优化领域的文献（[18]，[2]，以及 Sauldubois & Touzi [25]）一致。与往常一样，上界很容易推导。主要困难在于证明下界。沿用该主题文献中确立的方法，自然可以考虑由位移传输映射诱导的测度族

$\mu^{r T_{\mathbf{d}}}$（见定义（2.4））。然而，该测度族并不属于 $\varphi^{-1}(\{0\}) \cap \mathcal{E}_{\psi}^{\perp}$，除非是在非常特殊的情形下（例如适应性瓦瑟斯坦敏感度的鞅情形）。本文的贡献在于证明，尽管约束未得到满足，测度 $\mu^{r T_{\mathbf{d}}}$ 仍接近 $\varphi^{-1}(\{0\}) \cap \mathcal{E}_{\psi}^{\perp}$。这一思想将在下一小节中再次加以运用。

• 在该命题中，我们考虑满足 $\|T\mathbf{d}\|_{\mathbb{L}^p(\mu)} = 1$ 的 c。不存在此类 c 的情形是指 $\mathrm{Nd}(\partial \mathbf{d}_x \delta_m(g + \hat{\lambda} \cdot \varphi) + (\partial \mathbf{d}_x \psi)^{\intercal} \hat{h}) = 0$，因此 $\inf_{(\lambda,h)\in\mathbb{R}^k \times \mathbb{L}^{p'}(\mu_1)} U\mathbf{d}(\lambda, h) = 0$。在这种情况下，$G\mathbf{d}$ $G\mathbf{d}$ 的可微性显而易见；参见 Sauldubois & Touzi 的备注6.3 [25]。此处及本文其余部分，我们均默认存在这样的 a c。

3.2 一维情形下的静态对冲/边缘约束

现在我们聚焦于一维情形 $d = 1$，因此 $S = \mathbb{R}$。对于 $\mu \in \mathcal{P}_p(\mathbb{X})$，相应的边缘分布记为 $\mu_i = \mu \circ X_i^{-1}$，其中 $i = 1,2$。我们定义：

$$\Pi_i(\mu_i) := \{\mu' \in \mathcal{P}(\mathbb{X}) : \mu' \circ X_i^{-1} = \mu_i\} \text{ for } i = 1, 2, \tag{3.14}$$

以及 $\Pi(\mu_1, \mu_2) := \Pi_1(\mu_1) \cap \Pi_2(\mu_2)$。回顾一下，对于 $\mu \in \mathcal{P}_p(\mathbb{X})$，我们有

$$\mu' \in \Pi_i(\mu_i) \quad \text{if and only if} \quad \int_{\mathbb{X}} f(x_i)\mu'(\mathrm{d}x) = \int_S f(x_i)\mu_i(\mathrm{d}x_i), \text{ for all } f \in C_b^0.$$

在本文中，我们将 $\mathbb{L}^p(\mu_i)$ 与其在 $\mathbb{L}^p(\mu)$中的典范嵌入视为相同。事实上，若$f \in \mathbb{L}^p(\mu_i)$（其中 f 是该等价类的一个代表元），则 $H_f : x \in \mathbb{R}^2 \mapsto f(x_2)$ 由 $\{f \in \sigma(X_i)$ 定义，其中 $\int |f(x_i)|^p \mu_i(\mathrm{d}x_i) < \infty\} \subset \mathbb{L}^p(\mu)$。本小节中，我们研究采用静态对冲策略的分布鲁棒优化问题。

$$\overline{G}_{\mathbf{d}}^{\mathrm{m}}(r) := \inf_{f_1, f_2 \in C_b^1} \sup_{\mu' \in B_{\mathbf{d}}(\mu, r)} g(\mu') + \int (f_1 \oplus f_2)\mathrm{d}(\mu' - \mu), \ \underline{G}_{\mathbf{d}}^{\mathrm{m}}(r) := \sup_{\mu' \in B_{\mathbf{d}}^{\mathrm{m}}} g(\mu'),$$

其中 $B_{\mathbf{d}}^{\mathrm{m}} = B_{\mathbf{d}}(\mu, r) \cap \Pi(\mu_1, \mu_2)$，且对于 $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$，

$$f_1 \oplus f_2(x) = f_1(x_1) + f_2(x_2). \tag{3.15}$$

假设 $\mathrm{B}^{\mathbb{W}_p}$. 测度 μ 具有密度 q，且 $\mu_i(\mathrm{d}x) := q_i(x)\mathbb{1}_{\{x \in I_i\}}\mathrm{d}x$，其中 I_i是一个区间，且 $q_i \in C(I_i, \mathbb{R}_+)$ 对于 $i = 1, 2$。另假设 μ 存在解体$\mu = k(x_1, x_2)\mathrm{d}x_2\mu_1(\mathrm{d}x_1)$，且 k 有界。

假设 $\mathrm{B}^{\mathbb{W}_p^{\mathrm{ad}}}$。测度 μ 具有解体 $\mu(\mathrm{d}x) := \kappa(x)\mathrm{d}x_2\mu_1(\mathrm{d}x_1)$，其中$\kappa$ 有界，且 μ_2 的支撑包含于 I_2，其中 $q_2(x_2) := \mathrm{d}\mu_2\mathrm{d}x_2(x_2) = \int \kappa(x)\mu_1(\mathrm{d}x_1)$ 是连续的。

按照上一小节中的相同步骤，我们接下来估计某个 Θ下 $\mu^{r\Theta}$ 与 $\Pi(\mu_1, \mu_2)$之间的距离。定义如下算子

$$\mathcal{L}_{\mathrm{m}}^{\mathbf{d}} : \Theta \in \mathbb{L}^p(\mu) \mapsto (\mathbb{E}_1^{\mu}[\Theta_1], \mathbb{E}_2^{\mu}[\Theta_2]) \in \mathbb{L}^p(\mu_1) \times \mathbb{L}^p(\mu_2). \tag{3.16}$$

命题 3.6。设 μ 满足假设 $\mathrm{B}_{\mathbf{d}}$，其中 $\mathbf{d} \in \{\mathbb{W}_p, \mathbb{W}_p^{\mathrm{ad}}\}$。设 Θ 是紧支撑的 C^2 函数，满足 $\Theta_1 = 0$ 若 $\mathbf{d} = \mathbb{W}_p^{\mathrm{ad}}$。进一步假设 $supp(\Theta) \subset M_1 \times M_2$，对某个 $M_1 \subsetneq I_1$ 以及 $M_2 \subsetneq I_2$。那么，存在 $C > 0$ 使得

$$\limsup_{r \to 0} \frac{1}{r}\mathbf{d}(\mu^{r\Theta}, \Pi(\mu_1, \mu_2)) \leq C\|\mathcal{L}_{\mathrm{m}}^{\mathbf{d}}(\Theta)\|, \tag{3.17}$$

其中 $\mathcal{L}_{\mathrm{m}}^{\mathbf{d}}$ 由 (3.16)定义。

命题 3.7. 设 g 满足假设 3.1, $\mathbf{d} \in \{\mathbb{W}_p, \mathbb{W}_p^{\mathrm{ad}}\}$ 且 μ 满足假设 $\mathrm{B}_{\mathbf{d}}$。那么，两个映射 $G_{\mathbf{d}}^{\mathrm{m}}$ 和 $G_{\mathbf{d}}^{\mathrm{m}}$ 在 $r = 0$ 处可微，并且

$$\overline{G}_{\mathbf{d}}^{\mathrm{m}\,\prime}(0) = \underline{G}_{\mathbf{d}}^{\mathrm{m}\,\prime}(0) = \inf_{f \in \Pi_{i=1}^2 \mathbb{L}^{p'}(\mu_i)} U_{\mathbf{d}}^{\mathrm{m}}(f)^{1/p'}, \ \textit{where } U_{\mathbf{d}}^{\mathrm{m}} := \|\partial_x^{\mathbf{d}} \delta_m g + f\|_{\mathbb{L}^{p'}(\mu)}^{p'}. \tag{3.18}$$

$U_{\mathbf{d}}^{\mathrm{m}}$ 是严格凸、连续且强制的（按照定义 2.1的含义）。因此，优化问题 (3.18) 有唯一解 $f_{\mathbf{d}}^{\mathrm{m}}$，其特征由下式刻画

$$\mathcal{L}_{\mathrm{m}}^{\mathbf{d}}(T_{\mathbf{d}}^{\mathrm{m}}) = 0 \ \textit{where } T_{\mathbf{d}}^{\mathrm{m}} = \frac{1}{c}\mathbf{N}_{\mathbf{d}}((\partial_x^{\mathbf{d}} \delta_m g) + f_{\mathbf{d}}^{\mathrm{m}}), \tag{3.19}$$

其中 $\mathcal{L}_{\mathrm{m}}^{\mathbf{d}}$ 由 (3.16) 定义，且 c 由 $\|T_{\mathbf{d}}^{\mathrm{m}}\|_{\mathbb{L}^p(\mu)} = 1$ [1]唯一确定。
此外，当 $p = 2$时，一阶条件 (3.19) 简化为

$$f_{\mathbf{d},1}^{\mathrm{m}} = -\mathbb{E}_1^{\mu}[\partial_{x_1} \delta_m g], \ f_{\mathbf{d},2}^{\mathrm{m}} = -\mathbb{E}_2^{\mu}[\partial_{x_2} \delta_m g].$$

分布鲁棒优化敏感性由下式给出

$$\begin{aligned}
\overline{G}_{\mathbb{W}_2}^{\mathrm{m}}{}'(0) = \underline{G}_{\mathbb{W}_2}^{\mathrm{m}}{}'(0) &= \mathbb{E}^{\mu}\left[(\partial_{x_1}\delta_m g - \mathbb{E}_1^{\mu}[\partial_{x_1}\delta_m g])^2 + (\partial_{x_2}\delta_m g - \mathbb{E}_2^{\mu}[\partial_{x_2}\delta_m g])^2\right]^{1/2} \\
\overline{G}_{\mathbb{W}_2^{\mathrm{ad}}}^{\mathrm{m}}{}'(0) = \underline{G}_{\mathbb{W}_2^{\mathrm{ad}}}^{\mathrm{m}}{}'(0) &= \mathbb{E}^{\mu}\left[(\partial_{x_2}\delta_m g - \mathbb{E}_2^{\mu}[\partial_{x_2}\delta_m g])^2\right]^{1/2}
\end{aligned}.$$

注 3.8。 • 与注 3.5类似， $f_{\mathbf{d}}^{\mathrm{m}}$的唯一性应理解为其作为 $\mathbb{L}^{p'}(\mu_1) \times \mathbb{L}^{p'}(\mu_2)$中的一个元素。再次强调，唯一性仅在第一分量满足 μ_1-几乎处处相等，第二分量满足 μ_2-几乎处处相等的意义下成立。

3.3 半静态对冲策略

现在，我们允许采用半静态对冲策略，即，可以持有普通期权收益 $f_1(S_1)$ 和$f_2(S_2)$，并对头寸进行动态对冲（更多详情见 [15] ）。我们将 M 定义为 $\mathbb{X}$ 上所有鞅概率测度的集合，

$$\mathrm{M} \ := \ \{\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{X}) : \ \mathbb{E}^{\mu}[X_2|X_1] = X_1, \ \mu - a.s.\},$$

并回顾，对于 $\mu \in \mathcal{P}_p(\mathbb{X})$，有

$$\mu \in \mathrm{M} \quad \text{if and only if} \quad \mathbb{E}^{\mu}[h^{\otimes}] = 0, \ \text{for all } h \in \mathbb{L}^{\infty}(\mu_1),$$

这里我们使用了记号

$$h^{\otimes}(x) := h(x_1) \cdot (x_2 - x_1), \ \text{for all } x = (x_1, x_2) \in \mathbb{X}, \tag{3.20}$$

我们还使用以下记号 $f_1 \oplus f_2$，其定义见（3.15）。定义 $\Pi^{\mathrm{M}}(\mu_1, \mu_2) := \mathrm{M} \cap \Pi(\mu_1, \mu_2)$（参见定义（3.14））。在上一小节的连续性讨论中，我们将广泛使用 $\mathbb{L}^p(\mu_i)$ 与其在 $\mathbb{L}^p(\mu)$中的典范嵌入之间的对应关系。鉴于 Wasserstein度量和鞅约束下的分布鲁棒优化问题较为复杂，我们在此考虑适应Wasserstein度量。定义以下两个函数

$$\overline{G}_{\mathbb{W}_p^{\mathrm{ad}}}^{\mathrm{M,m}} := \inf_{f_1, f_2, h \in C_b^1} \sup_{\mu' \in B_{\mathbb{W}_p^{\mathrm{ad}}}(\mu, r)} g(\mu') + \int (f_1 \oplus f_2 + h^{\otimes}) \mathrm{d}(\mu' - \mu) \text{ and } \underline{G}_{\mathbb{W}_p^{\mathrm{ad}}}^{\mathrm{M,m}} := \sup_{\mu' \in B_{\mathbb{W}_p^{\mathrm{ad}}}^{\mathrm{M,m}}(\mu, r)} g(\mu').$$

[1]存在性见注释的最后一点3.5 关于 c

假设 $\mathrm{C}^{\mathbb{W}_p^{\mathrm{ad}}}$。 设 $\mu \in \mathcal{P}_p(\mathbb{R}^2)$ 为鞅测度。

(i) μ 具有解体 $\mu(dx) := \kappa(x_1, x_2)dx_2\mu_1(dx_1)$，其中 $\kappa \in \mathbb{L}^\infty(\mathbb{R}^2)$ 且 $\kappa(X) \geq c > 0$ $\mu-$几乎处处成立，对某个常数 $c > 0$而言。*(ii)* $\mu_2(dx_2) = q_2(x_2)\mathbb{1}_{\{x_2 \in I_2\}}dx_2$ ，其中 $I_2 := [a, b]$ 是有界区间，且 q_2 是严格正的连续函数。

(iii) 满足以下信息差异条件： $\mathbb{L}^1(\mu_1) \cap \mathbb{L}^1(\mu_2) = \mathbb{R}$。

注 3.9。在假设$\mathrm{C}^{\mathbb{W}_p^{\mathrm{ad}}}$(iii)中，空间 $\mathbb{L}^1(\mu_1)$和 $\mathbb{L}^1(\mu_2)$通过其到 $\mathbb{L}^1(\mu)$中的典范嵌入来理解。此外，$\mathbb{R}$ 被视为μ-几乎处处为常数的函数集合。我们在附录A中讨论这一假设。

我们首先估计 $\mu^{r\Theta}$ 与 $\Pi^{\mathrm{M}}(\mu_1, \mu_2)$ 之间的适应 Wasserstein 距离。定义以下算子

$$\mathcal{L}_{\mathrm{M,m}} : \Theta \in \mathbb{L}^p_{\mathrm{ad}}(\mu) \mapsto (\mathcal{L}^{\mathrm{ad}}_{\mathrm{m}}(\Theta), \mathbb{E}_1[\Theta_2 - \Theta_1]) \in \prod_{i=1}^{2} \mathbb{L}^p(\mu_i) \times \mathbb{L}^p_0(\mu_1). \tag{3.21}$$

命题 3.10。 设 μ 满足假设 $\mathrm{C}^{\mathbb{W}_p^{\mathrm{ad}}}$。设 $\Theta_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ 是一个紧支撑C^2 函数。令 $\Theta := (0, \Theta_2)$，则存在 $C > 0$ 使得

$$\limsup_{r \to 0} \frac{1}{r} \mathbb{W}_p^{\mathrm{ad}}(\mu^{r\Theta}, \Pi^{\mathrm{M}}(\mu_1, \mu_2)) \leq C \|\mathcal{L}_{\mathrm{M,m}}(\Theta)\|, \tag{3.22}$$

其中 $\mathcal{L}_{\mathrm{M,\ m}}$ 由 (3.21) 定义。

命题 3.11。 设 g 满足假设 *3.1*，且 μ 满足 $\mathrm{C}^{\mathbb{W}_p^{\mathrm{ad}}}$。则两个映射 $G^{\mathrm{M},\ \mathrm{m}}_{\mathbb{W}_p^{\mathrm{ad}}}$ 和 $G^{\mathrm{M},\ \mathrm{m}}_{\mathbb{W}_p^{\mathrm{ad}}}$ 在 $\underline{0}$ 处均可微，并且

$$\overline{G}^{\mathrm{M,m}\,\prime}_{\mathbb{W}_p^{\mathrm{ad}}}(0) = \underline{G}^{\mathrm{M,m}\,\prime}_{\mathbb{W}_p^{\mathrm{ad}}}(0) = \inf_{(f,h) \in (\Pi_{i=1}^2 \mathbb{L}^{p'}(\mu_i)) \times \mathbb{L}^{p'}(\mu_1)} U^{\mathrm{M,m}}_{\mathrm{ad}}(f, h)^{1/p'}, \tag{3.23}$$

其中 $U^{\mathrm{M,\ m\ ad}}(f,\ h) := \|\partial_x^{\mathrm{ad}}\delta_m g + f + hJ\|^{p'}_{p'}$以及 J由.....定义。我们将 $\mathbb{L}^p_0(\mu)$定义为0−中的均值函数在 $\mathbb{L}^p(\mu)$中的子集：

$$\mathbb{L}^p_0(\mu) := \{f \in \mathbb{L}^p(\mu) : \mathbb{E}^\mu[f(X)] = 0\}. \tag{3.24}$$

那么， $U^{\mathrm{M},\ \mathrm{m\ ad}}$： $\mathbb{L}^{p'}(\mu_1) \times \mathbb{L}^{p'}(\mu_2) \times \mathbb{L}^{p'}_0(\mu_1) \to \mathbb{R}$ 是严格凸、连续且强制的（见定义 *2.1*）。因此，优化问题 (3.23) 存在唯一极小化子[2]$(f^{\mathrm{M},\ \mathrm{m}},\ h_{\mathrm{M},\ \mathrm{m}}) \in \prod_{i=1} \mathbb{L}^p(\mu_i) \times \mathbb{L}^p_0(\mu_1)$，其由以下一阶方程刻画：

$$\mathcal{L}_{\mathrm{M,m}}(T^{\mathrm{M,m}}) = 0 \ \textit{where}\ T^{\mathrm{M,m}} := \frac{1}{c}\mathbf{N}_{\mathrm{ad}}(\partial_x^{\mathrm{ad}}\delta_m g + f^{\mathrm{M,m}} + h_{\mathrm{M,m}}J), \tag{3.25}$$

其中，$\mathcal{L}_{\mathrm{M},\ \mathrm{m}}$ 由(3.21) 定义，而 c 由 $\|T^{\mathrm{M},\ \mathrm{m}}\|_{\mathbb{L}^p(\mu)} = 1$唯一确定。 [2]此外，当 $p = 2$ 时，最优策略为

$$f_1^{\mathrm{M,m}} = h_{\mathrm{M,m}} - \mathbb{E}_1^\mu[\partial_{x_1}\delta_m g] \ , \ f_2^{\mathrm{M,m}} = -\mathbb{E}_2^\mu[\partial_{x_2}\delta_m g + h_{\mathrm{M,m}}],$$

其中 $h_{\mathrm{M},\ \mathrm{m}}$ 是下列弗雷德霍姆方程的唯一解（相差一个常数）：

$$h_{\mathrm{M,m}} - \mathbb{E}_1^\mu[\mathbb{E}_2^\mu[h_{\mathrm{M,m}}]] = \mathbb{E}_1^\mu[\mathbb{E}_2^\mu[\partial_{x_2}\delta_m g]] - \mathbb{E}_1^\mu[\partial_{x_2}\delta_m g].$$

[2]关于的存在性，请参见注释 3.5。

注 3.12。 •假设 $C^{\mathbb{W}_p^{ad}}$(iii)在此用于确保 μ满足以下性质：对于 $f \in \mathbb{L}^1(\mu_1)$ 和 $g \in \mathbb{L}^1(\mu_2)$，有

$$f(X_1) = g(X_2)\ \mu - \ a.s. \implies \exists c \in \mathbb{R} \text{ such that } f = c\ \mu_1 - a.s \text{ and } g = c\ \mu_2 - a.s.$$

正如第 A小节将要讨论的那样，事实证明，这实际上是关于测度的支集的一个条件。

• 假设 C$\mathbb{W}$ad$_p$ (iii) 的作用是确保问题 (3.23) 的目标函数具有强制性。事实上，正如将在证明部分展示的那样，该假设为算子 $\mathbb{E}_1^{\mu} \circ \mathbb{E}_2^{\mu}$ 提供了压缩性质的一个充分条件：对于所有 $1 \le \alpha \le \infty$，$\mathbb{L}_0^{\alpha}(\mu_1) \to \mathbb{L}_0^{\alpha}(\mu_1)$。然而，我们强调，这一假设具有较强限制性。例如，如果 $\xi \sim \frac{1}{2}(\delta_{-1}(\mathrm{d}x) + \delta_1(\mathrm{d}x))$ 与 $X \sim \mathrm{U}([-1,1])$ 相互独立，那么 $\mu := \mathrm{L}(\xi, \xi + X)$ 满足假设 C$\mathbb{W}$ad$_p$ 的所有条件，但不满足假设 C$\mathbb{W}$ad$_p$ 的条件（iii）。事实上，在此例中，$X_1 = \mathrm{sgn}(X_2)$，因此 $\sigma(X_1) \subset \sigma(X_2)$。

• 采用这种方法处理 d 维情形较为困难。事实上，我们的证明将使用测度 μ_2与 $\mu \circ (X_2 + r\Theta + a(X_1))^{-1}$之间的一维 Monge–Ampère 方程的线性化结果，其中 $a \in \mathbb{L}^p(\mu_1)$ 位于 0 的某个邻域内，且 $r > 0$ 接近 0。事实证明，这种线性化在高维情形下较为困难。

3.4 最优停止问题

命题 3.4、 3.18 和 3.11的结果可以扩展到最优停止问题，即，扩展到如下情形

$$g(\mu') := \inf_{\tau \in \mathrm{ST}} \mathbb{E}^{\mu'}[\ell_\tau], \tag{3.26}$$

其中 ST 是关于典范过滤的所有停止时刻的集合。

假设 3.13。 (i) 映射 $\ell\colon\ \mathbb{X} \times \{1,2\} \to \mathbb{R}$ 是适应的，其中映射 ℓ_1、ℓ_2连续可微，且具有$(p-1)$多项式增长。

(ii) 最优停止问题 (3.26) 存在唯一解 $\hat{\tau}$。

命题 3.14。 设 g 由下式定义 (3.26) 且 ℓ 满足假设 *3.13*。(i) 设 φ 满足 *3.1* 且 $\varphi(\mu) = 0_{\mathbb{R}^d}$。设 ψ 满足假设 A$^{\mathbb{W}_p^{ad}}$，相应的模型风险敏感度$G_{\mathbb{W}_p^{ad}}$和 $G_{\mathbb{W}_p^{ad}}$在 0 处可微，且

$$\overline{G}_{\mathbb{W}_p^{ad}}{}'(0) = \underline{G}_{\mathbb{W}_p^{ad}}{}'(0) = \inf_{(\lambda,h) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{L}^{p'}(\mu)} \|\partial_x^{ad} \ell_{\hat{\tau}} + (\partial_x^{ad} \delta_m \varphi)^\intercal \lambda + (\partial_x^{ad} \psi)^\intercal h\|_{\mathbb{L}^{p'}}.$$

(ii) 设 $d = 1$ 和 μ 满足假设$B_{\mathbb{W}_p^{ad}}$。则映射 $G^{\mathrm{m}}_{\mathbb{W}_p^{ad}}$和 $G^{\mathrm{m}}_{\mathbb{W}_p^{ad}}$均在0处可微，且

$$\underline{G}^{\mathrm{m}}_{\mathbb{W}_p^{ad}}{}'(0) = \overline{G}^{\mathrm{m}}_{\mathbb{W}_p^{ad}}{}'(0) = \inf_{f \in \mathbb{L}^{p'}(\mu_1) \times \mathbb{L}^{p'}(\mu_2)} \|\partial_x^{ad} \ell_{\hat{\tau}} + f\|_{\mathbb{L}^{p'}(\mu)}.$$

(iii) 设 $d = 1$和 μ 满足假设 A$^{\mathbb{W}_p^{ad}}$。那么，映射 $G^{\mathrm{M}}_{,\mathbb{W}_p^{ad}}{}^{\mathrm{m}}$ 和 $G^{\mathrm{M}}_{,\mathbb{W}_p^{ad}}{}^{\mathrm{m}}$ 在 0 处均可微，且：

$$\underline{G}^{\mathrm{M,m}}_{\mathbb{W}_p^{ad}}{}'(0) = \overline{G}^{\mathrm{M,m}}_{\mathbb{W}_p^{ad}}{}'(0) = \inf_{\substack{h \in \mathbb{L}^{p'}(\mu_1) \\ f \in \mathbb{L}^{p'}(\mu_1) \times \mathbb{L}^{p'}(\mu_2)}} \|\partial_x^{ad} \ell_{\hat{\tau}} + f + hJ\|_{\mathbb{L}^{p'}(\mu)}.$$

4 数值示例

秉承 Sauldubois & Touzi 一节中的思路 [25], ，我们将在 2–适应 Wasserstein 距离下比较美式看跌期权的敏感度。我们定义无约束偏差以及仅带有鞅约束的偏差。

$$G_{\mathrm{ad}}(r) := \sup_{\mu' \in B_{\mathbb{W}_2^{\mathrm{ad}}}(\mu, r)} g(\mu'), \text{ and } G_{\mathrm{ad}}^{\mathrm{M}}(r) := \sup_{\mu' \in B^{\mathrm{M}}_{\mathbb{W}_2^{\mathrm{ad}}}(\mu, r)} g(\mu').$$

根据 Bartl & Wiesel [3], 以及 Sauldubois & Touzi [25], 的命题3.3，所有映射在 0 处均可微，且 $G'(0) = \|\partial_x \delta_m g\|_{\mathbb{L}^2(\mu)}$, $G'_{\mathrm{ad}}(0) = \|\partial_x^{\mathrm{ad}} \delta_m g\|_{\mathbb{L}^2(\mu)}$, $G^{\mathrm{M}\prime}(0) = \inf_{h \in C_b^1} \|\partial_x \delta_m g + h^{\otimes}\|_{\mathbb{L}^2(\mu)}$, 以及 $G_{\mathrm{ad}}^{\mathrm{M}\prime}(0) = \inf_{h \in \mathbb{L}^{p'}(\mu_1)} \|\partial_x^{\mathrm{ad}} \delta_m g + h(X_1) J\|_{\mathbb{L}^2(\mu)}$. 与 Sauldubois & Touzi [25], 一样，我们将比较敏感度和相对敏感度，后者等于敏感度除以价格。这两类模型将通过一对 $(Z_1, Z_2) \rightsquigarrow \mathrm{N}(0,1) \otimes \mathrm{N}(0,1)$ 来定义：

- 布莱克-斯科尔斯模型 $\mu^{\sigma}{}_{\mathrm{BS}} := \mathcal{L}\big(e^{-\frac{\sigma^2}{2} + \sigma Z_1}, e^{-\sigma^2 + \sigma(Z_1 + Z_2)}\big)$,
- 和巴舍利耶模型 $\mu^{\sigma}{}_{\mathrm{Bach}} := \mathcal{L}(\sigma Z_1, \sigma(Z_1 + Z_2))$。

由于这些模型族是参数化的，我们还将敏感度与相应的维加 $:= \partial_\sigma g(\mu^\sigma)$进行比较。

在本小节中，我们考虑一个具有内在价值$\ell_t(X) = (e^{-\rho t} K - X_t)^+$, $t = 1,2$ 的美式看跌期权示例，其中 $K = 1.3$ 和 $\rho = 0.05$。

4.0.1 敏感度比较

我们首先考虑以下对象的敏感度

$$\text{buyer's price}: \ g(\mu) := \inf_{\tau \in \mathrm{ST}} \mathbb{E}^{\mu}[\ell_\tau] \ .$$

我们比较有无额外鞅约束时，额外边际约束对敏感度和相对敏感度的影响。

我们展示了布莱克-斯科尔斯模型下，在没有额外鞅约束时的适应性Wasserstein分布鲁棒优化敏感度。

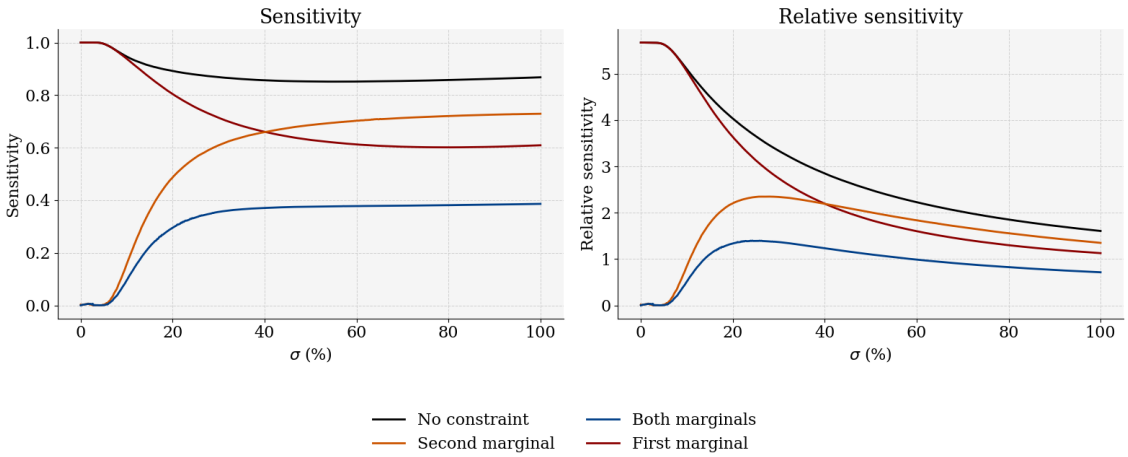
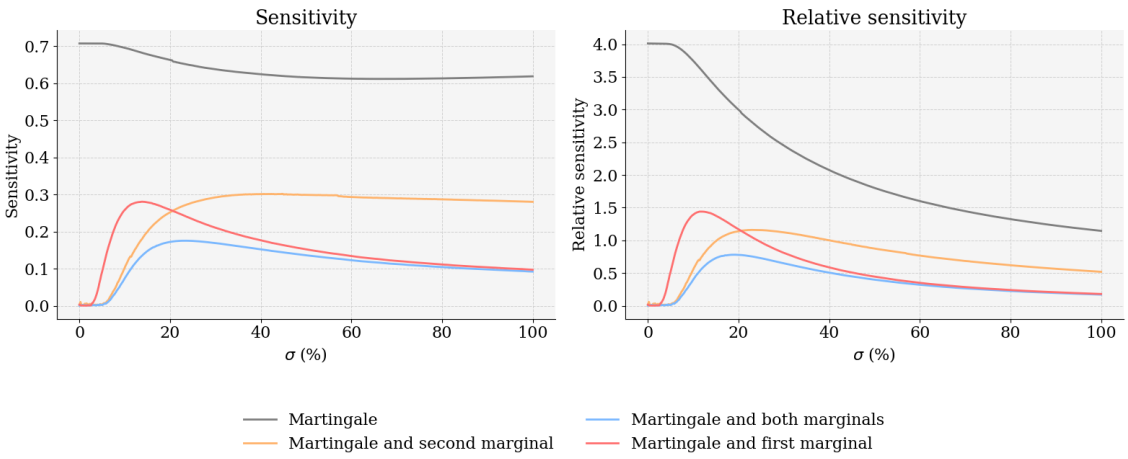


图 1: 边际约束对布莱克-斯科尔斯模型敏感度的影响。

现在我们来讨论鞅敏感度。



Fig图 2: 边际约束对布莱克-斯科尔斯模型中鞅敏感度的影响

.

最后，我们列出所有相关量，以评估模型风险

.

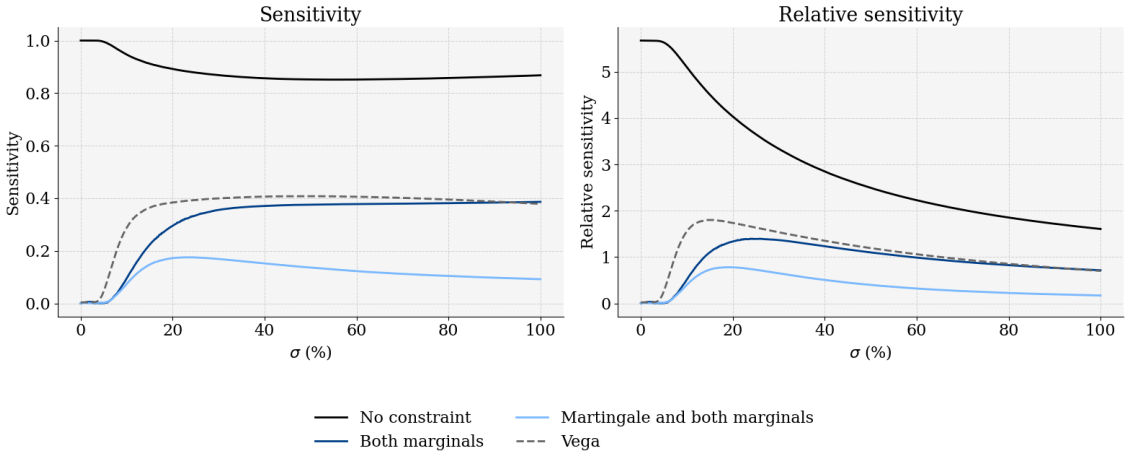


图 3: 布莱克-斯科尔斯模型中的敏感度和维加。

现在我们对巴舍利耶模型进行相同的处理。

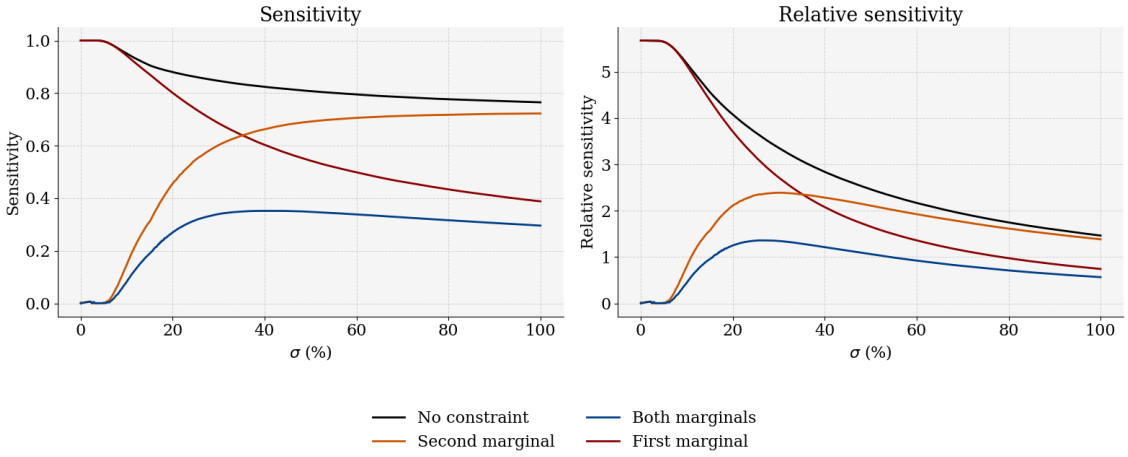


图 4: 边际约束对巴舍利耶 模型中敏感度的影响。

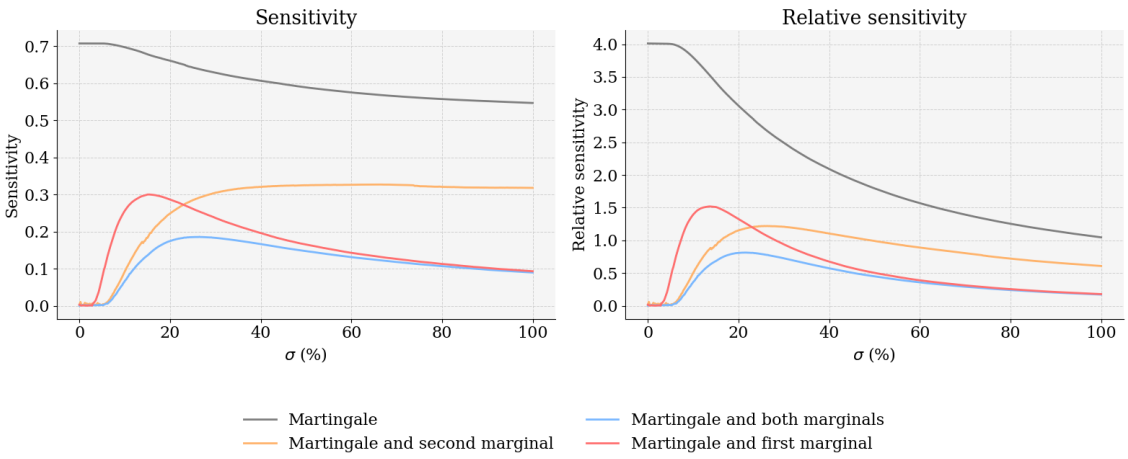


图 5: 边际约束对巴舍利耶 模型鞅敏感度的影响

l.

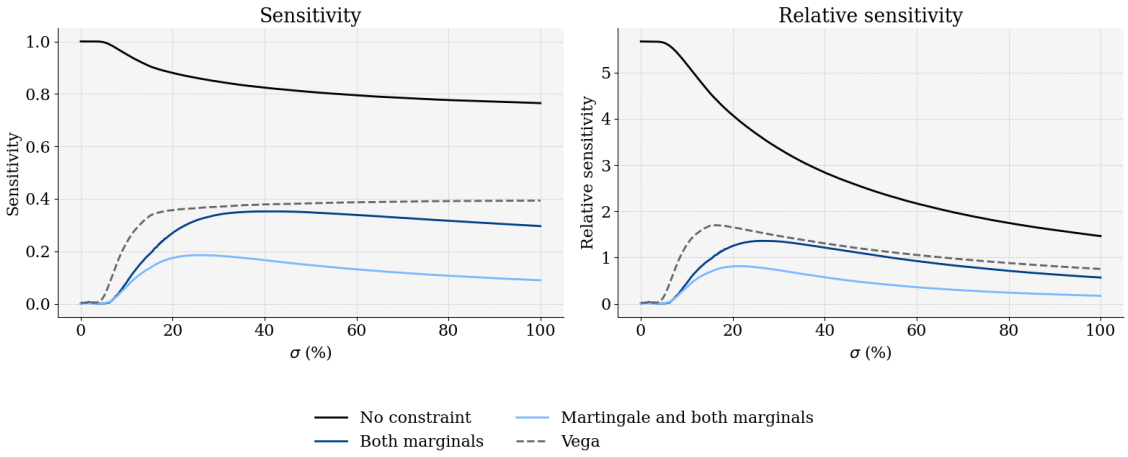


图 6: 巴舍利耶模型中的敏感度和维加。

我们可以看到，加入边际约束会对鞅敏感度产生影响，差异十分明显。此外，维加也存在不可忽略的差异。这是因为，尽管维加 是在一个参数化测度族（甚至是鞅测度族）中评估模型风险，但它并未考虑边际约束。

在这种情况下，我们也观察到了类似的行为

$$\text{seller's price}: \; g(\mu) := \sup_{\tau \in \mathrm{ST}} \mathbb{E}^{\mu'}[\ell_\tau] \; .$$

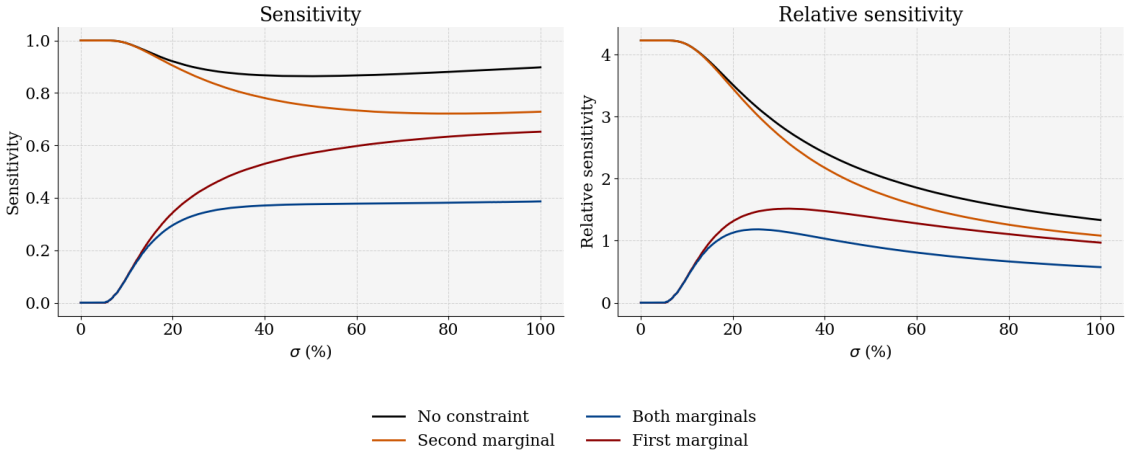


图 7： 边际约束对布莱克-斯科尔斯 模型敏感度的影响。

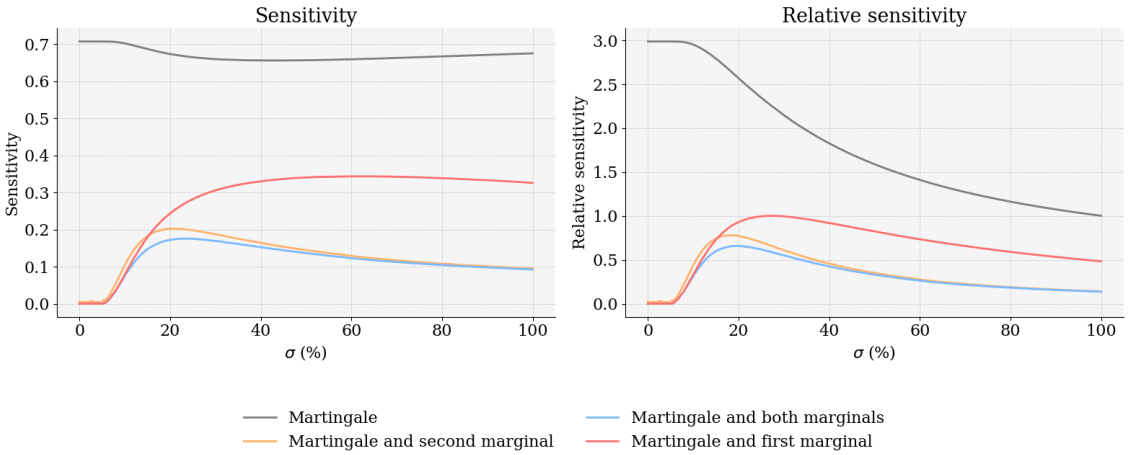


图 8： 边际约束对布莱克-斯科尔斯模型鞅敏感度的影响。

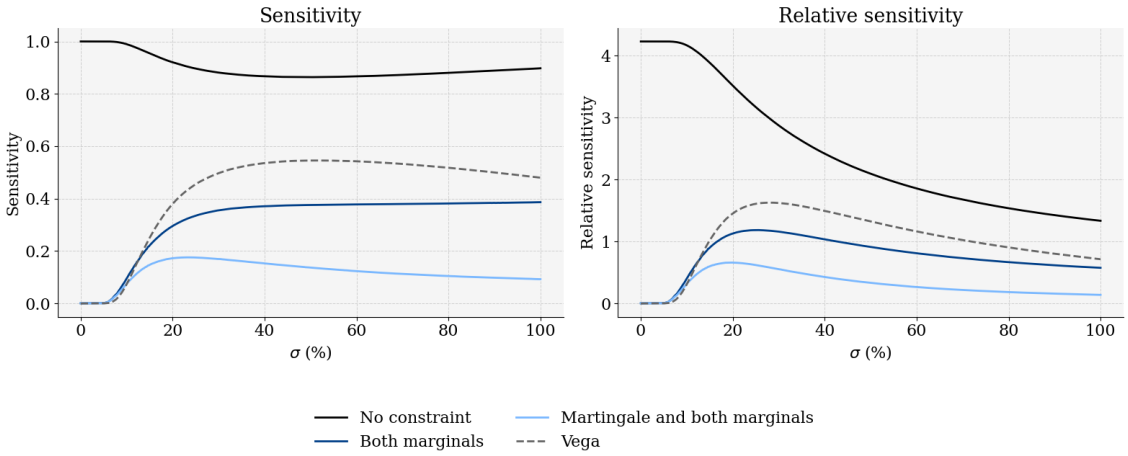


图 9： 布莱克-斯科尔斯模型中的敏感度和维加。

现在考虑巴舍利耶模型。

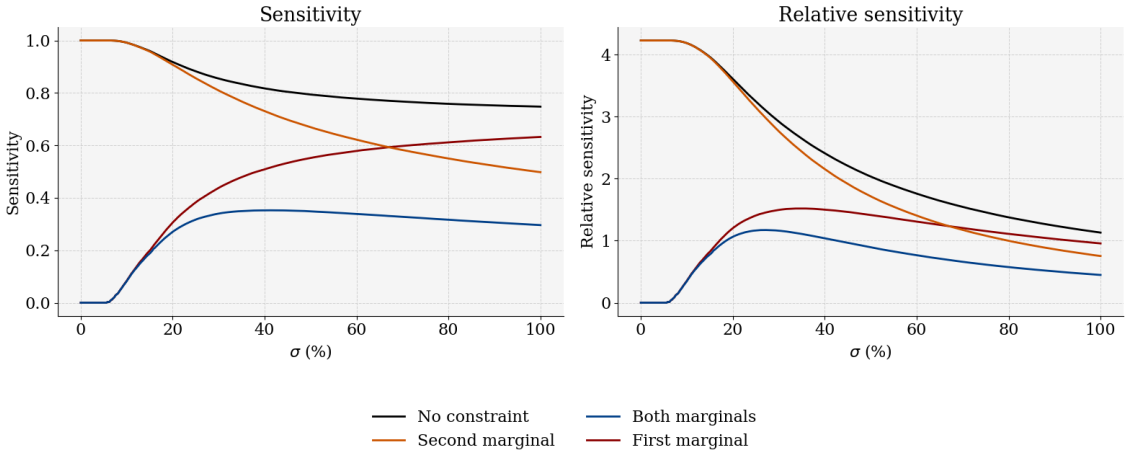


图 10：边际约束对巴舍利耶模型敏感度的影响。

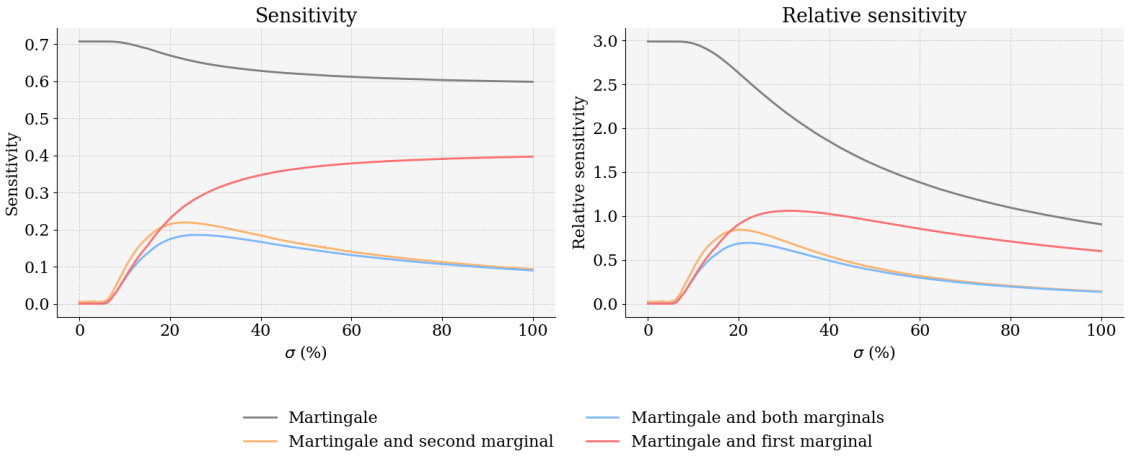


图 11：边际约束对巴舍利耶模型鞅敏感度的影响。

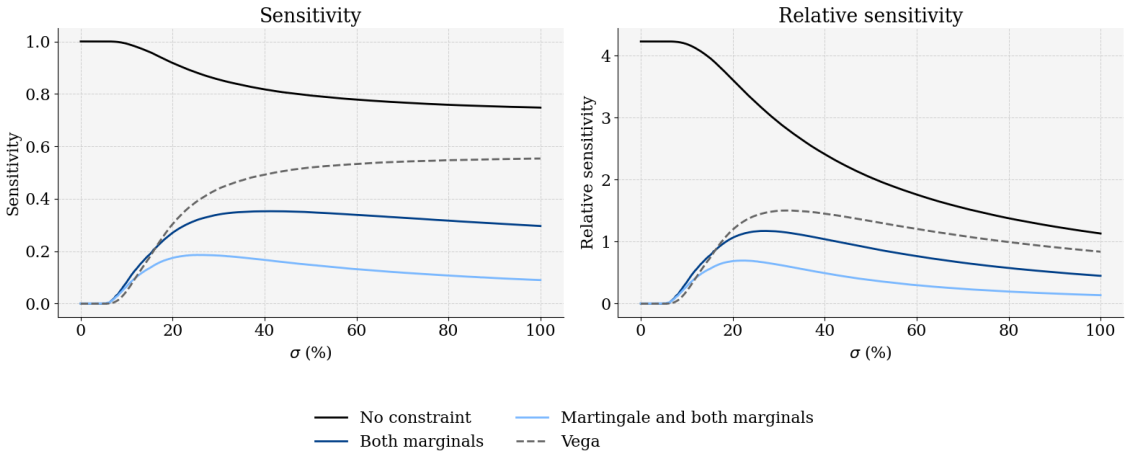


图 12：巴舍利耶模型中的敏感度和维加。

4.0.2 对冲策略比较

我们可以通过计算敏感度来推导对冲策略。首先考虑.....的对冲策略

$$\text{buyer's price}: \; g(\mu) := \inf_{\tau \in \mathrm{ST}} \mathbb{E}^{\mu'}[\ell_\tau] \; .$$

首先来看布莱克-斯科尔斯模型中 $\sigma = 10\%$ 的情形。

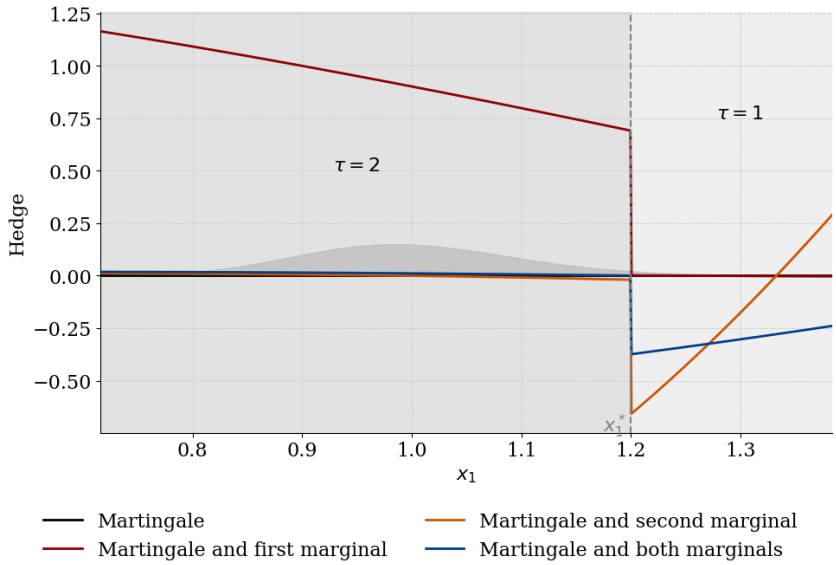


图 13: 布莱克-斯科尔斯模型中的对冲策略。

这里出现跳变，是因为无论我们是否选择在 T_1 时进入合约，对冲策略都会有所不同；因此，结果取决于是否 $\tau = 1$。不过，我们可以看到，在 $\sigma = 10\%$ 时， τ 取值为 1 的概率接近于零。接下来我们将考察更高的波动率： $\sigma = 100\%$。

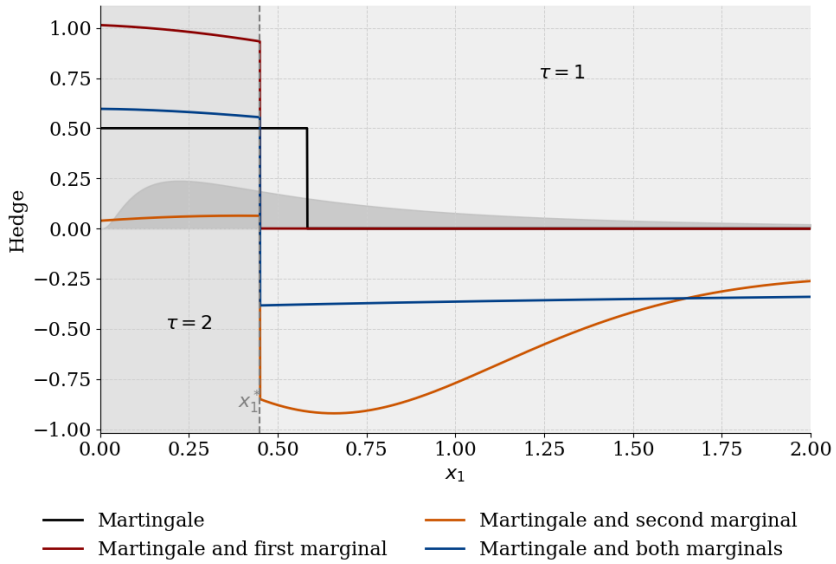


图 14: 布莱克-斯科尔斯模型中的对冲策略

.

这里可以看到，对于更高的波动率，对冲策略会更加复杂。

5 证明

5.1 一个充分条件

首先，我们给出受度量 $\mathbf{d} \in \{\mathbb{W}_p^{\mathrm{ad}}, \mathbb{W}_p\}$约束的分布鲁棒优化问题在 0 处可微的一个充分条件。设 $\varphi: \mathcal{P}_p(\mathbb{X}) \to \mathbb{R}^k$，并设 $\mathcal{E} \subset C_b^1(\mathbb{X}, \mathbb{R})$ 为一个向量空间。令 $\mathcal{E}^\perp$ 由（2.2）定义，考虑以下分布鲁棒优化问题

$$\overline{G}_{\mathbf{d}}^{\mathcal{C}}(r) := \inf_{(\lambda,f)\in\mathbb{R}^k\times\mathcal{E}_0} \sup_{B_{\mathbf{d}}(\mu,r)} g(\mu') + \lambda\cdot\varphi(\mu') + \int f \mathrm{d}\mu' \text{ and } \underline{G}_{\mathbf{d}}^{\mathcal{C}}(r) := \sup_{\mu'\in B_{\mathbf{d}}^{\varphi,\mathcal{E}}(\mu,r)} g(\mu'),$$

其中 $B^{\varphi,\mathcal{E}}\mathbf{d}(\mu,r) := B_{\mathbf{d}}(\mu,r) \cap \varphi^{-1}(\{0\}) \cap \mathcal{E}^\perp$。我们引入以下集合：

$$\overline{\mathcal{E}}^{\mathbf{d}} \text{ is the } \mathbb{L}^{p'}(\mu)-\text{closure of the set } \partial_x^{\mathbf{d}}(\mathcal{E}) = \{\partial_x^{\mathbf{d}} u \ : \ u \in \mathcal{E}\}. \tag{5.27}$$

最后，对于 φ, g 满足假设 3.1, $\lambda \in \mathbb{R}^k$ 以及 u 属于 $\mathcal{E}^{\mathbf{d}}$，定义以下映射

$$T_{\mathbf{d}}^{\lambda,u} := \frac{1}{c}\mathbf{N}_{\mathbf{d}}(\partial_x^{\mathbf{d}}\delta_m(g+\lambda\cdot\varphi)+u), \tag{5.28}$$

其中 c 由 $\|T^{\lambda,u}\mathbf{d}\|_{\mathbb{L}^p(\mu)} = 1$唯一确定。[3] 定义

$$\mathcal{L}_{\varphi,\mathcal{E}}^{\mathbf{d}} : \Theta \in \mathbb{L}_{\mathbf{d}}^p(\mu) \mapsto (\mathbb{E}[(\partial_x^{\mathbf{d}}\delta_m\varphi)\Theta], \ell_\Theta) \in \mathbb{R}^k \times (\overline{\mathcal{E}}^{\mathbf{d}})^* \tag{5.29}$$

其中 $(\mathcal{E}^{\mathbf{d}})^*$ 是 $(\mathcal{E}^{\mathbf{d}}, \|\cdot\|_{\mathbb{L}^{p'}(\mu)})$ 的拓扑对偶，并且对所有 $v \in \mathcal{E}^{\mathbf{d}}$, $\ell_\Theta(v) = \mathbb{E}^\mu[v\cdot\Theta]$。本节将在充分条件下证明所需的可微性结果，具体条件如下。随后我们将证明这些条件在我们的每种情形下均成立。

假设 $\mathrm{D}_{\mathbf{d}}$。 (i) 存在$(\hat{\lambda}, \hat{u})$ 使得 $L_{\varphi,\mathcal{E}}^{\mathbf{d}}(T^{\lambda,u}\mathbf{d}) = 0$。

(ii) 存在 $C > 0$ 以及一个序列 $(\Theta_n)_n$，使得 $\Theta_n \in \mathbb{L}^p\mathbf{d}(\mu)$ 具有 C_b^1 表示形式，并且对所有 $n \in \mathbb{N}$ 均满足

$$\|\Theta_n - T_{\mathbf{d}}^{\hat{\lambda},\hat{u}}\|_{\mathbb{L}_{\mathbf{d}}^p(\mu)} \to 0 \text{ and } \limsup_{r\to 0}\frac{1}{r}\mathbf{d}(\mu^{r\Theta_n}, \varphi^{-1}(\{0\})\cap\mathcal{E}^\perp) \le C\|\mathcal{L}_{\varphi,\mathcal{E}}^{\mathbf{d}}(\Theta_n)\|.$$

引理 5.1. 固定$\mathbf{d} \in \{\mathbb{W}_p, \mathbb{W}_p^{\mathrm{ad}}\}$，并令 φ 和 g 满足假设 3.1，其中 $\varphi(\mu) = 0$ 且$\mu \in E^\perp$。另假设条件 $\mathrm{D}_{\mathbf{d}}$ 成立。那么，映射 $G^{\mathcal{C}}\mathbf{d}$ 和 $G_{\mathbf{d}}^{\mathcal{C}}$ 在0处均可微，且

$$\overline{G}_{\mathbf{d}}^{\mathcal{C}\prime}(0) = \underline{G}_{\mathbf{d}}^{\mathcal{C}\prime}(0) = \inf_{(\lambda,u)\in\mathbb{R}^k\times\overline{\mathcal{E}}^{\mathbf{d}}} \mathcal{U}_{\mathbf{d}}^{\mathcal{C}}(\lambda,u)^{1/p'} = \mathcal{U}_{\mathbf{d}}^{\mathcal{C}}(\hat{\lambda},\hat{u})^{1/p'},$$

其中 $U\mathcal{C}\mathbf{d}(\lambda,u) := \|\partial_x^{\mathbf{d}}\delta_m(g+\lambda\cdot\varphi)+u\|_{\mathbb{L}^{p'}(\mu)}^{p'}$。

[3] 参见注 3.5 关于 c

证明。这可由与 Sauldubois & Touzi 的命题 3.3 的证明相同的论证得出 [25], 满足

$$\begin{aligned}\underline{\lim}_{r\to 0}\frac{\overline{G}^{\mathcal{C}}_{\mathbf{d}}(r)-\overline{G}^{\mathcal{C}}_{\mathbf{d}}(0)}{r}\le\overline{\lim}_{r\to 0}\frac{\overline{G}^{\mathcal{C}}_{\mathbf{d}}(r)-\overline{G}^{\mathcal{C}}_{\mathbf{d}}(0)}{r}&\le\inf_{(\lambda,f)\in\mathbb{R}^k\times\mathcal{E}}\mathcal{U}^{\mathcal{C}}_{\mathbf{d}}(\lambda,\partial^{\mathbf{d}}_x f)^{1/p'}\\&=\inf_{(\lambda,u)\in\mathbb{R}^k\times\overline{\mathcal{E}}^{\mathbf{d}}}\mathcal{U}^{\mathcal{C}}_{\mathbf{d}}(\lambda,u)^{1/p'}:=\ell,\end{aligned}\tag{5.30}$$

根据$\mathcal{E}^{\mathbf{d}}$的定义。定义如下线性近似,

$$\hat{G}^{\mathcal{C}}_{\mathbf{d}}(r):=\sup_{\mu'\in B^{\varphi,\mathcal{E}}_{\mathbf{d}}(\mu,r)}\hat{g}(\mu')\quad\text{where}\quad\hat{g}(\mu'):=g(\mu)+\int_{\mathbb{X}}\delta_m g(\mu,x)\mu'(\mathrm{d}x).$$

按照 Sauldubois & Touzi [25], 引理 6.1 证明中的相同步骤，我们得到,

$$\underline{\lim}_{r\to 0}\frac{\underline{G}^{\mathcal{C}}_{\mathbf{d}}(r)-\underline{G}^{\mathcal{C}}_{\mathbf{d}}(0)}{r}=\underline{\lim}_{r\to 0}\frac{\hat{G}^{\mathcal{C}}_{\mathbf{d}}(r)-\hat{G}^{\mathcal{C}}_{\mathbf{d}}(0)}{r}.\tag{5.31}$$

^^现在，根据假设 5.1，存在 $T^{\lambda,\hat{u}}\mathbf{d}\in\mathbb{L}^p\mathbf{d}(\mu)$，使得 $\mathrm{L}^{\mathbf{d}}_{\varphi,\mathcal{E}}(T^{\lambda,\hat{u}}\mathbf{d})=0$。令 $(\Theta^n)_n$ 由条件 $\mathrm{D}_{\mathbf{d}}$的条件 (ii)定义。令 $\gamma>0$ 和 $n\in\mathbb{N}$。根据条件 (ii)，存在测度族 $(\nu_{r,n})_r$，使得对所有 $r>0$, $\nu_{r,n}\in\varphi^{-1}(\{0\})\cap\mathbb{E}^{\perp}$，并且

$$\mathbf{d}(\mu^{r\Theta^n},\nu_{r,n})\le r(C\|\mathcal{L}^{\mathbf{d}}_{\varphi,\mathcal{E}}(\Theta^n)\|+\gamma).\tag{5.32}$$

此外，由于 Θ^n 是 C^1_b，我们有 $\mathbf{d}(\mu^{r\Theta^n},\mu)\le r\|\Theta^n\|_{\mathbb{L}^p\,\mathbf{d}(\mu)}$（考虑耦合$\pi_r:=\mu\circ(X,X+r\Theta_n)$；当 $\mathbf{d}=\mathbb{W}^{\mathrm{ad}}_p$ 时，该耦合是双因果的，因为当 r 足够小时，Θ 是 C^1，且 $x_1\mapsto x_1+r\Theta^n_1(x_1)$是一个同胚），因此，根据三角不等式,

$$\mathbf{d}(\mu,\nu_{r,n})\le r(\|\Theta_n\|+C\|\mathcal{L}^{\mathbf{d}}_{\varphi,\mathcal{E}}(\Theta^n)\|+\gamma).$$

^现在，$\mathcal{L}^{\mathbf{d}}_{\varphi,\mathcal{E}}$是连续的，且$\mathcal{L}^{\mathbf{d}}_{\varphi,\mathcal{E}}(T^{\lambda,\hat{u}}\mathbf{d})=0$，因此，当 n 足够大时（且与 r 无关），^$C\|\mathcal{L}^{\mathbf{d}}_{\varphi,\mathcal{E}}(\Theta_n)\|\le\gamma$。类似地，由于 $\|T^{\lambda,\hat{u}}\mathbf{d}\|=1$, $\|\Theta_n\|\le 1+\gamma$。因此，$\mathbf{d}(\mu,\nu_{r,n})\le r(1+3\gamma)$, 并且

$$\begin{aligned}(1+3\gamma)\,\underline{\lim}_{r\to 0}\frac{\hat{G}^{\mathcal{C}}_{\mathbf{d}}(r)-\hat{G}^{\mathcal{C}}_{\mathbf{d}}(0)}{r}&=\underline{\lim}_{r\to 0}\frac{\hat{G}^{\mathcal{C}}_{\mathbf{d}}(r(1+3\gamma))-\hat{G}^{\mathcal{C}}_{\mathbf{d}}(0)}{r}\\&\ge\underline{\lim}_{r\to 0}\frac{1}{r}\int_{\mathbb{X}}\delta_m g(\mu,x)(\nu_{r,n}-\mu)(\mathrm{d}x).\end{aligned}\tag{5.33}$$

现在我们证明，存在 $C>0$ 使得

$$\Big|\int_{\mathbb{X}}\delta_m g(\mu,x)(\nu_{r,n}-\mu^{r\Theta_n})(\mathrm{d}x)\Big|\le C\mathbf{d}(\nu_{r,n},\mu^{r\Theta_n}).\tag{5.34}$$

令 $\pi\in\Pi(\nu_{r,\ n},\ \mu^{r\Theta_n})$。根据假设 3.1 关于 g 并依次应用三角不等式和霍尔德不等式,

$$\begin{aligned}\Big|\int_{\mathbb{X}}\delta_m g(\mu,x)(\nu_{r,n}-\mu^{r\Theta_n})(\mathrm{d}x)\Big|&=\big|\mathbb{E}^{\pi}[\delta_m g(\mu,X)-\delta_m g(\mu,X')]\big|\\&\le\mathbb{E}^{\pi}\big[|X-X'|^p\big]^{1/p}\int_0^1\mathbb{E}^{\pi}\big[|\partial_x\delta_m g(\mu,\bar{X}_\lambda)|\big]\mathrm{d}\lambda.\end{aligned}$$

因此，根据假设 3.1， $\partial_x\delta_m g$ 具有 $(p-1)$–多项式增长，因此

$$\int_0^1 \mathbb{E}^{\pi}\left[|\partial_x\delta_m g(\mu,\bar{X}_\lambda)|\right]\mathrm{d}\lambda \le C(1+\|X\|_{\mathbb{L}^p(\mu^{r\Theta_n})}+\|X\|_{\mathbb{L}^p(\nu_{r,n})})$$

并且根据不等式（5.32），$\|X\|_{\mathbb{L}^p(\nu_{r,\ n})} \le C+\|X\|_{\mathbb{L}^p(\mu^{r\Theta_n})}$，且$\|X\|_{\mathbb{L}^p(\mu^{r\Theta_n})}$ 有界，从而证明了所需的不等式（5.34），因为 π 是任意的。此外，由控制收敛定理，我们容易得到$\lim_{r\to 0}\frac{1}{r}\int_{\mathbb{X}}\delta_m g(\mu,\ x($ $\mu^{r\Theta_n}-\mu(\mathrm{d}x)\ =\mathbb{E}^{\mu}[\partial_x\delta_m g\cdot\ \Theta_n]$，因此我们有

$$\underline{\lim}_{r\to 0}\frac{1}{r}\int_{\mathbb{X}}\delta_m g(\mu,x)(\nu_{r,n}-\mu)(\mathrm{d}x)\ge\mathbb{E}^{\mu}[\partial_x\delta_m g\cdot\Theta_n]-C\mathbf{d}(\nu_{r,n},\mu^{r\Theta_n})\ge\mathbb{E}^{\mu}[\partial_x\delta_m g\cdot\Theta_n]-2C\gamma.$$

令 γ 趋于0，且 n趋于无穷大，根据估计（5.33），

$$\underline{\lim}_{r\to 0}\frac{G^{\mathcal{C}}_{\mathbf{d}}(r)-\underline{G}^{\mathcal{C}}_{\mathbf{d}}(0)}{r}\ge\mathbb{E}^{\mu}\left[\partial_x\delta_m g\cdot T^{\hat{\lambda},\hat{u}}_{\mathbf{d}}\right] \tag{5.35}$$

$\hat{}$ 和 $\mathbb{E}^{\mu}\left[\partial_x\delta_m g\cdot\ T^{\lambda,\hat{u}}\,\mathbf{d}\ \ \right]=\|\partial^{\mathbf{d}}_x\delta_m(g+\hat{}\lambda\cdot\ \varphi)\ +\hat{}u\|_{\mathbb{L}^{p'}(\mu)}$，这是条件 $\mathbf{D_d}$(i) 的推论。$\hat{}$ 事实上 $\|\partial^{\mathbf{d}}_x\delta_m(g+\hat{}\lambda\cdot\ \varphi)\ +\hat{}u\|_{\mathbb{L}^{p'}(\mu)}\ =\mathbb{E}^{\mu}[(\partial^{\mathbf{d}}_x\delta_m(g+\hat{}\lambda\cdot\ \varphi)\ +\hat{}u)\cdot\ T^{\lambda,\hat{u}}\,\mathbf{d}\ \ \ ]$，并且根据条件 $\mathbf{D_d}$(i) 应用于 $v=\hat{}u$,

$$\mathbb{E}^{\mu}[(\partial^{\mathbf{d}}_x\delta_m(\hat{\lambda}\cdot\varphi))\cdot T^{\hat{\lambda},\hat{u}}_{\mathbf{d}}]=0\text{ and }\mathbb{E}^{\mu}[\hat{u}\cdot T^{\hat{\lambda},\hat{u}}_{\mathbf{d}}]=0.$$

最后，注意到 $\|\partial^{\mathbf{d}}_x\delta_m(g+\hat{}\lambda\cdot\ \varphi)\ +\hat{}u\|_{\mathbb{L}^{p'}(\mu)}\ge\ell$，我们证明了 $\lim_{r\to 0}\frac{G^{\mathcal{C}}_{\mathbf{d}}(r)-G^{\mathcal{C}}_{\mathbf{d}}(0)}{r}\ge\ell$。因此，由于 $G^{\mathcal{C}}_{\mathbf{d}}\le G^{\mathcal{C}}\,\mathbf{d}$，将方程（5.30）和（5.35）结合起来，即可证明 $G^{\mathcal{C}}\,\mathbf{d}$和 $G^{\mathcal{C}}_{\mathbf{d}}$ 在 0 处可微，且两者的导数均等于 $\ell=\mathcal{U}c\mathbf{d}(\hat{}\lambda,\hat{}u)^{1/p'}$。□

5.2 命题 3.4 的证明

为了证明这一结果，我们将在下面两个引理中验证，在假设 $\mathrm{D_d}$ 下，条件成立，从而可以应用引理 $\mathrm{A_d}$，因此我们可以应用引理 5.1。

引理 5.2。 固定 $\mathbf{d}\in\{\mathbb{W}_p,\mathbb{W}^{\mathrm{ad}}_p\}$ 并令 φ,g 满足假设 *3.1*。假设$\mathrm{A_d}$ 成立。则条件 (i)的条件 $\mathrm{D_d}$ 得到满足。

证明。 对于 $\mathbf{d}=\mathbb{W}^{\mathrm{ad}}_p$，我们考虑 $\mathcal{E}_\psi:=\{\psi\cdot h,\ \ h\in C^1_b(S,\ S)\}\subset C^1_b(\mathbb{X},\ \mathbb{R})$。根据条件期望的定义以及定义 (2.2),

$$\mathcal{E}^{\perp}_{\psi}=\{\mu'\in\mathcal{P}_p(\mathbb{X})\,\text{such that}\,\mathbb{E}^{\mu'}_1[\psi(X')]=0\}.$$

显然，根据关于 ψ 的假设 $\mathrm{A}^{\mathbb{W}^{\mathrm{ad}}_p}$(ii)，$\mathrm{E}_\psi\subset C^1_b(\mathbb{X},\mathbb{R})$。现在，对于 $h\in C^1_b(S,S)$，令 J_1 由方程 (2.5) 定义，我们有 $\partial^{\mathrm{ad}}_x(\psi\cdot h)\ =(\partial^{\mathrm{ad}}_x\psi)^{\intercal}h+J_1\mathbb{E}^{\mu}_1[\partial_{x_1}h^{\intercal}\psi]=(\partial^{\mathrm{ad}}_x\psi)^{\intercal}h$，因为 $\mathbb{E}^{\mu}_1[\psi]=0$ 且 $\partial_{x_1}h\in\sigma(X_1)$。因此，

$$\overline{\mathcal{E}}^{\mathbf{d}}_{\psi}=\mathrm{cl}(\{(\partial^{\mathrm{ad}}_x\psi)^{\intercal}h\,,\,h\in C^1_b(S,S)\}),$$

参见 $\mathrm{E}^{\mathbf{d}}_{\psi}$ 的定义 5.27。现在，根据假设 $\mathrm{A}^{\mathbb{W}^{\mathrm{ad}}_p}$(iv) 的非冗余条件，映射 $h\in\mathbb{L}^{p'}(\mu_1)\longmapsto(\partial^{\mathrm{ad}}_x\psi)^{\intercal}h\in\mathbb{L}^{p'}(\mu_1)\times\mathbb{L}^{p'}(\mu)$ 是强制的（在定义 2.1 的意义下），因此它具有闭值域且是单射的，因为 $\mathbb{L}^{p'}(\mu_1)$ 和 $\mathbb{L}^{p'}(\mu_1)\times\mathbb{L}^{p'}(\mu)$ 都是巴拿赫空间。因此，$\mathrm{E}^{\mathbf{d}}_{\psi}=\{(\partial^{\mathrm{ad}}_x\psi)^{\intercal}h\,,h\in\mathbb{L}^{p'}(\mu_1)\}$ 作为 $C^1_b(S,S)$ 在 $\mathbb{L}^{p'}(\mu_1)$ 中稠密。

对于 $\mathbf{d}=\mathbb{W}_p$, $\psi=0$，根据假设 $\mathrm{A}^{\mathbb{W}_p}$，我们滥用记号 $\mathrm{E}\psi=\{\psi\cdot h,\,h\in C^1_b(S,S)\}\subset C^1_b(\mathbb{X},\mathbb{R})$ 和 $\mathrm{E}^{\mathbf{d}}_{\psi}=\{(\partial^{\mathbf{d}}_x\psi)^{\intercal}h\,,h\in\mathbb{L}^{p'}(\mu_1)\}$。

现在可以证明条件 $\mathrm{D}_{\mathbf{d}}$ (i) 成立。泛函 $U_{\mathbf{d}}$ （由命题 3.4 中的公式 (3.12) 定义）是严格凸的，因为 $p' > 1$，且满足假设 $\mathrm{A}_{\mathbf{d}}$ (iv) 的非冗余条件。此外，同一相容条件保证了 $U_{\mathbf{d}}$ 是强制的。因此，$U_{\mathbf{d}}$ 是一个连续、强制且严格凸的泛函。由于 $1 < p' < \infty$，空间 $\mathbb{R}^k \times \mathbb{L}^{p'}(\mu_1)$ 是自反巴拿赫空间，从而保证存在唯一极小值点 $(\hat{\lambda}, \hat{h})$。由 $U_{\mathbf{d}}$的弗雷歇可微性，该极小值点满足一阶条件 (3.13)。考虑有序对 $(\hat{\lambda}, (\partial_x^{\mathrm{ad}}\psi)^\intercal \hat{h})$，我们证明了条件 $\mathrm{D}_{\mathbf{d}}$ 的条件 (i) 得以验证。□

显然，条件 $\mathrm{D}_{\mathbf{d}}$ （ii）是由稠密性直接推出的命题 3.3 的直接推论。为证明命题 3.3，我们需要以下引理。该引理基于隐函数定理，其证明将在本节末尾给出。

引理 *5.3*。固定 $d \in \{\mathbb{W}_p, \mathbb{W}_p^{\mathrm{ad}}\}$，并令 φ 满足假设 *3.1*，ψ 且 μ 满足假设 $A_{\mathbf{d}}$。设 $\Theta \in C_b^1(\mathbb{X}, \mathbb{X})$ 和 $u \in C_b^1(\mathbb{X}, M_{k\times 2d}(\mathbb{R}))$ 是紧支撑函数；若 $d = \mathbb{W}_p^{\mathrm{ad}}$，则它们是适应的（见定义 *2.3*）。定义 $H_{\mathbf{d}}(u)$ 如下

$$H_{\mathbb{W}_p^{\mathrm{ad}}}(u) := \mathbb{E}^\mu[(\partial_x^{\mathrm{ad}}\delta_m\phi)u^\intercal - (\partial_{x_2}\delta_m\varphi)(\partial_{x_2}\psi)^\intercal \mathbb{E}_1^\mu[(\partial_{x_2}\psi)(\partial_{x_2}\psi)^\intercal]^{-1}\mathbb{E}_1^\mu[(\partial_x\psi)u^\intercal]]. \tag{5.36}$$

并且 $H_{\mathbb{W}_p}(u) := \mathbb{E}^\mu[(\partial_x\delta_m\phi)\, u^\intercal]$。我们假设

$$H(u) \in \mathrm{GL}_k(\mathbb{R}), \tag{5.37}$$

这是由实值系数组成的可逆 $k \times k$ 矩阵空间。定义 e

$$K_{\mathbf{d}}(\varphi, \psi) := c(1 + \mathbb{1}_{\{\mathbf{d}=\mathbb{W}_p^{\mathrm{ad}}\}}|H(u)^{-1}|(1 + \|\partial_x\psi\|_{\mathbb{L}^\infty(\mu)}\|\partial_x\delta_m\varphi\|_{\mathbb{L}^{p'}(\mu)})).$$

那么，存在 $\eta > 0$ 以及一个满足以下条件的测度族 $(\nu_r)_{|r|<\eta}$

$$\begin{cases} \nu_r \in \varphi^{-1}(\{0\}) \cap \mathcal{E}_\psi^\perp \\ \mathbf{d}(\nu_r, \mu^{r\Theta}) \le r(K_{\mathbf{d}}(\varphi, \psi)(\|u\|_{\mathbb{L}^p(\mu)} + \|\partial_x\psi\|_{\mathbb{L}^\infty(\mu)})\|\mathcal{L}_{\varphi,\psi}^{\mathbf{d}}(\Theta)\| + \circ(1)). \end{cases}$$

此外，存在两个函数 $\lambda : (-\eta, \eta) \longrightarrow \mathbb{R}^k$ 和 $h : (-\eta, \eta) \longrightarrow \mathbb{L}^p(\mu_1)$，使得 $\nu_r = \mu \circ \Gamma(r, \lambda_r, h_r)^{-1}$，其中 $\Gamma(r, \lambda, h) := X + r\Theta + u^\intercal)\lambda + J_2\partial_{x_2}\psi^\intercal h$，这里 J_2 由方程 *(2.5)* 定义。最后，我们得到估计

$$|\lambda_r| + \|h_r\|_{\mathbb{L}^p(\mu)} \le r(K_{\mathbf{d}}(\varphi, \psi)\|\mathcal{L}_{\varphi,\psi}^{\mathbf{d}}(\Theta)\| + \circ(1)). \tag{5.38}$$

命题 3.3 的证明。令 Θ 为命题 3.3 中定义的，且令 $(u_\varepsilon)_\varepsilon$ 为一族紧支撑 C^1 函数；当 $\mathbf{d} = \mathbb{W}_p^{\mathrm{ad}}$ 时，这些函数是适应的，并且满足 $\|u_\varepsilon - \mathrm{N}_{\mathbf{d}}(\partial_x^{\mathbf{d}}\delta_m\varphi)\|_{\mathbb{L}^p(\mu)} \to 0$，其中 $\mathrm{N}_{\mathbf{d}}$ 由 (2.3) 定义。令 $H(u_\varepsilon)$由 (5.36) 定义。由于根据假设 $\mathrm{A}_{\mathbf{d}}$，ψ 有界，且根据假设 3.1，φ满足 $\partial_x\delta_m\varphi \in \mathbb{L}^p$，我们得到 $H(u_\varepsilon) \to H(\mathrm{N}_{\mathbf{d}}(\partial_x^{\mathbf{d}}\delta_m\varphi))$。又由于根据假设 $\mathrm{A}^{\mathbb{W}_p^{\mathrm{ad}}}(\mathrm{v})$，$H(\partial_x^{\mathbf{d}}\delta_m\varphi) = H \in \mathrm{GL}_k(\mathbb{R})$，因此当$\varepsilon$ 足够小时，$H(u_\varepsilon) \in \mathrm{GL}_k(\mathbb{R})$。

因此，由引理5.3应用于 u_ε，存在一个测度族 $(\nu_{r,\varepsilon})_{r,\varepsilon}$，使得对于所有$r > 0$ 和 $\varepsilon > 0$,

$$\nu_{r,\varepsilon} \in \varphi^{-1}(\{0\}) \cap \mathcal{E}_\psi^\perp \text{ and } \mathbf{d}(\mu^{r\Theta}, \nu_{r,\varepsilon}) \le r\eta(r, \varepsilon),$$

其中 $\eta(r, \varepsilon) = z_\varepsilon + \circ_r(1)$，$z_\varepsilon := K_{\mathbf{d}}^\varepsilon(\varphi, \psi)(\|u_\varepsilon\|_{\mathbb{L}^p(\mu)} + \|\partial_x\psi\|_{\mathbb{L}^\infty(\mu)})\|\mathbb{L}_{\varphi,\psi}^{\mathbf{d}}(\Theta)\|$ 以及 $K_{\mathbf{d}}^\varepsilon(\varphi, \psi) = c(1 + \mathbb{1}_{\{\mathbf{d}=\mathbb{W}_p^{\mathrm{ad}}\}}|H^{-1}(u_\varepsilon)|(1 + \|\partial_x\psi\|_{\mathbb{L}^\infty(\mu)}\|\partial_x\delta_m\varphi\|_{\mathbb{L}^{p'}(\mu)}))$。现在，由于 u_ε 收敛，显然有 $z_\varepsilon \le C\|\mathbb{L}_{\varphi,\psi}^{\mathbf{d}}(\Theta)\|$。因此，

$$\frac{1}{r}\mathbf{d}(\mu^{r\Theta}, \varphi^{-1}(\{0\}) \cap \mathcal{E}_\psi^\perp) \le \frac{1}{r}\mathbf{d}(\mu^{r\Theta}, \nu_{r,\varepsilon}) \le C\|\mathcal{L}_{\varphi,\psi}^{\mathbf{d}}(\Theta)\| + \circ_r(1).$$

取上极限可得所需的不等式。 □

命题3.4的证明。根据引理5.2和命题3.6，条件$\mathrm{D_d}$ 满足引理5.1 ，因此结论可直接得出。□

现在我们转到本小节中更具技术性的部分。

引理5.3的证明。设 $K \subset S$ 为一个紧集，使得

$$\operatorname{supp}(\Theta) \cup \operatorname{supp}(u) \subset K \times K$$

并定义测度 $\mu_1|_K(A) = \mu_1(K \cap A)$，对所有博雷尔可测的 $A \subset S$ 均成立。令

$$V^{\mathbf{d}} \text{ be defined by } V^{\mathbb{W}_p^{\mathrm{ad}}} := \mathbb{L}^\infty(\mu_1|_K) \text{ and } V^{\mathbb{W}_p} := \{0\}.$$

对于 $r \in \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}^k$, $h \in V\mathbf{d}$，我们将 $F{:=}(F^1, F^2)$ 定义为:

$$F^1(r,\lambda,h) := \varphi(\mu \circ \Gamma(r,\lambda,h)^{-1}) \ , \ F^2(r,\lambda,h) := \mathbb{E}_1^\mu[\psi(\Gamma(r,\lambda,h))]\mathbb{1}_{\{X_1 \in K\}}$$
$$\Gamma(r,\lambda,h) := X + r\Theta + u^\intercal\lambda + J_2\partial_{x_2}\psi^\intercal h\mathbb{1}_{\{X_1\in K\}}.$$

步骤 1。首先证明 $F\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R}^k \times V\mathbf{d} \longrightarrow \mathbb{R}^k \times V\mathbf{d}$ 定义良好且属于 C^1 类。我们仅考虑非平凡情形 $\mathbf{d}= \mathbb{W}_p^{\mathrm{ad}}$。在这种情况下，由假设 $\mathrm{A}^{\mathbb{W}_p^{\mathrm{ad}}}$(ii)， ψ 是次线性的。此外， Θ和 u连续且紧支撑，因此 $|F^2(r,\lambda,h)| \leq C(1 + |X_1| + \mathbb{E}_1^\mu[|X_2|])\mathbb{1}_{\{X_1\in K\}}$。现在，由假设 $\mathrm{A}^{\mathbb{W}_p^{\mathrm{ad}}}$(i)， $\mathbb{E}_1^\mu[|X_2|]$局部本质有界，因此 $F^2(r,\lambda,h) \in \mathbb{L}^\infty(\mu_1|_K)$。根据关于 φ 和 ψ的假设 $\mathrm{A}^{\mathbb{W}_p^{\mathrm{ad}}}$(ii)，可以证明 F关于 (r,λ) 弗雷歇可微。此外，由于 ψ 是具有有界的一阶和二阶微分的 C^2 ，且 K 是紧集，我们很容易得到其关于 h 的弗雷歇可微性；弗雷歇导数的连续性则继承自 φ和 ψ的连续性。

步骤 2。接下来证明，在 0 处，关于 (λ, h) 的偏微分 $D_{\lambda,h}F_0 := D_{\lambda,h}F(0) := (0, 0, 0)$ 是一个单射有界线性算子，且具有有界逆算子。容易得到 $D_{\lambda,h}F_0^1(\lambda, h) = \mathbb{E}^\mu[(\partial_x\delta_m\varphi)u^\intercal\lambda + (\partial_{x_2}\delta_m\varphi)(\partial_{x_2}\psi)^\intercal h\mathbb{1}_{\{X_1\in K\}}]$ 以及 $D_{\lambda,h}F_0^2(\lambda, h) = \mathbb{E}_1^\mu[(\partial_{x_2}\psi)(\partial_{x_2}\psi)^\intercal h + (\partial_x\psi)u^\intercal\lambda]\mathbb{1}_{\{X_1\in K\}}$。根据假设 $\mathrm{A}^{\mathbb{W}_p^{\mathrm{ad}}}$(ii)，算子 $D_{\lambda,h}F_0\colon \mathbb{R}^k \times V\mathbf{d} \to \mathbb{R}^k \times V\mathbf{d}$ 显然有界。现在，取 $\lambda, z \in \mathbb{R}^k$ 和 $h, f \in V\mathbf{d}$，考虑方程，

$$D_{\lambda,h}F_0(\lambda, h) = (z, f). \tag{5.39}$$

情形 1： $\mathbf{d} = \mathbb{W}_p^{\mathrm{ad}}$。因此，根据假设 $\mathrm{A}^{\mathbb{W}_p^{\mathrm{ad}}}$(iii)， $M(X_1) := \mathbb{E}_1^\mu[(\partial_{x_2}\psi)(\partial_{x_2}\psi)^\intercal]$ 几乎处处可逆，因此 $h = M(X_1)^{-1}(f - \mathbb{E}_1^\mu[(\partial_x\psi)u^\intercal)\lambda])\mathbb{1}_{\{X_1\in K\}}$，其中 $M(X_1)^{-1}$ 根据假设 $\mathrm{A}^{\mathbb{W}_p^{\mathrm{ad}}}$(iii) 本质有界。方程（5.39）简化为 $H\lambda = \gamma$，其中 $\gamma := z - \mathbb{E}^\mu[(\partial_{x_2}\delta_m\varphi)(\partial_{x_2}\psi)^\intercal\mathbb{E}_1^\mu[(\partial_{x_2}\psi)(\partial_{x_2}\psi)^\intercal]^{-1}f]$，并且根据假设 $\mathrm{A}^{\mathbb{W}_p^{\mathrm{ad}}}$(v) 定义的矩阵 H 可逆。因此，方程（5.39）有唯一解，且逆函数的连续性也显而易见。此外，求解该方程组可得

$$|\lambda| + \|\bar{h}\|_{\mathbb{L}^p(\mu)} \leq K_{\mathbb{W}_p^{\mathrm{ad}}}(\varphi,\psi)(|z| + \|\bar{f}\|_{\mathbb{L}^p(\mu)}) \text{ where } K_{\mathbb{W}_p^{\mathrm{ad}}} \text{ is defined in 5.3.} \tag{5.40}$$

情形 2： $\mathbf{d} = \mathbb{W}_p$。此处， $\psi = 0$ 且方程（5.39）化简为

$$\mathbb{E}^\mu[(\partial_x\delta_m\varphi)u^\intercal]\lambda = z,$$

根据假设 $\mathrm{A}^{\mathbb{W}_p}$ ，该算子可逆，所有所需性质均成立。

步骤 3。 根据前面的计算， F 满足隐函数定理的假设，因此根据 Evans 的附录 C、定理 8 [10]，，存在 $\eta > 0$和两个 C^1

函数 $\lambda:(-\eta,\eta)\to\mathbb{R}^k$, $h:(-\eta,\eta)\to\mathbf{F}_{\mathbf{d}}$，使得 $\lambda_0=0$, $h_0=0$，并且对于 $|r|<\eta$,$F(r,\lambda_r,h_r)=F(0)$。现在，由于 μ 满足假设 $\mathrm{A}_{\mathbf{d}}$(ii)， $\varphi(\mu)=0$ 且 $\mathbb{E}_1^\mu[\psi]=0$.

现在我们设 $h_r:=h_r\mathbb{1}_{\{X_1\in K\}}$。根据构造， $\mathbb{E}_1^\mu[\psi(\Gamma(r,\lambda_r,h_r))]\mathbb{1}_{\{X_1\in K\}}=0$，并且根据 K的定义， $\Gamma(r,\lambda_r,h_r))\mathbb{1}_{\{X_1\in K^c\}}=X\mathbb{1}_{\{X_1\in K^c\}}$，因为 $\mathrm{supp}(\Theta)\cup\mathrm{supp}(u)\subset K\times K$。因此 $\mathbb{E}_1^\mu[\psi(\Gamma(r,\lambda_r,h_r))\mathbb{1}_{\{X_1\in K^c\}}]=0$，这证明了 $\mathbb{E}_1^\mu[\psi(\Gamma(r,\lambda_r,h_r))]=0$，$\mu_1-$几乎处处成立，这表明 $\nu_r\in\varphi^{-1}(\{0\})\cap\mathrm{E}_\psi^\perp$。现在，通过标准计算，我们有

$$(\lambda_0',\partial_r\bar{h}_0)=-(D_{\lambda,h}F_0)^{-1}(\partial_rF_{\mathbf{0}})\text{ and }\partial_rF_{\mathbf{0}}=\mathcal{L}^{\mathbf{d}}_{\varphi,\psi}(\Theta).$$

因此，根据估计 (5.40), 存在 $C>0$ 使得

$$|\lambda_0'|+\|\partial_r\bar{h}_0\|_{\mathbb{L}^p(\mu)}\leq K_{\mathbf{d}}(\varphi,\psi)\|\mathcal{L}^{\mathbf{d}}_{\varphi,\psi}(\Theta)\|. \tag{5.41}$$

对 $r>0$定义如下测度， $\nu_r:=\mu\circ\Gamma(r,\lambda_r,\bar{h}_r)^{-1}$。现在， Θ和 $\mathbf{N}_{\mathbf{d}}(\partial_x^{\mathbf{d}}(\delta_m\varphi)$ 是 C^1 且紧支撑的。此外，当 $\mathbf{d}=\mathbb{W}_p^{\mathrm{ad}}$ 时， Θ 是因果的，因此， $x_1\mapsto x_1+r\Theta_1(x_1)+\mathbf{N}(\mathbb{E}_1[\partial_{x_1}\delta_m\varphi])(x_1)\lambda_r$ 是一个同胚。于是，当 $\mathbf{d}=\mathbb{W}_p^{\mathrm{ad}}$ 时，耦合 $\pi:=\mu\circ(X,\Gamma(r,\lambda_r,\bar{h}_r))^{-1}$ 是双因果的，因此， $\mathbf{d}(\nu_r,\mu)\leq r\|\Theta\|_p+c(|\lambda_r|+\|h_r\|_p)\leq r\|\Theta\|+cr(|\lambda_0'|+\|\partial_rh_0\|_{\mathbb{L}^p(\mu)}+\circ(1))$，结合估计 (5.41) 可得

$$\mathbf{d}(\nu_r,\mu)\leq r(\|\Theta\|_p+K_{\mathbf{d}}(\varphi,\psi)\|\mathcal{L}^{\mathbf{d}}_{\varphi,\psi}(\Theta)\|+\circ(1)).$$

□

注 5.4。 • 之所以需要额外假设 $\mathrm{A}^{\mathbb{W}_p^{\mathrm{ad}}}$(i)，即 $\mathbb{E}_1^\mu[|X_2|]$ 局部本质有界，是因为为了应用隐函数定理，必须在一个 $\mathbb{L}^\infty$ 空间中进行研究。事实上，函数 F^2 的行为几乎类似于涅梅茨基算子，而要求这类算子弗雷歇可微，会导致定义域空间与值域之间出现指数间隙（关于这一主题的更多信息，参见 Goldberg, Kampowsky, & Tröltzsch [12] ）。这一指数间隙会导致在0处计算的微分不具备满射性。为解决这一问题，我们在一个 $\mathbb{L}^\infty$ 空间中进行研究，但代价是增加假设，要求 $\mathbb{E}_1^\mu[|X_2|]$ 局部本质有界，并要求 ψ 具有足够的正则性，以确保 F^2弗雷歇可微。

• 此外，出于双因果性的考虑，我们引入了假设 $\mathrm{A}^{\mathbb{W}_{\mathrm{ad}p}}$ (iii) 和 $\mathrm{A}^{\mathbb{W}_{\mathrm{ad}p}}$ (v) 。事实上，如果我们不考虑 F^2，而是考虑

$$\hat{F}^2(r,\lambda,h):=\mathbb{E}_1^\mu[\psi(X+rT+\mathbf{N}_{\mathrm{ad}}(\partial_x^{\mathrm{ad}}\delta_m\varphi^\intercal)\lambda+(\partial_x^{\mathrm{ad}}\psi)^\intercal h)]\mathbb{1}_{\{X_1\in K\}},$$

那么，我们可以不再需要假设 $\mathrm{A}^{\mathbb{W}_p^{\mathrm{ad}}}$(iii) 和 $\mathrm{A}^{\mathbb{W}_p^{\mathrm{ad}}}$(v) 来应用隐函数定理（细节留给读者）。然而，所得的耦合 $\pi:=\mu\circ(X,X+rT+\mathbf{N}_{\mathrm{ad}}(\partial_x^{\mathrm{ad}}\delta_m\varphi^\intercal)\lambda+(\partial_x^{\mathrm{ad}}\psi)^\intercal h)^{-1}$ 可能不是双因果的，因为映射

$$x_1\mapsto x_1+rT_1(x_1)+\mathbf{N}(\mathbb{E}_1^\mu[\partial_{x_1}\delta_m\varphi^\intercal])(x_1)\lambda+(\mathbb{E}_1^\mu[\partial_{x_1}\psi])^\intercal h(x_1)$$

原则上并非同胚。我们通过增加条件 $\mathrm{A}^{\mathbb{W}_p^{\mathrm{ad}}}$(iii)和 $\mathrm{A}^{\mathbb{W}_p^{\mathrm{ad}}}$(v)，并且只对 X_2 进行扰动，解决了这一问题。因此，只考虑因果耦合时，敏感性分析会更容易。

5.3 命题 3.18 的证明

与上一段一样，我们验证在假设 $\mathrm{D}_{\mathbf{d}}$ 下，条件成立。$\mathrm{A}_{\mathbf{d}}$我们引入以下记号。给定一族随机变量 $(X_n)_n$，其中对于 $n\in\mathbb{N}$，X_n 定义在 $(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ 上，我们称

$$X_n=\circ_{\mathbb{P}}(1)\text{ if }X_n\xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}}0\text{ and }X_n=\circ_{\mathbb{L}^p(\mu)}(1)\text{ if }\|X_n\|_{\mathbb{L}^p(\mu)}\xrightarrow[n\to\infty]{}0. \tag{5.42}$$

引理 5.5。设 g 满足假设 3.1 且 μ 满足假设 $\mathrm{B}_{\mathbf{d}}$ 其中 $\mathbf{d} \in \{\mathbb{W}_p,\ \mathbb{W}_p^{\mathrm{ad}}\}$。则条件 (i)满足条件 $\mathrm{D}_{\mathbf{d}}$ 。

证明。令 $\mathrm{E_m} := \{f_1 \oplus f_2 - \mu_1(f_1) - \mu_2(f_2)\ f_1, f_2 \in C_b^1(\mathbb{R},\mathbb{R})\}$，其中 $f_1 \oplus f_2$ 由 (3.15) 定义。显然，$\Pi(\mu_1,\mu_2) = \mathrm{E}_{\mathrm{m}}^{\perp}$（按照定义 (2.2) 的意义）。此外，$\mathrm{E_m} \subset C_b^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$。对于$f \in \mathrm{E_m}$，$\partial_x^{\mathbf{d}} f = (f'1, f'2)$。因此，利用引理 5.1 的记号，由于 $C_b(\mathbb{R},\mathbb{R})$ 在 $\mathbb{L}^{p'}(\mu_i)$ 中稠密（$i = 1$取 2），可得 $\mathrm{E}^{\mathbf{d}}\mathrm{m} = \mathbb{L}^{p'}(\mu_1) \times \mathbb{L}^{p'}(\mu_2)$（其中 $\mathrm{E}^{\mathbf{d}}$ 由 (5.27) 定义）。令 $U_{\mathbf{d}}^{\mathrm{m}}$由命题 3.7 定义。根据三角不等式，显然 $U_{\mathbf{d}}^{\mathrm{m}}$是强制的、连续的且严格凸的，因为 $p' > 1$。由于 $1 < p' < \infty$，空间 $\mathbb{L}^{p'}(\mu_1) \times \mathbb{L}^{p'}(\mu_2)$ 是自反巴拿赫空间，因此存在唯一极小值点 $f_{\mathbf{d}}^{\mathrm{m}}$。此外，$U\mathrm{md}$ 是弗雷歇可微的，一阶条件恰好给出 (3.19)。因此，条件 $\mathrm{D}_{\mathbf{d}}$ (i) 得到满足。□

与上一小节一样，条件 $\mathrm{D}_{\mathbf{d}}$ (ii) 将直接由命题 3.6 得出。为了证明命题 3.6，我们需要以下引理，其证明推迟到本小节末尾。

引理 *5.6.* 设 g 满足假设 *3.1*，且 μ 满足假设 $B_{\mathbf{d}}$，其中 $\boldsymbol{d} \in \{\mathbb{W}_p, \mathbb{W}_p^{\mathrm{ad}}\}$；再设 $\Theta: \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ 是一个紧支撑的 C^1 函数，且 $\mathit{supp}(\Theta) \subset M_1 \times M_2$，其中某些$M_1 \subsetneq I_1$ 和 $M_2 \subsetneq I_2$；当 $\boldsymbol{d} = \mathbb{W}_p^{\mathrm{ad}}$ 时，假设 Θ 是适应的，且 $\Theta_1 = 0$。那么，存在一个测度族 $(\nu_r)_{r>0}$，使得

$$\nu_r \in \Pi(\mu_1,\mu_2)\ \textit{and}\ \mathbf{d}(\mu,\nu_r) \le rC(\|\mathcal{L}_{\mathrm{m}}^{\mathbf{d}}(\Theta)\| + \circ(1))\ \textit{for all}\ r > 0\,. \tag{5.43}$$

命题 3.6 的证明。设 Θ 如命题3.6所述。那么，根据引理 5.6，存在一个 $(\nu_r)_r$ 概率测度族，使得

$$\mathbf{d}(\mu^{r\Theta}, \Pi(\mu_1,\mu_2)) \le \mathbf{d}(\mu^{r\Theta},\nu_r) \le rC(\|\mathcal{L}_{\mathrm{m}}^{\mathbf{d}}(\Theta)\| + \circ(1)).$$

令 r 趋于 0，我们得到所需结果。 □

命题 3.18的证明。 根据引理5.5，只需证明条件$\mathrm{D}_{\mathbf{d}}$ （ii）得到满足即可。由于可以通过满足命题 $T_{\mathbf{d}}^{\mathrm{m}}$的一列$\Theta_n$ 函数 C_b^1 逼近3.6中的约束，因此该条件确实成立。□

引理 5.6的证明。 我们将区分 $\mathbf{d} = \mathbb{W}_p$ 与 $\mathbf{d} = \mathbb{W}_p^{\mathrm{ad}}$的情形。

情形 1：$\mathbf{d} = \mathbb{W}_p$。令 $\Theta: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ 为一个紧支撑 C^1 函数。令 $\nu^r := \mu \circ (X + r\Theta)^{-1}$，并定义 $\varphi_i: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ 为 $x_i \mapsto x_i + r\Theta_i(x)$ 的逆函数。根据引理 5.17，对于 $|r| < \eta$，$\nu_i^r := \nu^r \circ X_i^{-1}$具有相对于勒贝格测度的密度，我们将其记为 q_i^r。对于 $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$，我们有：$q_1^r(y_1) := \int_{\mathbb{R}} q(\varphi_1(r, y_1, x_2)\ x_2)\, \partial_{y_1}\varphi_1(r, y_1, x_2)\, \mathrm{d}x_2$，并且

$$q_2^r(y_2) := \int_{\mathbb{R}} q(x_1, \varphi_2(r,x_1,y_2))\partial_{y_2}\varphi_2(r,x_1,y_2)\mathrm{d}x_1.$$

接下来，定义 Fréchet-Hoeffding 输运映射

$$\Gamma = (\Gamma_1,\Gamma_2): (r,z) \mapsto \left(F_i^{-1} \circ F_i^r(z)\right)_{i=1,2},$$

其中，F_i 表示 μ_i 的累积分布函数（c.d.f.），F_i^r 表示 ν_i^r的累积分布函数。由于 $\nu_i^r \circ \Gamma_i(r, X)^{-1} = \mu_i$，我们有 $\nu_r := \mu \circ \Gamma(r, X + r\Theta)^{-1} \in \Pi(\mu_1, \mu_2)$。于是，

$$\frac{1}{r^p}\mathbb{W}_p(\nu_r,\mu)^p \le R_1(r) + R_2(r) \text{ where } R_i(r) := \mathbb{E}^{\mu}\Big[\Big|\frac{\Gamma_i(r, X_i + r\Theta_i) - X_i}{r}\Big|^p\Big].$$

现在我们研究 $R_i(r)$ 在 r 趋于0时的收敛性。令 $i \in \{1,\ 2\}$，并令 j 表示另一个指标。根据假设B$^{\mathbb{W}_p}$，我们可以应用引理5.19 并得到

$$F_i^r(X_i + r\Theta_i) = F_i(X_i) + r\int_{\mathbb{R}} (\Theta_i - \Theta_i(X_i, x_j))q(X_i, x_j)\mathrm{d}x_j + \circ_{\mathbb{L}^p(\mu)}(r). \tag{5.44}$$

令 M_1、M_2 为紧子集，使得支集$(\Theta) \subset M_1 \times M_2$、$M_1 \subsetneq I_1$，$M_2 \subsetneq I_2$ 其中$I_1 =$ 支集(μ_1) 和 $I_2 =$ 支集 (μ_2) 根据假设 B$^{\mathbb{W}_p}$ 均为区间。

$$\text{For } x < \inf M_i \text{ or } x > \sup M_i\text{, we claim that } F_i^r(x) = F_i(x)$$

我们仅证明 $x < \inf M_i$ 的情形。注意到

$$F_i^r(x) = \mu[X_i + r\Theta_i \le x] = \mu[X_i + r\Theta_i \le x, X_i \le \inf M_i] + \mu[X_i + r\Theta_i \le x, X_i > \inf M_i].$$

由于对于所有 $z \in \mathbb{R}$，$\Theta_i(\inf M_i, z) = 0$，这是因为 Θ_i 是连续的，并且当 r 足够小时，$x_i \mapsto x_i + r\Theta_i(x_i, X_j)$ 递增，因此有 $\{X_i + r\Theta_i \le x\} \cap \{X_i < \inf M_i\} = \{X_i \le x\} \cap \{X_i < \inf M_i\}$，并且，$\{X_i \ge \inf M_i\} = \{X_i + r\Theta_i(X) \ge \inf M_i + r\Theta_i(\inf M_i, X_j)\} = \{X_i + r\Theta_i(X) \ge \inf M_i\}$。于是，

$$\begin{aligned}
&\mu[X_i + r\Theta_i \le x, X_i \le \inf M_i] = \mu[X_i \le x, X_i \le \inf M_i] = \mu[X_i \le x],\\
&\mu[X_i + r\Theta_i \le x, X_i > \inf M_i] = \mu[X_i + r\Theta_i \le x, X_i + r\Theta_i > \inf M_i] = 0.
\end{aligned}$$

这证明了当 $x < \inf M_i$ 时，$F_i^r(x) = F_i(x)$。通过类似的考虑，我们还可得出，当 $x > \sup M_i$ 时，$F_i^r(x) = F_i(x)$。因此，我们已经证明

$$F_i^r(X_i + r\Theta_i)\mathbb{1}_{X_i \in M_i^c} = F_i(X_i)\mathbb{1}_{X_i \in M_i^c}. \tag{5.45}$$

现在，根据假设 B$^{\mathbb{W}_p}$(i)，$F_i^{-1} \in C^1((0,1)\ I_i)$ 且在严格包含于 (0,1)的每个子区间上都是一致利普希茨的。因此，应用引理 5.15 可得

$$\Gamma_i(r, X_i + r\Theta_i) = X_i + r(\Theta_i - \mathbb{E}_i^\mu[\Theta_i]) + \circ_{\mathbb{L}^p(\mu)}(r).$$

由此直接可得 $R_i(r) \to \mathbb{E}^\mu\left[|\Theta_i - \mathbb{E}_i^\mu[\Theta_i]|^p\right]$，$i = 1, 2$。因此，我们证明了 $\mathbf{d}(\nu_r, \mu) \le r(\|\Theta\| + C\|\mathcal{L}_{\mathrm{m}}^{\mathbf{d}}(\Theta)\| + \circ(1))$。

情形 2： $\mathbf{d} = \mathbb{W}_p^{\mathrm{ad}}$。在这种情形下，证明过程非常相似，且更简单，因为 $\Theta_1 = 0$。因此，我们设 $\nu_r := \mu \circ (X_1, \Gamma_2(r, X_2 + r\Theta_2))^{-1}$ 其余证明由$\|\mathcal{L}_{\mathrm{m}}^{\mathbf{d}}(\Theta)\|_{\mathbb{L}^p(\mu)} = \|\mathbb{E}_2^\mu[\Theta_2]\|_{\mathbb{L}^p(\mu)}$得出。 □

5.4 鞅耦合情形

对于鞅耦合情形，证明遵循与前面两个小节相同的方案。然而，主要困难在于构造一族鞅耦合 ν_r，使其能够很好地近似 $\operatorname{argmax}_{\mu' \in B^{\mathrm{M},\ \mathbb{W}}}{}^{\mathrm{m}}{}_{(\mu,\ r)}{}^{\mathrm{ad}}\ {}^{g}(\mu')$。这族耦合的构造依赖于对隐函数定理的改进；参见小节 5.5。下文中，^{p}对于 $(E,\ |\cdot|_E)$ 这一赋范向量空间，记

$$\mathcal{L}_c(E) := \{\Psi : (E, |\cdot|_E) \to (E, |\cdot|_E) \text{ linear and continuous}\}, \tag{5.46}$$

并将 $|||\Psi|||$记作相应的算子范数

$$|||\Psi||| := \sup_{N(x) \le 1} N(\Psi(x)). \tag{5.47}$$

定义算子 $\mathbb{E}_1^\mu \circ \mathbb{E}_2^\mu[f] = \mathbb{E}^\mu[\mathbb{E}^\mu[f(X_1)|X_2]|X_1]$ 对于 $f \in \mathbb{L}^\alpha(\sigma(X_1)\ \mu)$。注意，算子 $\mathbb{E}_1^\mu \circ \mathbb{E}_2^\mu$ 将 $\mathbb{L}_0^\alpha(\mu)$ 映射到 $\mathbb{L}_0^\alpha(\mu)$，参见定义（3.24）中的 $\mathbb{L}_0^\alpha(\mu)$。

引理 5.7。 设假设$\mathrm{C}^{\mathbb{W}_p^{\mathrm{ad}}}$成立，且 $1 \le \alpha \le \infty$。

（i）那么 $\|\|\mathbb{E}_1^{\mu} \circ \mathbb{E}_2^{\mu}\|\|_{\alpha} < 1$。（ii）向量空间 $E_\alpha := \{f_1 \oplus f_2, f_1 \in \mathbb{L}_0^{\alpha}(\mu_1) \quad f_2 \in \mathbb{L}^{\alpha}(\mu_2)\}$ 可以写成直和 $E_\alpha = \mathbb{L}_0^{\alpha}(\mu_1) \oplus \mathbb{L}^{\alpha}(\mu_2)$，并且在 $\mathbb{L}^{\alpha}(\mu)$ 中是闭的。

（iii）存在 $C > 0$，使得对于所有 $f_1 \oplus f_2 \in E_\alpha$，我们有

$$\|f_1 \oplus f_2\|_{\mathbb{L}^{\alpha}(\mu)} \ge C(\|f_1\|_{\mathbb{L}^{\alpha}(\mu_1)} + \|f_2\|_{\mathbb{L}^{\alpha}(\mu_2)}).$$

这个引理的证明推迟到本节末尾。

引理 5.8。 设 $\Theta_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ 是一个 C^1、紧支撑的适配函数，令 μ 满足假设 $\mathrm{C}^{\mathbb{W}_p^{\mathrm{ad}}}$，并定义

$$\mathcal{T}_{r,a} := F_2^{-1} \circ F_2^{r,a}, \; F_2^{r,a}(x) := \mu(\hat{X}_2^{r,a} \le x) \; where \; \hat{X}_2^{r,a} := X_2 + r\Theta_2 + a(X_1). \tag{5.48}$$

那么，存在 $\eta > 0$ 和 $a : (-\eta, \eta) \to \mathbb{L}_0^p(\mu_1)$，使得：

$$\mathbb{E}_1^{\mu}[\mathcal{T}_{r,a_r}(\hat{X}_2^{r,a})] = X_1 \; for \; all \; |r| < \eta.$$

此外，对于某个常数 $C > 0$,

$$\|a_r\|_{\mathbb{L}^{\alpha}(\mu_1)} \le rC(\|\mathbb{E}_1^{\mu}[\Theta_2 - \mathbb{E}_2^{\mu}[\Theta_2]]\|_{\mathbb{L}^{\alpha}(\mu_1)} + \circ(1)). \tag{5.49}$$

该引理的证明推迟到后面进行。

引理 5.9。 设 μ 满足假设 $\mathrm{C}^{\mathbb{W}_p^{\mathrm{ad}}}$。设 $\Theta : \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ 是一个适应的、紧支撑的 C^2 函数。则存在一个测度族 $(\nu_r)_{r>0}$ 使得

$$\nu_r \in \Pi^{\mathrm{M}}(\mu_1, \mu_2) \; and \; \mathbb{W}_p^{\mathrm{ad}}(\mu^{r\Theta}, \nu_r) \le Cr(\|\mathcal{L}^{\mathrm{M,m}}(\Theta)\| + \circ(1)) \; for \; all \; r > 0. \tag{5.50}$$

我们也将该引理的证明暂缓，接下来证明命题 3.11和3.10。

命题 3.10 的证明。 由引理 5.9，存在一个测度族 $\nu_r \in \Pi^{\mathrm{M}}(\mu_1, \mu_2)$，使得

$$\frac{1}{r}\mathbb{W}_p^{\mathrm{ad}}(\mu^{r\Theta}, \Pi^{\mathrm{M}}(\mu_1, \mu_2)) \le \frac{1}{r}\mathbb{W}_p^{\mathrm{ad}}(\mu^{r\Theta}, \nu_r) \le C(\|\mathcal{L}^{\mathrm{M,m}}(\Theta)\| + \circ(1)).$$

令 r 趋于 0，即得所需结果。 □

命题的证明 3.11。 我们沿用前两节中的相同结构。由于计算过程类似，此处略去证明。

步骤 1。我们首先证明条件 $\mathrm{D_d}$ (i) 得到满足。使用记号 (3.15)，并定义 $\mathrm{E^{M,m}} := \{f_1 \oplus f_2 - \mu(f_1 \oplus f_2) + h^{\otimes}, f_1, f_2, h \in C_b^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})\}$。根据定义 2.2，我们有$\Pi^{\mathrm{M}}(\mu_1, \mu_2) = \mathrm{E}^{\perp}_{\mathrm{M,m}}$。令 $u = f_1 \oplus f_2 - \mu(f_1 \oplus f_2) + h^{\otimes}$ 属于 $\mathrm{E^{M,m}}$，由于 μ 是鞅测度，$\partial_x^{\mathrm{ad}} u(X) = (f'1, f'2)^{\intercal} + hJ$。由于 C_0^b在 $\mathbb{L}_0^p(\mu_i)$ 中对 $i = 1, 2$ 稠密，我们可以将此结果扩展到其在 $\mathbb{L}^p$ 中的闭包。因此，由 (5.27) 定义的 $\mathrm{E^d}$ M,m 为

$$\overline{\mathcal{E}}^{\mathbf{d}}_{\mathrm{M,m}} = \mathbb{L}^{p'}(\mu_1) \times (\mathbb{L}^{p'}(\mu_1) + \mathbb{L}^{p'}(\mu_2)) = \mathbb{L}^{p'}(\mu_1) \times (\mathbb{L}_0^{p'}(\mu_1) \oplus \mathbb{L}^{p'}(\mu_2)),$$

其中，第二个等式直接由引理 5.7 得出。设 U^{M}、m ad 如命题 3.11中所定义。根据引理 5.7，U^{M}、m ad 是强制的（定义 2.1）。此外，

由于 $p' > 1$ 且和 $\mathbb{L}_0^{p'}(\mu_1) \oplus \mathbb{L}^{p'}(\mu_1)$ 是直和， $U\mathrm{M}\dot{\mathrm{m}}\,\mathrm{ad}$ 是严格凸的。因此， $U^{\mathrm{M}}{}_{,\mathrm{m}}\mathrm{ad}$ 是连续、强制且严格凸的，而 $\mathrm{E}^{\mathbf{d}}$ 是自反巴拿赫空间的闭子空间，因此也是自反巴拿赫空间。因此，存在一个满足式 (3.25) 所给一阶条件的极小化子。由一阶条件 (3.25) 可直接推出，该极小化子 $(f_{\mathrm{M},\mathrm{m}}, H_{\mathrm{M},\mathrm{m}})$ 满足条件 $\mathrm{D}_{\mathbf{d}}$ (i)。

步骤 2： 条件 $\mathrm{D}_{\mathbf{d}}$ （ii）是命题 3.10的直接推论，应用引理5.1 即可得到所需结果。 □

现在我们继续证明技术引理。其中大多数引理都依赖于以下展开引理，其证明推迟至第 5.6 小节。

引理 5.10。 令 $\nu \in \Pi(\nu_1, \nu_2)$ 为某个 $\nu_1, \nu_2 \in P_p(\mathbb{R})$ 。假设 ν 具有分解 $\nu(\mathrm{d}x) := \nu_1(\mathrm{d}x_1)\, k(x_1, x_2)\, \mathrm{d}x_2$ ，其中 $k \in \mathbb{L}^\infty(\mathbb{R}^2)$ 。令 $r_n \to 0$ ，并令族 (Θ_n) 满足： $\Theta_n : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ 满足以下假设

（i）对于所有 $x_2 \in \mathbb{R}$，映射 $\Theta_n(\cdot\, x_2)$ 都是可测的。

（ii）对于所有 $x_1 \in \mathbb{R}$，映射 $\Theta_n(x_1, \cdot)$ 是 C^2 的，并且， $(|\Theta_n|)_n$ 是一致可积的。此外，$\max(|\partial_{x_2}\Theta_n(x_1, x_2)|, |\partial^2_{x_2x_2}\Theta_n(x_1, x_2)|) \le C$。

定义如下随机变量，其中 $n \in \mathbb{N}$ ，

$$Z_n := F^{r_n}(X_2 + r_n\Theta_n),$$

其中 $F^{r_n}(x) := \nu(X_2 + r_n\Theta_n \le x)$。然后，利用记号 (5.42)，可得如下展开式

$$Z_n = F_2(X_2) + r_n \int_{\mathbb{R}} (\Theta_n - \Theta_n(x_1, X_2))k(x_1, X_2)\nu_1(\mathrm{d}x_1) + \circ_{\mathbb{L}^p(\nu)}(r).$$

引理 5.9 的证明 令 $\Theta_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$为一个紧支撑的 C^2 函数，并令$\Theta = (0, \Theta_2)$。令 $\eta > 0$和 $a : (-\eta, \eta) \to \mathbb{L}_0^p(\mu_1)$ 为引理 5.8 中构造的映射。利用记号 (5.48)，令 $X_1' = X_1$和 $X_2' = \mathrm{T}_{r,a_r}(\hat{X}^{r,a}_2)$。根据构造，有$\nu_r := \mathrm{L}(X') \in \Pi(\mu_1, \mu_2)$。令$\Theta_2 + \frac{1}{r}a_r(X_1)$，其是一致可积的，因为 $(\frac{a_r}{r})_r$在 $\mathbb{L}^\alpha(\mu_1)$ 中有界，且引理 5.8 中的 α 可以选得严格大于 p 。因此，将引理 5.19 应用于 μ 和 $\Theta + \frac{1}{r}a_r$，可得

$$\begin{aligned} F_2^{r,a_r}(\hat{X}_2^{r,a}) = F_2(X_2) + r\int_{\mathbb{R}} (\Theta_2(X) - \Theta_2(x_1, X_2))\kappa(x_1, X_2)\mu_1(\mathrm{d}x_1) \\ + \int_{\mathbb{R}} (a_r(X_1) - a_r(x_1))\kappa(x_1, X_2)\mu_1(\mathrm{d}x_1) + \circ_{\mathbb{L}^p(\mu)}(r). \end{aligned}$$

根据假设 $\mathrm{C}^{\mathbb{W}_p^{\mathrm{ad}}}$(ii) 可知 $F_2^{-1} \in C^1((0,1)\ I)$ 以及 $q_2(X_2) \ge c > 0$， μ_2几乎处处成立，这保证了 F_2^{-1}在从 $(0,1)$ 到 I的映射是一致利普希茨的。因此，根据引理5.15，

$$X_2' = X_2 + r(\Theta_2 - \mathbb{E}_2^\mu[\Theta_2]) + (a_r(X_1) - \mathbb{E}_2^\mu[a_r(X_1)]) + \circ_{\mathbb{L}^p}(r). \tag{5.51}$$

现在考虑耦合 $\pi := \mathcal{L}(X + r\Theta(X)\ X')$。显然它是双因果的，因为 $X_1 = X_1'$。此外，

$$\frac{1}{r}\mathbb{W}_p^{\mathrm{ad}}(\mu^{r\Theta}, \Pi^{\mathrm{M}}(\mu_1, \mu_2)) \le \frac{1}{r}\mathbb{E}^\pi[|X - X'|^p]^{1/p}.$$

此外，利用引理 5.51 中的展开式（5.49）和估计，我们得到所需结果。 □

现在我们转而证明引理 5.8。设 $\Theta:\ \mathbb{X}\to S$ 是一个 C^2、紧支撑函数。设 $1<\alpha<\infty$ 并定义

$$\begin{aligned}\mathcal{U}:\mathbb{R}\times\mathbb{L}_0^\alpha(\mu_1)&\longrightarrow\mathbb{L}_0^\infty(\mu_1)\\(r,a)&\mapsto\mathbb{E}_1^\mu[\mathcal{T}_{r,a}(\hat{X}_2^{r,a})]-X_1\end{aligned}.\tag{5.52}$$

引理 5.11。 假设 C$^{\mathbb{W}_p^{\mathrm{ad}}}$成立。则 $\mathcal{U}$ 在凸邻域 $I\times\mathcal{V}$ 内的 (0,0)处定义良好且 *Gâteaux* 可微，其 *Gâteaux* 导数为

$$\begin{aligned}\partial_r\mathcal{U}(r,a)&:=\int_{\mathbb{R}}\mathbb{E}_1^\mu\big[(\hat{\Theta}(\hat{X})-\hat{\Theta}(x_1,\hat{X}_2^{r,a}))\frac{\kappa_{r,a}(x_1,\hat{X}_2^{r,a})}{q_2\circ\mathcal{T}_{r,a}(\hat{X}_2^{r,a})}\big]\mu_1(\mathrm{d}x_1)\\\mathrm{d}_a\mathcal{U}(r,a)(b)&:=\int_{\mathbb{R}}\mathbb{E}_1^\mu\big[(b(X_1)-b(x_1))\frac{\kappa_{r,a}(x_1,\hat{X}_2^{r,a})}{q_2\circ\mathcal{T}_{r,a}(\hat{X}_2^{r,a})}\big]\mu_1(\mathrm{d}x_1),\end{aligned}\tag{5.53}$$

其中我们使用了记号 (5.48)， $\hat{}\Theta(x_1,x_2):=\Theta(x_1,\varphi(r,x_1,x_2-a(x_1)))$， $\hat{}\ X_1=X_1$, $\varphi:\mathbb{R}\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ 是 $x_2\mapsto x_2+r\Theta_2(x)$ 的逆函数，且

$$\kappa_{r,a}(x):=\kappa(x_1,\varphi(r,x_1,x_2-a(x_1)))\partial_{x_2}\varphi(r,x_1,x_2-a(x_1)),\tag{5.54}$$

是 $\mu\circ(X_1,\hat{}X^{r,a}_2)^{-1}$ 关于其第一边缘分布的解体。此外，对于$(r,a)\in I\times V$和 $1\le\beta\le\infty$, $\mathrm{d}_aU(r,a)\in L_c(\mathbb{L}_0^\beta(\mu))$，对于 $\beta\in\{\alpha,\infty\}$。

引理 5.11 的证明。首先检查 U 是否定义良好。对于任意 $r>0$ 和 $a\in\mathbb{L}_0^p(\mu_1)$，有 $\mathrm{T}_{r,a}(\hat{}X^{r,a}_2)\sim\mu_2$。由于根据假设 C$^{\mathbb{W}_p^{\mathrm{ad}}}$(ii)， F_2^{-1}有界，且 X_1 本质有界，因此 $\mathrm{U}(r,a)\in\mathbb{L}^\infty(\mu_1)$，并且 $\mathbb{E}^\mu[\mathrm{U}(r,a)]=\int_{\mathbb{R}}x\mu_2(\mathrm{d}x)-\int_{\mathbb{R}}x\mu_1(\mathrm{d}x)=0$。
现在我们证明 U 关于 (r,a) 的 Gâteaux 可微性。令 $a\in\mathbb{L}_0^\alpha(\mu_1)$， r, $\varepsilon=$ r $:(\varepsilon_1,\varepsilon_2)>0$，且充分小。定义 $\hat{}X_1:=X_1$，并令 $\hat{}X^{r,a}_2$, $\hat{}\Theta(x_1,x_2)$ 和 $\varphi(\cdot,x_1,y_2)$ 如 (5.53) 中所示。测度 $\nu_{r,a}:=\mathrm{L}(\hat{}X)$ 存在解体 $\nu_{r,a}=\kappa_{r,a}(x)\mathrm{d}x_2\mu_1(\mathrm{d}x_1)$，其中 $\kappa_{r,a}$ 由 (5.54) 定义。将引理 5.19 应用于测度 $\nu_{r,a}$，其中 $\tilde{\Theta}_\varepsilon:=\frac{\varepsilon_1}{|\varepsilon|}\hat{}\Theta(\hat{}X)+\frac{\varepsilon_1}{|\varepsilon|}b(\hat{}X_1)$（它是一致可积的），可得

$$\begin{aligned}F_2^{r+|\varepsilon|\tilde{\Theta}_\varepsilon}(\hat{X}_2^{r,a}+|\varepsilon|\tilde{\Theta}_\varepsilon(\hat{X}))&=F_2^{r,a}(\hat{X}_2^{r,a})+|\varepsilon|\mathcal{L}_{a,r}(\tilde{\Theta}_\varepsilon)+\circ_{\mathbb{L}^p(\mu)}(\varepsilon)\\&=F_2^{r,a}(\hat{X}_2^{r,a})+\varepsilon_1\mathcal{L}_{a,r}(\hat{\Theta})+\varepsilon_2\mathcal{L}_{a,r}(b)+\circ_{\mathbb{L}^p(\mu)}(\varepsilon),\end{aligned}$$

其中 $\mathrm{L}_{r,a}(\hat{}\Theta):=\int_{\mathbb{R}}(\hat{}\Theta(\hat{}X)-\hat{}\Theta(x_1,\hat{}X^{r,a}_2))\kappa_{r,a}(x_1,\hat{}X^{r,a}_2)\mu_1(\mathrm{d}x_1)$。现在我们证明 $\mathrm{d}_a\mathrm{U}(r,a):\mathbb{L}_0^\alpha\to\mathbb{L}_0^\alpha$ 和 $\mathrm{d}_a\mathrm{U}(r,a):\mathbb{L}_0^\infty\to\mathbb{L}_0^\infty$ 是有界线性连续算子。根据假设 C$^{\mathbb{W}_p^{\mathrm{ad}}}$(i)-(ii)，且由于 $\hat{}\Theta$ 有界，我们得到以下不等式：

$$\big|(b(X_1)-b(x_1))\frac{\kappa_{r,a}(x_1,\hat{X}_2^{r,a})}{q_2\circ\mathcal{T}_{r,a}(\hat{X}_2^{r,a})}\big|\le C|b(X_1)-b(x_1)|.\tag{5.55}$$

估计式 (5.55) 给出了所需的连续性性质。 □

引理 5.12. 设 C$^{\mathbb{W}_p^{\mathrm{ad}}}$成立，并设 $I\times\mathcal{V}$和 $\partial_r\mathcal{U}$, $\mathrm{d}_a\mathcal{U}$由引理 *5.11*定义。则 $\partial_r\mathcal{U}$关于 r连续。设 a, $\tilde{a}$ 属于 $\mathcal{V}$且 $r\in I$，则映射

$$\lambda\in[0,1]\mapsto\mathrm{d}_a\mathcal{U}(r,\bar{a}_\lambda)(a-\tilde{a})\in\mathbb{L}_0^\alpha(\mu)\ \textit{where}\ \bar{a}_\lambda:=(1-\lambda)a+\lambda\tilde{a},$$

连续。此外，映射 $(r,a)\in\mathbb{R}\times\mathbb{L}_0^\infty(\mu_1)\mapsto\mathrm{d}_aU(r,a)\in L_c(\mathbb{L}_0^\beta(\mu_1))$ 在$(0,0)$处连续，其中 $\beta\in\{\alpha,+\infty\}$。

引理 5.12 的证明。我们先证明第一点。设 a 和 $\tilde{a}$ 属于 $\mathbb{L}_0^\alpha(\mu_1)$，我们将证明 $\lambda \mapsto \Lambda(\lambda) \in \mathbb{L}^\alpha(\mu)$ 的连续性，其中 $\Lambda(\lambda) := \mathrm{d}_a U(r, a_\lambda)(a - \hat{a})$，$a_\lambda = a + \lambda(a - \hat{a})$。不失一般性，我们只需检验其在 $\lambda = 0$ 处的连续性。由于 $q_2 \circ F_2^{-1}$ 和 κ 有界，因此

$$|\Lambda(\lambda) - \Lambda(0)| \le I_1(\lambda) + I_2(\lambda),$$

其中

$$I_1(\lambda) := \int_{\mathbb{R}} \mathbb{E}_1^\mu \Big[k(x_1, X_1) \big| \kappa_{r,a_\lambda}(x_1, \hat{X}_2^{r,a_\lambda}) - \kappa_{r,a}(x_1, \hat{X}_2) \big| \Big] \mu_1(\mathrm{d}x_1),$$

满足 $k(x_1, X_1) = |a - \tilde{a}|(x_1) + |a - \tilde{a}|(X_1)$，且

$$I_2(\lambda) := \int_{\mathbb{R}} \mathbb{E}_1^\mu \Big[\big| q_2 \circ \mathcal{T}_{r,a_\lambda}(\hat{X}_2^{r,a_\lambda}) - q_2 \circ \mathcal{T}_{r,a}(\hat{X}_2) \big| \Big] \mu_1(\mathrm{d}x_1).$$

根据引理 5.18，$\|I_1(\lambda)\|_{\mathbb{L}^p} \to 0$。此外，由于对所有 $0 \le \lambda \le 1$，$\mu \circ (X_2 + r\Theta(X) + a_\lambda(X_1))^{-1}$ 都有密度，因此当 λ 趋于 0 时，$F^{r,\,a_\lambda}_{\cdot,\,2} \to F^{r,\,a}_{\cdot,\,2}$ 一致收敛。由于 $q_2 \circ F_2^{-1}$ 有界且一致连续，通过标准论证可得 $\|I_2(\lambda)\|_{\mathbb{L}^p(\mu)} \to 0$。

现在证明，对于 $\beta \in \{\alpha, \infty\}$，$(t, a) \in (-\eta, \eta) \times \mathbb{L}_0^\infty(\mu_1) \mapsto \mathrm{d}_a U(r, a) \in \mathbb{L}_c(\mathbb{L}_0^\beta)$ 在 $(0, 0)$ 处连续。为此，只需证明对于 $1 < \beta < \infty$，$(t, a) \in (-\eta, \eta) \times \mathbb{L}_0^\infty(\mu_1) \mapsto \mathrm{d}_a U(r, a) \in \mathbb{L}_c(\mathbb{L}_0^\alpha)$ 在 $(0, 0)$ 处连续。令 $\|a_n\|_{\mathbb{L}^\infty(\mu)} \to 0$，$r_n \to 0$，并考虑任意的 $b \in \mathbb{L}_0^\beta(\mu_1)$。接着，令 β' 为 β 的共轭指数，根据 Hölder 不等式可得

$$\begin{aligned}
&\|\mathrm{d}_a \mathcal{U}(a_n, r_n)(b) - \mathrm{d}_a \mathcal{U}(0, 0)(b)\|_{\mathbb{L}^\beta(\mu_1)} \\
=&\Big\| \int_{\mathbb{R}} \mathbb{E}_1^\mu [(b(X_1) - b(x_1)) \Psi_n(x_1, X)] \mu_1(\mathrm{d}x_1) \Big\|_{\mathbb{L}^\beta(\mu_1)} \\
\le&\Big\| \Big(\int_{\mathbb{R}} \mathbb{E}_1^\mu [|b(X_1) - b(x_1)|^\beta \mu_1(\mathrm{d}x_1) \Big) \Big(\int_{\mathbb{R}} \mathbb{E}_1^\mu [|\Psi_n(x_1, X)|^{\beta'}] \mu_1(\mathrm{d}x_1 \Big)^{1/\beta'} \Big\|_{\mathbb{L}^\beta(\mu_1)} \\
\le&2c\|b\|_{\mathbb{L}^\beta(\mu_1)} \Big\| \int_{\mathbb{R}} \mathbb{E}_1^\mu [|\Psi_n(x_1, X)|^{\beta'}] \mu_1(\mathrm{d}x_1) \Big\|_{\mathbb{L}^\infty(\mu_1)},
\end{aligned}$$

其中 $\Psi_n(x_1, X) := \kappa_{a_n, r_n}(x_1, \hat{X}^{r_n, a_n}_{\cdot,2}) \, q_2 \circ \mathrm{T}_{r,a_n}(\hat{X}^{r_n, a_n}_{\cdot,2}) - \kappa(x_1, X_2) \, q_2(X_2)$。现在，由于根据假设 $\mathrm{C}^{\mathbb{W}_p^{\mathrm{ad}}}$(ii)，$q_2 \circ F_2^{-1} \ge c$，$\Psi_n$ 有界，令 $C = \|\Psi_n\|_{\mathbb{L}^\infty(\mu_1)}$，我们有

$$\|\mathrm{d}_a \mathcal{U}(a_n, r_n)(b) - \mathrm{d}_a \mathcal{U}(0, 0)(b)\|_{\mathbb{L}^\beta(\mu_1)} \le 2cC^{\beta'-1} \|b\|_{\mathbb{L}^\beta(\mu_1)} \Big\| \int_{\mathbb{R}} \mathbb{E}_1^\mu [|\Psi_n(x_1, X)|] \mu_1(\mathrm{d}x_1) \Big\|_{\mathbb{L}^\infty(\mu_1)},$$

这是可行的，因为 $1 < \beta \le \infty$，因此 $\beta' < \infty$。现在，$\mu_1 \otimes \mu$ 几乎处处

$$|\Psi_n(x_1, X)| \le C(I_n^1(x_1, X_1) + I_n^2(x_1, X_1)),$$

其中 $I_n^1(x_1, X) := |\kappa_{a_n, r_n}(x_1, \hat{X}^{r_n, a_n}_{\cdot,2}) - \kappa(x_1, X_2)|$ 以及 $I_n^2(x_1, X) := |q_2 \circ \mathcal{T}_{r,a_n}(\hat{X}^{r_n, a_n}_{\cdot,2}) - q_2(X_2)|$。注意

$$\int_{\mathbb{R}} \mathbb{E}_1^\mu [|I_n^1(x_1, X)|] \mu_1(\mathrm{d}x_1) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \kappa(X_1, x_2) |\kappa_{a_n, r_n}(x_1, \hat{X}_2^{r_n, a_n}) - \kappa(x_1, X_2)| \mathrm{d}x_2 \mu_1(\mathrm{d}x_1).$$

现在，由于 $a_n \xrightarrow[n \to \infty]{\mathbb{L}^\infty(\mu_1)} 0$，我们可以应用引理 5.18 并得到

$$\Big\| \int_{\mathbb{R}} \mathbb{E}_1^\mu [I_n^1(x_1, X)] \mu_1(\mathrm{d}x_1) \Big\|_{\mathbb{L}^\infty(\mu_1)} \to 0.$$

此外，

$$\Big\| \int_{\mathbb{R}} \mathbb{E}_1^{\mu}[I_n^2(x_1, X)]\mu_1(\mathrm{d}x_1) \Big\|_{\mathbb{L}^\infty(\mu_1)} \le R_n^1 + R_n^2,$$

其中

$$R_n^1 = \Big\| \int_{\mathbb{R}} \mathbb{E}_1^{\mu}\Big[|(q_2 \circ \mathcal{T}_{r_n,a_n})(\hat{X}_2^{r_n,a_n}) - q_2(X_2)| \mathbb{1}_{\{|F_2^{r_n,a_n}(\hat{X}_2^{r_n,a_n}) - F_2(X_2)| \ge \delta\}} \Big] \mu_1(\mathrm{d}x_1) \Big\|_{\mathbb{L}^\infty(\mu_1)}$$
$$R_n^2 = \Big\| \int_{\mathbb{R}} \mathbb{E}_1^{\mu}\Big[|(q_2 \circ \mathcal{T}_{r_n,a_n})(\hat{X}_2^{r_n,a_n}) - q_2(X_2)| \mathbb{1}_{\{|F_2^{r_n,a_n}(\hat{X}_2^{r_n,a_n}) - F_2(X_2)| \le \delta\}} \Big] \mu_1(\mathrm{d}x_1) \Big\|_{\mathbb{L}^\infty(\mu_1)}.$$

由 $q_2 \circ F_2^{-1}$的一致连续性，且由于 $F_2^{-1}(F_2(X_2)) = X_2$, μ_2几乎处处成立，我们有$R_n^2 \le \varepsilon$。最后，由于 q_2 有界，

$$R_n^1 \le C \Big\| \int_{\mathbb{R}} \mathbb{E}_1^{\mu}\Big[|\mathbb{1}_{\{|F_2^{r_n,a_n}(\hat{X}_2^{r_n,a_n}) - F_2(X_2)| \ge \delta\}} \Big] \mu_1(\mathrm{d}x_1) \Big\|_{\mathbb{L}^\infty(\mu_1)},$$

并且，根据条件马尔可夫不等式，我们得到

$$R_n^1 \le \frac{C}{\delta} \Big\| \int_{\mathbb{R}} \mathbb{E}_1^{\mu}\Big[|F_2^{r_n,a_n}(\hat{X}_2^{r_n,a_n}) - F_2(X_2)| \Big] \mu_1(\mathrm{d}x_1) \Big\|_{\mathbb{L}^\infty(\mu_1)}.$$

现在，由于 F_2 连续，且 μ_2 存在密度，我们显然有 $F^{r_n}{}_{,2}{}^{a_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} F_2$ 一致成立，因此

$$R_n^1 \le \frac{C}{\delta} \|F_2 - F_2^{r_n,a_n}\|_{\mathbb{L}^\infty(\mu)} + \frac{C}{\delta} \int_{\mathbb{R}} \mathbb{E}_1^{\mu}\Big[|F_2(\hat{X}_2^{r_n,a_n}) - F_2(X_2)| \Big] \mu_1(\mathrm{d}x_1) \Big\|_{\mathbb{L}^\infty(\mu_1)},$$

并且，由于 q_2 有界（这由 κ的有界性可知）， F_2 是利普希茨的，因此适当调整常数 C后，我们得到

$$\begin{aligned} R_n^1 &\le \frac{C}{\delta} \|F_2 - F_2^{r_n,a_n}\|_{\mathbb{L}^\infty(\mu)} + \frac{C}{\delta} \Big\| \int_{\mathbb{R}} \mathbb{E}_1^{\mu}\Big[|\hat{X}_2^{r_n,a_n} - X_2| \Big] \mu_1(\mathrm{d}x_1) \Big\|_{\mathbb{L}^\infty(\mu_1)} \\ &\le \frac{C}{\delta} \|F_2 - F_2^{r_n,a_n}\|_{\mathbb{L}^\infty(\mu)} + \frac{C}{\delta} (r_n \|\Theta\|_{\mathbb{L}^\infty(\mu)} + \|a_n\|_{\mathbb{L}^\infty(\mu)}). \end{aligned}$$

这证明了当 n 趋于无穷时， $\|\!|\mathrm{d}_a\mathcal{U}(a_n, r_n) - \mathrm{d}_a\mathcal{U}(0,0)|\!\|_{\mathbb{L}^\infty} \to 0$。 □

由引理 5.12 和 5.11，我们很容易得到引理 5.8。

引理 5.8 的证明。我们验证映射 U 满足假设 5.13。考虑配备范数 $\|\cdot\|_{\mathbb{L}^\infty(\mu_1)}$ 的 $\mathbb{L}_0^\infty(\mu_1)$，以及配备范数 $\|\cdot\|_{\mathbb{L}^\alpha(\mu_1)}$ 的 $\mathbb{L}_0^\alpha(\mu_1)$。根据霍尔德不等式， $\|\cdot\|_{\mathbb{L}^\alpha(\mu_1)} \le \|\cdot\|_{\mathbb{L}^\infty(\mu_1)}$；此外，利用测度论中的标准论证，$a \in \mathbb{L}_0^\alpha(\mu_1) \to \|a\|_{\mathbb{L}^\infty(\mu_1)}$ 是下半连续的。现在注意到 $\mathrm{d}_a\mathrm{U}(0,0) =$恒等算子 $- \mathbb{E}_1 \circ \mathbb{E}_2$。因此，根据引理 5.7、5.11 和 5.12，U 满足假设 5.13，从而证明了所需结果。 □

引理的证明 5.7。稍后我们将证明 $\|\!|\mathbb{E}_1 \circ \mathbb{E}_2|\!\|_\alpha < 1$。现在暂且假设它成立。同样，我们将大量使用如下恒等关系 $\mathbb{L}^\alpha(\mu_i) \subset \mathbb{L}^\alpha(\mu)$。

证明第 (ii) 点。令 $(f_1, f_2) \in \mathbb{L}_0^\alpha(\mu_1) \times \mathbb{L}^\alpha(\mu_2)$ 满足 $f_1 \oplus f_2 = 0$。分别对 X_1 和 X_2取条件期望，得到以下两个方程

$$f_1(X_1) + \mathbb{E}_1^{\mu}[f_2] = 0 \ , \ f_2(X_2) + \mathbb{E}_2^{\mu}[f_1] = 0.$$

将 $f_2 = -\mathbb{E}_2^{\mu}[f_1]$代入第一个方程，得到 $f(X_1) - \mathbb{E}_1^{\mu} \circ \mathbb{E}_2^{\mu}(f) = 0$。由于$\|\!|\mathbb{E}_1^{\mu} \circ \mathbb{E}_2^{\mu}|\!\|_\alpha < 1$，恒等算子$-\mathbb{E}_1^{\mu} \circ \mathbb{E}_2^{\mu}$可逆，因此 $f_1 = 0$。于是，由于 $f_1 \oplus f_2 = 0$，我们也有 $f_2 = 0$，这证明了该和是直和。

现在我们转而讨论闭性。设 $u_n := f_1^n \oplus f_2^n$ 满足 $u_n \to u$ 属于 $\mathbb{L}^\alpha(\mu)$。那么，通过类似的考虑，我们得到 $f_1^n - \mathbb{E}_1 \circ \mathbb{E}_2^\mu(f_n^1) = \mathbb{E}_1^\mu[u_n - \mathbb{E}_2^\mu[u_n]]$。因此，由于恒等算子 $-\mathbb{E}_1^\mu \circ \mathbb{E}_2^\mu$ 可逆，且条件期望是连续的，$f_1^n \to$ (恒等算子 $-\mathbb{E}_1^\mu \circ \mathbb{E}_2^\mu)^{-1}(\mathbb{E}_1^\mu[u - \mathbb{E}_2^\mu[u]])$，这也证明了 f_2^n 收敛到某个 f_2，且 $u = f_1 \oplus f_2$。

点 (iii) 的证明。我们已证明 $\mathbb{L}_0^\alpha(\mu_1) \oplus \mathbb{L}^\alpha(\mu_2)$ 是直且闭的。因此，存在 $C > 0$，使得对所有 $f_1 \oplus f_2 \in \mathbb{L}_0^\alpha(\mu_1) \oplus \mathbb{L}^\alpha(\mu_2)$，我们有

$$\|f_1 \oplus f_2\|_{\mathbb{L}^\alpha(\mu)} \geq C(\|f_1\|_{\mathbb{L}^\alpha(\mu)} + \|f_2\|_{\mathbb{L}^\alpha(\mu)}).$$

点 (i) 的证明。令 $1 \leq \alpha \leq \infty$。现在我们将证明 $\mathbb{E}_1^\mu \circ \mathbb{E}_2^\mu : \mathbb{L}_0^\alpha(\mu_1) \to \mathbb{L}_0^\alpha(\mu_1)$ 是一个压缩映射。我们分三种情况讨论。

情况 1： $\alpha < \infty$。反设 $|||\mathbb{E}_1 \circ \mathbb{E}_2|||_1 = 1$。我们先证明存在 $u \in \mathbb{L}_0^1(\mu_2)$，使得 $\mathbb{E}^\mu[|u(X_2)|] \leq 1$ 且 $\mathbb{E}^{\mu_1}[|\mathbb{E}_1^\mu[u]|] = 1$。令 $(v_n)_n \in \mathbb{L}_0^1(\mu_\alpha)$ 为一个函数序列，使得 $\|v_n\|_{\mathbb{L}^\alpha(\mu)} \leq 1$ 且 $\|\mathbb{E}_1^\mu[\mathbb{E}_2^\mu[v_n]]\|_{\mathbb{L}^\alpha(\mu)} \to 1$。由于 $q_2(X_2) \geq c$，且 κ 有界于 C，简单计算可得

$$|u_n(X_2)| := |\mathbb{E}_2^\mu[v_n(X_1)]| = \int_{\mathbb{R}} v_n(x_1) \frac{\kappa(x_1, X_2)}{q_2(X_2)} \mu_1(\mathrm{d}x_1) \leq \frac{C}{c} \int_{\mathbb{R}} |v_n(x_1)| \mu_1(\mathrm{d}x_1) \leq \frac{C}{c}.$$

这证明了 $u_n \in \mathbb{L}^\infty(\mu_2)$，其中 $\|u_n\|_{\mathbb{L}^\infty(\mu_2)} \leq C/c$ 对所有 $n \in \mathbb{N}$ 均成立。因此，(u_n) 在 $\mathbb{L}^2(\mu_2)$ 中也是有界的。由弱紧性可知，存在 $u \in \mathbb{L}^2(\mu_2)$，使得 $u_n \rightharpoonup u$. 换言之，对于所有 $v \in \mathbb{L}^2(\mu_2)$，我们有

$$\int_{\mathbb{R}} u_n(x_2) v(x_2) q_2(x_2) \mathrm{d}x_2 \to \int_{\mathbb{R}} u(x_2) v(x_2) q_2(x_2) \mathrm{d}x_2, \tag{5.56}$$

或者等价地，$\int_{\mathbb{R}} (u_n - u)(x_2) v(x_2) q_2(x_2) \mathrm{d}x_2 \to 0$. 由于 $q_2(x_2)$ 在 μ_2 的支撑上 $\geq c$，且 κ 本质有界，我们有 $\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \left| \kappa(x_1, x_2)\, q_2(x_2) \right| q_2(x_2) \mathrm{d}x_2 \mu_1(\mathrm{d}x_1) < \infty$。因此，根据富比尼定理，$\mu_1$ 几乎处处，$x_2 \mapsto \kappa(x_1, x_2)\, q_2(x_2)$ 属于 $\mathbb{L}^2(\mu_2)$，从而根据公式（5.56），我们有

$$\int_{\mathbb{R}} (u_n(x_2) - u(x_2)) \kappa(X_1, x_2) \mathrm{d}x_2 \to 0 \ \mu_1 - a.s..$$

此外，由于 $\|u_n\|_{\mathbb{L}^\infty(\mu)} \leq C$，该序列是一致可积的；因此

$$\mathbb{E}_1^\mu[u_n] = \int_{\mathbb{R}} u_n(x_2) \kappa(X_1, x_2) \mathrm{d}x_2 \xrightarrow[n \to \infty]{\mathbb{L}^\alpha(\mu_1)} \mathbb{E}_1^\mu[u_n] = \int_{\mathbb{R}} u(x_2) \kappa(X_1, x_2) \mathrm{d}x_2.$$

由于 $\|\mathbb{E}_1^\mu[u_n]\|_{\mathbb{L}^\alpha(\mu)} = \|\mathbb{E}_1^\mu[\mathbb{E}_2^\mu[v_n]]\|_{\mathbb{L}^\alpha(\mu)} \to 1$，这证明了 $\|\mathbb{E}_1^\mu[u]\|_{\mathbb{L}^\alpha(\mu)} = 1$。此外，由于条件期望是一个压缩映射，$\|u_n\|_{\mathbb{L}^\alpha(\mu)} \leq \|v_n\|_{\mathbb{L}^1(\mu)} \leq 1$ 因此，$\|u\|_{\mathbb{L}^\alpha(\mu)} \leq 1$。最后，注意到 $\mathbb{E}^\mu[u_n] = 0$，这意味着当 n 趋于无穷时，$\mathbb{E}^\mu[u] = 0$。在这种情况下，$|\mathbb{E}_1^\mu[u]| = \mathbb{E}_1^\mu[|u|]$，由詹森不等式对 $x \mapsto |x|^\alpha$ 取等时的情形可知，这意味着 $\mathrm{sgn}(u)$ 是 $\sigma(X_1)$-可测的。由于根据假设 $\mathsf{C}^{\mathbb{W}_p^{\mathrm{ad}}}$(iii)，$\sigma(X_1) \cap \sigma(X_2)$ 是平凡的，u 必定具有恒定符号；而由于 $\mathbb{E}^\mu[u] = 0$，该符号为 0——这与 $\|u\| = 1$ 矛盾。

情形 2： $\alpha = \infty$。反设 $|||\mathbb{E}_1 \circ \mathbb{E}_2|||_\infty = 1$。那么存在一个序列 $(u_n)_n \subset \mathbb{L}_0^\infty(\mu_1)$，使得

$$\|u_n\|_{\mathbb{L}^\infty(\mu_1)} \leq 1 \quad \text{and} \quad \|\mathbb{E}_1[\mathbb{E}_2[u_n]]\|_{\mathbb{L}^\infty(\mu_1)} \longrightarrow 1.$$

由于 (u_n) 在 $\mathbb{L}^\infty(\mu_1)$ 中一致有界，因此它在 $\mathbb{L}^2(\mu_1)$ 中也有界，从而（取一个子序列后）在 $\mathbb{L}^2(\mu_1)$ 中 $u_n \rightharpoonup u$ 弱收敛于某个 $u \in \mathbb{L}^2(\mu_1)$。利用 μ 的解体，并进行与情形 $\alpha = 1$ 类似的计算，我们得到

$$\mathbb{E}_2^\mu[u_n] \longrightarrow \mathbb{E}_2^\mu[u] \quad \text{in } \mathbb{L}^2(\mu_2).$$

此外，由于 κ 有界，且 q_2 在 μ_2 的支撑上严格为正，我们得到关键估计：

$$|\mathbb{E}_1^\mu[\mathbb{E}_2^\mu[u_n]] - \mathbb{E}_1^\mu[\mathbb{E}_2^\mu[u]]| \leq C\,\|\mathbb{E}_2^\mu[u_n] - \mathbb{E}_2^\mu[u]\|_{\mathbb{L}^1(\mu_2)}\,. \tag{5.57}$$

因此，我们得出：

$$\|\mathbb{E}_1^\mu[\mathbb{E}_2^\mu[u_n]] - \mathbb{E}_1^\mu[\mathbb{E}_2^\mu[u]]\|_{\mathbb{L}^\infty(\mu_1)} \longrightarrow 0,$$

特别地，$\|\mathbb{E}_1^\mu[\mathbb{E}_2^\mu[u]]\|_{\mathbb{L}^\infty(\mu_1)} = 1$。由于 $\mathbb{L}^\infty(\mu_1)$ 中的单位球在 $\mathbb{L}^2(\mu_1)$ 中是凸且闭的，因此它是弱闭的。因此，$\|u\|_{\mathbb{L}^\infty(\mu_1)} \leq 1$；事实上，由于条件期望的压缩性质，必有等号成立，即 $\|u\|_{\mathbb{L}^\infty(\mu_1)} = 1$。定义

$$Y_n := |u|^n \in \sigma(X_1), \qquad Z_n := |\mathbb{E}_2^\mu[u]|^n \in \sigma(X_2).$$

由于 $\|u\|_{\mathbb{L}^\infty(\mu_1)} = 1$ 和 $\|\mathbb{E}_2^\mu[u]\|_{\mathbb{L}^\infty(\mu_2)} = 1$，我们有：

$$Y_n \xrightarrow[n\to\infty]{a.s.} \mathbb{1}_{\{|u|=1\}}, \qquad Z_n \xrightarrow[n\to\infty]{a.s.} \mathbb{1}_{\{|\mathbb{E}_2^\mu[u]|=1\}}.$$

由于 Y_n 和 Z_n 在 $\mathbb{L}^\infty$中有界，因此收敛在 $\mathbb{L}^1(\mu)$中也成立。结合估计式（5.57），可得：

$$\|\mathbb{E}_1^\mu[\mathbb{1}_{\{|\mathbb{E}_2^\mu[u]|=1\}}]\|_{\mathbb{L}^\infty(\mu_1)} = \|\mathbb{E}_1^\mu[\mathbb{E}_2^\mu[\mathbb{1}_{\{|u|=1\}}]]\|_{\mathbb{L}^\infty(\mu_1)} = \|\mathbb{E}_2^\mu[\mathbb{1}_{\{|u|=1\}}]\|_{\mathbb{L}^\infty(\mu_2)} = 1.$$

等价地，

$$\operatorname{ess\,inf} \mathbb{E}_1^\mu[\mathbb{1}_{\{|\mathbb{E}_2^\mu[u]|<1\}}] = \operatorname{ess\,inf} \mathbb{E}_1^\mu[\mathbb{E}_2^\mu[\mathbb{1}_{\{|u|<1\}}]] = \operatorname{ess\,inf} \mathbb{E}_2^\mu[\mathbb{1}_{\{|u|<1\}}] = 0.$$

根据假设 $\mathrm{C}^{\mathbb{W}_p^{\mathrm{ad}}}$(i)，由于 κ 几乎处处大于某个 $c > 0$ μ，这意味着：

$$\mathbb{1}_{\{|u|<1\}} = 0 \quad \text{and} \quad \mathbb{1}_{\{|\mathbb{E}_2^\mu[u]|<1\}} = 0, \quad \mu - a.s.$$

因此，$|u| = 1$ 且 $|\mathbb{E}_2^\mu[u]| = 1$ μ几乎处处成立。与 $\alpha = 1$的情形一样，只有当 u 为常数（等于 1 或 -1）时才可能如此，这与 $\mathbb{E}^\mu[u] = 0$矛盾。因此

$$|||\mathbb{E}_1 \circ \mathbb{E}_2|||_\infty < 1.$$

□

5.5 隐函数定理

为证明之需，我们需要调整隐函数定理，以免要求通常的 C^1 正则性，而这种正则性在我们的框架下无法满足。这种情形让人联想到著名的涅梅茨基算子情形。文献中可以找到多种隐函数定理的推广：有些推广考虑非巴拿赫空间，例如 Hamilton [13]或 Ekeland [9]；另一些则放宽对泛函正则性的假设，例如 Biasi、Gutierrez 与 Santos [4] 以及 Accinelli [1]。然而，这些结果都无法直接应用于我们的框架，因为我们希望将该定理应用于泛函$\mathcal{U}$，其定义见（5.52），而关于该泛函，我们仅掌握引理 5.7、5.12和5.11中确立的性质。我们的方法接近 Wachsmuth[26] 的工作，其中其他研究者通过考虑空间的包含关系，证明了较弱形式的隐函数定理。然而，他们假设隐映射存在，而我们在此正是要证明这一点。

设 $(E_1, \|\cdot\|_1)$ 和 $(E_2, \|\cdot\|_2)$ 为两个巴拿赫空间，其中 $E_1 \subset E_2$, I 是 $\mathbb{R}$ 的一个开子集，且 t_0, $a_0 \in I \times (E_1 \cap E_2)$。设 $\Psi\colon I \times E_2 \to E_1$ 为一个映射，使用方程 (5.46) 和 (5.47) 中定义的记号 $\mathrm{L}(E_i)$ 和 $|||\cdot|||$，我们定义以下假设集。

假设 5.13。 E_1, E_2 和 Ψ满足:

(i) $\|\cdot\|_2 \le \|\cdot\|_1$和 $\|\cdot\|_1$： $E_2 \to \mathbb{R}^+$ 是下半连续的。

(ii) Ψ 在 $I\times E_2$ 中的（t_0, a_0）邻域内关于 a 的 *Gâteaux* 可微，其 *Gâteaux* 导数为$\mathrm{d}_a\Psi$（t, a） $\in$ L_c（E_2） $\cap L_c$（E_1）。以下映射是连续的

$$\lambda \in [0,1] \mapsto \mathrm{d}_a\Psi(t, a+\lambda(a-a'))(a-a') \in E_2,$$

并且 $t \mapsto \partial_t\Psi$（t, a） $\in E_2$ 在（t_0, a_0）的邻域内是连续的。

(iii) 算子 $S := \mathrm{d}_a\Psi$（t_0, a_0） $-\mathrm{Id}$ 满足 $|||S|||_2, |||S|||_1 < 1$。

(iv) 对于 $i = 12$，映射 $\mathrm{d}_a\Psi$： $I \times E_1 \to$ （L_c（E_i） $|||\cdot|||$）在（t_0, a_0）处连续。

引理 5.14。在假设 *5.13*下，存在 $\eta > 0$，以及 $a : (-\eta, \eta) \longrightarrow V_\eta := \{a \in E_1 : \|a\|_1 \le \eta\}$ 使得对所有 $|t - t_0| < \eta$，都有

$$\Psi(t, a(t)) = \Psi(t_0, a(0)) \text{ and } \|a(t) - a(t_0)\|_2 \le C(t-t_0)(\|\partial_t\Psi(0,0)\|_2 + \circ(1)).$$

引理 5.14 的证明。该证明是对隐函数定理的一种改编。不失一般性，假设 $a_0 = 0, t_0 = 0$ 和 $\Psi(0, 0) = 0$。定义 $G(t, a) := a - \Psi(t, a)$。令 $\varepsilon > 0$。根据连续性假设 5.13 (ii)，在 $\mathrm{d}_a\Psi$ 上，存在 $\eta > 0$ （为清晰起见，省略对 ε 的依赖），使得对所有 $|t| < \eta$ 和 $\|a\|_1 \le \eta$，都有 $|||\mathrm{d}_a\Psi(t, a) - \mathrm{d}_a\Psi(0, 0)|||_1 \le \varepsilon$ 以及 $|||\mathrm{d}_a\Psi(t, a) - \mathrm{d}_a\Psi(0, 0)|||_2 \le \varepsilon$。现在定义 $V_\eta := \{a \in E_1$ 使得 $\|a\|_1 \le \eta\}$。则 V_η 是凸的，并且根据下半连续假设 5.13 (i)，V_η 在 E_2 中是闭的。令 $a_1, a_2 \in V_\eta$ 和 $|t| < \eta$。根据假设 5.13 (ii)， Ψ 在线段 $[a_1, a_2]$ 上连续可微，并且根据假设 5.13 (iii)

$$\begin{aligned}\mathcal{G}(t, a_1) - \mathcal{G}(t, a_2) &= (a_1 - a_2) - \int_0^1 \mathrm{d}_a\Psi(t, a_1 + \lambda(a_1 - a_2))(a_1 - a_2)\mathrm{d}\lambda \\ &= -S(a_1 - a_2) - \int_0^1 \Big(\mathrm{d}_a\Psi(t, a_1 + \lambda(a_1 - a_2)) - \mathrm{d}_a\Psi(0, 0)\Big)(a_1 - a_2)\mathrm{d}\lambda.\end{aligned}$$

现在，由于 V_η 是凸函数，因此对所有 $0 \le \lambda \le 1$， $a_1 + \lambda(a_1 - a_2) \in V_\eta$。此外，由于 $\|\cdot\|_1$ 根据假设 5.13 (i)是凸且下半连续的，因此我们有三角不等式

$$\Big\| \int_0^1 \Big(\mathrm{d}_a\Psi(t, a_1 + \lambda(a_1 - a_2)) - \mathrm{d}_a\Psi(0, 0)\Big)(a_1 - a_2)\mathrm{d}\lambda. \Big\|_i \le \varepsilon\|a_1 - a_2\|_i.$$

此外， $\lambda \mapsto \mathrm{d}_a(\Psi(t, a_1 + \lambda(a_1 - a_2)) - \mathrm{d}_a\Psi(0, 0))(a_1 - a_2)$ 根据 5.13 (ii)是连续的，因此对于 $a_1 = 0$,

$$\|\mathcal{G}(t, a_1)\|_1 \le |||S|||_1\|a_1 - a_2\|_1 + \varepsilon\|a_1 - a_2\|_1 = (\varepsilon + |||S|||_1)\|a_1\|_1. \tag{5.58}$$

通过类似的考虑，我们得到

$$\|\mathcal{G}(t, a_1) - \mathcal{G}(t, a_2)\|_2 \le |||S|||_1\|a_1 - a_2\|_1 + \varepsilon\|a_1 - a_2\|_1 = (\varepsilon + |||S|||_2)\|a_1 - a_2\|_2. \tag{5.59}$$

不等式（5.58）和（5.59）确保对于$\varepsilon > 0$足够小，使得对于$(\varepsilon + |||S|||_i) < 1$ 对于 $i = 1, 2$ （这是可行的，因为 $|||S|||_i < 1$ 根据假设 5.13 (iii)），并且 $|t| < \eta$，有 $\mathcal{G}$： $V_\eta \to V_\eta$ 定义良好且为压缩映射。因此，根据巴拿赫-皮卡德不动点定理，由于 V_η 是巴拿赫空间中的闭集，存在 $a : (-\eta, \eta) \to V_\eta := \{a \in$

E_1 使得 $\|a\|_1 \le \eta\}$ 使得对所有 $|t| < \eta$， $\Psi(t,\ a(t)) = \Psi(0,\ 0)$。现在，根据假设 5.13(ii)， Ψ 关于 t 连续可微，因此有：

$$\int_0^1 \mathrm{d}_a\Psi(t, \lambda a(t))(a(t))\mathrm{d}\lambda = -t\int_0^1 \partial_t\Psi(\lambda t, 0)\mathrm{d}\lambda.$$

可改写为

$$(\mathrm{Id}+S)\frac{a(t)}{t} = -\int_0^1 \Big(\mathrm{d}_a\Psi(t,\lambda a(t)) + \mathrm{d}_a\Psi(0,0)\Big)\Big(\frac{a(t)}{t}\Big)\mathrm{d}\lambda - t\int_0^1 \partial_t\Psi(\lambda t,0)\mathrm{d}\lambda.$$

现在，由于 $\|\|S\|\|_2 < 1$，恒等算子 $+S$ 可逆。此外，由于 $a(t) \in V_\eta$，我们有 $\Big\|(\mathrm{d}_a\Psi(t,\ \lambda a(t))$ $-\mathrm{d}_a\Psi(0,\ 0))\Big(\frac{a(t}{t}\Big)\Big\|_2 \le \varepsilon\Big\|\frac{a)(t}{t}\Big\|_2$ 因此

$$\Big\|\frac{a(t)}{t}\Big\|_2 \le \Big\|(\mathrm{Id}+\mathrm{S})^{-1}\Big\|_2\big(\varepsilon\Big\|\frac{a(t)}{t}\Big\|_2 + \|\partial_t\Psi(0,0)\|_2 + \circ(1)\big).$$

这对充分小的 ε成立

$$\Big\|\frac{a(t)}{t}\Big\|_2 \le \frac{1}{1-\varepsilon\|\|(\mathrm{Id}+\mathrm{S})^{-1}\|\|_2}\big(\|\partial_t\Psi(0,0)\|_2 + \circ(1)\big),$$

由此得出所需的不等式，因为 $1-\varepsilon\|$ ^{1} 恒等算子~~$+S\|_2$~~ 可由一个与 ε无关的常数界定。□

5.6 概率与 $\mathbb{L}^p(\mu)$中的展开式

引理 5.15。 设$(Z_r)_{r>0}$ 是取值于I的随机变量族，其中I是一个开区间，定义在$(\Omega, F\ \mathbb{P})$上。假设存在两个随机变量 Z_0和 U，使得

$$Z_r = Z_0 + rU + \circ_{\mathbb{L}^p(\mathbb{P})}(r).$$

假设存在 $A \subset \Omega$ 和 $K \subset \mathbb{R}$ 区间，使得 $Z_r = Z_0$ 在 A、 $U = 0$在 A和 Z_r、 $Z_0 \in K$ 在 A^c。令 $F\colon I \to \mathbb{R}$ 属于 $C^1(I,\mathbb{R})$，使得$\|F'\|_{\mathbb{L}^\infty(K)} < \infty$，则

$$F(Z_r) = F(Z_0) + rF'(Z_0)U + \circ_{\mathbb{L}^p(\mathbb{P})}(r),$$

证明。 由于 I 是开区间，且对所有 $r \ge 0$， $\mathbb{P}(Z_r \in I) = 1$ ，我们可以应用泰勒公式，

$$F(Z_r) = F(Z_0) + (Z_r - Z_0)F'(Z_0) + (Z_r - Z_0)\int_0^1 (F'(Z_0 + \lambda(Z_r - Z_0)) - F'(Z_0))\mathrm{d}\lambda.$$

令 $\Delta_r := F(Z_r) - F(Z_0) - rF\prime(Z_0)U$，则有

$$|\Delta_r| \le |F'(Z_0)||Z_r - Z_0 - rU| + |Z_r - Z_0|\int_0^1 |F'(Z_0 + \lambda(Z_r - Z_0)) - F'(Z_0)|\mathrm{d}\lambda.$$

由于，当 $\sup_{x\in K}|F\prime(x)|$, $|F\prime(Z_0)|\mathbb{1}_{A^c} \le C$ 随着 $\sup_{x\in K}|F\prime(x)|$ 而变化。此外 $|Z_r - Z_0 - rU|\mathbb{1}_A = 0$，因此

$$|F'(Z_0)||Z_r - Z_0 - rU| = \circ_{\mathbb{P}}(r). \tag{5.60}$$

注意到

$$
\begin{aligned}
&|Z_r - Z_0| \int_0^1 |F'(Z_0 + \lambda(Z_r - Z_0)) - F'(Z_0)| \mathrm{d}\lambda \\
&= \mathbb{1}_{A^c} |Z_r - Z_0| \int_0^1 |F'(Z_0 + \lambda(Z_r - Z_0)) - F'(Z_0)| \mathrm{d}\lambda \\
&\quad + \mathbb{1}_A |Z_r - Z_0| \int_0^1 |F'(Z_0 + \lambda(Z_r - Z_0)) - F'(Z_0)| \mathrm{d}\lambda \\
&= \mathbb{1}_{A^c} |Z_r - Z_0| \int_0^1 |F'(Z_0 + \lambda(Z_r - Z_0)) - F'(Z_0)| \mathrm{d}\lambda,
\end{aligned}
$$

因为在 A 上 $Z_r = Z_0$。此外，由于在 A^c 上 Z_r， $Z_0 \in K$，且 K 是一个区间，因此对所有 $\lambda \in [0,1]$， $Z_0 + \lambda(Z_r - Z_0) \in K$，故

$$
\mathbb{1}_{A^c} |F'(Z_0 + \lambda(Z_r - Z_0)) - F'(Z_0)| \leq 2 \|F'\|_{\mathbb{L}^\infty(K)} \mathbb{1}_{A^c}.
$$

因此，由（5.60），我们得到

$$
|\Delta_r| \leq 2r|U| \|F'\|_{\mathbb{L}^\infty(K)} \mathbb{1}_{A^c} + 2|Z_r - Z_0 - rU| \int_0^1 |F'(\bar{Z}_r^\lambda) - F'(Z_0)| \mathrm{d}\lambda \mathbb{1}_{A^c} + \circ_{\mathbb{P}}(r), \tag{5.61}
$$

其中 $\bar{Z}_r^\lambda := Z_0 + \lambda(Z_r - Z_0)$。现在注意到 $(Z_r,\ Z_0) \xrightarrow[r\to 0]{\mathbb{P}} (Z_0,\ Z_0)$，且映射 $H\colon (x,\ y) \in K \times K \mapsto \int_0^1 |F'(x + \lambda(y-x)) - F'(y)| \mathrm{d}\lambda$ 是连续的，因为 F' 在 K 上连续且有界。因此，根据标准的连续函数定理论证，我们有

$$
\int_0^1 |F'(\bar{Z}_r^\lambda) - F'(Z_0)| \mathrm{d}\lambda \xrightarrow[r\to 0]{\mathbb{P}} 0.
$$

现在将最后的收敛结果与（5.61）结合，得到

$$
F(Z_r) = F(Z_0) + rF'(Z_0)U + \circ_{\mathbb{P}}(r).
$$

要得到 $\mathbb{L}^p$ 估计，只需证明族 $(\frac{1}{r}|\Delta_r|^p)_r$ 一致可积。这由 $\Delta_r \mathbb{1}_A = 0$ 得出；令 $C := \sup_{x\in K} |F'(x)|$ 且 $\mathbb{P}(Z_r \mathbb{1}_{A^c} \in K,\ Z_0 \mathbb{1}_{A^c} \in K) = 1$，则

$$
|\Delta_r| \mathbb{1}_{A^c} \leq C |Z_r - Z_0| \mathbb{1}_{A^c} + r|U| \|F'\|_{\mathbb{L}^\infty(\mathbb{P})}.
$$

现在，由于 $\frac{Z_r - Z_0}{r} \to U \in \mathbb{L}^p(\mathbb{P})$，$(\frac{Z_r - Z_0}{r})_r$ 一致可积，因此我们得到了所需结果。□

假设 5.16。 (i) 对于所有 $x \in \mathbb{R}$，映射 $\Theta_n(x, \cdot)$ 均可测。

(ii) 对于 ν 几乎处处的 $z \in Z$，映射 $\Theta_n(\cdot\ z)$ 是 C^2。

(iii) 存在 $C > 0$，一个正实数序列 $(C_n)_n$ 以及一个函数序列 $(f_n)_n$，满足 $|\Theta_n(x,z)| \leq f_n(z)$、$|\partial_x \Theta_n(x,z)| \leq C_n$ 以及 $|\partial^2_{xx} \Theta_n(x,z)| \leq C$，其中 $f_n \in \mathbb{L}^\alpha(\nu_z)$。此外，这些序列满足 $C_n \to 0$ 以及 $\|f_n\|_{\mathbb{L}^\alpha(\nu_z)} \to 0$。

引理 *5.17*。设 $(Z, B\ \nu)$ 是一个有限维赋范向量空间，赋有 *Borel*σ–代数和概率测度 ν。设 $1 \leq \alpha \leq +\infty$。设 $(\Theta_n)_n$ 是一个函数序列Θ_n：$\mathbb{R} \times Z \to \mathbb{R}$，且满足假设 *5.16*。则存在 $N \in \mathbb{N}$ 以及一族函数 $(\varphi_n)_{n\geq N}$, φ_n：$\mathbb{R} \times Z \to \mathbb{R}$，使得

$$
x + \Theta_n(x,z) = y \text{ iff } x = \varphi_n(y,z) \quad \text{for all } n \geq N\ ,\ x, y \in \mathbb{R} \text{ and } z \in \mathcal{Z}. \tag{5.62}
$$

此外， φ_n 满足以下条件

(i) 对于所有 $y \in \mathbb{R}$ 和 $n \in \mathbb{N}$，映射 $\varphi_n(\cdot\ y)$ 是可测的。

（ii）对于 ν–几乎所有的 $z \in Z$，映射 φ_n（z,·）是 C^2。存在 $C > 0$，使得对于所有 $x \in \mathbb{R}$ 以及 ν 几乎处处的 z，$|\partial_y \varphi_n$（y, z）$| \leq C$ 且 $|\partial^2_{yy}\varphi_n$（$y, z$）$| \leq C$。此外，

$$\partial_y \varphi_n(z, y) = \frac{1}{1 + \partial_x \Theta_n(\varphi_n(z, y), z)}.$$

（iii）以下收敛成立

$$max(u_n, v_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0,$$

其中 $u_n := \|\sup_{y\in\mathbb{R}}\{|\varphi_n(\cdot\ y) - y|\}\|_{\mathbb{L}^\alpha(\nu)}$，$v_n := \|\sup_{y\in\mathbb{R}}\{|\partial_y\varphi_n(\cdot\ y) - 1|\}\|_{\mathbb{L}^\alpha(\nu)}$。

证明。固定 $n \in \mathbb{N}$，除以一个示性函数外，在下文中可假设Θ_n 对每个 $z \in Z$ 都属于 x 中的 C^1。定义如下函数序列 $u_{k+1,n}(y, z) := y - \Theta_n(u_{k,n}(y, z)\ z)$，其中 $u_{0,n}(y, z) = y$。根据假设 5.16 的条件（iii），$|\partial_x\Theta_n(x, z)| \leq C_n \to 0$。因此存在 $N \in \mathbb{N}$，使得对于 $n \geq N$，存在 $0 \leq \eta < 1$，使得

$$|u_{k+1,n} - u_{k,n}|(y, z) \leq \eta |u_{k,n} - u_{k-1,n}|(y, z). \tag{5.63}$$

因此存在 $\varphi_n : \mathbb{R} \times \mathcal{Z} \to \mathbb{R}$，使得 $u_{k,n}(y, z) \xrightarrow[k\to\infty]{} \varphi_n(y, z)$，从而证明 φ_n 是可测函数的逐点极限，故为可测函数。令 $v_{k,n} := \partial_y u_{k,n}(y, z)$。则

$$\begin{aligned} v_{k+1,n}(y, z) = 1 &- \partial_x\Theta_n(\varphi_n(y, z), z)v_{k,n}(y, z) \\ &+ (\partial_x\Theta_n(\varphi_n(y, z), z))v_{k,n}(y, z) - \partial_x\Theta_n(u_{k,n}(y, z), z)). \end{aligned}$$

根据假设 (iii) 中的条件 5.16，$|\partial_x\Theta_n(x, z)| \leq C_n \to 0$ 因此 $|v_k(y, z)| \leq C_1$，其中某个$C_1 > 0$。此外，由于 $|\partial^2_{xx}\Theta_n| \leq C_2$，对于某个 C_2，我们得到，对 n 充分大的情形（关于 y, z一致），

$$|v_{k+1} - v_k|(y, z) \leq \eta |v_k - v_{k-1}|(y, z) + C_1C_2(|u_k - \varphi_n|(y, z) + |u_{k-1} - \varphi_n|(y, z)).$$

因此，$v_k(y, z) \xrightarrow[k\to\infty]{} \partial_y\varphi_n(y, z) = \frac{1}{1+\partial_x\Theta_n\ (\varphi_n(y,z)\ z)}$，这证明 φ_n 是 C^2 关于 y的。其余结论由假设 5.16得出。□

引理 5.18。设$(Y, B_\mathcal{Y}, \nu_\mathcal{Y})$和$(Z, B_\mathcal{Z}, \nu_\mathcal{Z})$是有限维赋范向量空间，赋有各自的 *Borel* σ–代数和概率测度。设 $1 \leq \alpha \leq \infty$。设 $w \in \mathbb{L}^1(\mathrm{d}x \otimes \nu_\mathcal{Z}) \cap \mathbb{L}^\infty(\mathrm{d}x \otimes \nu_\mathcal{Z})$。设$(k_n)$ 是一个序列，使得 $k_n : \mathbb{R} \times Y \times Z \to \mathbb{R}$ 满足

$$|k_n(x, y, z)| \leq b_n(x)a_n(y, z),$$

其中 $a_n \in \mathbb{L}^\alpha(\nu_\mathcal{Y} \otimes \nu_\mathcal{Z})$ 和 $b_n \in \mathbb{L}^1(\mathrm{d}x) \cap \mathbb{L}^\infty(\mathrm{d}x)$ 均为正。最后，假设$(\|b_n\|_{\mathbb{L}^1(\mathrm{d}x)})_n$ 和$(\|b_n\|_{\mathbb{L}^\infty(\mathrm{d}x)})_n$ 是有界序列，并且(a_n) 是 α–一致可积的，即$\lim_{M\to\infty}\sup_n \|a_n\mathbb{1}_{a_n\geq M}\|_{\mathbb{L}^\alpha(\nu_\mathcal{Y}\otimes\nu_\mathcal{Z})} = 0$。

设 $u_n : \mathbb{R} \times Y \times Z \to \mathbb{R}$ 满足关于 α（以及关于乘积测度 w）的假设 *5.16*，且 $v_n : \mathbb{R} \times Z \to \mathbb{R}$ 满足关于 $\alpha = 1$的假设 *5.16*。设 $\varphi_n : \mathbb{R} \times Y \times Z \to \mathbb{R}$（分别地，$\psi_n : \mathbb{R} \times Y \times Z \to \mathbb{R}$）由引理 *5.17*针对序列（$u_n$）（分别地，$(v_n)$）定义。那么，使用记号（*5.42*），我们得到以下展开式

$$\Big\| \int_\mathcal{Z} \int_\mathbb{R} k_n(x, \cdot, z)(w_n(x + u_n(x, \cdot, z), z) - w(x, z))\nu_\mathcal{Z}(\mathrm{d}z)\mathrm{d}x \Big\|_{\mathbb{L}^\alpha(\nu_\mathcal{Y})} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0,$$

其中 $w_n(x, z) := w(\psi_n(x, z)\ z)\partial_x\psi_n(x, z)$。

证明。 令 $M>0$，由于 $w\in\mathbb{L}^\infty$,

$$\Delta_n := \Big|\int_{\mathcal{Z}}\int_{\mathbb{R}} k_n(x,y,z)(w_n(x+u_n(x,y,z),z)-w(x,z))\mathrm{d}x\,\nu_{\mathcal{Z}}(\mathrm{d}z)\Big| \le I_1(y)+I_2(y) \tag{5.64}$$

其中 $I_1 := 2\|w\|_{\mathbb{L}^\infty}\|b_n\|_{\mathbb{L}^1}\int_{\mathcal{Z}} a_n(y,z)\mathbb{1}_{\{a_n(y,z)\ge M\}}\nu_{\mathcal{Z}}(\mathrm{d}z)$以及

$$I_2 := M\|b_n\|_{\mathbb{L}^\infty}\int_{\mathcal{Z}}\int_{\mathbb{R}} |w_n(x+u_n(x,y,z),z)-w(x,z)|\mathrm{d}x\,\nu_{\mathcal{Z}}(\mathrm{d}z).$$

我们首先控制 I_1。有

$$\|I_1\|_{\mathbb{L}^\alpha(\nu_{\mathcal{Y}})} \le \|a_n\mathbb{1}_{a_n\ge M}\|_{\mathbb{L}^\alpha(\nu_{\mathcal{Y}}\otimes\nu)}, \tag{5.65}$$

如果 $1\le\alpha<\infty$，则由詹森不等式可得；当 $\alpha=+\infty$ 时显然成立。令 $\varepsilon>0$。现在继续估计 I_2。根据假设，$w\in\mathbb{L}^1(\nu_{\mathcal{Z}}\otimes\mathrm{d}x)$，因此由卷积，存在一个族 $(w^\varepsilon)_\varepsilon$，使得

$$\int_{\mathcal{Z}}\int_{\mathbb{R}} |w^\varepsilon(x,z)-w(x,z)|\mathrm{d}x\,\nu_{\mathcal{Z}}(\mathrm{d}z)\le\varepsilon \text{ and } |w^\varepsilon(x,z)-w^\varepsilon(y,z)|\le C_\varepsilon|x-y|. \tag{5.66}$$

令 $w_n^\varepsilon(x,z) := w^\varepsilon(\psi_n(x,z)\,z)\partial_x\psi_n(x,z)$。根据三角不等式,

$$I_2 \le M\|b_n\|_{\mathbb{L}^\infty}\sum_{i=1}^4 R_i(y) \tag{5.67}$$

其中

$$\begin{aligned}
R_1(y) &:= \int_{\mathcal{Z}}\int_{\mathbb{R}} |w_n^\varepsilon - w_n|(x+u_n(x,y,z),z)\mathrm{d}x\nu_{\mathcal{Z}}(\mathrm{d}z)\\
R_2(y) &:= \int_{\mathcal{Z}}\int_{\mathbb{R}} |w_n^\varepsilon - w_n|(x,z)\mathrm{d}x\nu_{\mathcal{Z}}(\mathrm{d}z)\\
R_3(y) &:= \int_{\mathcal{Z}}\int_{\mathbb{R}} |w_n^\varepsilon(x+u_n(x,y,z),z) - w_n^\varepsilon(x,z)|\mathrm{d}x\nu_{\mathcal{Z}}(\mathrm{d}z)\\
R_4(y) &:= \int_{\mathcal{Z}}\int_{\mathbb{R}} |w_n^\varepsilon - w^\varepsilon|(x,z)\mathrm{d}x\,\nu_{\mathcal{Z}}(\mathrm{d}z).
\end{aligned}$$

通过变量代换并利用引理5.17，$|\partial_y\psi_n|\le C$ 以及 $|\partial_y\varphi_n|\le C$，因此利用估计式（5.66），对于 $i=1,2$,

$$R_i \le C\int_{\mathcal{Z}}\int_{\mathbb{R}} |w^\varepsilon - w|(x,z)\mathrm{d}x\,\nu_{\mathcal{Z}}(\mathrm{d}z)\le C\varepsilon. \tag{5.68}$$

此外，由于 w^ε 关于 x 是利普希茨连续的，且 $\partial_x\psi_n$ 有界，因此存在常数 $\hat{C}_\varepsilon>0$，使得

$$R_3 \le \hat{C}_\varepsilon\int_{\mathcal{Z}}\int_{\mathbb{R}} |u_n(x,y,z)|\mathrm{d}x\,\nu_{\mathcal{Z}}(\mathrm{d}z), \tag{5.69}$$

并且，我们还有（因为可以选择 w_ε 使其本质有界）

$$R_4 \le \|w^\varepsilon\|_{\mathbb{L}^\infty}\int_{\mathcal{Z}}\int_{\mathbb{R}} |\partial_x\psi_n(x,z)-1|\mathrm{d}x\,\nu_{\mathcal{Z}}(\mathrm{d}z) + \hat{C}_\varepsilon\int_{\mathcal{Z}}\int_{\mathbb{R}} |\psi_n(x,z)-x|\mathrm{d}x\,\nu_{\mathcal{Z}}(\mathrm{d}z). \tag{5.70}$$

现在，将所有估计式（5.70）、（5.69）、（5.68）、（5.67）和（5.64）合并起来，并且由于 $\|b_n\|_{\mathbb{L}^1(\mathrm{d}x)}$ 和 $\|b_n\|_{\mathbb{L}^\infty(\mathrm{d}x)}$ 有界，我们得到

$$\begin{aligned}
\|\Delta_n\|_{\mathbb{L}^\alpha(\nu_{\mathcal{Y}})} \leq M\|b_n\|_{\mathbb{L}^\infty}\Big\{&\|w\|_{\mathbb{L}^\infty}\|\sup_{x\in\mathbb{R}}\{|\partial_x\psi_n(x,\cdot)-1|\}\|_{\mathbb{L}^1(\nu_{\mathcal{Z}})}\\
&+\hat{C}_\varepsilon\|\sup_{x\in\mathbb{R}}\{|\psi_n(x,\cdot)-x|\}\|_{\mathbb{L}^1(\nu_{\mathcal{Z}})}\\
&+\hat{C}_\varepsilon\|\sup_{x\in\mathbb{R}}\{|u_n(x,\cdot)-x|\}\|_{\mathbb{L}^\alpha(\nu_{\mathcal{Y}}\otimes\nu_{\mathcal{Z}})}+2C\varepsilon\Big\}\\
&+\|a_n\mathbb{1}_{a_n\geq M}\|_{\mathbb{L}^\alpha(\nu_{\mathcal{Y}}\otimes\nu)}\\
\leq M(\sup_n\|b_n\|_{\mathbb{L}^\infty})\Big\{&\|w\|_{\mathbb{L}^\infty}\|\sup_{x\in\mathbb{R}}\{|\partial_x\psi_n(x,\cdot)-1|\}\|_{\mathbb{L}^1(\nu_{\mathcal{Z}})}\\
&+\hat{C}_\varepsilon\|\sup_{x\in\mathbb{R}}\{|\psi_n(x,\cdot)-x|\}\|_{\mathbb{L}^1(\nu_{\mathcal{Z}})}\\
&+\hat{C}_\varepsilon\|\sup_{x\in\mathbb{R}}\{|u_n(x,\cdot)-x|\}\|_{\mathbb{L}^\alpha(\nu_{\mathcal{Y}}\otimes\nu_{\mathcal{Z}})}+2C\varepsilon\Big\}\\
&+(\sup_n\|a_n\mathbb{1}_{a_n\geq M})\|_{\mathbb{L}^\alpha(\nu_{\mathcal{Y}}\otimes\nu)}. \qquad (5.71)
\end{aligned}$$

现在，根据引理 5.17，我们得到 $\sup_{x\in\mathbb{R}}\{|\psi_n(x,\cdot)-x|\}\|_{\mathbb{L}^1(\nu_{\mathcal{Z}})} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$，

$$\|\sup_{x\in\mathbb{R}}\{|\psi_n(x,\cdot)-x|\}\|_{\mathbb{L}^1(\nu_{\mathcal{Z}})}\xrightarrow[n\to\infty]{}0 \text{ and } \|\mathbb{L}^\infty\|\sup_{x\in\mathbb{R}}\{|\partial_x\psi_n(x,\cdot)-1|\}\|_{\mathbb{L}^1(\nu_{\mathcal{Z}})}\xrightarrow[n\to\infty]{}0.$$

在 n 中的上极限取5.71式，我们得到

$$\limsup_n\|\Delta_n\|_{\mathbb{L}^\alpha(\nu_{\mathcal{Y}})}\leq M(\sup_n\|b_n\|_{\mathbb{L}^\infty})2C\varepsilon+M(\sup_n\|a_n\mathbb{1}_{a_n\geq M}\|_{\mathbb{L}^\alpha(\nu_{\mathcal{Y}}\otimes\nu)})+2M\|a_n\|_{\mathbb{L}^\infty}C\varepsilon.$$

Now，令 ε 趋于 0，最后令 M 趋于无穷大，即可得到所需结果。 □

引理 5.19。设 $\nu\in\Pi(\nu_1,\nu_2)$，其中 $\nu_1,\nu_2\in P_p(\mathbb{R})$。假设 ν 具有分解 $\nu(\mathrm{d}x):=\nu_1(\mathrm{d}x_1)k(x_1,x_2)\mathrm{d}x_2$，其中 $k\in\mathbb{L}^\infty(\mathbb{R}^2)$。令 $r_n\to 0$，并设一族 (Θ_n) 满足：$\Theta_n:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ 满足以下假设

(i) 对于所有 $x_2\in\mathbb{R}$，映射 $\Theta_n(\cdot\ x_2)$ 都是可测的。

(ii) 对于所有 $x_1\in\mathbb{R}$，映射 $\Theta_n(x_1,\cdot)$ 是 C^2，且 $(|\Theta_n|)_n$ 是一致可积的。此外，$max(|\partial_{x_2}\Theta_n(x_1,x_2)|,|\partial^2_{x_2x_2}\Theta_n(x_1,x_2))|\leq C$。

对 $n\in\mathbb{N}$ 定义如下随机变量，

$$Z_n:=F^{r_n}(X_2+r_n\Theta_n),$$

其中 $F^{r_n}(x):=\nu(X_2+r_n\Theta_n\leq x)$。于是我们得到如下展开式

$$Z_n=F_2(X_2)+r_n\int_{\mathbb{R}}(\Theta_n-\Theta_n(x_1,X_2))k(x_1,X_2)\nu_1(\mathrm{d}x_1)+\circ_{\mathbb{L}^p(\nu)}(r_n).$$

证明。令 $r_n\to 0$、Θ_n 如 5.15 中所定义。设 $\Theta_n:=r_n\Theta_n$，由引理 5.17，存在 $N\in\mathbb{N}$ 以及一个函数族 $(\varphi_n)_n$，使得对于 $n\geq N$，φ_n 是 $x_2\mapsto x_2+\hat{\Theta}_n(x_1,x_2)$ 的逆函数，而 φ_n 是关于 x_2 的 C^2。对 $n\geq N$ 设 $k_n(x):=k(x_1,\ \varphi_n(x_1,x_2))\partial_{x_2}\varphi_n(x_1,x_2)$，这是关于测度 $\nu\circ(X_1,X_2+\hat{\Theta}_n)^{-1}$ 的第一边缘分布的解体。最后，设

$$\Delta_n:=Z_n-F_2(X_2)-r_n\int_{\mathbb{R}}(\Theta_n(X)-\Theta_n(x_1,X_2))k(x_1,X_2)\nu_1(\mathrm{d}x_1), \qquad (5.72)$$

通过变量代换 $Z_n = \int_{\mathbb{R}} \int^{X_2+\cdot\hat{\Theta}_n(X)}_{-\infty} k_n(x_1, x_2)\mathrm{d}x_2\nu_1(\mathrm{d}x_1)$。因此，我们得到以下等式

$$\begin{aligned} Z_n &= \int_{\mathbb{R}} \int_{-\infty}^{X_2} k_n(x)\mathrm{d}x_2\nu_1(\mathrm{d}x_1) + \int_{\mathbb{R}} \int_{X_2}^{X_2+\hat{\Theta}_n(X)} k_n(x)\mathrm{d}x_2\nu_1(\mathrm{d}x_1) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{-\infty}^{\varphi_n(x_1,X_2)} k(x)\mathrm{d}x_2\nu_1(\mathrm{d}x_1) + \int_{\mathbb{R}} \int_{X_2}^{X_2+\hat{\Theta}_n(X)} k_n(x)\mathrm{d}x_2\nu_1(\mathrm{d}x_1). \end{aligned} \tag{5.73}$$

将 Z_n 用表达式 (5.73) 代入 Δ_n (5.72) 的表达式中，我们得到如下分解

$$\begin{aligned} \Delta_n &= \int_{\mathbb{R}} \int_{X_2}^{\varphi_n(x_1,X_2)} k(x)\mathrm{d}x_2\nu_1(\mathrm{d}x_1) + \int_{\mathbb{R}} \int_{X_2}^{X_2+\hat{\Theta}_n(X)} k_n(x)\mathrm{d}x_2\nu_1(\mathrm{d}x_1) \\ &- \int_{\mathbb{R}} \int_{X_2}^{X_2+\hat{\Theta}_n(X)} k(x_1, X_2)\mathrm{d}x_2\nu_1(\mathrm{d}x_1) - \int_{\mathbb{R}} \int_{X_2}^{X_2-\hat{\Theta}_n(x_1,X_2)} k(x_1, X_2)\mathrm{d}x_2\nu_1(\mathrm{d}x_1) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{X_2-\hat{\Theta}_n(x_1,X_2)}^{\varphi_n(x_1,X_2)} k(x)\mathrm{d}x_2\nu_1(\mathrm{d}x_1) + \int_{\mathbb{R}} \int_{X_2}^{X_2+\hat{\Theta}_n(X)} (k_n(x) - k(x_1, X_2))\mathrm{d}x_2\nu_1(\mathrm{d}x_1) \\ &+ \int_{\mathbb{R}} \int_{X_2}^{X_2-\hat{\Theta}_n(x_1,X_2)} (k(x) - k(x_1, X_2))\mathrm{d}x_2\nu_1(\mathrm{d}x_1) = \sum_{i=1}^{4} R_{i,n}. \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} R_{1,n} &:= \int_{\mathbb{R}} \int_{X_2-\hat{\Theta}_n(x_1,X_2)}^{\varphi_n(x_1,X_2)} k(x)\mathrm{d}x_2\nu_1(\mathrm{d}x_1)\ ,\ R_{2,n} := \hat{\Theta}_n(X) \int_{\mathbb{R}} (k_n - k)(x_1, X_2)\nu_1(\mathrm{d}x_1) \\ R_{3,n} &:= \int_{\mathbb{R}} \int_{X_2}^{X_2+\hat{\Theta}_n(X)} (k_n(x) - k_n(x_1, X_2))\mathrm{d}x_2\nu_1(\mathrm{d}x_1) \\ R_{4,n} &:= \int_{\mathbb{R}} \int_{X_2}^{X_2-\hat{\Theta}_n(x_1,X_2)} (k(x) - k(x_1, X_2))\mathrm{d}x_2\nu_1(\mathrm{d}x_1). \end{aligned}$$

现在我们将证明，对于 $i = 1, \cdots, 4$，$R_{i,n} = \circ_{\mathbb{L}^p(\nu)}(r_n)$。**对于** $i = 1$，经变量代换后，

$$R_{1,n} = \int_{\mathbb{R}} \int_0^1 k(x_1, (1-\lambda)(X_2 - \hat{\Theta}_n) + \lambda\varphi_n(x_1, X_2))(\varphi_n(x_1, X_2) - X_2 + \hat{\Theta}_n(x_1, X_2))\mathrm{d}\lambda\mathrm{d}x$$

并且，根据定义

$$\varphi_n(x_1, x_2) - x_2 = \hat{\Theta}_n(\varphi_n(x_1, x_2), x_2) = r_n\Theta_n(\varphi_n(x_1, x_2), x_2).$$

因此，由于 Θ_n 关于其第二个变量具有一致的利普希茨性质，且根据引理 5.17，$\|\sup_{x\in\mathbb{R}}\{|\varphi_n(x,\cdot) - x|\}\|_{\mathbb{L}^p(\mu)} \to 0$，即可得到所需结果。**对于** $i = 2$。经变量代换后，

$$R_{2,n} = r_n\Theta_n(X) \int_{\mathbb{R}} (k_n(x_1, X_2) - k(x_1, X_2))\nu_1(\mathrm{d}x_1)$$

这由 $\circ_{\mathbb{L}^p(\nu)}(r_n)$ 应用引理 5.18 可得；并且由于 Θ_n 是 $p-$一致可积。**对于** $i = 3$。变量替换后，

$$R_{3,n} = \hat{\Theta}_n(X) \int_{\mathbb{R}} \int_0^1 (k_n(x_1, (1-\lambda)\hat{\Theta}_n(X) + X_2) - k_n(x_1, X_2))\mathrm{d}\lambda\nu_1(\mathrm{d}x_1) := R_{3,1,n} + R_{3,2,n},$$

其中 $R_{3,1,n} := \hat{\Theta}_n(X) \int_{\mathbb{R}} \int_0^1 (k_n(x_1, (1-\lambda)\hat{\Theta}_n(X) + X_2) - k(x_1, X_2))\mathrm{d}\lambda\nu_1(\mathrm{d}x_1)$ 和 $R_{3,2,n} := \hat{\Theta}_n(X) \int_{\mathbb{R}} (k(x_1, X_2) - k_n(x_1, X_2))\nu_1(\mathrm{d}x_1)$。根据情形 $i = 2$，我们有 $R_{3,2,n} = \circ_{\mathbb{L}^p(\nu)}(r_n)$。此外，由于 k 有界，$|R_{3,1,n}| \leq C|r_n||\Theta_n|$。因此，$(|\frac{R_{3,1,n}}{r_n}|_n,)_n$ 一致可积。因此，我们只需验证 $R_{3,1,n} = \circ_{\mathbb{L}^1(\nu)}(r_n)$ 以及，

$$\frac{\mathbb{E}^\nu[|R_{3,1,n}|]}{r_n} \leq \int_0^1 \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |\Theta_n(z)k_n(x_1, z_2 + \lambda\hat{\Theta}_n(z)) - k(x_1, z_2)|\nu_1(\mathrm{d}x_1)\nu_1(\mathrm{d}z_1)\nu_2(\mathrm{d}z_2)\mathrm{d}\lambda.$$

右端趋于0 由引理 5.18。
对于 $i = 4$。通过变量代换，

$$R_{4,n} = \int_{\mathbb{R}} \int_0^1 \hat{\Theta}_n(x_1, X_2)(k(x_1, X_2) - k(x_1, X_2 + \lambda\hat{\Theta}_n(x_1, X_2))\mathrm{d}\lambda\nu_1(\mathrm{d}x_1).$$

因此，$|R_{4,n}| \leq r_n \int_{\mathbb{R}} \int_0^1 |\hat{\Theta}_n(x_1, X_2)||k(x_1, X_2 + \lambda\hat{\Theta}_n(x_1, X_2)) - k(x_1, X_2)|\mathrm{d}x_2\nu_1(\mathrm{d}x_1)$。因此，由引理 5.18，$|R_{4,n}| = \circ_{\mathbb{L}^p(\nu)}(r_n)$。□

关于条件$\mathrm{C}^{\mathbb{W}_p^{\mathrm{ad}}}$(iii)的讨论。

我们将 $\mathbb{L}^1_\mu(\mu_i)$ 定义为 $\mathbb{L}^1(\mu_i)$ 在典范嵌入 $J_i : \mathbb{L}^1(\mu_i) \to \mathbb{L}^1(\mu)$ 下的像，该嵌入对 $f \in \mathbb{L}^1(\mu_i)$ 定义为

$$J_i(f)(x) = f(x_i) \text{ for } x \in \mathbb{R}^2.$$

由于若 $f = g$ μ_i 几乎处处成立，则 $J_i(f) = J_i(g)$ μ 几乎处处成立，因此嵌入 J_i 定义良好。此外，由于 $\mu_i = \mu \circ X_i^{-1}$，我们有 $\|J_i(f)\|_{\mathbb{L}^1(\mu)} = \|f\|_{\mathbb{L}^1(\mu_i)}$。下文中，我们将 $\mu - a.s$ 常值函数集合与 $\mathbb{R}$等同。由于 μ，μ_1 和 μ_2 是概率测度，因此总有

$$\mathbb{R} \subset \mathbb{L}^1_\mu(\mu_1) \cap \mathbb{L}^1_\mu(\mu_2).$$

在命题 3.7后的注记中，我们给出了一个包含关系为严格包含的例子（即
可以找到 μ 以及两个非常值函数 f，g：$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 使得 $f(X_1) = g(X_2)$ $\mu - a.s$）。我们想讨论 **对于 μ，逆包含关系（以及等式）成立还需要什么附加条件**。

A.0.1 一个玩具示例：乘积测度

命题 A.1. 假设 $\mu(\mathrm{d}x) = \mu_1(\mathrm{d}x_1) \otimes \mu_2(\mathrm{d}x_2)$（其中 $\otimes$ 表示乘积测度，且 $x = (x_1, x_2)$）。在这种情况下，我们有

$$\mathbb{L}^1_\mu(\mu_1) \cap \mathbb{L}^1_\mu(\mu_2) = \mathbb{R}.$$

证明。令 $\mu(\mathrm{d}x) = \mu_1(\mathrm{d}x_1) \otimes \mu_2(\mathrm{d}x_2)$。令 $X = (X_1, X_2) \sim \mu$，则有 X_1 和 X_2，它们相互独立。令 $H \in \mathbb{L}^1_\mu(\mu_1) \cap \mathbb{L}^1_\mu(\mu_2)$，这意味着存在 $f \in \mathbb{L}^1(\mu_1)$ 和 $g \in \mathbb{L}^1(\mu_2)$，使得

$$H(X) = f(X_1) = g(X_2) \ \mu - a.s.$$

取条件期望（由于所有函数均可积，因此定义良好），得到

$$f(X_1) = \mathbb{E}^\mu[g(X_2)|X_1] = \mathbb{E}^\mu[g(X_2)]$$

其中，最后一个等式是独立性的结果。在这种情况下，我们确实有 $f(X_1) = \mathbb{E}^\mu[g(X_2)]$, $\mu_1 - a.s$ 因此 f 是 $\mu_1 - a.s$ 常数，我们便可以得出结论。□

A.0.2 如果 μ 关于勒贝格测度具有严格正密度且具有全支撑。

从现在起，我们用 Leb_1 表示 $\mathbb{R}$ 上的勒贝格测度，用 Leb_2 表示 $\mathbb{R}^2$ 上的勒贝格测度。

命题 A.2. 假设 $\mu(\mathrm{d}x) = q(x)\mathrm{Leb}_2(\mathrm{d}x)$，其中 $q(x) > 0$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上几乎处处成立（这里按勒贝格测度的意义理解）。在这种情况下，我们有

$$\mathbb{R} = \mathbb{L}^1_\mu(\mu_1) \cap \mathbb{L}^1_\mu(\mu_2).$$

证明。令 $\mu(\mathrm{d}x) = q(x)\mathrm{Leb}_2(\mathrm{d}x)$，并令 $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 博雷尔可测，使得 $f(X_1) = g(X_2)\ \mu - a.s$ 在这种情况下，由于 $q(x) > 0$ 几乎处处 在 $\mathbb{R}^2$ 上成立，我们有（按勒贝格测度几乎处处）：

$$f(x_1) = g(x_2).$$

换言之，令 $N = \{(x_1, x_2)$ 满足 $f(x_1) \neq g(x_2)\ \} \subset \mathbb{R}^2$，则 $\mathrm{Leb}_2(N) = 0$。现在定义

$$N_{x_1} := \{x_2 \in \mathbb{R} \text{ such that } f(x_1) \neq g(x_2)\ \}$$

根据富比尼定理，$\mathrm{Leb}_2(N) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{Leb}_1(N_{x_1})\mathrm{Leb}_1(\mathrm{d}x_1) = 0$。因此，令

$$I_1 = \{x_1 \in \mathbb{R} \text{ such that } \mathrm{Leb}_1(N_{x_1}) = 0\ \},$$

我们有勒贝格测度$_1(\mathbb{R} \setminus I_1) = 0$。令 $x_1 \in I_1$，则对于几乎所有的 $x_2 \in \mathbb{R}$， $f(x_1) = g(x_2)$，因此g 几乎处处为常数， f也如此。□

Ho不过，后两个例子的问题在于它们不满足假设

A.0.3 连通内部具有正密度和支撑。

命题 A.3。 假设Ω 具有连通内部，勒贝格测度$_2(\partial\Omega) = 0)$ （其中 ∂ 表示边界），且 $\mu(\mathrm{d}x) = q(x)\mathbb{1}_\Omega(x)$勒贝格测度$_2(\mathrm{d}x)$，其中 $q(x) > 0$ 在Ω上几乎处处成立。在这种情况下，我们有

$$\mathbb{R} = \mathbb{L}^1_\mu(\mu_1) \cap \mathbb{L}^1_\mu(\mu_2).$$

证明。沿用前一个证明的步骤，我们得到其在 Ω 上勒贝格几乎处处成立：

$$f(x_1) = g(x_2).$$

由于我们只考虑相差一个勒贝格零测集的情形，可以（并且确实会）用 Ω 的内部替代 Ω，仍记为 Ω；于是 Ω 是开且连通的。现在令 I， $J \subset \mathbb{R}$，其为开集且满足$I \times J \subset \Omega$，则对于几乎所有的 x，在 $I \times J$ 中有 $f(x_1) = g(x_2)$。

换言之，令

$$N = \{(x_1, x_2) \in I \times J \text{ such that } f(x_1) \neq g(x_2)\ \} \subset \mathbb{R}^2,$$

我们有勒贝格测度$_2(N) = 0$. 同样地，按照上一个证明的步骤，定义

$$N_{x_1} := \{x_2 \in J \text{ such that } f(x_1) \neq g(x_2)\ \}$$

根据富比尼定理，勒贝格测度$_2(N) = \int_I$ 勒贝格测度$_1(N_{x_1})$勒贝格测度$_1(\mathrm{d}x_1) = 0$。因此，令

$$I_1 = \{x_1 \in I\ \mathrm{Leb}_1(N_{x_1}) = 0\ \},$$

我们有勒贝格测度$_1(I\setminus I_1)=0$。令 $x_1\in I_1$，则对于几乎所有的 $x_2\in J$，$f(x_1)=g(x_2)$，因此 g 在 J 上几乎处处为常数。通过类似的考虑，f 在 J上几乎处处为常数。因此，存在一个常数 $c_{I\times J}$，使得

$$f(x_1)=g(x_2)=c_{I\times J}\ \text{Leb}_2\ \text{a.e on}\ I\times J.$$

现在令 $I,J\subset\mathbb{R}$ 和 $\hat{}I,\hat{}J\subset\mathbb{R}$，使得 $I\times J\subset\Omega$ 和 $\hat{}_I\times\hat{}J\subset\Omega$ 满足 $\text{Leb}_2((I\times J)\cap(\hat{}_I\times\hat{}J))>0$。于是，取 x属于 $((I\times J)\cap(\hat{}_I\times\hat{}J))$（由于该集合的测度严格为正，这样的元素确实存在），该常数必定相同，且

$$c_{I\times J}=f(x_1)=g(x_2)=c_{\hat{I}\times\hat{J}}. \tag{A.74}$$

因此，将 $\Gamma:\Omega\to\mathbb{R}$ 映射到 $c_{I\times J}$（其中 $I\times J$ 是 Ω 中 x 的一个邻域）的函数 $x\in\Omega$ 定义良好，因为 Ω 是开集，且该常数不依赖于邻域$I\times J$。事实上，考虑另一个邻域 $\hat{}_I\times\hat{}J$，交集 $(I\times J)\cap(\hat{}_I\times\hat{}J)$ 仍是 x 的一个开邻域，其勒贝格测度非零。因此，根据方程（A.74），$\Gamma(x)=c_{I\times J}=c_{\hat{I}\times\hat{J}}$。此外，$\Gamma$ 局部为常数，因为对于 $x\in\Omega$，可以找到 x 的一个邻域 $I\times J$，使得对所有 $y\in\Omega$，$\Gamma(x)=\Gamma(y)=c_{I\times J}$。因此，$\Gamma$ 是连通集 Ω 上的局部常值函数，所以 Γ 为常数，且 c 不依赖于 $I\times J$。□

A.0.4 一般条件

在本小节中，对于 $x_1\in\Omega_1,$，令 $I_{x_1}:=\text{supp}(\pi_{x_1})$，其中 $(\pi_{x_1})_{x_1\in\Omega_1}$ 表示相对于 μ μ_1的解体。

命题 A.4。存在$\hat{}\Omega\subset\Omega$，使得 $\mu(\Omega\mid\hat{}\Omega)=0$，并且对于所有 x、$x'\in\hat{}\Omega$，存在 $N\in\mathbb{N}$ 及点 $x=x^1$、.....、$x^N=x'\in\hat{}\Omega$，使得

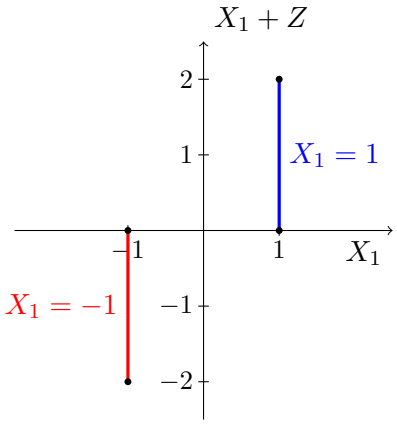
$$\mu_2(I_{x_1^i}\cap I_{x_1^{i+1}})>0,\qquad for\ 1\le i\le N-1.$$

在这种情况下，我们有

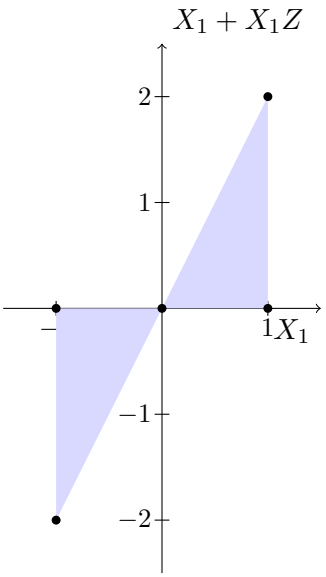
$$\mathbb{R}=\mathbb{L}^1_\mu(\mu_1)\cap\mathbb{L}^1_\mu(\mu_2).$$

注 A.5。我们理解，性质 $\mathbb{R}=\mathbb{L}^1_\mu(\mu_1)\cap\mathbb{L}^1_\mu(\mu_2)$ 实际上确实取决于 μ的支撑。

令 $\mu=L(X_1,X_1+Z)$，其中 $L(X_1)(dx_1)=\frac{1}{2}(\delta_{-1}(dx_1)+\delta_1(dx_1))$，$L(Z)=U([-1,1])$（这是命题 *3.11* 后注释中所考虑的测度）。μ的支集为



或类似内容 实际上，考虑测度 $\mu=L(X,X+ZX)$，其中 $X,Z\sim U([-1,1])$ 相互独立 $t.$



在这种情况下，我们再次有 $sgn(X_1) = sgn(X_2)$。我们看到，该测度不属于命题 A.4 的适用范围，因为条件期望的支撑在$x_1 = 0$处坍缩，从而将支撑分成两个连通分支。我们看到，所有情况

在命题 *A.1*、*A.2* 和 *A.3* 中证明的结果均适用命题 *A.4* 的范围。事实上，在命题 *A.1*、*A.2* 的假设下，对所有 $x_1 \in \Omega_1$，$supp(L(X_2|X_1)) = supp(L(X_2))$，均成立。在命题 *A.3* 的情况下，我们有 $\mu(\Omega \setminus Int(\Omega)) = 0$。由于 $Int(\Omega)$ 是连通的，对于所有 $x, x' \in Int(\Omega)$，存在一条连续路径 $\gamma: [0,1] \mapsto Int(\Omega)$，满足 $\gamma(0) = x$ and $\gamma(1) = x'$。根据 γ 的连续性和 $[0,1]$ 的紧致性，可以用有限个球覆盖这条路径。换言之，存在 $N \in \mathbb{N}$ 和 $x = x^1, \cdots x^N = x'$, 以及 $r_1, \cdots r_N > 0$，使得对于 $1 \leq i \leq N$, $B_i := B(x^i, r^i) \subset Int(\Omega)$ 和 $0 \leq i \leq N-1$, $B_i \cap B_{i+1} \neq$，均成立。在这种情况下，点 $x^1, \cdots x^N$ 满足命题 *A.4* 的条件。

证明。 令 $h \in \mathbb{L}^1_\mu(\mu_1) \cap \mathbb{L}^1_\mu(\mu_2)$。则存在 $f \in L^1(\mu_1)$ 和 $g \in L^1(\mu_2)$，使得

$$h(x_1, x_2) = f(x_1) = g(x_2) \qquad \mu\text{-a.e. on } \Omega.$$

Let

$$N := \{(x_1, x_2) \in \Omega : f(x_1) \neq g(x_2)\}.$$

由于 $\mu(N) = 0$，由富比尼定理可得一个集合 $A \subset \Omega_1$，满足 $\mu_1(A) = 0$，使得对所有$x_1 \in \Omega_1 \setminus A$,

$$\mu_2(N_{x_1}) = 0, \ N_{x_1} := \{x_2 : (x_1, x_2) \in N\}.$$

因此，对于每个 $x_1 \notin A$,

$$f(x_1) = g(x_2) \ \mu_2 - a.s. \text{on } I_{x_1}.$$

换言之，存在 c_{x_1}，使得 g 几乎处处恒等于 c_{x_1} π_{x_1}。显然，如果 x_1 和 x_1' 满足 $\mu_2(I_{x_1} \cap I_{x_1'}) > 0$，那么 $c_{x_1} = c_{x_1'}$。利用假设中提出的链条件，即可得到所需结果。

参考文献

[1] Elvio Accinelli. “隐函数定理的一种推广”。载于：*SSRN 1512763* 可在线查阅 （2009）。[2] Daniel Bartl、Samuel Drapeau、Jan Obłój 与 Johannes Wiesel。“Wasserstein 分布鲁棒优化问题的敏感性分析”。载于：英国皇家学会学报 *A* 477.2256（2021），第 20210176 页。[3] Daniel Bartl 与 Johannes Wiesel。“多期优化问题对适应 Wasserstein 距离的敏感性”。载于：*SIAM* 金融数学杂志 14.2（2023），第 704–720 页。[4] Carlos Biasi、Carlos Gutierrez 与 Edivaldo L dos Santos。“连续函数的隐函数定理”。（2008）。[5] Jose Blanchet 与 Karthyek Murthy。“通过最优传输量化分布模型风险”。载于：运筹学数学 44.2（2019），第 565–600 页。[6] Jose Blanchet 与 Karthyek Murthy。“通过最优传输量化分布模型风险”。载于：运筹学数学 44.2（2019），第 565–600 页。[7] René Carmona 与 François Delarue。《均值场博弈的概率理论及其应用 I–II》。Springer，2018。[8] Stefano De Marco 与 Pierre Henry-Labordere。“连接普通期权与 VIX 期权：一个受约束的鞅最优传输问题”。载于：*SIAM* 金融数学杂志 6.1（2015），第 1171–1194 页。[9] Ivar Ekeland。“Fréchet 空间中的逆函数定理”。载于：*Annales de l’IHPAnalyse non linéaire*。第 28 卷，第 1 期。2011 年，第 91–105 页。[10] Lawrence C Evans。偏微分方程。第 19 卷。美国数学学会，2022。[11] Ky Fan。“极小极大定理”。载于：美国国家科学院院刊 39.1（1953），第 42–47 页。[12] Helmuth Goldberg、Winfried Kampowsky 与 Fredi Tröltzsch。“抽象函数 Lp 空间上的 Nemytskij 算子”。载于：*Mathematische Nachrichten* 155.1（1992），第 127–140 页。[13] Richard S Hamilton。“Nash–Moser 逆函数定理”。（1982）。[14] Bingyan Han。“具有因果约束和结构信息的分布鲁棒风险评估”。载于：数学金融（2022）。[15] Pierre Henry-Labordère。模型无关对冲：鞅最优传输视角。Chapman & Hall/CRC，2017。[16] Ran Ji 与 Miguel A Lejeune。“基于数据的 Wasserstein 度量分布鲁棒机会约束优化”。载于：全球优化杂志 79.4（2021），第 779–811 页。[17] Yifan Jiang。“因果分布鲁棒优化的对偶性：离散时间情形”。载于：*arXiv* 预印本 *arXiv:2401.16556* （2024）。[18] Yifan Jiang 与 Jan Obłój。“因果分布鲁棒优化的敏感性”。载于：*arXiv* 预印本 *arXiv:2408.17109* （2024）。[19] Frank Hyneman Knight。风险、不确定性与利润。第 31 卷。Houghton Mifflin，1921。

[20] Daniel Kuhn、Soroosh Shafiee 和 Wolfram Wiesemann。《分布鲁棒优化》。载于：*Acta Numerica* 34（2025），第 579–804 页。[21] Henry Lam。《输入过程序列依赖性的敏感度：一种稳健方法》。载于：*Management Science* 64.3（2018），第 1311–1327 页。[22] Fengming Lin、Xiaolei Fang 和 Zheming Gao。《分布鲁棒优化：理论与应用综述》。载于：*Numerical Algebra, Control and Optimization* 12.1（2022），第 159–212 页。[23] Peyman Mohajerin Esfahani 和 Daniel Kuhn。《利用 Wasserstein 度量进行数据驱动的分布鲁棒优化：性能保证与可处理的等价重构》。载于：*Mathematical Programming* 171.1（2018），第 115–166 页。[24] Hamed Rahimian 和 Sanjay Mehrotra。《分布鲁棒优化：综述》。载于：*arXiv preprint arXiv:1908.05659*（2019）。[25] Nathan Sauldubois 和 Nizar Touzi。《一阶鞅模型风险与半静态对冲》. 2024 年。[26] Gerd Wachsmuth。《隐函数的可微性：超越隐函数定理》。载于：*Journal of Mathematical Analysis and Applications* 414.1（2014），第 259–272 页。[27] Luhao Zhang、Jincheng Yang 和 Rui Gao。《Wasserstein 分布鲁棒优化的简短通用对偶性证明》。载于：*Operations Research* 73.4（2025），第 2146–2155 页。