图中的支配与分离之间的相互作用

Dipayan Chakraborty[a,b], Annegret K. Wagler[a]

[a]*LIMOS*、克莱蒙奥弗涅大学、法国国家科学研究中心、圣艾蒂安矿业学院、克莱蒙奥弗涅国立综合理工学院、*LIMOS*，法国克莱蒙费朗。[b]黎巴嫩美国大学计算机科学与数学系，黎巴嫩贝鲁特

arXiv:2601.20153v1 [math.CO] 28 Jan 2026

摘要

文献中已研究过图中的若干识别问题，其中研究最广泛的是将支配集作为识别工具的问题。其目标是通过适当选取的支配集或全支配集中的邻域，使图中任意两个顶点彼此区分。具有分离性质的此类（全）支配集通常称为图的码。本文研究四种分离性质：定位、闭分离、开分离和完全分离。我们探讨了在图中寻找最小分离集的复杂性，并研究这些分离性质与若干种码之间的相互作用（确立了分离与基于支配的码之间尤为紧密的关系），以及分离与取补之间的相互作用（表明定位和完全分离在一个图及其补图中相同，而图中的闭分离对应于其补图中的开分离）。

关键词：定位、闭分离、开分离、完全分离、支配、全支配

1. 引言

在识别问题领域，目标是通过图中某个经过适当选择的支配集或全支配集与各顶点邻域的交集具有唯一性，从而区分图中的任意两个顶点。考虑一个简单无向图 $G = (V, E)$，并用 $N(v)$ 表示顶点$v \in V$的开邻域。此外，用 $N[v] = N(v) \cup \{v\}$表示 v的闭邻域。子集 $C \subseteq V$是一个

- 支配集（简称*D*-集），如果对于所有 $v \in V$， $N[v] \cap C$ 都是非空集，
- 全支配集（简称*TD*-集），如果对于所有 $v \in V$， $N(v) \cap C$ 都是非空集。

为了区分 图有 h 个顶点时，人们研究了不同的分离性质。子集 $C \subseteq V$ i s a

- 定位集（简称 *L*-集），如果 $N(v) \cap C$ 对于每个 $v \in V \setminus C$都是唯一的，
- 开放分离集（简称 *O*-集），如果 $N(v) \cap C$ 对于每个 $v \in V$都是唯一的，
- 闭分离集（简称 *I*-集），如果 $N[v] \cap C$ 对于每个 $v \in V$都是唯一的，并且
- 完全分离集（简称 *F*-集），如果它同时是开分离和闭分离的，也就是说，如果 $N[u] \cap C \neq N[v] \cap C$和 $N(u) \cap C \neq N(v) \cap C$对于每一对不同的顶点 u， $v \in V$都成立。

对于所有 说明，图1在一个小图中展示了这类具有最小基数的集合示例。

将一种分离性质与一种支配性质相结合，文献中研究了以下识别问题：

- 将定位与支配以及全支配相结合，分别得到定位支配码（简称*LD*-码）和定位全支配码（简称*LTD*码），分别参见 [1]和 [2],;
- 开放分离与支配和全支配分别导出开分离支配码（简称*OD*码）和开放分离全支配码 [1] （简称*OTD*码），分别参见 [5] 和[4], ;

[1]OTD码由 [3] 和 [4] 分别独立提出，名称分别为强（t， $\leq l$）识别码和开放邻域定位支配集（或*OLD*集）。然而，为了保持命名的一致性，并明确体现分离性质和支配性质，本文将其称为开放分离全支配码。

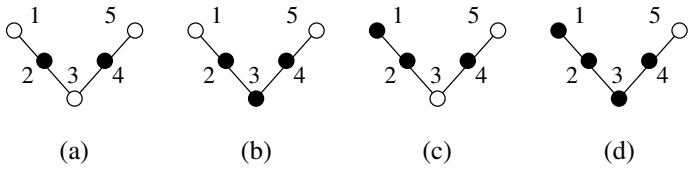


图1：图中的最小 S 集和 X-码（黑色顶点属于 S 集和 X-码），其中 (a) 既是 D-集也是 L-集，因此是 LD-码；(b) 既是 TD-集也是 I-集，因此也是 ID-码和 ITD-码；(c) 是 O-集，因此是 OD-码；(d) 是 F-集，因此既是 FD-码和 FTD-码，也是 ITD-码。

- 闭分离与支配和全支配分别导出识别码（简称*ID*-码）和识别全支配码[2]（简称*ITD*-码），分别参见 [6]和 [2], ;
- 完全分离与支配、全支配相结合，分别得到完全分离支配码（简称*FD*-码）和完全分离全支配码（简称*FTD*-码），参见 [7]。

图1展示了一个小图中此类码的例子。文献中已知，并非每个图都具有所有研究过的集合和码类型。总结例如 [5, 7, 2, 6, 4]，中的结果可知，图 G具有

- 若 G 含有孤立顶点，即满足 $N(v) = \emptyset$ 的顶点 v，则不存在 TD-集,

而每个图都有一个 D-集；图 G 具有

- 若 G 含有开孪生点，即满足 $N(u) = N(v)$ 的不相邻顶点 u, v，则不存在 O-集,
- 若 G 含有闭孪生点，即满足 $N[u] = N[v]$ 的相邻顶点 u, v，则不存在 I-集,
- 若 G含有开孪点或闭孪点，则不存在 F-集,

而每个图都有一个 L-集。

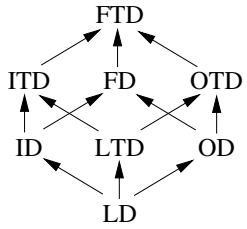
因此，如果图 G 是 *TD*-可容许的，则 G 具有一个 TD-集；如果图 G 是 *S*-可容许的，则 $S \in$对于$\{O, I, F\}$具有一个 S-集。类似地，如果图 G是 *X*-可容许的，则 G对于 $X \in$码 $=\{LD, LTD, OD, OTD, ID, ITD, FD, FTD\}$具有一个 X码，并根据前述条件和 X码的定义，得出哪些图是 X-可容许的，以及哪些图中不存在 X-码；总结见表1。

X	LD	LTD	OD	OTD	ID	ITD	FD	FTD
孤立顶点		x		x		x		x
开孪生点			x	x			x	x
闭孪生点					x	x	x	x

表1：对于含有孤立顶点或开放孪点、闭孪点的图中不存在的 X-码，在表中以 x 标记。

给定一个 $X \in$码和一个X-可容许图 G， G 上的X问题是指在 G中寻找基数最小的X码 $\gamma^{\mathrm{X}}(G)$ 的问题，称为其*X*数。过去十年间，这类问题在各种应用背景下得到了广泛研究，例如参见Jean和Lobstein维护的参考文献目录 [8]。已经证明，对于任何 $X \in$码，所有X问题都是NP困难的 [5, 7, 9, 10, 4]。因此，解决这类问题的典型思路是为特殊图确定闭式公式，或给出X数的界。有关文献综述，请再参见 [8] 。

[2]识别全支配码已于 [2] 以区分全支配码之名引入文献。然而，为了保持记号的一致性，本文更倾向于将其称为 ITD-码。



Figu图2：所有 X ∈码对应的X数之间的关系，其中 $X' \longrightarrow X$ 表示 $\gamma^{X'}(G) \leq \gamma^{X}(G$).

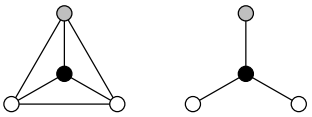


图3：具有全邻顶点的两个图中的最小D集和TD集（黑色顶点是全邻顶点，并构成D集；灰色顶点将D集补充为TD集），其中 (a) 是团 K_4, (b) 是星 $K_{1,\ 3}$。

文献 [7], 中建立了所有 X ∈码对应的X数之间的一般关系，见图2。特别地，我们看到 γ^{LD}（G）是所有 其他X数的下界，而对于FTD可容许图， γ^{FTD}（G）则是所有 其他X数的上界。此外，文献 [5] （分别是[7]）已证明，任意OTD可容许图（分别为FTD可容许图）的OD数与OTD数（分别为FD数与FTD数）之差至多为一。

此外，图 G 的支配数（分别为全支配数） $\gamma^{\mathrm{D}}(G)$（分别为 $\gamma^{\mathrm{TD}}(G)$），称为*D*数 （分别称为 *TD*数），是 G 的最小D集（分别为TD集）的基数。这两个数在文献中都已得到深入研究[3]。根据定义，显然

$$\gamma^{\mathrm{D}}(G) \leq \gamma^{\mathrm{TD}}(G) \text{ holds for any TD-admissible graph } G \tag{1}$$

并且我们有

$$\begin{array}{c} \gamma^{\mathrm{D}}(G) \leq \gamma^{\mathrm{X}}(G)\ \forall X \in \{LD, OD, ID, FD\} \\ \gamma^{\mathrm{TD}}(G) \leq \gamma^{\mathrm{X}}(G)\ \forall X \in \{LTD, OTD, ITD, FTD\} \end{array} \tag{2}$$

对所有 X-可容许图均成立。众所周知，图 G 的 $\gamma^{\mathrm{D}}(G)$ 与 $\gamma^{\mathrm{TD}}(G)$（分别）之间以及与 $\gamma^{\mathrm{X}}(G)$ 之间的差距可能很大。例如，若 G 有一个全邻顶点，即一个与 G 中所有其他顶点相邻的顶点 u ，那么 $\{u\}$ 是 G 的一个D集，而对于 u 的任意邻点 v，$\{u, v\}$ 是 G 的一个TD集；因此，对于任何具有全邻顶点的图 G ， $\gamma^{\mathrm{D}}(G) = 1$ 且 $\gamma^{\mathrm{TD}}(G) = 2$ 。团 K_n 和星 $K_{1,n}$ 显然是具有全邻顶点的图，见图 3。它们提供了与 X 数之间差距很大的图的例子，因为 [11, 5] 的结果表明，对于 $X \in \{LD, LTD, OD, OTD\}$， $\gamma^{\mathrm{X}}(K_n) = n - 1$ 成立；而根据 [11, 12, 13], 对于 $X \in \{LD, LTD, ID, ITD\}$， $\gamma^{\mathrm{X}}(K_{1,n}) = n$ 成立。

相反，据我们所知，这四种分离性质尚未被单独研究，也就是说，尚未与支配性质结合起来定义带有 X ∈ 码的八种X码。本文旨在研究这四种分离性质。在第2节中，我们首先证明，对于所有的 $S \in \{L,\ O,\ I,\ F\}$，在图中寻找最小 S 集是 NP困难的。这促使我们为最小 S 集的基数给出不同的界，特别是探讨其与 X-¯可容许图中的最小X码（见第3节）及其补图 G （见第4节）之间的关系。最后，我们总结全文，并提出未来研究方向。

[3]在文献中，图 G 的支配数通常记作 $\gamma(G)$，其全支配数记作 $\gamma^t(G)$。然而，为了保持记号一致，本文采用 $\gamma^{\mathrm{D}}(G)$ 和 $\gamma^{\mathrm{TD}}(G)$ 来表示它们。

2. 求最小 S-分离集的复杂性

给定一个 S-可容许图 G，其中 $S \in \{L,\ O,\ I,\ F\}$，图 G 上的 S-问题是寻找基数最小的 S 集 γ^{S}（G）的问题，其基数称为该图的 S 数。本节将证明，对于任意 $S \in \{L,\ O,\ I,\ F\}$，寻找这样的最小 S 集是 NP完全的。该问题的判定版本表述如下。

最小 S-集 **输入：** 一个图 G 和一个参数 k。**问题：** 是否存在一个 G 的 S-集 A，使得 $\|A\| \le k$?

为了证明最小 S-集问题的 NP 完全性，我们将其归约自一个著名的 NP 完全问题——测试覆盖（Garey 和 Johnson [14] 所著书中的问题 SP6），其定义如下。

测试覆盖 **输入：** 一个由 U 个元素组成的集合，这些元素称为元素；一个集合族$\mathcal{T}$，称为测试集合，定义为一个集合 o f 子集（称为测试）U，满足对于任意一对不同的元素，都存在一个测试，使得这两个元素中恰有一个属于该测试；以及一个参数 ℓ.**问题：** 是否存在一个测试集合 $\mathcal{T}\prime \subset \mathcal{T}$，使得 $\|\mathcal{T}'\| \le \ell$?

接下来，我们介绍一种从测试覆盖到最小 S-集的通用归约方案，适用于 $S \in \{L, O, I, F\}$。

归约 1（通用方案）。 该归约的输入是一个包含 U 个元素的集合、一个由 U 个$\mathcal{T}$ 组成的测试集合，以及一个参数 ℓ。随后，它通过以下步骤构造一个图 G_S（见图 4）。

(1) 该归约选取一个正整数 $r = r$（S），使得对于每个 $u \in U$，它引入一个由图 G_S 的顶点构成的集合 V（S, u）$=\{v^1$（u）$\ v^2$（u）$\ \ldots, v^r$（u）$\}$。令 $M = M$（S）$= \cup_{u\in U} V$（S, u）。它还引入一个由图的顶点构成的集合 $R = R$（S），其大小为$\mathcal{O}$（ℓ）。于是，集合 $Q = Q$（S）$= M \cup R$ 称为图 G_S 的基集。注意，$|Q| = r|U| + |R|$。根据分离性质 S，该归约随后在 Q中的顶点对之间引入边。

(2) 对于每个 $T \in \mathcal{T}$，归约会引入一个 G_S 的顶点 $w = w(\mathcal{T})$。随后，它会引入边，使得对于所有 $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$，当且仅当 $u \in T$ 时，$v^i(u)w(T) \in E(G)$。令 $W = W(T) = \{w(T) : T \in \mathcal{T}\}$。

(3) 我们将 *S*-小工具 定义为一个元组 (H_S, B_S)，其中 H_S 是一个图，B_S 是 H_S 的一些指定顶点 构成的集合。对于每个测试 $T \in \mathcal{T}$，归约会引入一个 S-小工具 $(H_S(T)\ B_S(T))$，并在 $w(T)$ 与每个 $b \in B_S(T)$ 之间添加一条边。此外，它还会引入另一个 S-小工具 $(H_S(U)\ b_S(U))$，并在每个 $b \in B_S(U)$ 与 $v^i(u) \in M$ 之间添加边，对每个 $i \in \{1, 2, \ldots, \ell+1\}$ 且 $u \in U$ 均如此。当 $S = I$ 时的示例见图 4a。

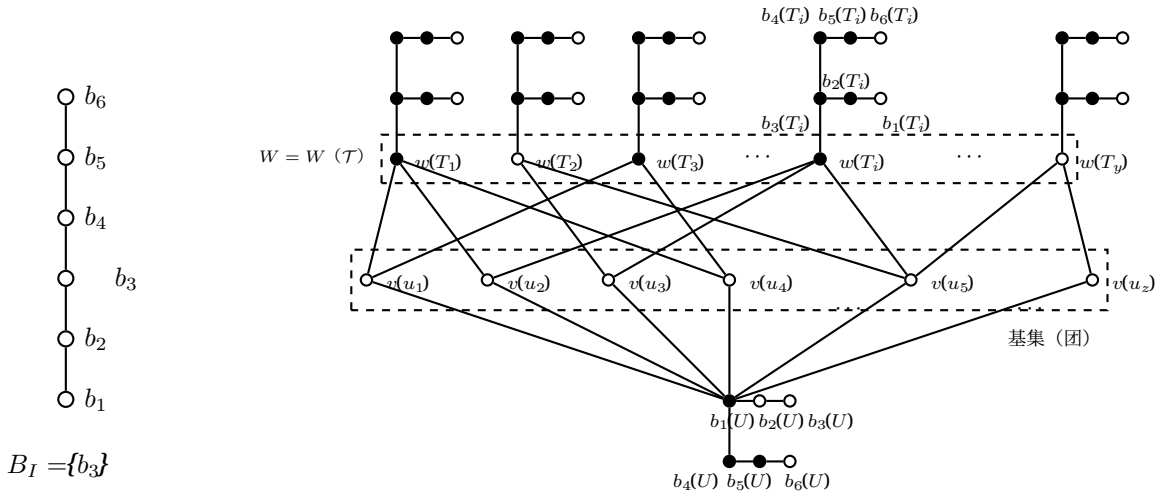
（4）最后，归约设置 $k = \ell + p|\mathcal{T}| + q$，其中 $p = p(S)$ 和 $q = q(S)$ 是整数。

No请注意，归约 1 可以在测试覆盖的输入规模的多项式时间内执行 .

接下来，我们说明如何调整归约 1 来处理闭分离，也就是针对 $S = I$。在这种情况下，在归约 1 的步骤（1）中，归约设置 $r = r(I) = 1$，因此对每个 $u \in U$，$V(I, u) = \{v(u)\}$。此外，它设置 $R = R(I) = \emptyset$。因此，基集 $Q = Q(I) = M(I) = \cup_{u\in U} V(I, u)$ 的阶为 $|U|$，并且归约在 Q 的所有顶点对之间引入边，使 $G_I[Q]$ 成为完全图。归约 1 的步骤（ 3 ）中的 I- 小工具为 (H_I, B_I)，其中 H_I 与图 4a 所示的 P_6 及 $B_I = \{b_3\}$ 同构。最后，归约在归约 1 的步骤（4）中设置 $p = p(I) = 4$ 和 $q = q(I) = 3$，也就是说，它设置 $k = \ell + 4|\mathcal{T}| + 3$。

我们使用图 4 中提到的相同顶点名称。此外，为方便记号，令$V_U = V(H_I(U))$，并对每个 $T \in \mathcal{T}$令 $V_T = V(H_I(T))$。下面的引理有助于证明最小 I-集的 NP难性。

引理 2.1。 设 A 是 G_I 的 *I*-集。则有 $\left|A \cap \left(V_U \cup \bigcup_{T\in\mathcal{T}} V_T\right)\right| \ge 4|\mathcal{T}| + 3$。



(a) I-小工具 $(P_6, \{b_3\})$。

(b) 最小 I-集实例。

图 4：归约 1 构造的图 G_I 示意图。这里 $U = \{u_1, u_2, \ldots u_z\}$ 以及 $\mathcal{T} = \{T_1, T_2, \ldots\ldots, T_y\}$。图 4b 中黑色顶点的集合是 G_I 的一个 I-集实例。

借助引理 2.1，我们可以证明如下结论。

定理 2.2。 最小 *I*-集是 *NP*完全问题。

证明（概要）。 该问题显然属于 NP 类。因此，为了证明这一结果，我们将证明最小 I-集也是 NP困难问题。具体而言，我们证明：当且仅当在归约 1 中构造的输入 (G_I, k) 是最小 I-集的一个是实例时，测试覆盖的输入 $(U, \mathcal{T})$ 才是测试覆盖的一个是实例。对于必要性，给定一个满足 $|\mathcal{T}'| \leq \ell$ 的 U 测试集合 $\mathcal{T}'$，其思路是构造一个 G_I 的 I-集：纳入 $T \in \mathcal{T}'$ 对应的顶点 $w(T)$，以及图 4b 中标黑的那些顶点，它们位于 G_I 的 $(|\mathcal{T}|+1)$ 导出子图 H_I 中。另一方面，对于充分性，若存在一个基数至多为 $\ell + 4|\mathcal{T}| + 3$ 的 G_I 的 I-集，则引理 2.1 保证 Q 中的顶点对由 $W = W(\mathcal{T})$ 中的至多 ℓ 个顶点闭邻域分离。因此，这些顶点对应的测试构成 U 的一个测试集合 $\mathcal{T}' \subset \mathcal{T}$，且满足 $|\mathcal{T}'| \leq \ell$。由此得证。 □

与 $S = I$ 的情形类似，对于 $S \in \{L, O, F\}$ 的情形，也可以调整归约 1，以证明下一个定理。由于篇幅有限，其余证明留在附录中。

定理 2.3. 对于所有 $S \in \{L, I, O, F\}$，最小 *S*-集问题都是 *NP*完全的。

3. 从 S-集到 X-码

上一节的困难性结果促使我们研究 S-数之间的关系及其取值的一些界。根据图2中所有 $X \in$ 码对应的 X数之间的一般关系，我们立即得出，对于所有相应的 S-可容许图G ，以及 $\gamma^{\mathrm{L}}(G) \leq \gamma^{\mathrm{O}}(G)$ $\gamma^{\mathrm{I}}(G) \leq \gamma^{\mathrm{F}}(G)$ 均成立

$$\gamma^{\mathrm{S}}(G) \leq \gamma^{\mathrm{SD}}(G) \leq \gamma^{\mathrm{STD}}(G) \; \forall S \in \{L, O, I, F\} \tag{3}$$

对于所有相应的 X-可容许图也成立。接下来，我们将根据图的 S 数给出其 X数的上界。我们先从图的 S 数与其 SD-数之间的关系开始：

定理 引理 3.1. 对于任意 $S \in \{L, O, I, F\}$ 和 *S*-可容许图 G，有 $\gamma^{\mathrm{SD}}(G) \leq \gamma^{\mathrm{S}}(G) +$ 1.

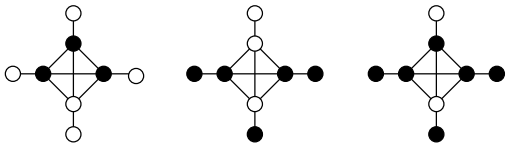


图5：细无头蜘蛛 H_4 中的最小 S 集（黑色顶点属于 S-集），其中 (a) 既是 L-集也是 O-集，(b) 是 I-集，(c) 是 F-集。

接下来，我们想知道图的 S 数与其 STD 数之间是否也存在相同的关系。一方面，我们可以证明：

定理 3.2. 对于 $S \in \{O, F\}$ 和 S-可容许图 G，有 $\gamma^{\mathrm{STD}}(G) \leq \gamma^{\mathrm{S}}(G) + 1$。

另一方面，我们有：

定理 3.3. 对于 $S \in \{L, I\}$ 和 S-可容许图 G，有 $\gamma^{\mathrm{STD}}(G) \leq 2\gamma^{\mathrm{S}}(G)$。

举例来说，我们将确定一族没有开孪点或闭孪点、且其所有 X 数均已见于文献中的图的 S-数。细无头蜘蛛 是一个图 $H_k = (Q \cup S, E)$，其中 $Q = \{q_1, \ldots, q_k\}$ 诱导一个团，$S = \{s_1, \ldots, s_k\}$ 是一个独立集，并且 q_i 与 s_j 相邻当且仅当 $i = j$。例如，我们有 $H_2 = P_4$，细无头蜘蛛 H_4 如图5所示。

我们可以证明细头无足蜘蛛图的 S-数如下：

定理 3.4. 对于细无头蜘蛛 $H_k = (Q \cup S, E)$，若满足 $k \geq 4$，则有

$$\gamma^{\mathrm{S}}(H_k) = \begin{cases} k-1 & \text{if } S \in \{L, O\} \\ k+1 & \text{if } S = I, \\ 2k-2 & \text{if } S = F. \end{cases}$$

将这些 S-数与文献中已知的细头无足蜘蛛图的 X-数（如表 2 所总结）进行比较，我们清楚地看到，对于所有 $S \in \{L, O, I, F\}$，$\gamma^{\mathrm{S}}(H_k)$ 与 $\gamma^{\mathrm{SD}}(H_k)$ 的差距确实至多为 1；对于 $S \in \{O, F\}$，$\gamma^{\mathrm{S}}(H_k)$ 与 $\gamma^{\mathrm{STD}}(H_k)$ 的差距也仅为 1；而 $\gamma^{\mathrm{I}}(H_k)$ 与 $\gamma^{\mathrm{ITD}}(H_k)$ 之间的差距确实很大。

S	L	O	I	F
$\gamma^{\mathrm{S}}(H_k)$	$k-1$	$k-1$	$k+1$	$2k-2$
$\gamma^{\mathrm{SD}}(H_k)$	k by [11]	k 作者：[5]	$k+1$ 作者：[15]	$2k-2$ 作者：[16]
$\gamma^{\mathrm{STD}}(H_k)$	k 作者：[11]	k 作者：[11]	$2k-1$ 作者：[13]	$2k-1$ 作者：[16]

表 2：细无头蜘蛛图 H_k 的 $k \geq 4$ 以及所有 $S \in \{L, O, I, F\}$的 S 数和 X 数。

4. S-集、X-码与取补

给定某个 $S \in \{L, O, I, F\}$的 S-可容许图 G，我们首先讨论关于 G 及其补图 G的¯S-数问题。我们可以证明：

定理 4.1. 对于任意图 G

(a) we have $\gamma^{\mathrm{L}}(G) = \gamma^{\mathrm{L}}(\bar{G})$;

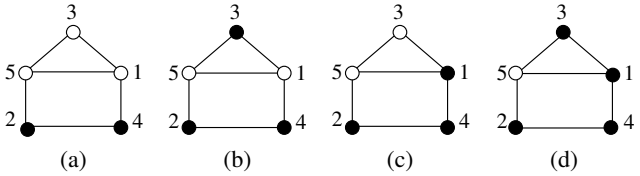


图6：图中的最小 S 集（黑色顶点属于 S 集），其中 (a) 为 L-集，(b) 为 O-集（同时也是 D-集，因此也是 OD-码），(c) 为 I-集（同时也是 TD-集，因此也是 ID-码和 ITD-码），(d) 为 F-集（同时也是 TD-集，因此也是 FD-码和 FTD-码）。

(b) 不含闭孪生点时，$\gamma^{\mathrm{I}}(G) = \gamma^{\mathrm{O}}(\bar{G})$ 成立；*(c)* 不含开孪生点时，有 $\gamma^{\mathrm{O}}(G) = \gamma^{\mathrm{I}}(\bar{G})$；*(d)* 不含孪点时，可得 $\gamma^{\mathrm{F}}(G) = \gamma^{\mathrm{F}}(\bar{G})$。

例如，考察图1所示5阶路径的最小 S 集，并将其与图6所示的5阶路径补图（房子图）的最小 S 集进行比较。

结合上述结果与第3节的研究结果，我们进一步得出：

推论4.2. 对于任意图 G

(a) $\gamma^{\mathrm{LD}}(G)$ 与 $\gamma^{\mathrm{LD}}(\bar{G})$ 相差至多 *1*；*(b)* 在没有闭孪生点的情况下，$\gamma^{\mathrm{ID}}(G)$ 与 $\gamma^{\mathrm{OD}}(\bar{G})$ 相差至多 *1*；*(c)* 在没有开孪生点的情况下，$\gamma^{\mathrm{OD}}(G)$ 与 $\gamma^{\mathrm{ID}}(\bar{G})$ 相差至多 *1*；*(d)* 在没有孪点的情况下，$\gamma^{\mathrm{FD}}(G)$ 与 $\gamma^{\mathrm{FD}}(\bar{G})$ 以及 $\gamma^{\mathrm{FTD}}(G)$ 与 $\gamma^{\mathrm{FTD}}(\bar{G})$ 均相差至多 *1*。

作为说明，我们考虑细头无足蜘蛛图 H_k 的补图，称为粗壮无头蜘蛛图，它们是图 $H_k = (Q \cup S,\ E)$，其中 $Q = \{q_1, \ldots, q_k\}$ 诱导一个独立集，$S = \{s_1, \ldots, s_k\}$ 是一个团，并且 q_i 与 s_j 相邻当且仅当 $i \neq j$。

此外，对于粗壮无头蜘蛛图，所有 X-数都已见于文献，我们结合定理 3.4 和定理 4.1 的结果，得到它们的 S-数。将这些 S-数与表3中总结的 X-数进行比较，可知对于所有 $S \in \{L, O, F\}$，$\gamma^{\mathrm{S}}(\bar{H}_k)$ 等于 $\gamma^{\mathrm{SD}}(\bar{H}_k)$ 和 $\gamma^{\mathrm{STD}}(\bar{H}_k)$；$\gamma^{\mathrm{I}}(\bar{H}_k)$ 与 $\gamma^{\mathrm{ID}}(\bar{H}_k)$ 只相差 1，而 $\gamma^{\mathrm{I}}(\bar{H}_k)$ 与 $\gamma^{\mathrm{ITD}}(\bar{H}_k)$ 相差 2。

S	L	I	O	F
$\gamma^{\mathrm{S}}(\bar{H}_k)$	$k-1$	$k-1$	$k+1$	$2k-2$
$\gamma^{\mathrm{SD}}(\bar{H}_k)$	$k-1$ 作者：[11]	k 作者：[15]	$k+1$ 作者：[5]	$2k-2$ 作者：[16]
γ^{STD} ($\bar{H}_k$)	$k-1$ 作者：[11]	$k+1$ 由 [16]	$k+1$ 由 [11]	$2k-2$ 由 [16]

表3：粗壮无头蜘蛛图的 S 数和 X数 $\bar{H}_k$ 对于 $k \geq 4$ 以及所有 $S \in \{L,\ O,\ I,\ F\}$。

5. 结论

本文研究了四种分离性质：定位、闭分离、开分离和完全分离。我们证明，在图中寻找最小分离集是NP困难的，也就是说，这与相关的（全）支配集或X码问题一样困难。随后，我们重点研究了所考察的分离性质与支配性质之间的相互作用，揭示了分离几乎就是支配，这是由于

$$\gamma^{\mathrm{S}}(G) \leq \gamma^{\mathrm{SD}}(G) \leq \gamma^{\mathrm{S}}(G) + 1 \ \forall S \in \{L, O, I, F\}$$

以及所有 SD 可容许图 G。此外，我们证明了

$$\gamma^{\mathrm{S}}(G) \leq \gamma^{\mathrm{SD}}(G) \leq \gamma^{\mathrm{STD}}(G) \leq \gamma^{\mathrm{S}}(G) + 1 \text{ for } S \in \{O, F\}$$

这也重新证明了 $S \in \{O,\ F\}$ 中 SD 数和 STD 数的相应关系，该关系在 [5, 7] 中建立，而

$$\gamma^{\mathrm{S}}(G) \leq \gamma^{\mathrm{STD}}(G) \leq 2\gamma^{\mathrm{S}}(G) \text{ for } S \in \{L, I\}$$

这表明，两个 S-数与相应的 STD 数可能存在显著差异。关于 $S = I$ 的后一个结果重新证明了 [13] 中确立的 ID 数与 ITD 数之间的关系。

此外，对分离与取补之间相互作用的研究揭示：图中的定位与完全分离和其补图中的定位与完全分离相同；而图中的闭分离对应于其补图中的开分离，这也对图及其补图的 X-数产生了相应的推论。

我们未来的研究方向包括为所有已确立的界和关系提供紧确例子，并研究如下问题的复杂性：对于给定的图，判断相差至多 1 的 S 数和 X 数是否实际上相等。鉴于 $S \in \{O,\ F\}$ 的 $\gamma^{\mathrm{SD}}(G)$ 是否等于 $\gamma^{\mathrm{STD}}(G)$ 已被证明是 NP 困难问题 [5, 7]，我们猜想，给定一个 SD 可容许图 G，判断对于所有 $S \in \{L,\ O,\ I,\ F\}$，$\gamma^{\mathrm{S}}(G)$ 是否等于 $\gamma^{\mathrm{SD}}(G)$ 也是 NP困难问题。

参考文献

[1] P. J. Slater，图中的支配集与参照集，《数学与物理科学杂志》22 (4) (1988) 445–455。[2] T. W. Haynes，M. A. Henning，J. Howard，树中的定位支配集与全支配集，《离散应用数学》154 (8) (2006) 1293–1300。[3] I. S. Honkala，T. Laihonen，S. M. Ranto，论强识别码，《离散数学》254 (2002) 191–205。[4] S. J. Seo，P. J. Slater，开邻域定位支配集，《澳大拉西亚组合学杂志》46 (2010) 109–120。[5] D. Chakraborty，A. K. Wagler，图中的开分离支配码，载于：A. Basu，A. R. Mahjoub，J. J. Salazar González（编），《组合优化》，Springer Nature Switzerland，Cham，2024，第137–151页。[6] M. G. Karpovsky，K. Chakrabarty，L. B. Levitin，论一类用于识别图中顶点的新码，《IEEE信息论汇刊》44 (2) (1998) 599–611。[7] D. Chakraborty，A. K. Wagler，图中的完全分离集，载于：D. Gaur，R. Mathew（编），《算法与离散应用数学》，Springer Nature Switzerland，Cham，2025，第73–84页。[8] D. Jean，A. Lobstein，图中的监视系统、识别码、定位支配集与区分码：一份参考文献目录，发表于 https://dragazo.github.io/bibdom/main.pdf（2022）。[9] I. Charon，O. Hudry，A. Lobstein，求图中识别码或定位支配码的最小规模是NP困难，《理论计算机科学》290 (3) (2003) 2109–2120。[10] C. Colburn，P. Slater，L. Stewart，串并联网络中的定位支配集，Congressus Numerantium 56 (1987) 135–162。[11]G. R. Argiroffo，S. M. Bianchi，Y. Lucarini，A. K. Wagler，与图中的定位支配集、开邻域定位支配集和定位全支配集相关的多面体，《离散应用数学》322 (2022) 465–480。[12] G. R. Argiroffo，S. M. Bianchi，Y. Lucarini，A. K. Wagler，与识别码相关的多面体，《离散应用数学》245 (2018) 16–27。

[13] F. Foucaud, T. Lehtilä, 《全称支配识别码的界与极值图》, 《组合学电子期刊》30 (3)（2023 年 7 月）。[14] M. R. Garey, D. S. Johnson, 《计算机与难解问题：NP 完全性理论指南》, W. H. Freeman, 1979 年。[15] G. R. Argiroffo, S. M. Bianchi, A. K. Wagler, 《若干类分裂图的识别码多面体描述进展》, 《离散优化》22（2016）225–240。[16] D. Chakraborty, A. K. Wagler, 《图中的完全分离集》（2024）。arXiv:2407.10595。URL https://arxiv.org/abs/2407.10595

附录

在附录中，我们给出因篇幅限制而省略的结果的证明。

第2节中省略的证明

我们使用图 4 中提到的相同顶点名称。对于一个 I-小工具（其顶点在图 4a 中命名为b_j），图 $H_I(T)$（其中 $T \in \mathcal{T}$）或图 $H_I(U)$ 的顶点分别记为 $b_j(T)$ 或 $b_j(U)$。此外，为方便记号，对于每个 $T \in \mathcal{T}$，令 $V_U = V(H_I(U))$，并令 $V_T = V(H_I(T))$。

引理2.1的证明。设 A 是 G_I 的一个 I-集。对于每个 $T \in$T，为使对 $b_1(T)$ $b_2(T)$ 和 $b_5(T)$ $b_6(T)$ 分别成立 I- 分离，必须有 $b_3(T)$ $b_4(T)$ $\in A$。由同样的论证，还可得 $b_3(U)$ $b_4(U)$ $\in A$。此外，在归约 1 引入的全部 (|T | + 1) 个 I-小工具 (H_I, B_I) 中，至多有一个此类小工具的支撑顶点及其相邻叶顶点不属于 A；否则，A 中至少会有两个具有空闭邻域的叶顶点，这与 A 是 G_I 的 I-集这一事实矛盾。因此，除至多一个 H_I 外，A 至少包含归约 1 引入的全部 (|T | + 1) 个 H_I 中的 4 个顶点；对于该 H_I，A 包含 3 个顶点。这证明了该结果。

□

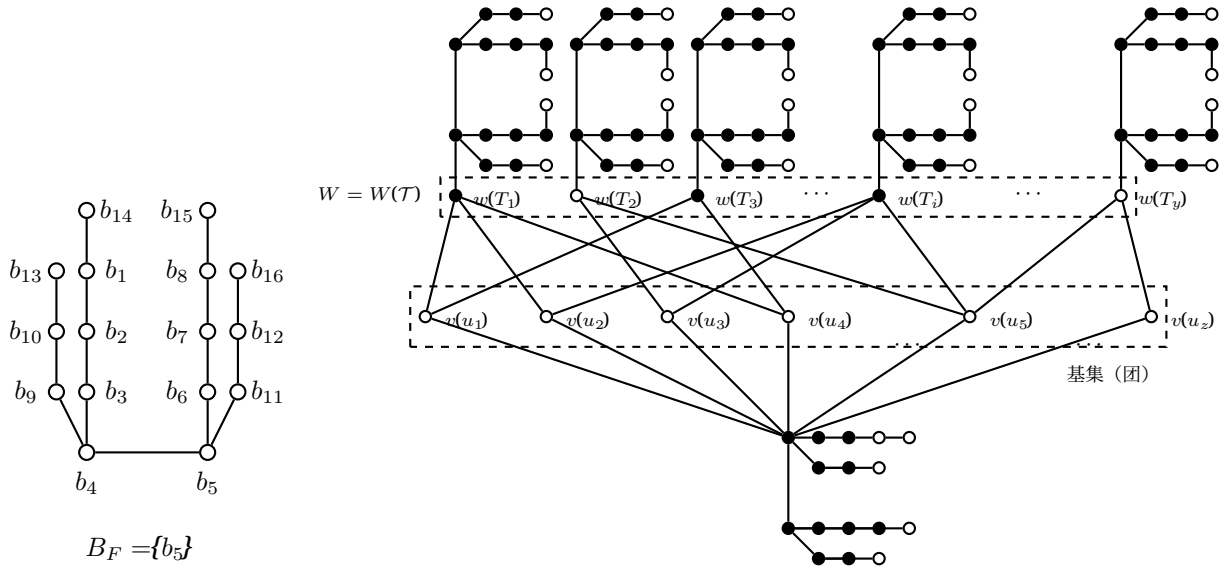
定理 *2.2* 的证明。 该问题显然属于 NP 类。因此，为了证明这一结果，我们说明最小 I-集也是 NP困难的。我们通过证明以下结论来做到这一点：当且仅当归约 1 中构造的输入 (G_I, k) 是最小 I-集的一个是实例时，测试覆盖的输入 $(U, \mathcal{T})$ 才是测试覆盖的一个是实例。

($\Longrightarrow$)：设 $(U,$ T) 是测试覆盖的一个是实例。换言之，存在一个由 U 构成的测试集合 T′，使得 |T′ | $\leq \ell$。接下来，我们按如下方式构造集合 $A \subset V(G_I)$。对于每个 $T \in$T′，令 $w(T) \in A$。此外，对于所有 $T \in$T，令 $b_2(T)$ $b_3(T)$ $b_4(T)$ $b_5(T)$ $\in A$，并令 $b_3(U)$ $b_4(U)$ $b_5(U)$ $\in A$。这意味着 $|A| = \ell + 4|$T |$+3$。由于 T′ 是由 U 构成的测试集合，根据 G_I的构造，集合 $A \cap W$能 I-分离 Q中的每一对顶点。此外，可以验证，G_I 中的每个顶点在 A 中都有唯一的闭邻域（只有 $b_1(U)$ 在 A中具有空闭邻域）。因此，A 是 G_I 的一个 I-集，从而证明了结果的必要部分。

($\Longleftarrow$)：令 (G_I, k) 为 Min I-Set 的一个是实例。换言之，存在一个 G_I 的 I-集 A，使得 $|A| \leq k = \ell + 4|\mathcal{T}| + 3$。现在，根据引理 2.1，必有 $|A \cap W| \leq \ell$。接着，我们通过在 $w(T) \in A$ 时令 $T \in \mathcal{T}\prime$，从 $\mathcal{T}$ 中构造一个子集族 $\mathcal{T}\prime$。于是有 $|\mathcal{T}\prime| \leq \ell$。由于 $G_S[Q \cup \{b_4(U)\}]$ 是完全图，顶点 Q 的邻域只能在 W 中有所不同。因此，Q 中的顶点对由集合 $A \cap W$ I-分离。由此，根据 G_I 的构造，集合 $\mathcal{T}\prime$ 是 U 的测试集合。这就证明了该结果的充分性部分，从而证明了定理。 □

为证明定理 2.3，接下来我们将归约 1 调整到分离性质为 $S \in \{O, F, L\}$ 的情形。不过，对于情形 $S = O$，利用以下推论可以更容易地得到结果。由于引理 5.7 表明，对任意图 G，都有 $\mathcal{H}_I(G) = \mathcal{H}_O(G)$，因此，图 G 的任意 I-集都是 G 的 O-集，反之亦然。故确定 G 的最小 O-集等价于确定 G 的最小 I-集。因此，Min I-Set 的 NP-完全性立即推出：

推论 5.1。最小 *O*-集是 *NP*完全的。



(a) F-构件（H_F，$\{b_5\}$）。 （b）最小 F-集的实例。

图 7：归约 1 构造的图 G_F的示意图。其中 $U = \{u_1, u_2, \ldots u_z\}$ 以及 $\mathcal{T} = \{T_1, T_2, .., T_y\}$。图 4b 中黑色顶点的集合是 G_F的一个 F-集示例。

完全分离集

接下来，我们针对 $S = F$ 的情形调整归约 1。在这种情况下，在归约 1 的步骤（1）中，归约将 $r = r(F) = 1$，因此对于每个 $u \in U$，有 $V(F, u) = \{v(u)\}$。此外，它还设置了 $R = R(F) = \emptyset$。因此，基集 $Q = Q(F) = M(F) = \cup_{u \in U} V(F, u)$ 的阶为 $|U|$，归约在 Q 的所有顶点对之间引入边，从而使 $G_S[Q]$ 成为完全图。归约 1 的步骤（3）中的 F-构件为 (H_F, B_F)，其中 H_F 同构于图 4a 中的图，而 $B_F = \{b_5\}$。最后，归约在归约 1 的步骤（4）中设置 $p = p(F) = 12$ 和 $q = q(F) = 11$，即设置 $k = \ell + 12|\mathcal{T}| + 11$。

我们使用图 7 中提到的相同顶点名称。对于一个 F-构件（其顶点在图 7a 中命名为b_j），图 $H_F(T)$ 中的顶点（其中 $T \in \mathcal{T}$）或图 $H_F(U)$ 中的顶点分别记作 $b_j(T)$ 或 $b_j(U)$。此外，为方便记号，令 $V_U = V(H_F(U))$，并令 $V_T = V(H_F(T))$，其中每个 $T \in \mathcal{T}$。接下来，我们可以证明如下结论。

引理 5.2。设 A 是 G_F的一个 *F*-集。那么有 $\left|A \cap \left(V_U \cup \bigcup_{T \in \mathcal{T}} V_T\right)\right| \geq 12|\mathcal{T}| + 11$。

证明。设 A 是 G_F 的一个 F-集。对于每个 $T \in \mathcal{T}$，为使对 $b_1(T)$ $b_{14}(T)$ 和 $b_8(T)$ $b_{15}(T)$ 分别成立 I-分离（从而成立 F-分离），必须有 $b_2(T)$ $b_7(T) \in A$。此外，对于每个 $T \in \mathcal{T}$，为使对 $b_2(T)$ $b_{14}(T)$ 和 $b_7(T)$ $b_{15}(T)$ 分别成立 O-分离（从而成立 F-分离），必须有 $b_3(T)$ $b_6(T) \in A$。另外，对于每个 $T \in \mathcal{T}$，为使对 $b_{10}(T)$ $b_{13}(T)$ 和 $b_{12}(T)$ $b_{16}(T)$ 分别成立 I- 分离（从而成立 F- 分离），必须有 $b_9(T)$ $b_{11}(T) \in A$。同样，在归约 1 所引入的全部 $(|\mathcal{T}| + 1)$ 个 F-构件 (H_F, B_F) 中，至多有一个此类 H_F 的支撑顶点及其相邻叶顶点不属于 A（否则，A 中至少会有两个闭邻域为空的叶顶点，这与 A 是 G_F 的一个 F-集相矛盾）。因此，除了可能有一个 H_F（其对应的 A 包含 11 个顶点）之外，A 至少包含归约 1 所引入的全部 $(|\mathcal{T}| + 1)$ 个 H_F 中每个构件的 12 个顶点。这就证明了该结果。 □

定理 5.3。最小 *F*-集是 *NP*完全问题。

证明。 该问题显然属于 NP 类。因此，为了证明这一结论，我们将证明最小 F-集也是 NP困难的。我们通过证明以下命题来实现这一点：测试覆盖的输入 $(U, \mathcal{T})$ 是测试覆盖的一个是实例，当且仅当归约 1 中构造的输入 (G_F, k) 是最小 F-集的一个是实例。

($\Longrightarrow$): 设 (U, T) 是测试覆盖的一个是实例。换言之，存在一个由U构成的测试集合 T'，使得 $|\mathrm{T}'| \leq \ell$。接下来，我们按如下方式构造集合 $A \subset V(G_F)$。对于每个 $T \in \mathrm{T}'$，令 $w(T) \in A$。此外，对于所有 $T \in \mathrm{T}$，令 $b_i(T) \in A$，其中 $i \in \{1, 2, \ldots, 12\}$。类似地，对于所有 $i \in \{1, 2, \ldots, 12\} \setminus \{8\}$，令 $b_i(U) \in A$。这意味着 $|A| = \ell + 12|\mathrm{T}| + 11$。由于 T' 是 U的测试集合，根据 G_F的构造，集合 $A \cap W$ F-分离 Q中的每一对顶点。此外，可以验证， G_F中的顶点在 A 中具有两两不同的开邻域和两两不同的闭邻域（注意，只有 $b_{15}(U)$ 的邻域为空）。因此， A 是 G_F 的一个 F-分离集，从而证明了该结论的必要部分。

($\Longleftarrow$): 设 (G_F, k) 是 Min F-Set 的一个是实例。换言之，存在一个由 G 构成的 F-集 A，使得 $|A| \leq k = \ell + 12|\mathcal{T}| + 11$。现在，利用引理 5.2，我们必有 $|A \cap W| \leq \ell$。接下来，我们通过令 $T \in \mathcal{T}'$ 当且仅当 $w(T) \in A$，从 $\mathcal{T}$ 中构造子集族 $\mathcal{T}'$。于是， $|\mathcal{T}'| \leq \ell$。由于 $G_F[Q \cup \{b_5(U)\}]$ 是一个完全图，顶点 Q 的邻域只能因其在 W 中的邻域而有所不同。因此， Q 中的顶点对由集合 $A \cap W$ F- 分离。于是，根据 G_F 的构造，集合 $\mathcal{T}'$ 是 U 的测试集合。这证明了该结果的充分性部分，从而证明了定理。 □

定位集

接下来，我们将归约 1 适配到情形 $S = L$。在此情形下，在归约 1 的步骤（1）中，该归约令 $r = r(L) = \ell + 1$，因此对每个 $u \in U$，设 $V(L, u) = \{v^1(u)\ v^2(u) \ldots, v^{\ell+1}(u)\}$。设 $M = M(L) = \cup_{u \in U} V(S, u)$。此外，它令 $R = R(L) = \{r_1^i, r_2^i, r_3^i, r_4^i \colon 1 \leq i \leq \ell + 1\}$。因此，基集 $Q = M \cup R$的阶为 $(\ell + 1)(|U| + 4)$，并且该归约引入边，使得集合 M是一个独立集，且每一对 r_1^i、 r_2^i与 r_3^i、 r_4^i都是闭孪生点，各自具有邻域 $\{v^i(u) \colon u \in U\}$。归约 1 的步骤（3）中的 L-构件为 (H_L, B_L)，其中 H_L 同构于图 8a 所示的图，且 $B_L = \{b_1, b_2\}$，如图所示。最后，该归约在归约 1 的步骤（4）中令 $p = p(L) = 2$ 以及 $q = q(L) = 2\ell + 3$，也就是令 $k = 3\ell + 2|\mathrm{T}| + 3$。

我们采用图 8 中提到的相同顶点名称。对于一个 L-构件（其顶点在图 8a 中命名为b_j），对于某个 $T \in \mathcal{T}$，图 $H_L(T)$ 中的顶点，或图 $H_L(U)$ 中的顶点，分别记为 $b_j(T)$ 或 $b_j(U)$。此外，为了记号方便，对每个 $T \in \mathcal{T}$，令 $V_U = V(H_L(U))$，并令 $V_T = V(H_L(T))$。接下来，我们可以证明如下结论。

引理 5.4. 设 A 是 G_L的一个 L-集。那么有 $\left|A \cap \left(R \cup V_U \cup \bigcup_{T \in \mathcal{T}} V_T\right)\right| \geq 2|\mathcal{T}| + 2\ell + 3$。

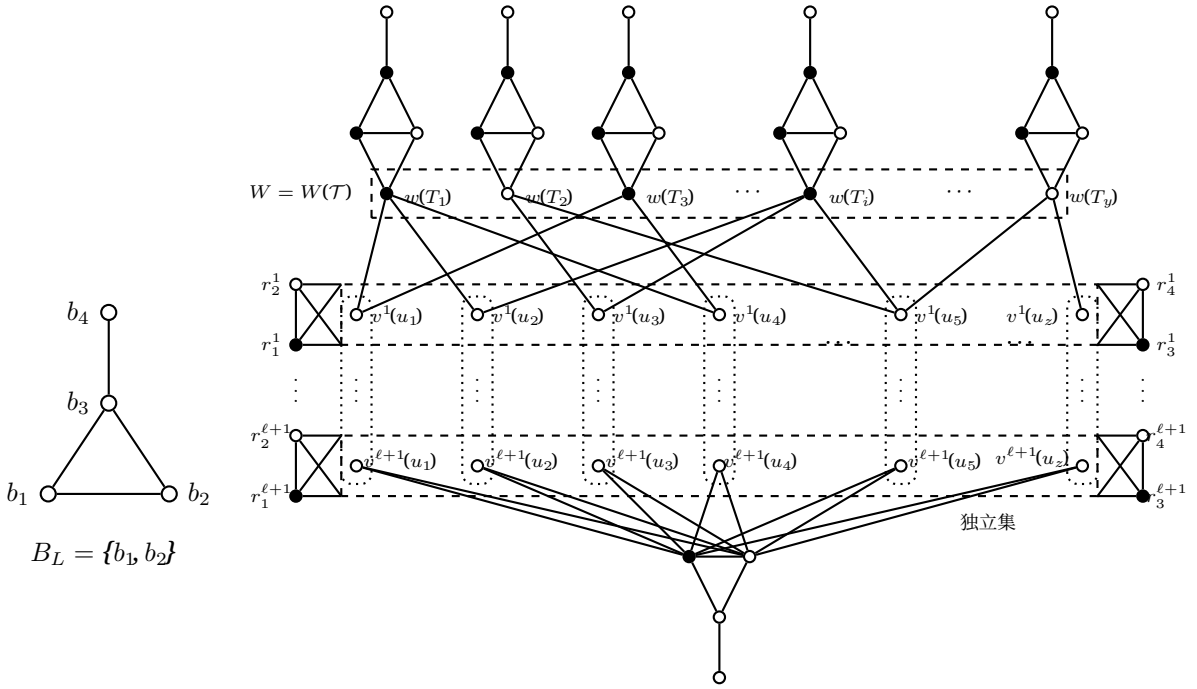
证明。设 A 是 G_L的一个 L-集。对每个 $T \in \mathrm{T}$，由于 $b_1(T)\ b_2(T)$这一对在 G_L中是闭孪生点，因此必有 $b_1(T) \in A$或 $b_2(T) \in A$。此外，在归约 1 引入的所有（$|\mathrm{T}| + 1$）个 L-构件（H_L, B_L）中，至多有一个此类 L-构件的支撑顶点不属于 A （否则， A中至少会有两个空邻域的叶顶点，这与A 是 G_L的 L-集这一事实矛盾）。因此，除至多一个 H_L 外，对于归约 1 引入的所有（$|\mathrm{T}| + 1$）个 H_L， A 至少包含其中的 2 个顶点；对于这个 H_L， A 包含 1 个顶点。最后，由于对所有 $i \in \{1, 2, \ldots, \ell + 1\}$， r_1^i, r_2^i 和r_3^i, r_4^i这两对在 G_L中是孪点，因此 $|\{r_1^i, r_2^i\} \cap A| \geq 1$且 $|\{r_3^i, r_4^i\} \cap A| \geq 1$。结论得证。

□

定理 5.5. 最小 L-集是 NP完全的。

证明。 该问题显然属于 NP 类。因此，为了证明这一结果，我们将证明最小 L-集也是 NP困难的。具体而言，我们证明：对于测试覆盖问题的一个输入 $(U,\ \mathcal{T})$，它是测试覆盖的一个是实例，当且仅当归约 1 中构造的输入 $(G_L,\ k)$ 是最小 L-集的一个是实例。

（ $\Longrightarrow$ ）：令（U, T）为测试覆盖的一个是实例。换言之，存在一个由 U 组成的测试集合 T'，使得 $|\mathrm{T}'| \leq \ell$。接着，我们如下构造集合 $A \subset V(G_L)$。对于每个 $T \in \mathrm{T}'$，令 $w(T) \in A$。此外，令 $b_1(U) \in A$，令 $r_1^i, r_3^i \in A$对所有 $i \in \{1, 2, \ldots, \ell + 1\}$成立，并令 $b_1(T)\ b_3(T) \in A$对所有 $T \in \mathrm{T}$成立。这意味着 $|A| = 3\ell + 2|\mathrm{T}| + 3$。由于 T' 是 U的一个测试集合，根据 G_L的构造，集合 $A \cap W$L-分离每一对形如 $v^i(u)\ v^i(u')$的顶点，其中 $i \in \{1, 2, \ldots, \ell + 1\}$且 $u, u' \in U$满足$u \neq u'$。另一方面，形如 $v^i(u)\ v^j(u')$且满足 $i \neq j$的顶点对由集合$\{r_1^i, r_3^j\} \subset A$进行 L-分离。此外，可以验证 $V(G_L) \setminus A$中的每个顶点在 A中都有唯一的开邻域（注意，



(a) L-构件 $(H_L, \{b_1, b2\})$。 (b) 最小 L-集的实例。

图 8: 归约 1 构造的图 G_L。这里 $U = \{u_1, u_2, \ldots u_z\}$ 和 $\mathcal{T} = \{T_1, T_2, \ldots\ldots, T_y\}$。由点状竖直矩形框出的顶点 $v^1(u_i)\ldots\ldots$, $v^{\ell+1}(u_i)$ 在 $V(G_L) \setminus R$ 中具有相同的邻域，不过为使图示更清晰，省略了部分边。图 4b 中的黑色顶点集是 G_L 的一个 L-集。

只有 $b_4(U)$在 A中具有空邻域）。这使得 A 成为 G_L 的一个 L-分离集，从而证明了该结果的必要性部分。

($\Leftarrow=$): 设 (G_L, k) 是最小 L-集的一个是实例。换言之，存在一个 G 的 L-集 A，使得 $|A| \leq k = 3\ell + 2|\mathcal{T}| + 3$。此外，我们假设 A 是 G_L 的一个最小 L-集。现在，根据引理 5.4，必有 $|A \cap (W \cup M)| \leq \ell$（回想一下，$M = M(L) = \cup_{u \in U} V(L, u)$）。现在我们声称 $A \cap M = \emptyset$。反之，假设对某个 $i \in \{1, 2, \ldots, \ell + 1\}$ 以及某个$u \in U$，有 $v^i(u) \in A$。注意，$v^i(u)$ 可能只能将自身与另一个顶点 $v^i(u')$ 唯一地进行 L-分离，其中某个 $u' \in U$ 满足 $u \neq u'$。若如此，$A \cap W$ 中没有顶点能 L-分离 $v^i(u)$ 与 $v^i(u')$。这意味着，对于所有 $i \in \{1, 2, \ldots, \ell + 1\}$，$A \cap W$ 中没有顶点能 L- 分离各对 $v^i(u)$ $v^i(u')$（因为顶点 $v^1(u)$ $v^2(u) \ldots, v^{\ell+1}(u)$ 在 G_L 中两两为孪生顶点）。现在，由于 $v^i(u)$ 和 $v^i(u')$ 在 $V(G_L) \setminus (A \cap W)$ 中具有相同的邻域，因此对所有 $i \in \{1, 2, \ldots, \ell + 1\}$，必有 $|A \cap \{v^i(u)\ v^i(u')\}| \geq 1$。然而，根据引理 5.4，这意味着$|A| \geq 3\ell + 2|\mathcal{T}| + 4$，这与我们的假设 $|A| \leq k = 3\ell + 2|\mathcal{T}| + 3$ 矛盾。因此，断言 $A \cap M = \emptyset$ 成立。

因此，我们有 $A \cap (W \cup M) = A \cap W$，所以 $|A \cap W| \leq \ell$。现在，我们通过令 $T \in \mathcal{T}'$ 当且仅当 $w(T) \in A$，从 $\mathcal{T}$中构造一个子集族 $\mathcal{T}'$。于是，我们也有 $|\mathcal{T}'| \leq \ell$。由于对于任意 $u, u' \in U$，任意两个顶点 $v^1(u)$ 和 $v^1(u')$ 都被 W中的某个顶点 L-分离，根据 G_L的构造，子集族 $\mathcal{T}'$是 U的一个测试集合。这证明了该结果的充分性部分，从而证明了该定理。

□

证明 定理 *2.3* 的证明可由定理 2.2、推论 5.1 以及定理 5.3 和 5 .5. □

第3节中省略的证明

本节中，我们根据图的 S 数建立了其 X数的上界。我们从定理 3.1 的证明开始，该定理指出，对于任意 $S \in \{L, O, I, F\}$ 以及一个 S-可容许图 G，我们

有 $\gamma^{\mathrm{SD}}(G) \leq \gamma^{\mathrm{S}}(G)+1$。

定理 *3.1* 的证明。 考虑 S-可容许图 $G=(V,\ E)$ 的一个（最小）S-集 $C \subseteq V$。根据支配集的定义， C 中的所有顶点都被支配。在 $V \setminus C$ 中，至多有一个顶点 v_0 满足$N[v_0] \cap C = \emptyset$:

- 对于 $S \in \{I,\ F\}$，因为 $N[v] \cap C$ 是所有 $v \in V$ 的唯一集合，因为 C 是闭分离的;
- 对于 $S \in \{L,\ O\}$，因为对所有 $v \notin C$， $N[v] \cap C = N(v) \cap C$ 都成立；而对所有$v \in V \setminus C$， $N(v) \cap C$ 分别是唯一集合（如果 C 是 L-集），以及对所有 $v \in V$（如果 C 是 O-集）。

在所有情况下， $C \cup \{v_0\}$ 或者（如果不存在这样的顶点 v_0） C 都是 G 的一个支配集（且仍是一个 S-集），因此也是 G 的一个 SD-码，断言得证。 □

接下来，我们想知道图的 S 数与其 STD 数是否也满足相同的关系。定理 3.2 对 $S \in \{O, F\}$ 的情形给出了肯定的回答。

定理 *3.2* 的证明。 设 $C \subseteq V$ 是 STD-可容许图 $G=(V,E)$ 和 $S \in \{O, F\}$ 的一个（最小）S-集。由于 C 是开分离的，因此至多存在一个顶点 v_0 满足 $N(v_0) \cap C = \emptyset$。由于 G 是 TD-可容许的，因此没有孤立顶点； v_0（若存在）在 $V \setminus C$ 中有一个邻点，记为 u_0。由此可知， $C \cup \{u_0\}$ 或 C（若不存在满足 $N(v_0) \cap C = \emptyset$ 的顶点 v_0）是 G 的全支配集（且仍是 S-集），因此也是 G 的 STD-码，于是结论 $\gamma^{\mathrm{STD}}(G) \leq \gamma^{\mathrm{S}}(G)+1$ 得证。□

另一方面，定理 3.3 表明，对于 $S \in \{L,\ I\}$ 以及 S-可容许图 G，有$\gamma^{\mathrm{STD}}(G) \leq 2\gamma^{\mathrm{S}}(G)$。这是基于以下推理:

定理 *3.3* 的证明。 考虑 STD-可容许图 $G=(V,\ E)$ 的一个（最小）S-集 $C \subseteq V$，以及$S \in \{L,\ I\}$。在 $V \setminus C$ 中，至多有一个顶点 v_0 满足 $N(v_0) \cap C = \emptyset$:

- 对于 $S = L$，因为 $N(v) \cap C$ 对所有 $v \in V \setminus C$ 都是唯一的集合，因为 C 是定位的;
- 对于 $S = I$，因为 $N[v] \cap C = N(v) \cap C$ 对所有 $v \notin C$ 都成立，并且对于所有 $v \in V$， $N[v] \cap C$ 都是唯一的集合。

由于 G 是 TD-可容许的，因此没有孤立顶点，故 v_0 在 $V \setminus C$ 中至少有一个邻点（如果它存在），记为u_0。此外，对于每个满足 $N(v) \cap C = \emptyset$ 的 $v \in C$，在 $V \setminus C$ 中至少存在一个邻点，记为 u_v（同样，因为 G 没有孤立顶点）。定义

$$U = \{u_v \in V \setminus C : u_v \text{ is neighbor of } v \in C \text{ with } N(v) \cap C = \emptyset\},$$

我们看到， $C \cup U \cup \{u_0\}$ 是 G的一个 TD-集。接下来证明，存在一个基数为 $|C^t| \leq 2|C|$的 TD-集 $C^t \subseteq (C \cup U \cup \{u_0\})$。显然，当

- 存在一个 $v \in C$，使得 $N(v) \cap C \neq \emptyset$；或者存在 $v, v\prime \in C$，它们在 $V \setminus C$中有一个共同邻点（此时我们可以选择 U，使得 $|U| < |C|$）；
- 不存在顶点 $v_0 \in V \setminus C$，使得 $N(v_0) \cap C = \emptyset$（此时不需要添加 u_0）。

因此，假设

- 对所有 $v \in C$，都有 $N(v) \cap C = \emptyset$，
- U 对每个 $v \in C$恰好包含一个邻点 u_v，
- 不存在顶点 $u \in V \setminus C$ 在 C 中拥有两个或更多邻点，且
- 存在一个顶点 $v_0 \in V \setminus C$，使得 $N(v_0) \cap C = \emptyset$。

回忆一下， u_0 是 v_0 的邻点（因为 v_0 不是孤立顶点）。我们有 $u_0 \in V \setminus C$，而 u_0 不可能位于U之外：事实上， u_0需要在 C中有一个邻点（因为 v_0是唯一一个具有 $N(v_0) \cap C = \emptyset$的顶点），但在 C 中不能有两个或更多邻点（根据假设）。因此， u_0 在 C中恰好有一个邻点，记作 v'。这意味着 $u_0 = u_{v'}$（否则 u_0 和 $u_{v'}$ 就不会被 C分开）。最后， $u_0 \in U$ 意味着在这种情况下， $C \cup U$ 就是所研究的 G 的TD-集。因此，在所有情况下，都存在一个基数为$\leq 2|C|$的TD-集（同时也是S-集）。 □

对于 X ∈码，X问题已从统一的视角加以研究，即将其重新表述为在适当构造的超图中的覆盖问题，例如参见 [12, 11, 15, 5, 7]。给定一个图 $G=(V,E)$和一个X问题，我们寻找一个超图$\mathrm{H}_X(G)=(V,\mathrm{F}_X)$，使得 $C\subseteq V$是 G 的X码，当且仅当 C 是$\mathrm{H}_X(G)$的一个覆盖，也就是说， C 是满足对所有$F\in\mathrm{F}_X$均有 $C\cap F\neq\emptyset$ 的子集 $C\subseteq V$。然后，覆盖数 $\tau(\mathrm{H}_X(G))$（定义为$\mathrm{H}_X(G)$的覆盖的最小基数）按构造等于X数 $\gamma^{\mathrm{X}}(G)$。超图 $\mathrm{H}_X(G)$称为 G的X超图。

显然，要对支配（分别地，全支配）进行编码，$\mathcal{F}_X$ 必须包含 G中所有顶点的闭邻域（分别地，开邻域）。为了编码分离性质，也就是说，X码与每个顶点邻域的交集是唯一的这一事实， [12, 11] 中建议使用邻域的对称差。在此，给定两个集合 A和 B，其对称差 定义为 $A\triangle B=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$。事实上，[12, 11, 7] 已证明，图 $G=(V,E)$的一个子集 $C\subseteq V$是

- 定位集，当且仅当对所有 $uv\in E$，$(N(u)\triangle N(v))\cap C\neq\emptyset$，且对所有 $uv\notin E$，$(N[u]\triangle N[v])\cap C\neq\emptyset$，其中 $u,v\in V$互不相同，
- 当且仅当（$N[u]\triangle N[v]$）$\cap C\neq\emptyset$对所有互不相同的 $u,v\in V$均成立时，称为闭分离，
- 当且仅当（$N(u)\triangle N(v)$）$\cap C\neq\emptyset$对所有互不相同的 $u,v\in V$均成立时，称为开分离，
- 当且仅当（$N[u]\triangle N[v]$）$\cap C\neq\emptyset$ 对所有 $uv\in E$ 均成立，且（$N(u)\triangle N(v)$）$\cap C\neq\emptyset$ 对所有$uv\notin E$均成立时，称为完全分离，其中 $u,v\in V$互不相同。

类似地，对于所有 $S\in\{L,O,I,F\}$，我们引入分离超图 $\mathcal{H}_S(G)=(V,\mathcal{F}_S)$，使得$C\subseteq V$是 G 的一个 S-集，当且仅当 C 是$\mathcal{H}_S(G)$的一个覆盖。根据定义， $\tau(\mathcal{H}_S(G))$显然等于 S 数 $\gamma^{\mathrm{S}}(G)$。根据先前关于对所有$X\in$码编码分离性质的研究，我们立即得出结论：$\mathcal{H}_S(G)$的超边集$\mathcal{F}_S$ 恰好由表4所示的2个不同子集构成，其中

- $\triangle_a[G]$ （分别）表示 G中所有相邻顶点对的闭（分别为开）邻域的对称差集合，$\triangle_a(G)$

- $\triangle_n[G]$（分别）表示 G中所有不相邻顶点对的闭（分别为开）邻域的对称差集合。$\triangle_n(G)$

S	L	O	I	F
$\mathcal{F}_S$	$\triangle_a(G)$ $\triangle_n[G]$	$\triangle_a(G)$ $\triangle_n(G)$	$\triangle_a[G]$ $\triangle_n[G]$	$\triangle_a[G]$ $\triangle_n(G)$

表4：Th e S-问题的 S-超图 $\mathcal{H}_S(G)=(V,\mathcal{F}_S)$，按列列出超边所需的 2 个子集 es

考虑由同一顶点集 V 上的所有超图 $\mathrm{H}=(V,\mathrm{F})$ 构成的集合 $\mathrm{H}^*(V)$。我们在 $\mathrm{H}^*(V)\times\mathrm{H}^*(V)$ 上定义关系$\prec$：若对于 H' 的每条超边 F'，H 中都存在一条超边 F使得 $F\subseteq F'$，则 $\mathrm{H}\prec\mathrm{H}'$。文献 [7], 证明，若 H、$\mathrm{H}'\in\mathrm{H}^*(V)$ 且 $\mathrm{H}\prec\mathrm{H}'$，则 H 的任意覆盖也是 H' 的覆盖。特别地，我们有 $\tau(\mathrm{H}')\leq\tau(\mathrm{H})$。结合该结果与所有 $X\in$码的 X码超图表示，文献 [7] 得到了图2所示的 X数的一般关系。由此可立即推出 S 数的关系：

Le引理 5.6. 对于任意相应的可容许图 G，我们有 $\gamma^{\mathrm{L}}(G)\leq\gamma^{\mathrm{O}}(G)\ \gamma^{\mathrm{I}}(G)\leq\gamma^{\mathrm{F}}(G$).

此外，例如在 [12, 11, 15, 5, 7] 中，人们注意到 $\mathrm{H}_X(G)=(V,\mathrm{F}_X)$ 可能包含冗余超边。事实上，若有两条超边 $F,F'\in\mathrm{F}_X$，且满足 $F\subseteq F'$，那么 $F\cap C\neq\emptyset$ 也意味着 $F'\cap C\neq\emptyset$ 对每个 $C\subseteq V$ 都成立。因此， F' 是冗余的，因为 $(V,\mathrm{F}_X-\{F'\})$ 足以编码 G 的 X-码。因此，为确定 $\tau(\mathrm{H}_X(G))$，进而确定 $\gamma^{\mathrm{X}}(G)$，只需考虑 $\mathrm{H}_X(G)$ 中非冗余的超边。显然，这也适用于本文研究的 S-超图 $\mathrm{H}_S(G)=(V,\mathrm{F}_S)$。此外，我们将从 $\mathrm{H}_S(G)$ 中移除所有冗余超边后得到的超图 $\mathrm{C}_S(G)$ 称为 S-反链超图，并指出显然 $\tau(\mathrm{C}_S(G))=\gamma^{\mathrm{S}}(G)$ 成立。

下文将会看到，若干 S-反链超图与超图 $\mathcal{R}_n^q = (V,\mathcal{F})$ 有关，该超图称为阶为 n 的完全 q-玫瑰，其中 $V = \{1,\ldots,n\}$，且 $\mathcal{F}$ 包含 V 的所有 q 元子集，其中 $2 \le q < n$。根据例如 [12]，我们知道 $\tau(\mathcal{R}_n^q) = n - q + 1$。注意，对于 $q = 2$，$\mathcal{R}_n^q$ 实际上是团 K_n，并且 $\tau(K_n) = n - 1$。

现在我们可以通过以下方式证明定理 3.4，该定理给出了具有 $k \ge 4$ 的细无头蜘蛛 $H_k = (Q \cup S, E)$ 的 S-数

$$\gamma^{\mathrm{S}}(H_k) = \begin{cases} k-1 & \text{if } S \in \{L, O\} \\ k+1 & \text{if } S = I, \\ 2k-2 & \text{if } S = F. \end{cases}$$

定理 3.4 的证明。 考虑具有 $Q = \{q_1,\ldots,q_k\}$、$S = \{s_1,\ldots,s_k\}$ 和 $k \ge 4$ 的细无头蜘蛛 $H_k = (Q \cup S, E)$。为了计算 $S \in \{L, O, I, F\}$ 的 $\gamma^{\mathrm{S}}(H_k)$，我们构造相应的 S-超图。为了构造对称差，我们先指出闭邻域和开邻域如下：

- $N[q_i] = Q \cup \{s_i\}$ and $N(q_i) = Q \setminus \{q_i\} \cup \{s_i\}$ for all $q_i \in Q$,
- $N[s_i] = \{q_i, s_i\}$ and $N(s_i) = \{q_i\}$ for all $s_i \in S$.

这意味着 对于相邻顶点的闭邻域或开邻域的对称差， t

- $N[s_i] \triangle N[q_i] = Q \setminus \{q_i\}$ and $N(s_i) \triangle N(q_i) = Q \cup \{s_i\}$ for $1 \le i \le k$,
- $N[q_i] \triangle N[q_j] = \{s_i, s_j\}$ and $N(q_i) \triangle N(q_j) = \{s_i, s_j, q_i, q_j\}$ for $1 \le i < j \le k$,

and 对于不相邻顶点的闭邻域或开邻域的对称差， hat

- $N[s_i] \triangle N[q_j] = \{s_i, s_j\} \cup Q \setminus \{q_i\}$ and $N(s_i) \triangle N(q_j) = Q \setminus \{q_i, q_j\} \cup \{s_j\}$ for $i \ne j$,
- $N[s_i] \triangle N[s_j] = \{s_i, s_j, q_i, q_j\}$ and $N(s_i) \triangle N(s_j) = \{q_i, q_j\}$ for $1 \le i < j \le k$.

考虑冗余项后，我们得出以下结论。

- $\mathcal{C}_O(H_k)$仅由

  $$N(s_i) \triangle N(s_j) = \{q_i, q_j\} \text{ for } 1 \le i < j \le k,$$

  而$\mathcal{H}_O(H_k)$的所有其他超边都是冗余的。因此$\mathcal{C}_O(H_k)$等于由 Q 中的顶点诱导的$\mathcal{R}_k^2$（而 S 中没有顶点包含在任何超边中），从而 $\gamma^{\mathrm{O}}(H_k) = k - 1$成立。

- $\mathcal{C}_I(H_k)$由以下部分组成：

  $$N[s_i] \triangle N[q_i] = Q \setminus \{q_i\} \text{ for } 1 \le i \le k \text{ and}$$
  $$N[q_i] \triangle N[q_j] = \{s_i, s_j\} \text{ for } 1 \le i < j \le k,$$

  而$\mathcal{H}_I(H_k)$的所有其他超边都是冗余的。这表明$\mathcal{C}_I(H_k)$有两个连通分量：由 Q 中的顶点诱导的$\mathcal{R}_k^{k-1}$，以及由 S中的顶点诱导的$\mathcal{R}_k^2$。因此，我们得到$\gamma^{\mathrm{O}}(H_k) = \tau(\mathcal{R}_k^{k-1}) + \tau(\mathcal{R}_k^2) = 2 + k - 1 = k + 1$。

- $\mathcal{C}_F(H_k)$由以下部分组成：

  $$N(s_i) \triangle N(s_j) = \{q_i, q_j\} \text{ and } N[q_i] \triangle N[q_j] = \{s_i, s_j\}$$

  对于 $1 \le i < j \le k$，而$\mathcal{H}_F(H_k)$的所有其他超边都是冗余的。因此$\mathcal{C}_F(H_k)$有两个连通分量，均等于$\mathcal{R}_k^2$；其中一个由 Q中的顶点诱导，另一个由 S中的顶点诱导。因此，我们得到 $\gamma^{\mathrm{F}}(H_k) = 2\tau(\mathcal{R}_k^2) = 2(k-1) = 2k - 2$。

最后，由 $\gamma^{\mathrm{LD}}(G) \le \gamma^{\mathrm{L}}(G) + 1$ 和 $\gamma^{\mathrm{L}}(G) \le \gamma^{\mathrm{O}}(G)$ 对所有图 G，$\gamma^{\mathrm{LD}}(H_k) = k$ 由 [11] 和$\gamma^{\mathrm{O}}(H_k) = k - 1$ 可得，我们还可以得出 $\gamma^{\mathrm{L}}(H_k) = k - 1$。 □

第4节中省略的证明

本节讨论了关于 G 及其补图 $\bar{G}$ 的 S 数问题。我们首先证明如下结论：

引理 5.7。 对于任意图 G

- 我们有 $H_L(G) = H_L(\bar{G})$;
- 若没有闭孪生点，则 $H_I(G) = H_O(G)$ 成立;
- 若没有开孪生点，则有 $H_O(G) = H_I(\bar{G})$;
- 若没有孪点，则 $H_F(G) = H_F(\bar{G})$ 可得。

证明。 显然，对于图 G 中任意两个不同的顶点 u, v，有

$$N_G(u) \triangle N_G(v) = N_{\bar{G}}[u] \triangle N_{\bar{G}}[v]$$

成立，因此我们立即得到超边集

- $\triangle_a(G)$ 等于 $\triangle_n[\bar{G}]$，并且
- $\triangle_n(G)$ 等于$\triangle_a[\bar{G}]$。

因此，由表4可得

- $\triangle_a(G)$ 和 $\triangle_n[\bar{G}]$ 复合$\mathcal{H}_L(G)$ 后变为$\triangle_n[\bar{G}]$ 和 $\triangle_a(G)$，即构成$\mathcal{H}_L(G)$;
- $\triangle_a(G)$ 和 $\triangle_n(G)$ 复合成 $\mathcal{H}_O(G)$ 后变为 $\triangle_n[\bar{G}]$ 和 $\triangle_a[\bar{G}]$，即得到 $\mathcal{H}_I(G)$;
- $\triangle_a[\bar{G}]$ 和 $\triangle_n[\bar{G}]$ 复合成 $\mathcal{H}_I(G)$ 后变为 $\triangle_n(G)$ 和 $\triangle_a(G)$，即得到 $\mathcal{H}_O(G)$;
- $\triangle_a[\bar{G}]$ 和 $\triangle_n(G)$ 复合成 $\mathcal{H}_F(G)$ 后变为 $\triangle_n(G)$ 和 $\triangle_a[\bar{G}]$，即得到 $\mathcal{H}_F(G)$。

□

这特别意味着

- G的一个 L-集也是 $\bar{G}$的一个 L-集;
- G的一个 I-集是 $\bar{G}$的一个 O-集;
- G的一个 O-集是 $\bar{G}$的一个 I-集;
- G 的一个 F-集也是 $\bar{G}$的一个 F-集;

这意味着定理 4.1 的断言：对于任意图 G，我们有

- $\gamma_{\mathrm{L}}(G) = \gamma_{\mathrm{L}}(\bar{G})$;
- $\gamma_{\mathrm{I}}(G) = \gamma_{\mathrm{O}}(\bar{G})$;
- $\gamma_{\mathrm{O}}(G) = \gamma_{\mathrm{I}}(\bar{G})$;
- $\gamma_{\mathrm{F}}(G) = \gamma_{\mathrm{F}}(\bar{G})$。