arXiv:2601.20216v1 [math.CO] 28 Jan 2026

路径图的 2-令牌图支配数的渐近紧上界

E. Acosta Troncoso* J. Lea˜nos*† L. M. Rivera* ‡

摘要

本文证明，阶为 $n \geq 2$ 的路径图的 2-令牌图的支配数等于 $\frac{n^2}{10} + \Theta(n)$。

—

关键词：标记图；支配数。*AMS*主题分类号：05C69；05C76。

1 引言

设 $G = (V(G)\ E(G))$ 是一个阶至少为 $n \geq 2$ 的简单图。G 的双顶点图定义为图 $F_2(G)$，其顶点集由 $V(G)$ 的所有 2-子集组成；当且仅当两个顶点的对称差是 G 的一条边时，它们在 $F_2(G)$ 中相邻。这个概念及其称为 G 的 k-标记图的推广，曾以不同名称被多次独立重新定义。1989 年，Alavi 等人 [1, 2] 定义并深入研究了 G 的双顶点图；然而， $F_2(G)$ 也可追溯至 Johns 的博士论文 [18], ，其中 $F_2(G)$ 被称为 G 的 2-子图图。2002 年，Rudolph [21] 将 $F_2(G)$ 重新定义为 G 的对称平方幂，并将其用于研究图同构问题及量子力学中的各种问题，由此推动了不同作者开展大量研究（例如参见 [5, 6, 7, 14]）。2012 年，Fabila-Monroy 等人 [11] 以 G 的 k-标记图之名重新引入这一概念，其中 $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$，并且 $F_k(G)$ 定义为一个图，其顶点集由 $V(G)$ 的所有 k-子集组成；当且仅当两个顶点的对称差是 G 的一条边时，它们在 $F_k(G)$ 中相邻。[11] 研究了这些图的若干组合不变量，例如连通性、直径、团数、色数、哈密顿性等。沿着这一思路，关于标记图各种组合参数的大量研究成果相继发表；例如参见 [3, 4, 8, 10, 13, 16, 19]。

我们回顾一下， G 的支配集是来自 $V(G)$的顶点子集 S，其中每个顶点 $v \in V(G) \setminus S$ 都是 S中至少一个顶点的邻点。 G 的支配数 $\gamma(G)$定义为：

$$\gamma(G) := \min\{|D| :\ D \text{ is a dominating set of G}\}.$$

图的支配集研究是图论中历史悠久且十分活跃的研究领域。值得注意的是，早在

*数学学术单位´，Aut´onoma de Zacatecas 大学，Calzada Solidaridad y Paseo La Bufa，Hidr´aulica 区，邮编 98060，Zacatecas，Zac。

†电子邮箱：jleanos@uaz.edu.mx

‡电子邮箱：luismanuel.rivera@gmail.com

17世纪，印度就提出了各种与这些支配集相关的国际象棋问题。最著名的例子之一是The n皇后问题 [22], ，其目标是确定在 $n \times n$ 棋盘上实现支配所需的最少皇后数量。1979年，Garey 和 Johnson [15] 证明，确定一个图的支配数是一个 NP困难问题。

本文旨在为 $\gamma(F_2(P_n))$给出一个渐近紧上界，其中 P_n 表示具有 $n \geq 2$ 个顶点的路径图。近期相关研究包括Goncalves等人 [17], 证明了关于网格图支配数的Chang猜想 [9] 。此外，[20], 还给出了 $\gamma(F_2(G))$的一般界。最近，Fabila-Monroy和G´omez-Galicia [12] 确定了 $\gamma(F_2(G))$在 $G \in \{K_n, K_{1,n-1}\}$时的精确值。

2 主要结果

本文旨在证明以下结果。

定理 2.1. 若 $n \geq 13$，则 $a\left(n-1\right) \leq \gamma\left(F_2\left(P_n\right)\right) \leq d\left(n\right)$，其中

$$a(n) := \begin{cases} \frac{1}{10}\left(n^2+n+20\right) & n \equiv 0 \pmod 5 \text{ or } n \equiv 4 \pmod 5, \\ \frac{1}{10}\left(n^2+n+18\right) & n \equiv 1 \pmod 5 \text{ or } n \equiv 3 \pmod 5, \\ \frac{1}{10}\left(n^2+n+14\right) & n \equiv 2 \pmod 5, \end{cases}$$

and

$$d(n) := \begin{cases} \frac{1}{10}(n^2+5n-30) & n \equiv 0 \pmod 5 \\ \frac{1}{10}(n^2+5n-36) & n \equiv 1 \pmod 5 \text{ or } n \equiv 4 \pmod 5 \\ \frac{1}{10}(n^2+5n-34) & n \equiv 2 \pmod 5 \text{ or } n \equiv 3 \pmod 5. \end{cases}$$

表1给出了通过计算机得到的 $\gamma(F_2(P_n))$在 $n \in \{2, 3, \ldots, 25\}$时的精确值。表中还列出了相应的 $d(n)$值。我们观察到，对于 $n \in \{2, 3\}$， $d(n) < 0$ 。

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
$\gamma(F_2(P_n))$	1	1	2	3	5	6	8	10	12	15	18	20	23	27	30	34	38	42	47	51	56	61	66	72
$d(n)$	-	-	0	2	3	5	7	9	12	14	17	20	23	27	30	34	38	42	47	51	56	61	66	72

表1： $\gamma(F_2(P_n))$ 和 $d(n)$ 的前几个值。

我们注意到，对于 $n \in \{13, 14, \ldots, 25\}$， $\gamma(F_2(P_n))$ 和 $d(n)$ 的值是相同的。此外，我们坚信以下结论：

猜想 2.2。若 $n \geq 13$，则 $\gamma(F_2(P_n)) = d(n)$。

2018年，G´omez-Soto 等人 [16] 确定了 $\rho(F_2(P_n))$ 的精确值，即 $F_2(P_n)$ 的装填数 。更确切地说，他们证明了以下结果。

定理 2.3。*[16,* 定理 *3]* 若 $n \geq 6$ 且 $a(n)$ 按照定理 *2.1* 的定义，则$\rho(F_2(P_{n+1})) = a(n)$。

注 2.4。由定理 *2.3* 以及对任意图G均有 $\gamma\left(G\right) \geq \rho\left(G\right)$ 这一众所周知的事实可知， $\gamma\left(F_2\left(P_n\right)\right) \geq a\left(n-1\right)$ 。因此，要证明定理 *2.1*，只需证明 $\gamma\left(F_2\left(P_n\right)\right) \leq d\left(n\right)$ 。

3 预备知识

设 $\mathbb{Z}^2 = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$。令 H 为顶点集为 $\mathbb{Z}^2$ 的图，其中两个顶点（i，i'）和（j，j'）相邻，当且仅当 $|i-j| + |i'-j'| = 1$。对于 $n \in \{2,3,\ldots\}$，令 $H(n)$为 H 在以下顶点子集上导出的子图：

$$\{(i,j)\colon 0 \le i,j \le n \text{ and } i-j \le 1\} \cup \{(n+1,n)\}.$$

令 $I(n)$为 $H(n)$在以下顶点子集上的导出子图：

$$\{(i,j)\colon 1 \le i,j \le n-1 \text{ and } i-j \le 0\}.$$

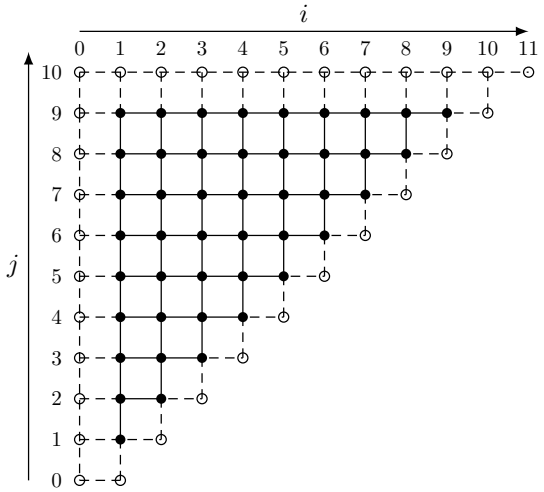


图 1　：　$H(10)$ 和 $I(10)$；$I(10)$由连续线段和黑色顶点绘制　s.

我们将集合 $\{1,2,\ldots,n\}$ 简称为 $[n]$，并假设 P_n 的顶点集为 $[n]$，边集为 $E(G)$：$= \{\{i,i+1\}\colon 1 \le i \le n-1\}$。那么，$V(F_2(P_n)) = \{\{i,j\}\colon 1 \le i < j \le n\}$。利用函数

$$h\colon V(I(n)) \to V(F_2(P_n))$$

定义为 $h((i,j)) := \{i, j+1\}$，我们有 $I(n) \simeq F_2(P_n)$。

令 $\mathbb{Z}_5$ 表示模 5 整数的同余类集合。考虑函数 f、g：$\mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}_5$，其定义为 $f(x,y)$：$= (x+2y) \bmod 5$ 和 $g(x,y) := (2x+y) \bmod 5$。对于 $t \in \mathbb{Z}^+$ 和 $(i,j) \in \mathbb{Z}^2$，定义 $f_t(i,j)$：$= f(i-t,j)$ 以及 $g_t(i,j) := g(i-t,j)$。我们将 f_t（分别将 g_t）称为 f（分别为 g）的 t-平移。$\mathbb{Z}_5$ 的元素称为 f（分别为 g）的颜色；对于 $l \in \mathbb{Z}_5$，我们将 $f^{-1}(l)$（分别将 $g^{-1}(l)$）记作 H 在 f（分别为 g）下的 l-色类。

f，g，f_t 和 g_t 的以下性质可由定义直接得出。

命题 3.1. 设 i，i'，j，$j' \in \mathbb{Z}$ 和 $l \in \mathbb{Z}_5$。

1. f 和 g 定义了 H的5-正当着色。
2. $f^{-1}(l)$ 和 $g^{-1}(l)$ 是 H的支配集。

3. $f(i,j) = f(i,j')$ 和 $g(i,j) = g(i,j')$ 当且仅当 $j - j'$ 是 *5* 的倍数。

4. $f(i,j) = f(i',j)$ 且 $g(i,j) = g(i',j)$ 当且仅当 $i - i'$ 是 *5* 的倍数。

5. $f(i+1,i) = f(j+1,j)$ 且 $g(i+1,i) = g(j+1,j)$ 当且仅当 $i - j$ 是.....的倍数
5. *6.* 若 $t \in \mathbb{Z}^+$，则 $f^{-1}(f(i,j)) = f_t^{-1}(f(i-t,j))$ 且 $g^{-1}(g(i,j)) = g_t^{-1}(g(i-t,j))$。

对于 $k, r \in [n]$ 和 $k < r$，我们用 $H^{k,r}(n)$ 表示由以下顶点子集在 $H(n)$ 中导出的子图:

$$\{(x,y) : 0 \le x \le n,\ k \le y \le r\}.$$

若 $n \in \{4,5,\ldots\}$、$r \in \mathbb{Z}_5$ 和 $h \in \{f,g\}$，则我们用 $h_n^{-1}(r)$ 表示 $H(n) \cap h^{-1}(r)$。类似地，我们定义

$$\begin{aligned}
X_r^l(h) &:= \{(1,i) \mid 0 < i < n,\ (0,i) \in h_n^{-1}(r)\} \cup \{(1,1) \mid (0,0) \in h_n^{-1}(r)\} \\
&\quad \cup \{(1,n-1) \mid (0,n) \in h_n^{-1}(r)\}, \\
X_r^u(h) &:= \{(i,n-1) \mid 0 < i < n,\ (i,n) \in h_n^{-1}(r)\} \\
&\quad \cup \{(n-1,n-1) \mid (n,n) \text{ or } (n+1,n) \text{ belongs to } h_n^{-1}(r)\}, \\
X_r^d(h) &:= \{(i-1,i) \mid 0 < i < n,\ (i,i-1) \in h_n^{-1}(r)\} \cup \{(1,1) \mid (1,0) \in h_n^{-1}(r)\} \\
&\quad \cup \{(n-1,n-1) \mid (n,n-1) \in h_n^{-1}(r)\}, \\
X_r(h) &:= \left(X_r^l(h) \cap X_r^u(h)\right) \cup \left(X_r^l(h) \cap X_r^d(h)\right) \cup \left(X_r^u(h) \cap X_r^d(h)\right), \\
D_r'(h) &:= \left(I(n) \cap h^{-1}(r)\right) \cup X_r^l \cup X_r^u \cup X_r^d.
\end{aligned}$$

推论3.2。若 n、r、h 和 $D_r'(h)$ 如上所述，则有以下结论:

1. $h_n^{-1}(r)$ 是 $I(n)$的支配集。*2.* $D_r'(h)$ 是 $I(n)$ 的支配集，并且 $|D_r'(h)| = |h_n^{-1}(r)| - |X_r(h)|$。

证明。断言1直接由命题 3.1 (2)以及 $H(n)$和 $I(n)$的定义得出。断言2是断言1以及$X_r^l(h)$ $X_r^u(h)$ $X_r^d(h)$ $X_r(h)$和 $D_r'(h)$的定义的直接推论。

□

若 U 是 $I(n)$的一个顶点子集，则

$$N[U] := U \cup \{(x,y) \in I(n)\ :\ (x,y) \text{ has a neighbour in } U\}.$$

以下命题的证明是一个简单的练习。

命题 *3.3*。设 n、r、h和 $D_r'(h)$如上所述。若存在 $A_r \subset D_r'(h)$和 $B_r \subset V(I(n)) \setminus D_r'(h)$，使得 $N[D_r'(h)] \subseteq N[(D_r'(h) \setminus A_r) \cup B_r]$，则 $D_r(h) := (D_r'(h) \setminus A_r) \cup B_r$是 $I(n)$的支配集，其基数为 $|D_r(h)| = |D_r'(h)| - |A_r| + |B_r|$。

命题3.4。设 $n \ge i \ge 4$、$h \in \{g,f\}$ 和 $l \in \mathbb{Z}_5$。则 $|H^{i-4}, {}^{i}(n) \cap h^{-1}(l)| = i$。

证明。我们只证明 $h = g$ 的情形，因为 $h = f$ 的情形可类似地证明。首先，我们证明对于任意 r、$r' \in [0,4]$，$|H^{i-4,i}(n) \cap g^{-1}(r)| = |H^{i-4,i}(n) \cap g^{-1}(r')|$。根据命题 3.1 (4)，颜色$c_0 := g(0,l)$、$c_1 := g(1,l)$、$c_2 := g(2,l)$、$c_3 := g(3,l)$、$c_4 := g(4,l)$ 两两不同，因此只需证明对于任意 $t \in [0,3]$，$|H^{i-4,i}(n) \cap g^{-1}(c_t)| = |H^{i-4,i}(n) \cap g^{-1}(c_{t+1})|$。不失一般性，假设 c_t 是蓝色，且 c_{t+1} 是红色。令 $b := |H^{i-4,i}(n) \cap g^{-1}(c_t)|$。根据 g_1 的定义，H 中被 g 染成红色的顶点，恰好就是被 g_1 染成蓝色的顶点。令 b_1 表示 $H^{i-4,i}(n)$ 中被 g_1 染成蓝色的顶点数。于是由命题 3.1 (6) 可知 $b_1 = b + p - q$，其中 p 表示其中的顶点数

$$\{(-1, i-4), (-1, i-3), (-1, i-2), (-1, i-1), (-1, i)\}$$

由 g 染成蓝色的，并且 q 是.....中的顶点数

$$\{(i-3, i-4), (i-2, i-3), (i-1, i-2), (i, i-1), (i+1, i)\}$$

由 g 染成蓝色的。根据命题 3.1 的 (3) 和 (5)，可得 $p = q = 1.$。因此，我们得出 $b = b_1$，这意味着 $|H^{i-4,\ i}(n) \cap g^{-1}(c_t)| = |H^{i-4,\ i}(n) \cap g^{-1}(c_{t+1})|$。

由于 $H^{i-4,\ i}(n)$ 中顶点的总数为 $(i+2)+(i+1)+i+(i-1)+(i-2) = 5i$，且 $|H^{i-4,\ i}(n) \cap g^{-1}(r)| = |H^{i-4,\ i}(n) \cap g^{-1}(r')|$ 对任意 $r,\ r' \in [0,4]$ 均成立，因此我们得出 $|H^{i-4,\ i}(n) \cap g^{-1}(r)| = i$ 对任意 $r \in [0,4]$ 均成立。 □

4 $\gamma(F_2(P_n)) \leq d(n)$：定理 2.1 的证明

通过计算机得到了 $n \leq 25$ 的 $\gamma(F_2(P_n))$ 的精确值。对于 $n \geq 20$，我们采用构造性方法。我们证明 $\gamma(F_2(P_n)) \leq d(n)$ 的策略如下：

步骤2。根据 n 模 5 的同余关系，我们选择 $h \in \{f, g\}$，并考虑集合 $h_n^{-1}(r)$，其中 $n \equiv r$ (模 5)。在图 2、3、4、5 和 6 中，$h_n^{-1}(r)$ 的顶点以蓝色圆圈圈出。

步骤2。由 $h_n^{-1}(r)$可得 $D'_r(h)$，它是 $I(n)$ 的支配集，其基数为$|h_n^{-1}(r)| - |X_r(h)|$。在图 2、3、4、5 和 6 中，箭头表示通过将尾顶点集合与头顶点集合互换，从 $h_n^{-1}(r)$变换为 $D'_r(h)$。

步骤3。然后，我们从 $I(n)$ 中选取合适的小顶点子集 A_r 和 B_r，使其满足以下条件：$A_r \subset D'_r(h)$、$B_r \subset V(I(n)) \setminus D'_r(h)$、$|A_r| > |B_r|$，$A_r \cup B_r$ 中的每个顶点都靠近 $I(n)$ 的某个角，并且 $D_r(h) := (D'_r(h) \setminus A_r) \cup B_r$ 是$I(n)$的一个支配集。在图 2、3、4、5 和 6 中，A_r 的顶点用红色方框圈出，而 B_r 的顶点用绿色方框圈出。

步骤4。最后，我们通过证明$|D_r(h)| = d(n)$，确认 $D_r(h)$ 是所需的支配集。

我们强调，图 2、3、4、5 和 6 中的三幅图分别对应 $I(n)$ 的三个大角，并展示了上述变换。

情形0。设 $n \equiv 0$ （模 5）。由推论3.2 (2) 可知，$D'_4(f)$ 是 $I(n)$ 的支配集，其基数为 $|D'_4(f)| = |f_n^{-1}(4)| - 1$，因为 $X_4(f) = \{(1,\ 2)\}$。

由于 $H^{0,\ 0}(n) \cap g^{-1}(4) = \emptyset$，根据命题3.4，我们有

$$|D'_4(f)| = -1 + \sum_{i=1}^{n/5} \left|H^{5i-4,5i}(n) \cap f^{-1}(4)\right| = -1 + \sum_{i=1}^{n/5} 5i.$$

令 $A_0 := \{(4, n-1)、(n-1, n-1)、(1, n-1)、(1, n-3)、(n-6, n-1)、(n-4, n-1)\}$ 以及$B_0 := \{(3, n-1)、(1, n-2)、(n-5, n-1)、(n-2, n-1)\}$。仔细观察图2可知， A_0 和 B_0 满足命题 3.3的条件。因此， $D_4(f) := (D'_4(f) \setminus A_0) \cup B_0$是 $I(n)$的一个支配集，其基数为 $-2-1+\sum_{i=1}^{n/5} 5i = \frac{1}{10}(n^2+5n-30)$，如所要求。 —

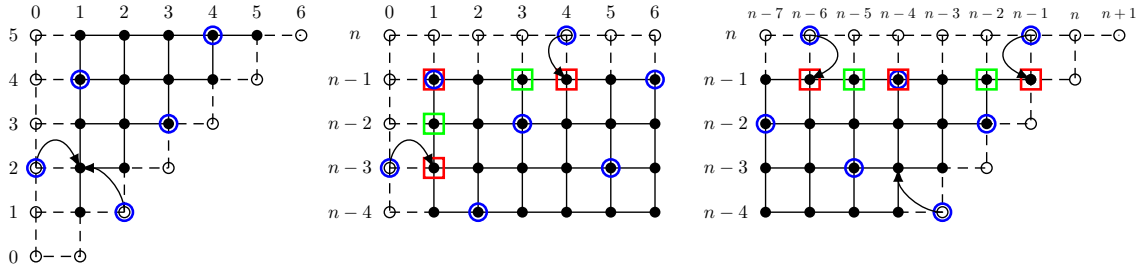


图2： A_0 的顶点被红色方框圈出，而 B_0 的顶点被绿色方框圈出。注意到 $N[D'_4(f)] \subseteq N[(D'_4(f) \setminus A_0) \cup B_0]$。

情形1。假设 $n \equiv 1 \pmod 5$。根据推论3.2 (2)，我们知道 $D'_4(g)$ 是 $I(n)$ 的一个支配集，其基数为 $|D'_4(g)| = |g_n^{-1}(4)| - 1$，因为 $X_4(g) = \{(n-2, n-1)\}$。由于 $H^{0,1}(n) \cap g^{-1}(4) = \emptyset$，因此命题3.4意味着

$$|D'_4(g)| = -1 + \sum_{i=1}^{(n-1)/5} \left| H^{(5i+1)-4,5i+1}(n) \cap g^{-1}(4) \right| = -1 + \sum_{i=1}^{(n-1)/5} (5i+1).$$

令 $A_1 := \{(1, 9), (1, 7), (2, 5), (2, n-1), (4, n-1)\}$ 且 $B_1 := \{(1, 8), (2, 6), (3, n-1)\}$。简单查看图3可知， A_1 和 B_1 满足命题 3.3 的条件。因此， $D_4(g) := (D'_4(g) \setminus A_1) \cup B_1$ 是 $I(n)$ 的一个支配集，其基数为 $-2-1+\sum_{i=1}^{(n-1)/5} (5i+1) = \frac{1}{10}(n^2+5n-36)$，如所需。 —

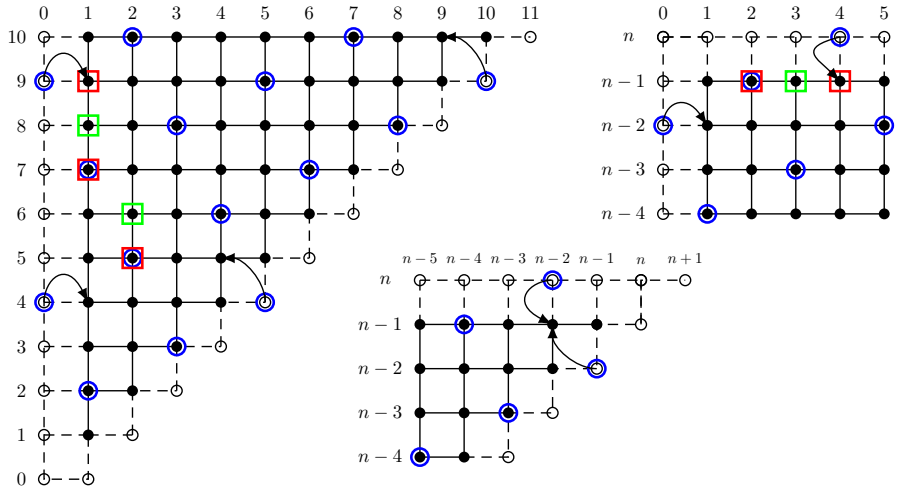


图3： A_1 的顶点被红色方框圈出，而 B_1 的顶点被绿色方框圈出。注意到 $N[D'_4(g)] \subseteq N[(D'_4(g) \setminus A_1) \cup B_1]$。

情况 2。设 $n \equiv 2 \pmod 5$。由推论3.2 (2)可知， $D'_0(g)$ 是 $I(n)$ 的一个支配集，其基数为 $|g_n^{-1}(0)|$，因为 $X_0(g) = \emptyset$。

由于 $H^{0,\,2}(n) \cap g^{-1}(0) = \{(0,\ 0),\ (2,\ 1)\}$，因此命题3.4意味着

$$|D'_0(g)| = 2 + \sum_{i=1}^{(n-2)/5} \left|H^{(5i+2)-4,5i+2}(n) \cap g^{-1}(0)\right| = 2 + \sum_{i=1}^{(n-2)/5} (5i+2).$$

令 $A_2 := \{(1, 1), (1, 3), (1, 5), (1, 8), (1, 13), (1, 15), (2, 6), (2, 11), (3, 9), (4, 7), (6, 8), (2, n-1), (4, n-1), (n-3, n-1), (n-1, n-1)\}$ 以及 $B_2 := \{(1, 6), (1, 14), (2, 4), (2, 8), (2, 12),- (3, 6), (3, 10), (4, 8), (7, 9), (3, n-1), (n-2, n-1)\}$。

简单查看图 4 可知， A_2 和 B_2 满足命题 3.3 的条件。因此， $D_4(0) := (D'_0(g) \setminus A_2) \cup B_2$ 是 $I(n)$的一个支配集，其基数为$-4 + 2 + \sum_{i=1}^{(n-2)/5} (5i+2) = \frac{1}{10}(n^2 + 5n - 34)$，得证。

—

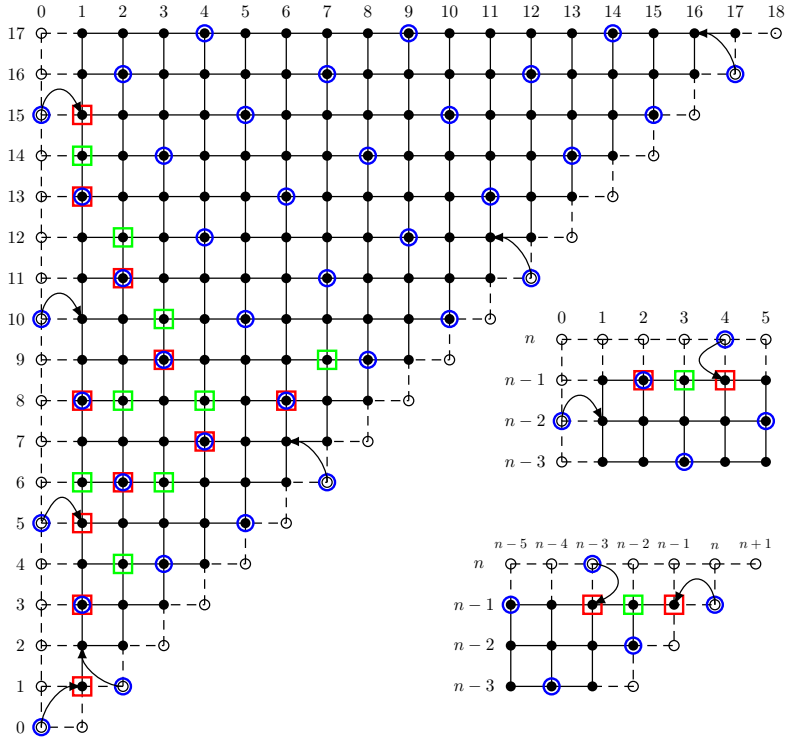


图 4： A_2 的顶点被红色方框圈出，而 B_2 的顶点被绿色方框圈出。注意， $N[D'_0(g)] \subseteq N[(D'_0(g) \setminus A_2) \cup B_2]$。

情况 3。假设 $n \equiv 3$ (模 5)。根据推论3.2 (2)，我们知道 $D'_4(g)$是 $I(n)$的一个支配集，其基数为 $|D'_4(g)| = |g_n^{-1}(4)|$，因为 $X_4(g) = \emptyset$。

由于 $H^{0,\,3}(n) \cap g^{-1}(4) = \{(1、\ 2),\ (3、\ 3)\}$，因此命题3.4意味着

$$|D'_4(g)| = 2 + \sum_{i=1}^{(n-3)/5} \left|H^{(5i+3)-4,5i+3}(n) \cap g^{-1}(4)\right| = 2 + \sum_{i=1}^{(n-3)/5} (5i+3).$$

设 $A_3 := \{(1、7)、(1、9)、(2、5)、(1、n-1)、(1、n-4)、(3、n-1)、(n-1、n-1)\}$，以及 $B_3 := \{(1、8)、(2、6)、(2、n-1)、(1、n-3)\}$。通过简单查看图5可知， A_3 和 B_3 满足命题 3.3 的条件。于是， $D_4(g) := (D'_4(g) \setminus A_3) \cup B_3$ 是 $I(n)$ 的一个支配集，其基数为 $-3+2+\sum_{i=1}^{(n-3)/5}(5i+3) = \frac{1}{10}(n^2+5n-34)$，如所需。 —

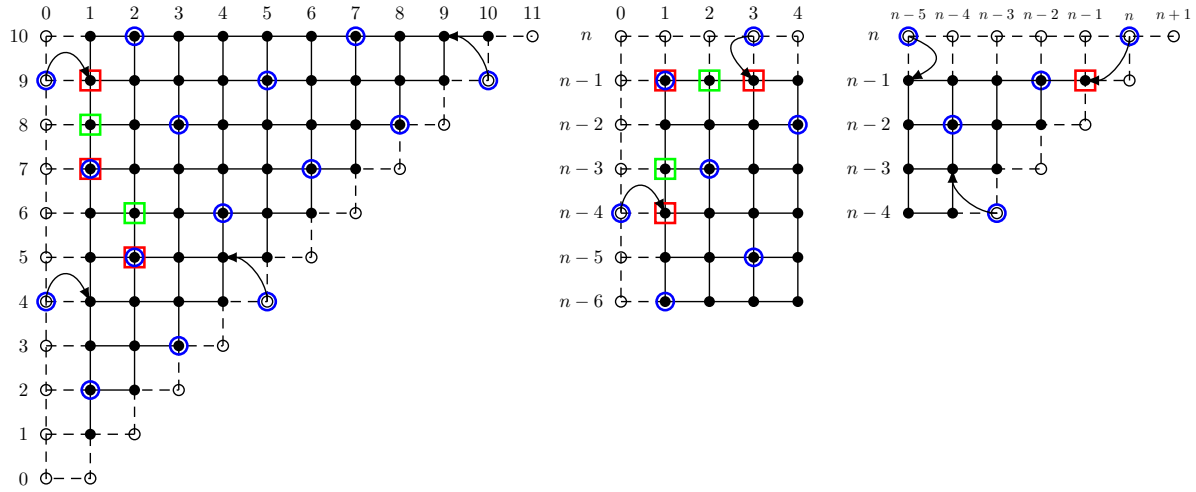


图5： A_3 中的顶点用红色方框圈出，而 B_3 中的顶点用绿色方框圈出。注意到 $N[D'_4(g)] \subseteq N[(D'_4(g) \setminus A_3) \cup B_3]$。

情形4。假设 $n \equiv 4$ (模5)。由推论3.2 (2)可知， $D'_0(g)$ 是 $I(n)$ 的支配集，其基数为 $|g_n^{-1}(0)|$，因为 $X_0(g) = \emptyset$。

由于 $H^{0,\,4}(n) \cap g^{-1}(0) = \{(0,\ 0),\ (2,\ 1),\ (1,\ 3),\ (3,\ 4)\}$，因此命题3.4推出

$$|D'_0(g)| = 4 + \sum_{i=1}^{(n-4)/5} \left|H^{(5i+4)-4,5i+4}(n) \cap g^{-1}(0)\right| = 4 + \sum_{i=1}^{(n-4)/5} (5i+4).$$

令 $A_4 := \{(1,1),(1,3),(1,5),(1,8),(1,13),(1,15),(2,6),(2,11),(3,9),(4,7),(6,8),(1,n-4),(1,n-1),(3,n-1),(n-6,n-1),(n-3,n-1)\}$， 且 $B_4 := \{(1,6),(1,14),(2,4),(2,8),(2,12),(3,6),(3,10),(4,8),(7,9),(1,n-3),(2,n-1),(n-5,n-1)\}$。

简单观察图6可知， A_4 和 B_4 满足命题3.3的条件。因此， $D_0(g) := (D'_0(g) \setminus A_4) \cup B_4$ 是 $I(n)$的一个支配集，其基数为$-4+4+\sum_{i=1}^{(n-4)/5}(5i+4) = \frac{1}{10}(n^2+5n-36)$，符合要求。 —

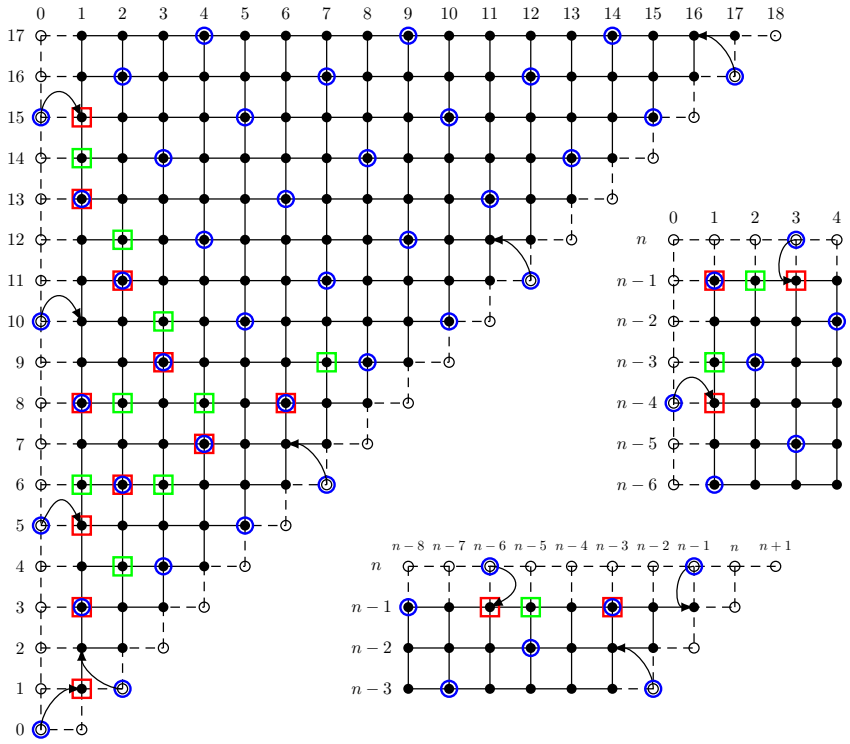


图6： A_4 的顶点用红色方框圈出，而 B_4 的顶点用绿色方框圈出。我们注意到 $N[D'_0(g)] \subseteq N[(D'_0(g) \setminus A_4) \cup B_4]$。

致谢

E. Acosta Troncoso 是萨卡特卡斯自治大学（UAZ）基础科学博士项目的博士生，并获得了科学、人文、技术与创新秘书处（SECIHTI，前身为国家人文、科学与技术委员会（CONAHCYT））提供的奖学金（资助编号4014068）。

参考文献

[1] Y. Alavi, M. Behzad, P. Erd¨os, and D. R. Lick. 双顶点图。组合信息系统科学杂志，**16**(1) (1991), 37–50.[2] Y. Alavi, D. R. Lick and J. Liu. 双顶点图综述，图与组合，**18**(4) (2002), 709–715.[3] H. de Alba, W. Carballosa, D. Duarte and L. M. Rivera，三角图的Cohen–Macaulay性，罗马尼亚数学科学会数学公报，**60** (108) No. 2 (2017), 103–112. [4] H. de Alba, W. Carballosa, J. Lea˜nos and L. M. Rivera，若干标记图的独立数与匹配数，澳大拉西亚组合学杂志，**76**(3) (2020), 387–403.[5] A. Alzaga, R. Iglesias and R. Pignol，图的对称幂的谱与Weisfeiler–Lehman细化，组合理论杂志*B*辑，**100**(6) (2010) 671–682.

[6] K. Audenaert, C. Godsil, G. Royle and T. Rudolph，图的对称平方，J. Comb. Theory B, 97 (2007), 74–90.[7] A. R. Barghi and I. Ponomarenko，具有等谱对称幂的非同构图。Electr. J. Comb. 16(1) 2009.[8] W. Carballosa, R. Fabila-Monroy, J. Lea˜nos and L. M. Rivera，标记图的正则性与平面性，Discuss. Math. Graph Theory, 37(3) (2017), 573–586.[9] T. Y. Chang , W. E. Clark and E. O. Hare，完全网格的支配数 I, Ars Combin., 38 (1994), pp. 97-112.[10] C. Dalf´o, M. A. Fiol and A. Messegu´e，标记图拉普拉斯特征值的一些界，Discrete Math., 348(4) (2025), 114382.[11] R. Fabila-Monroy, D. Flores-Pe˜naloza, C. Huemer, F. Hurtado, J. Urrutia and D. R. Wood，标记图，Graphs Combin., 28(3) (2012), 365–380.[12]R. Fabila-Monroy and S. G´omez-Galicia，标记图的支配数，arXiv:2509.16448v1 (2025).[13] R. Fabila-Monroy, S. G. G´omez-Galicia, D. Gregorio-Longino, T. I. Hoekstra-Mendoza, A. Trujillo-Negrete，关于由具有相同邻点的2-割集生成的标记图的自同构，Graphs Combin., 42(1) (2026).[14] C. Fischbacher and G. Stolz，一般图上的量子 XXZ 自旋系统中的液滴态，J. Math. Phys., 59(5), 2018.[15] M. R. Garey and D. S. Johnson，《计算机与不可解性》（第174卷）。旧金山：freeman，1979.[16] J. M. G´omez Soto, J. Lea˜nos, L. M. R´ıos Castro and L. M. Rivera，路径图的双顶点图的装填数，Discrete Appl. Math., 247 (2018), 327–340.[17] D. Goncalves, A. Pinlou, M. Rao, and S. Thomass´e，网格的支配数，SIAM J. Discrete Math. 25(3) (2011), pp. 1443–1453.[18] G. L. Johns，图中的广义距离，博士论文，西密歇根大学，1988.[19] J. Lea˜nos and A. L. Trujillo-Negrete，标记图的连通性，Graphs Com- bin., 32(4) (2018), 777-790.[20] R. Prabhuand K. Manjula，双顶点图中的支配，Journal of Informatics and Mathematical Sciences, 11 (2019), 339-343.[21]Terry Rudolph，构造具有物理直观性的图不变量，arXiv:quant- ph/0206068 (2002).[22] Vardi I. n皇后问题。《Mathematica 中的计算娱乐》第6章。加利福尼亚州雷德伍德城：Addison-Wesley，第107-125页，1991。