arXiv:2601.20233v1 [math.AC] 28 Jan 2026

相对 Hochster–Takayama 公式与 Cohen–Macaulay 单项式理想商

`TAI HUY HA 和 NGUYEN CONG MINH

ABSTRACT. Hochster 公式和 Takayama 公式描述了单项式理想的局部上同调模的多重分次部分与单纯复形之间的关系。本文将这些公式推广到单项式理想的商的相对版本，将其局部上同调模的多重分次部分表示为次数复形对的约化相对（上）同调。作为应用，我们得到一个相对 Reisner 判据，用以刻画 Cohen–Macaulay 单项式理想商。我们进一步将这一相对 Hochster–Takayama 框架应用于由符号幂滤过导出的模，包括符号商 $I^{(t)}/I^{(t+1)}$ 和符号幂与普通幂差异模 $I^{(t)}/I^t$。特别地，对于平方自由单项式理想 I，我们精确刻画了 $I^{(t)}/I^{(t+1)}$ 对所有或等价地对某个 $t \geq 2$ 为 Cohen-Macaulay 的条件。当 I 是图的边理想时，我们刻画了 $I^{(t)}/I^t$ 对所有或等价地对某个充分大的 t 为 Cohen-Macaulay 的条件，并分析其维数函数的行为。

1. 引言

组合结构与代数性质之间的相互作用，是单项式理想研究中的一个反复出现的主题。对于平方自由单项式理想 $J \subseteq I$，商I/J 可以通过相对单纯复形（Δ，Γ）获得强有力的组合描述，其中 Δ 和 Γ 是分别与 I 和 J相关联的 Stanley-Reisner 复形。这一联系通过相对 *Stanley–Reisner* 理论建立，该理论最初由 [21]提出，并由 [1] 在研究上界猜想及其定理时进一步拓展。该理论揭示了一个深刻的对应关系：类似于单个平方自由单项式理想所熟知的 Stanley-Reisner 对应，I/J 的 Hilbert 级数可以直接由相对复形的 f-向量（或 h-向量）Δ，Γ）来理解。此外，还存在相对 Hochster 公式，为计算 I/J的局部上同调模的多重分次分量提供了一种方法。

虽然相对 Stanley–Reisner 理论为平方自由单项式理想的商提供了一个完整的框架，但对于任意单项式理想商，还需要一种更一般的方法。Takayama [23] 引入了次数复形以及广义 Hochster 公式（参见 [10]），用于计算任意单项式理想的局部上同调模的多重分次分量。本文的主要目标是衔接这两种理论，从而构造并研究与任意单项式理想商 I/J相关的相对次数复形。

我们将为相对复形证明一个相对 *Hochster–Takayama* 公式，将 Takayama 的工作推广到一般的单项式理想商。暂且不解释相关术语，我们的第一个结果表述如下。

2020 数学主题分类。13F55,55U10。关键词与短语。单项式理想，商，Cohen-Macaulay，Hochster公式，Takayama公式，次数复形，相对单纯复形。

定理 3.2。 设 $J \subseteq I$ 是 $S = \Bbbk[x_1, \ldots, x_n]$中的单项式理想。对于每个 $i \in \mathbb{Z}$ 和一个 $\in \mathbb{Z}^n$，存在一个 $\Bbbk$-向量空间的同构

$$H^i_{\mathfrak{m}}(I/J)_{\mathbf{a}} \cong \widetilde{H}^{i-|G_{\mathbf{a}}|-1}((\Delta_{\mathbf{a}}(J), \Delta_{\mathbf{a}}(I)); \Bbbk),$$

以及当 $G_{\mathbf{a}} \notin \Delta(\sqrt{I})$ 时， $H^i_{\mathfrak{m}}(I/J)_{\mathbf{a}} = (0)$。（这里，$(\Delta_{\mathbf{a}}(J)\ \Delta_{\mathbf{a}}(I))$ 表示数对 $J \subseteq I$ 在多重次数 $\mathbf{a} \in \mathbb{Z}^n$ 处的相对次数复形。）

我们还证明了一个函子性结果，表明相对 Hochster–Takayama 公式中的 $\Bbbk$-向量空间同构与局部上同调模上变量的乘法相容。特别地，在定理 3.7 中，我们证明，对于 $\mathbf{a}$,$\mathbf{b} \in \mathbb{N}^n$，单项式 $\mathbf{x}^{\mathbf{b}}$ 的乘法会导出一个交换图

$$\begin{array}{ccc} H^i_{\mathfrak{m}}(M)_{\mathbf{a}} & \xrightarrow{\cdot \mathbf{x}^{\mathbf{b}}} & H^i_{\mathfrak{m}}(M)_{\mathbf{a}+\mathbf{b}} \\ \cong\downarrow & & \downarrow\cong \\ \widetilde{H}^{\,i-|G_{\mathbf{a}}|-1}\big(\Delta_{\mathbf{a}}(J),\, \Delta_{\mathbf{a}}(I)\big) & \longrightarrow & \widetilde{H}^{\,i-|G_{\mathbf{a}}|-1}\big(\Delta_{\mathbf{a}+\mathbf{b}}(J),\, \Delta_{\mathbf{a}+\mathbf{b}}(I)\big), \end{array}$$

其中，竖直映射由相对 Hochster–Takayama 公式给出，底部水平映射则由自然包含 $\Delta_{\mathbf{a}+\mathbf{b}}(J) \subseteq \Delta_{\mathbf{a}}(J)$ 和 $\Delta_{\mathbf{a}+\mathbf{b}}(I) \subseteq \Delta_{\mathbf{a}}(I)$ 导出。

作为该框架的首个应用，我们在定理 *5.2* 中建立了相对 Reisner 判据，通过次数复形中链接的约化相对同调是否消失，刻画单项式理想商的 Cohen-Macaulay 性。该结果推广了经典的 Reisner 判据（见 [19]），并普遍适用于广泛的一类单项式理想商。另一项应用中，我们运用该理论研究由符号幂滤过产生的模。理想的符号幂包含重要的几何信息，但往往比普通幂更难理解。理解符号幂及其与普通幂的关系，一直是一个活跃的研究方向（参见 [4, 7, 11] 及其后所列参考文献）。对于平方自由单项式理想 I，我们研究符号商 $I^{(t)}/I^{(t+1)}$ 以及符号幂与普通幂差异模 $I^{(t)}/I^t$。

关于符号幂 $I^{(t)}$ 的 Cohen-Macaulay 性研究（其中 $t \geq 1$）历史悠久。例如，在 [16, 24]，当 I 是一个平方自由单项式理想时，这一性质可以优雅地用其关联的 Stanley-Reisner 复形的拟阵性质来刻画 I。我们将这一对 [16, 24] 的拟阵刻画加以推广，证明对于某些（或等价地，对于所有）符号商 $I^{(t)}/I^{(t+1)}$，Cohen-Macaulay 性会迫使底层单纯复形满足同样强的组合约束。

定理 6.2。 设 Δ 是一个定义在 $[n]$ 上的单纯复形，且 $I = I_\Delta$ 是其 Stanley–Reisner 理想。则以下条件等价：

(1) 对所有 $t \geq 1$， $I^{(t)}/I^{(t+1)}$ 都是 Cohen-Macaulay 的；

(2) 对某个 $t \geq 2$， $I^{(t)}/I^{(t+1)}$ 是 Cohen-Macaulay 的；

(3) Δ是一个拟阵。

此外，如果 $\dim S/I \geq 2$，那么上述条件还等价于：

(4) 对所有 $t \geq 1$， $I^{(t)}/I^{(t+1)}$ 满足 Serre 条件（S_2）；(5) 对某个 $t \geq 2$， $I^{(t)}/I^{(t+1)}$ 满足 Serre 条件（S_2）。

若 $\dim S/I \leq 1$，则对于所有 $t \geq 1$， $I^{(t)}/I^{(t+1)}$ 都平凡地满足 (S_2)。

定理 6.2 的核心主题是刚性：一个具有非连通零阶同调的相对次数复形的存在，就足以迫使深度为 1，并排除更高阶的塞尔条件，由此得出 Cohen-Macaulay、(S_2) 以及广义 Cohen-Macaulay 性质的精确分类和坍缩结果；另见定理 6.5。

我们继续关注符号幂与普通幂差异模 $I^{(t)}/I^t$。函数 $t \mapsto$维数 $I^{(t)}/I^t$ 已知是渐近常数（见 [8]）。我们关注图的边理想，并证明该维数函数是非递减的（见定理 7.8）。对于单圈图和完美图，我们精确说明该函数在哪些位置稳定（见定理 7.10和 7.11）。我们还对 $I^{(t)}/I^t$ 在所有或等价地充分大的 t时具有 Cohen-Macaulay 性质给出了完整分类。

定理 8.4。 设 G 是一个非二部图，且令 $I = I(G)$ 为其边理想。以下条件等价：

(1) 对所有 $t \geq 1$， $I^{(t)}/I^t$ 都是 Cohen-Macaulay；(2) 对某个 $t \geq \max\{t$ (G) $c(G)\} + 3$， $I^{(t)}/I^t$ 是 Cohen-Macaulay；(3) 对所有 $t \geq 1$，要么 $I^{(t)}/I^t = (0)$，要么 $\dim(I^{(t)}/I^t) = 0$；(4) 对于 G 中的任意诱导奇圈 C，都有 $N[C] = [n]$。

对符号幂与普通幂差异模的科恩-麦考利性的维数进行研究（定理 7.8、 7.10、 7.11 和 8.4）的基础，是考察如下形式的模 $S/\sqrt{I}$： x^{a}其中，对于 一个 $\in I \setminus J$，它是 I/J 的湮灭子中的一个分量。

我们指出，尽管相对 Hochster–Takayama 框架能够稳健地刻画局部上同调的消失性质，进而刻画 Cohen-Macaulay 条件和广义 Cohen-Macaulay 条件，但布赫斯鲍姆性或序列科恩-麦考利性等更精细的性质，取决于局部上同调的完整多重分次模结构，无法像前述性质那样仅用次数复形简洁地表述。因此，我们将研究范围限定在能够通过本文发展的函子性相对框架系统检测的性质上。

本文结构。 下一节汇集本文所用的基本定义和性质。第 3 节给出相对 Hochster–Takayama 公式（定理 3.2），并证明关于单项式理想商的函子性结果（定理3.7）。第 4 节重述平方自由单项式理想商的相对 Hochster–Takayama 公式，并指出在此情形下，相对次数复形是限制复形的相对复形；参见定理4.3。第 5.2 节中，我们得到相对 Reisner 判据（定理 5.3），以及广义 Cohen-Macaulay 性的判据（定理5）。第 6 节致力于研究如下形式的符号商的 Cohen-Macaulay 性 $I^{(t)}/I^{(t+1)}$，并在定理 6.2 中加以概括。最后两节，即第7节和第8节，重点研究如下形式的符号幂与普通幂差异模 $I^{(t)}/I^t$，其中 I 是某个图的边理想。我们在定理7.8中证明，符号幂与普通幂差异模的维数是一个递增函数。我们在定理 8.4 中分类了满足其一个（等价地，所有）符号幂与普通幂差异模均为 Cohen-Macaulay 的图。

2. Preliminaries

本节为本文提供必要的定义和背景概念。对于未作解释的术语，请读者参阅 [2, 13, 21]。

2.1. 单纯复形与同调。 有限集合 $[n]=\{1,2,...,n\}$ 上的 单纯复形 Δ，形式上定义为 $[n]$ 的一个子集族，满足：若 $F\in\Delta$ 且 $F'\subseteq F$，则 $F'\in\Delta$。为方便后续讨论，不要求对所有 $i=1,2,.....,n$ 都有 $\{i\}\in\Delta$。令 $\dim F=|F|-1$，其中 $|F|$ 表示 F 的基数；并令 $\dim\Delta=\max\{\dim F \mid F\in\Delta\}$，称其为 Δ 的维数。当 $[n]$ 赋予一个线性序（例如 $<$）时，称 Δ 为定向单纯复形。在这种情况下，对于具有序列 $i_1<...<i_r$ 的 $F\in\Delta$，记作 $F=\{i_1,...,i_r\}$。

设 F 是单纯复形 Δ 的一个面。F 在 Δ 中的链接记作 $\mathrm{link}_\Delta F$，它是一个单纯复形，其面由 $\{G\subseteq[n] \mid G\cap F=\varnothing, G\cup F\in\Delta\}$ 给出。以 F 为中心的 Δ 中的星记作 $\mathrm{star}_\Delta F$，它是一个单纯复形，其面由$\{\tau\cup\sigma \mid \tau\subseteq F,\sigma\in\mathrm{link}_\Delta F\}$给出

设 Δ 是一个满足 $\dim\Delta=d$ 的定向单纯复形。我们用 $\mathcal{C}(\Delta)_\bullet$ 表示 Δ的增广定向链复形，其中

$$C_t=\bigoplus_{\dim F=t}\mathbb{Z}F \text{ and } \partial F=\sum_{j=0}^{t}(-1)^jF_j, \text{ for all } F\in\Delta.$$

（这里，$F_j=\{i_0,\cdots,\hat{i}_j,\cdots,i_t\}$，若 $F=\{i_0,...,i_t\}$。）

相对单纯复形是由两个单纯复形组成的有序对（Δ，Γ），其中 $\Gamma\subseteq\Delta$ 是一个单纯子复形。（Δ，Γ）的面是元素 $\{F\in\Delta \mid F\notin\Gamma\}$。因此，普通单纯复形可以视为满足 $\Gamma=\varnothing$ 的相对单纯复形。相对单纯复形 $\Phi=$（Δ，Γ）的维数定义为 $\dim\Phi=\max\{\dim(F) \mid F\in(\Delta,\Gamma)\}$。若 Δ 是一个定向单纯形复形，且 Γ 是 Δ的一个定向子复形，则 $\mathcal{C}(\Gamma)_\bullet$ 是 $\mathcal{C}(\Delta)_\bullet$ 的子复形，从而得到商复形$\mathcal{C}(\Delta)_\bullet/\mathcal{C}(\Gamma)_\bullet$。

第 i阶约化相对单纯同调模（Δ,Γ）定义为

$$\widetilde{H}_i((\Delta,\Gamma);\Bbbk)=H_i(\mathcal{C}(\Delta)_\bullet/\mathcal{C}(\Gamma)_\bullet\otimes\Bbbk),$$

而 i阶约化相对单纯上同调模（Δ,Γ）为

$$\widetilde{H}^i((\Delta,\Gamma);\Bbbk)=H^i(\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathcal{C}(\Delta)_\bullet/\mathcal{C}(\Gamma)_\bullet;\Bbbk)).$$

$\widetilde{}$为简化记法，我们通常省略 $\Bbbk$，并将相对单纯复形（Δ，Γ）的约化相对单纯同调和上同调分别记为 H_i（Δ，Γ）或 H^i（Δ，Γ）。

2.2. 单项式理想的次数复形与符号幂。全文中，$\Bbbk$是任意域，$S=\Bbbk[x_1,\ldots,x_n]$是$\Bbbk$上的多项式环。理想 $I\subseteq S$ 的第 t个符号幂定义为

$$I^{(t)}=\bigcap_{\mathfrak{p}\in\mathrm{Ass}(I)}\left(I^tS_{\mathfrak{p}}\cap S\right).$$

当 $I=I_\Delta$ 是与 $[n]$上的单纯复形 Δ 相关联的 Stanley-Reisner 理想时，其符号幂具有更好的组合学理解。更确切地说，令 $\mathcal{F}(\Delta)$ 表示 Δ 中极大面的集合，并对 $F\in\Delta$，设 $P_F=(x_i \mid i\notin F)$。在这种情况下，I 及其符号幂的初等分解为

$$I=\bigcap_{F\in\mathcal{F}(\Delta)}P_F \text{ and } I^{(t)}=\bigcap_{F\in\mathcal{F}(\Delta)}P_F^t.$$

对于一个 $=(a_1,\ \cdots,\ a_n)\ \in\ \mathbb{Z}^n$，设 $G_{\mathbf{a}}\ =\ \{i\ \mid\ |a_i\ <\ 0\}$。单项式理想 $I \subseteq S$ 在多重次数**a**(定义见 [23]) 处的次数复形 $\Delta_{\mathbf{a}}(I)$，由所有满足以下条件的 $F \subseteq [n]$ 组成:

(1) $F \cap G_{\mathbf{a}} = \varnothing$

(2) 对于 I 的每个极小生成元 $x^{\mathbf{b}}$，都存在一个指标 $i \notin F \cup G_{\mathbf{a}}$，使得 $b_i > a_i$。需要注意的是，$\Delta_{\mathbf{a}}(I)$ 可能是空集，也可能是 $\{\varnothing\}$，且其顶点集可能是 $[n]$ 的真子集。

以下给出 ***Takayama*** 公式（见 [16, 23]）；该公式推广了 Hochster 公式。

定理 2.1 (Takayama)。设 I 是 S 中的一个单项式理想。对于每个 $i \in \mathbb{Z}$ 和一个 $\in \mathbb{Z}^n$，存在一个 $\Bbbk$-向量空间同构

$$H^i_{\mathfrak{m}}(S/I)_{\mathbf{a}} \cong \widetilde{H}^{i-|G_{\mathbf{a}}|-1}(\Delta_{\mathbf{a}}(I); \Bbbk),$$

并且 $H^i_{\mathfrak{m}}(S/I)_{\mathbf{a}} =(0)$ 当 $G_{\mathbf{a}} \notin \Delta(\sqrt{I})$ 时。

Takayama 公式使我们能够得到 Cohen-Macaulay 单项式理想的 Reisner 判据（见 [19]）。

定理 2.2 (Reisner 判据)。设 $I \subseteq S$ 是一个单项式理想。以下条件等价:

(1) S/I 是维数为 d的 ***Cohen-Macaulay***；且 ***(***

2) 对每个 $\mathbf{a} \in \mathbb{Z}^n$,

$$\widetilde{H}^j((\Delta_{\mathbf{a}}(I); \Bbbk) = 0 \ \textit{for all}\ j < d - |G_{\mathbf{a}}| - 1.$$

2.3. 图的边理想及其他约定。 我们所说的顶点集为 $[n]$上的图，总是指具有顶点$\{1, \ldots, n\}$的简单（即没有自环或重边）且连通 图。我们用 $E(G)$ 表示图 G 的边集（有时，如果上下文不能明确看出，也用 $V(G)$ 表示 G 的顶点集）。对于顶点 $x \in V(G)$，或更一般地，对于子集 $F \subseteq V(G)$，令 $N(x)$ 和 $N(F)$ 分别表示与 x 相邻的顶点集，以及与 F中至少一个顶点相邻的顶点集。令 $N[x] = N(x) \cup \{x\}$ 和$N[F] = N(F) \cup F$。

图 G 在顶点 $[n]$上的边理想（最初定义于 [20]）定义为

$$I(G) = \big(x_i x_j \ \big|\ \{i, j\} \in E(G)\big) \subseteq S = \Bbbk[x_1, \ldots, x_n].$$

对于任意向量 $\mathbf{a} =(a_1, \cdots, a_n) \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$，我们用 $x^{\mathbf{a}}$ 表示单项式 $x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n}$。对于子集 $F \subseteq [n]$，令 $x_F = \prod_{i \in F} x_i$。

我们用 $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ 表示 $\mathbb{R}^n$的标准基，并对任意子集 $F \subseteq [n]$，令 $\mathbf{e}_F = \sum_{i \in F} \mathbf{e}_i$。按照约定，零模的维数为 -1。

3. Relative Degree Complexes and Hochster–Takayama Formula

本节中，我们为单项式理想商及其对应的相对单纯复形建立 Hochster–Takayama 公式。我们首先确定次数复形的相对版本。

引理 3.1. 设 $J \subseteq I$ 是 S 中的单项式理想。则对任意 $\mathbf{a} \in \mathbb{Z}^n$，$(\Delta_{\mathbf{a}}(J)\ \Delta_{\mathbf{a}}(I))$ 是一个相对单纯复形。

证明。对于任意 $\mathbf{a} \in \mathbb{N}^n$，由于 $J \subseteq I$，我们有 $\sqrt{J} : x^{\mathbf{a}} \subseteq \sqrt{I} : x^{\mathbf{a}}$。由 [14, 引理 2.19],$(\Delta_{\mathbf{a}}(J)\ \Delta_{\mathbf{a}}(I))$ 是一个相对单纯复形。对于 $\mathbf{a} \in \mathbb{Z}^n \setminus \mathbb{N}^n$，令 $F = \{i \mid a_i < 0\}$，并在 $i \notin F$ 时令 $\mathbf{a}^+ \in \mathbb{N}^n$ 为 $(\mathbf{a}^+)_i = \mathbf{a}_i$，否则令其为 $(\mathbf{a}^+)_i = 0$。可以看出，$\Delta_{\mathbf{a}}(I) = $链接$_{\Delta_{\mathbf{a}^+}(I)} F$，且 $\Delta_{\mathbf{a}}(J) = $链接$_{\Delta_{\mathbf{a}^+}(J)} F$。这说明 $(\Delta_{\mathbf{a}}(J)\ \Delta_{\mathbf{a}}(I))$ 是一个相对单纯复形，因为 $(\Delta_{\mathbf{a}^+}(J)\ \Delta_{\mathbf{a}^+}(I))$ 是一个相对单纯复形。□

相对 Hochster–Takayama 公式我们的第一个主要结果，即关于单项式理想商的 Hochster–Takayama 公式，陈述如下。

定理 3.2 (相对 Hochster–Takayama)。设 $J \subsetneq I$ 为 S 中的单项式理想。对于每个 $i \in \mathbb{Z}$ 和 $\mathbf{a} \in \mathbb{Z}^n$，存在如下 $\Bbbk$-向量空间同构

$$H^i_{\mathfrak{m}}(I/J)_{\mathbf{a}} \cong \widetilde{H}^{i-|G_{\mathbf{a}}|-1}((\Delta_{\mathbf{a}}(J), \Delta_{\mathbf{a}}(I)); \Bbbk),$$

以及 $H^i_{\mathfrak{m}}(I/J)_{\mathbf{a}} = (0)$，若 $G_{\mathbf{a}} \notin \Delta(\sqrt{J})$。

证明。令 $\check{\mathbf{C}}^\bullet = \check{\mathbf{C}}^\bullet(x_1, \ldots\ldots, x_n)$ 为关于 $\mathfrak{m} = (x_1, \ldots\ldots, x_n)$ 的 $\mathbb{Z}^n$-分次 Čech 复形。注意，对于任意 $\mathbb{Z}^n$-分次 S-模 N，

$$H^i_{\mathfrak{m}}(N) \cong H^i(\check{\mathbf{C}}^\bullet \otimes_S N) \quad \text{and} \quad H^i_{\mathfrak{m}}(N)_{\mathbf{a}} \cong H^i\big((\check{\mathbf{C}}^\bullet \otimes_S N)_{\mathbf{a}}\big).$$

根据 Takayama 的工作，对于任意单项式理想 $K \subseteq S$，我们有如下上链复形同构： [23],

$$(\check{\mathbf{C}}^\bullet \otimes_S S/K)_{\mathbf{a}}[|G_{\mathbf{a}}| + 1] \cong \widetilde{C}^\bullet(\Delta_{\mathbf{a}}(K); \Bbbk). \tag{3.1}$$

考虑如下 $\mathbb{Z}^n$-分次模的短正合序列

$$0 \to I/J \to S/J \to S/I \to 0.$$

$\check{}$ 局部化是正合的，因此与 $\mathbf{C}^\bullet$ 张量化后得到余链复形的短正合序列，并且取 $\mathbf{a}$-分次部分仍保持正合：

$$0 \to (\check{\mathbf{C}}^\bullet \otimes_S I/J)_{\mathbf{a}} \to (\check{\mathbf{C}}^\bullet \otimes_S S/J)_{\mathbf{a}} \to (\check{\mathbf{C}}^\bullet \otimes_S S/I)_{\mathbf{a}} \to 0.$$

此外，由于 $J \subseteq I$，我们有 $\Delta_{\mathbf{a}}(I) \subseteq \Delta_{\mathbf{a}}(J)$。因此，映射 $(\check{\mathbf{C}}^\bullet \otimes_S S/J)_{\mathbf{a}} \to (\check{\mathbf{C}}^\bullet \otimes_S S/I)_{\mathbf{a}}$ 是由 $\Delta_{\mathbf{a}}(I) \subseteq \Delta_{\mathbf{a}}(J)$ 诱导的限制映射。结合 (3.1)，可知核复形在平移 $|G_{\mathbf{a}}|+1$ 后同构于约化相对$\widetilde{}$余链复形 $C^\bullet(\Delta_{\mathbf{a}}(J)\ \Delta_{\mathbf{a}}(I); \Bbbk)$。因此，

$$(\check{\mathbf{C}}^\bullet \otimes_S I/J)_{\mathbf{a}}[|G_{\mathbf{a}}| + 1] \cong \widetilde{C}^\bullet(\Delta_{\mathbf{a}}(J), \Delta_{\mathbf{a}}(I); \Bbbk).$$

取上同调得到

$$H^i_{\mathfrak{m}}(I/J)_{\mathbf{a}} \cong \widetilde{H}^{\,i-|G_{\mathbf{a}}|-1}\big((\Delta_{\mathbf{a}}(J), \Delta_{\mathbf{a}}(I)); \Bbbk\big).$$

最后，若 $G_{\mathbf{a}} \notin \Delta(\sqrt{J})$，则 Takayama 的消失结果（见 [23]）推出 $H^i_{\mathfrak{m}}(S/J)_{\mathbf{a}} =$对所有 i 都为 0。由于 $\sqrt{J} \subseteq \sqrt{I}$，同样有 $G_{\mathbf{a}} \notin \Delta(\sqrt{I})$，因此$H^i_{\mathfrak{m}}(S/I)_{\mathbf{a}} = 0$对所有 i成立。由 $0 \to I/J \to S/J \to S/I \to 0$ 诱导的局部上同调长正合列进而给出$H^i_{\mathfrak{m}}(I/J)_{\mathbf{a}} = 0$ 对所有 i均成立。□

以下 Reisner 型蕴含是定理 3.2 （另见定理 2.2）中相对 Hochster–Takayama 公式的直接推论。

推论 3.3。 设 $d = \dim(I/J)$。假设对每个 $\mathbf{a} \in \mathbb{Z}^n$,

$$\widetilde{H}^j(\Delta_{\mathbf{a}}(J), \Delta_{\mathbf{a}}(I); \Bbbk) = 0 \quad \textit{for all } j < d - |G_{\mathbf{a}}| - 1.$$

那么 I/J 是维数为 d 的 ***Cohen-Macaulay***。

证明。 固定 $i < d$ 和 一个 $\in \mathbb{Z}^n$。根据定理 3.2,

$$H^i_{\mathfrak{m}}(I/J)_{\mathbf{a}} \;\cong\; \widetilde{H}^{\,i-|G_{\mathbf{a}}|-1}(\Delta_{\mathbf{a}}(J), \Delta_{\mathbf{a}}(I); \Bbbk)\,.$$

由于 $i - |G_{\mathbf{a}}| - 1 < d - |G_{\mathbf{a}}| - 1$，右侧根据假设为零。因此，对所有 $i < d$，都有$H^i_{\mathfrak{m}}(I/J)$ $= 0$，从而 I/J 是 Cohen-Macaulay。 □

定理 3.2 进一步给出如下刚性结果及一个直接推论 y.

The定理 3.4 (刚性)。 假设维数 $I/J \geq 2$。如果存在一个 使得 t

$$\widetilde{H}^0(\Delta_{\mathbf{a}}(J), \Delta_{\mathbf{a}}(I)) \neq 0,$$

则深度 $I/J \leq 1$。

证明。 由相对 Hochster–Takayama 公式， $H^1_{\mathfrak{m}}(I/J)_{\mathbf{a}} \neq 0$，因此深度 $I/J \leq 1$。 □

~**推论 3.5 (**(S_2)塌缩)。 若 dim(I/J) ≥ 2且存在 H^0($\Delta_{\mathbf{a}}(J)$ $\Delta_{\mathbf{a}}(I)$) $\neq 0$，则 I/J不成立 (S_2)。

证明。 该断言直接由定理 3.4得出。 □

函子性 与 Hochster–Takayama 公式类似，我们得到如下函子性结果。我们需要一个引理。

引理 3.6。 设 $J \subseteq I$ 是 S 中的单项式理想，并令 $M := I/J$。固定 $F \subseteq [n]$ 和一个 $=$ $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{Z}^n$。记 $\mathbf{a}^- := \sum_{i \in G_{\mathbf{a}}}(-a_i)\mathbf{e}_i \in \mathbb{N}^n$ 和 $\mathbf{a}^+ := \mathbf{a} + \mathbf{a}^- \in \mathbb{N}^n$.。以下结论成立:

(1) 若 $F \not\supseteq G_{\mathbf{a}}$，则 $(M_{x_F})_{\mathbf{a}} = 0$。*(2)* 若 $F \supseteq G_{\mathbf{a}}$，则 $(M_{x_F})_{\mathbf{a}}$ 或者是 0 ，或者是一个 1 维的 k- 向量空间。更确切地说,

$$(M_{x_F})_{\mathbf{a}} \neq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x^{\mathbf{a}^+} \in IS_{x_F} \setminus JS_{x_F},$$

在此情形下，$(M_{x_F})_{\mathbf{a}}$ 由 $\frac{x^{\mathbf{a}^+}}{x^{\mathbf{a}^-}} \in M_{x_F}$. 的类生成 ___

证明。 我们在 $\mathbb{Z}^n$-分次局部化 $S_{x_F} = S[x_i^{-1} \mid i \in F]$ 中进行。注意，Laurent 单项式 x^γ 属于 S_{x_F} 当且仅当对于所有 $i \notin F$ 都有 $\gamma_i \geq 0$ 。因此

$$(S_{x_F})_{\mathbf{a}} \neq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad a_i \geq 0 \;\text{ for all } i \notin F \quad \Longleftrightarrow \quad G_{\mathbf{a}} \subseteq F.$$

若 $G_{\mathbf{a}} \subseteq F$，则 supp($\mathbf{a}^-$) $\subseteq G_{\mathbf{a}} \subseteq F$，所以 $x^{\mathbf{a}^-}$ 是 S_{x_F} 中的一个单位，而元素 $x^{\mathbf{a}^+}/x^{\mathbf{a}^-}$ 是一个次数为 $\mathbf{a}$ 的 Laurent 单项式。

现在证明 $(S_{x_F})_{\mathbf{a}}$ 在 k 上是 1 维的，由 $x^{\mathbf{a}^+}/x^{\mathbf{a}^-}$ 张成。设 x^α/x^β 是 S_{x_F} 中任意一个次数为 $\mathbf{a}$ 的 Laurent 单项式，其中 $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$ 且 supp(β) $\subseteq F$。次数条件意味着 $\alpha - \beta = \mathbf{a}$。对于每个 $i \in G_{\mathbf{a}}$，我们都有 $a_i < 0$, 因此 $\alpha_i = \beta_i + a_i \geq 0$ 蕴含 $\beta_i \geq -a_i$。于是 $\beta \geq \mathbf{a}^-$ 逐分量成立。因此 $\beta - \mathbf{a}^- \in \mathbb{N}^n$，进而

$$\alpha - \mathbf{a}^+ = \alpha - (\mathbf{a} + \mathbf{a}^-) = (\beta + \mathbf{a}) - (\mathbf{a} + \mathbf{a}^-) = \beta - \mathbf{a}^- \in \mathbb{N}^n.$$

令 $\delta := \beta - \mathbf{a}^- = \alpha - \mathbf{a}^+ \in \mathbb{N}^n$。于是

$$\frac{x^\alpha}{x^\beta} = \frac{x^{\mathbf{a}^+}x^\delta}{x^{\mathbf{a}^-}x^\delta} = \frac{x^{\mathbf{a}^+}}{x^{\mathbf{a}^-}}.$$

因此， S_{x_F} 中恰有一个次数为$\mathbf{a}$的 Laurent 单项式。因此，$(S_{x_F})_{\mathbf{a}}$ 在 k 上是一维的，由 $x^{\mathbf{a}^+}/x^{\mathbf{a}^-}$ 张成。

(1) 若 $F \not\supseteq G_{\mathbf{a}}$，则由上文的论证可知 $(S_{x_F})_{\mathbf{a}} = 0$。因此，$(IS_{x_F})_{\mathbf{a}} = (JS_{x_F})_{\mathbf{a}} = 0$，进而 $(M_{x_F})_{\mathbf{a}} = 0$。

(2) 假设 $F \supseteq G_{\mathbf{a}}$。如我们所证明的，在这种情况下，$(S_{x_F})_{\mathbf{a}}$ 是一维的，由 $x^{\mathbf{a}^+}/x^{\mathbf{a}^-}$ 张成。由于 IS_{x_F} 和 JS_{x_F} 是 S_{x_F} 中的单项式理想，它们是 $\mathbb{Z}^n$-分次的，因此 $(IS_{x_F})_{\mathbf{a}}$ 和 $(JS_{x_F})_{\mathbf{a}}$ 是 $(S_{x_F})_{\mathbf{a}}$ 的 k-子空间。因为 $(S_{x_F})_{\mathbf{a}}$ 是一维的，这些分次部分各自要么为 0，要么等于 $(S_{x_F})_{\mathbf{a}}$。

因此，$(M_{x_F})_{\mathbf{a}} = (IS_{x_F}/JS_{x_F})_{\mathbf{a}}$要么为 0，要么为 1 维；当且仅当

$$\frac{x^{\mathbf{a}^+}}{x^{\mathbf{a}^-}} \in IS_{x_F} \quad \text{and} \quad \frac{x^{\mathbf{a}^+}}{x^{\mathbf{a}^-}} \notin JS_{x_F}.$$

由于 $x^{\mathbf{a}^-}$ 是 S_{x_F} 中的单位元，对于任意理想 K，我们有

$$\frac{x^{\mathbf{a}^+}}{x^{\mathbf{a}^-}} \in KS_{x_F} \quad \Longleftrightarrow \quad x^{\mathbf{a}^+} \in KS_{x_F}.$$

将此结果应用于 $K = I$ 和 $K = J$，得到

$$(M_{x_F})_{\mathbf{a}} \neq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x^{\mathbf{a}^+} \in IS_{x_F} \setminus JS_{x_F}.$$

当此条件成立时， $x^{\mathbf{a}^+}/x^{\mathbf{a}^-}$ 的类张成向量空间 $(M_{x_F})_{\mathbf{a}}$（其维数必为 1），证明至此完成。□

单个理想的函子性已在 [15] 中得到证明。下面的结果给出了相对次数复形和单项式理想商的局部上同调模的函子性。

定理 3.7（函子性）。设 $J \subseteq I$ 是 S 中的单项式理想，且设 $M = I/J$。固定 $i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$，并设 $\mathbf{a} \in \mathbb{Z}^n$ 和 $\mathbf{b} \in \mathbb{N}^n$ 满足 $G_{\mathbf{a}+\mathbf{b}} = G_{\mathbf{a}}$。则乘以 $\mathbf{x}^{\mathbf{b}}$ 诱导出一个交换图

$$\begin{array}{ccc} H^i_{\mathfrak{m}}(M)_{\mathbf{a}} & \xrightarrow{\cdot \mathbf{x}^{\mathbf{b}}} & H^i_{\mathfrak{m}}(M)_{\mathbf{a}+\mathbf{b}} \\ \cong\downarrow & & \downarrow\cong \\ \widetilde{H}^{\,i-|G_{\mathbf{a}}|-1}\big(\Delta_{\mathbf{a}}(J),\, \Delta_{\mathbf{a}}(I)\big) & \longrightarrow & \widetilde{H}^{\,i-|G_{\mathbf{a}}|-1}\big(\Delta_{\mathbf{a}+\mathbf{b}}(J),\, \Delta_{\mathbf{a}+\mathbf{b}}(I)\big), \end{array}$$

其中，竖直同构由相对 *Hochster–Takayama* 公式给出，底部的水平映射由自然包含诱导。

$$\Delta_{\mathbf{a}+\mathbf{b}}(J) \;\subseteq\; \Delta_{\mathbf{a}}(J) \; and \; \Delta_{\mathbf{a}+\mathbf{b}}(I) \;\subseteq\; \Delta_{\mathbf{a}}(I).$$

特别地，在假设 $G_{\mathbf{a}+\mathbf{b}} = G_{\mathbf{a}}$ 下，乘法映射

$$\cdot \mathbf{x}^{\mathbf{b}} : \; H^i_{\mathfrak{m}}(M)_{\mathbf{a}} \longrightarrow H^i_{\mathfrak{m}}(M)_{\mathbf{a}+\mathbf{b}}$$

当且仅当诱导的相对约化上同调映射为零时，该映射为零。

证明。 设 $\mathbf{b} \in \mathbb{N}^n$ 和 $\mathbf{a} \in \mathbb{Z}^n$ 满足 $G_{\mathbf{a}+\mathbf{b}} = G_{\mathbf{a}}$。令 $G := G_{\mathbf{a}} = G_{\mathbf{a}+\mathbf{b}}$。乘以$x^{\mathbf{b}}$ 定义了一个次数为$\mathbf{b}$的齐次 S-线性映射 $M \to M$，因此得到一个 $\mathbb{Z}^n$-分次 Čech 复形态射

$$\mu_{\mathbf{b}}^{\bullet}: \check{\mathbf{C}}^{\bullet} \otimes_S M \longrightarrow \check{\mathbf{C}}^{\bullet} \otimes_S M, \qquad u \longmapsto x^{\mathbf{b}} u,$$

ˇ，由于所有局部化映射都是 S-线性的，它与 Čech 微分可交换。取$\mathbf{a}$次分次分量，得到一个上链映射

$$(\mu_{\mathbf{b}}^{\bullet})_{\mathbf{a}}: (\check{\mathbf{C}}^{\bullet} \otimes_S M)_{\mathbf{a}} \longrightarrow (\check{\mathbf{C}}^{\bullet} \otimes_S M)_{\mathbf{a}+\mathbf{b}},$$

其在上同调上诱导的映射恰为 $\cdot x^{\mathbf{b}}$： $H^i_{\mathfrak{m}}(M)_{\mathbf{a}} \to H^i_{\mathfrak{m}}(M)_{\mathbf{a}+\mathbf{b}}$。

对于任意单项式理想 $K \subseteq S$，我们注意到 $\Delta_{\mathbf{a}+\mathbf{b}}(K) \subseteq \Delta_{\mathbf{a}}(K)$。事实上，令 $E \subseteq [n] \setminus G$，并设 $F := G \cup E$。由次数复形的定义可得

$$E \in \Delta_{\mathbf{a}}(K) \iff x^{\mathbf{a}^+} \notin KS_{x_F} \qquad (\mathbf{a} \in \mathbb{Z}^n).$$

若 $E \in \Delta_{\mathbf{a}+\mathbf{b}}(K)$，则 $x^{(\mathbf{a}+\mathbf{b})^+} = x^{\mathbf{a}^+ + \mathbf{b}} \notin KS_{x_F}$。若 $x^{\mathbf{a}^+} \in KS_{x_F}$，则乘以$x^{\mathbf{b}} \in S \subseteq S_{x_F}$ 得到 $x^{\mathbf{a}^+ + \mathbf{b}} \in KS_{x_F}$，矛盾。因此，$x^{\mathbf{a}^+} \notin KS_{x_F}$ 且 $E \in \Delta_{\mathbf{a}}(K)$。这证明了 $K = I, J$ 的包含关系，从而得到一对的包含关系

$$(\Delta_{\mathbf{a}+\mathbf{b}}(J), \Delta_{\mathbf{a}+\mathbf{b}}(I)) \hookrightarrow (\Delta_{\mathbf{a}}(J), \Delta_{\mathbf{a}}(I)).$$

令 ι^* 表示约化相对上同调上的诱导限制映射。

回顾定理 3.2 的证明可知，同构

$$H^i_{\mathfrak{m}}(M)_{\mathbf{a}} \cong \widetilde{H}^{\,i-|G_{\mathbf{a}}|-1}\big(\Delta_{\mathbf{a}}(J), \Delta_{\mathbf{a}}(I); \Bbbk\big)$$

由余链复形的一个识别所诱导

$$\Phi_{\mathbf{a}}: (\check{\mathbf{C}}^{\bullet} \otimes_S M)_{\mathbf{a}}[|G_{\mathbf{a}}| + 1] \xrightarrow{\cong} \widetilde{C}^{\bullet}\big(\Delta_{\mathbf{a}}(J), \Delta_{\mathbf{a}}(I); \Bbbk\big),$$

其自然基元素描述如下。取 $E \subseteq [n] \setminus G_{\mathbf{a}}$并令 $F := G_{\mathbf{a}} \cup E$。由引理 3.6，$(M_{x_F})_{\mathbf{a}}$ 的维数为 0 或 1；若其非零，则由类

$$u_E(\mathbf{a}) := \left[\frac{x^{\mathbf{a}^+}}{x^{\mathbf{a}^-}}\right] \in (M_{x_F})_{\mathbf{a}}.$$

此外，$(M_{x_F})_{\mathbf{a}} \neq 0$成立当且仅当 $E \in \Delta_{\mathbf{a}}(J) \setminus \Delta_{\mathbf{a}}(I)$。在 $\Phi_{\mathbf{a}}$下，生成元$u_E(\mathbf{a})$对应于 $(\Delta_{\mathbf{a}}(J) \ \Delta_{\mathbf{a}}(I))$ 的相对余链复形的标准基上链 φ_E。

现在，取 $E \subseteq [n] \setminus G$和 $F := G \cup E$。假设 $(M_{x_F})_{\mathbf{a}} \neq 0$，则 $E \in \Delta_{\mathbf{a}}(J) \setminus \Delta_{\mathbf{a}}(I)$，且$u_E(\mathbf{a})$有定义。由于 $G_{\mathbf{a}+\mathbf{b}} = G_{\mathbf{a}}$，我们有 $(\mathbf{a}+\mathbf{b})^- = \mathbf{a}^-$ 且 $(\mathbf{a}+\mathbf{b})^+ = \mathbf{a}^+ + \mathbf{b}$。因此，在 M_{x_F} 中，

$$x^{\mathbf{b}} \cdot u_E(\mathbf{a}) = x^{\mathbf{b}} \cdot \left[\frac{x^{\mathbf{a}^+}}{x^{\mathbf{a}^-}}\right] = \left[\frac{x^{\mathbf{a}^+ + \mathbf{b}}}{x^{\mathbf{a}^-}}\right] = \left[\frac{x^{(\mathbf{a}+\mathbf{b})^+}}{x^{(\mathbf{a}+\mathbf{b})^-}}\right] = u_E(\mathbf{a}+\mathbf{b}).$$

若 $E \in \Delta_{\mathbf{a}+\mathbf{b}}(J) \setminus \Delta_{\mathbf{a}+\mathbf{b}}(I)$，则 $(M_{x_F})_{\mathbf{a}+\mathbf{b}} \neq 0$和 $u_E(\mathbf{a}+\mathbf{b})$ 是生成元，因此 $(\mu_{\mathbf{b}}^{\bullet})_{\mathbf{a}}$将$u_E(\mathbf{a})$ 映到对应于同一个面 E 的生成元。若 $E \notin \Delta_{\mathbf{a}+\mathbf{b}}(J) \setminus \Delta_{\mathbf{a}+\mathbf{b}}(I)$，则 $(M_{x_F})_{\mathbf{a}+\mathbf{b}} = 0$，因此 $(\mu_{\mathbf{b}}^{\bullet})_{\mathbf{a}}$ 将 $u_E(\mathbf{a})$ 映到次数 $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ 中的 0。

在单纯侧，限制映射 ι^* 在 E 是较小相对复形的一个面时，将基余链 φ_E 映到 φ_E；否则映到 0。因此我们得出，余链复形图

$$\begin{array}{ccc} (\check{\mathbf{C}}^\bullet \otimes_S M)_{\mathbf{a}}[|G|+1] & \xrightarrow{(\mu_{\mathbf{b}}^\bullet)_{\mathbf{a}}} & (\check{\mathbf{C}}^\bullet \otimes_S M)_{\mathbf{a}+\mathbf{b}}[|G|+1] \\ \downarrow{\scriptstyle \Phi_{\mathbf{a}}} & & \downarrow{\scriptstyle \Phi_{\mathbf{a}+\mathbf{b}}} \\ \widetilde{C}^\bullet(\Delta_{\mathbf{a}}(J), \Delta_{\mathbf{a}}(I); \Bbbk) & \xrightarrow{\iota^*} & \widetilde{C}^\bullet(\Delta_{\mathbf{a}+\mathbf{b}}(J), \Delta_{\mathbf{a}+\mathbf{b}}(I); \Bbbk) \end{array}$$

在基元素上可交换，因此处处可交换。取上同调后，得到所需的交换图。□

4. Relative Complexes for Squarefree Monomial Ideals

本节将讨论 $J \subseteq I$ 是平方自由单项式理想的情形。此时，与 [21] 和 [1], 中一样，商 I/J 对应于一个相对单纯复形（Δ, Γ），其中 Δ 和 Γ 分别是 I 和 J的 Stanley-Reisner 复形。我们将看到，对于一个 $\in \{0, \pm 1\}^n$，在一个处的相对次数复形是（Δ, Γ）的限制；此外，链接与局部化相容。

引理 4.1. 设 Σ 是定义在 $[n]$ 上的单纯复形，且 $\mathbf{a} \in \{0, \pm 1\}^n$。令 $F = [n] \setminus G_{\mathbf{a}}$。那么，存在一个自然的识别

$$\Delta_{\mathbf{a}}(I_\Sigma) = \Sigma|_F,$$

其中，$\Sigma|_F$ 表示 Σ 在顶点集 F上的诱导子复形。

证明。根据定义，面 $E \subseteq F$ 属于 $\Delta_{\mathbf{a}}(I_\Sigma)$ 当且仅当 $x^E \notin I_\Sigma$，等价地，$E \in \Sigma$，且 E 不包含 $G_{\mathbf{a}}$中的任何顶点。这正是诱导子复形 $\Sigma|_F$的定义。□

将引理 4.1 应用于 Γ 和 Δ，立即得到以下推论。

推论 4.2。设 $\Gamma \subseteq \Delta$ 是定义在 $[n]$ 上的单纯复形，并设 一个 $\in \{0, \pm 1\}^n$。则这对单纯复形之间存在自然的对应关系

$$(\Delta_{\mathbf{a}}(I_\Delta), \Delta_{\mathbf{a}}(I_\Gamma)) \cong (\Delta|_F, \Gamma|_F),$$

其中 $F = [n] \setminus G_{\mathbf{a}}$。

因此，在平方自由多重次数下，I_Γ/I_Δ 的相对 Hochster–Takayama 公式由诱导子复形的相对拓扑所决定。

将推论 4.2 与相对 Hochster–Takayama 公式结合，可得到 Stanley–Reisner 商的多重分次局部上同调的以下显式描述。

定理 4.3 (Stanley–Reisner 商的相对 Hochster–Takayama 公式)。设$\Gamma \subseteq \Delta$ 是定义在 $[n]$ 上的单纯复形，且 $M = I_\Gamma/I_\Delta$。对于每个满足 $F = [n] \setminus G_{\mathbf{a}}$的平方自由多重次数$\mathbf{a} \in \{0, \pm 1\}^n$，存在一个自然同构

$$H^i_{\mathfrak{m}}(M)_{\mathbf{a}} \cong \widetilde{H}^{i-|G_{\mathbf{a}}|-1}(\Delta|_F, \Gamma|_F).$$

*Pr*证明。 根据单项式商的相对 Hochster–Takayama 公式 ,

$$H^i_{\mathfrak{m}}(M)_{\mathbf{a}} \cong \widetilde{H}^{i-|G_{\mathbf{a}}|-1}\left(\Delta_{\mathbf{a}}(I_\Delta), \Delta_{\mathbf{a}}(I_\Gamma)\right).$$

断言现在由推论4.2得出。 □

诱导子复形的描述有一种链接解释，这对于局部化和深度的考量尤为有用。设 $F \subseteq [n]$ ，并用 $P_F = (x_i : i \notin F)$ 表示相应的单项式素理想。将 I_Γ/I_Δ 在 P_F 处局部化，对应于限制到诱导对 $(\Delta|_F,\ \Gamma|_F)$。

此外，对于面 $E \subseteq F$，链接满足

$$\mathrm{link}_{\Gamma|_F}(E) = \mathrm{link}_\Gamma(E)|_{F\setminus E}, \quad \mathrm{link}_{\Delta|_F}(E) = \mathrm{link}_\Delta(E)|_{F\setminus E}.$$

因此，诱导子复形的相对拓扑也可以通过相对链接来研究。

这一对应使我们能够将 I_Γ/I_Δ 的代数性质（例如支撑、维数、深度和序贯 Cohen–Macaulay 性）转化为关于对 $(\Delta,\ \Gamma)$ 的逐链接拓扑条件。

5. Cohen-Macaulay and Generalized Cohen-Macaulay Properties

本节中，我们得到 Cohen–Macaulay 单项式理想商的相对 Reisner 判据。我们还刻画了广义 Cohen-Macaulay 单项式理想商。

相对 Reisner 判据。 首先注意，推论3.3 给出了相对次数复形上的一个统一消失条件，该条件能够保证单项式理想商具有 Cohen-Macaulay 性。为了得到真正的相对 Reisner 判据，我们需要弄清楚哪些多重次数 $\mathbf{a}$实际上会对局部上同调作出贡献。下一个引理为此提供了关键的技术依据。

引理 5.1. 设 $d = \dim(I/J)$。若

$$H^i_{\mathfrak{m}}(I/J)_{\mathbf{a}} \neq 0 \quad \textit{for some } i \in \mathbb{Z},$$

then

$$\dim(\Delta_{\mathbf{a}}(J), \Delta_{\mathbf{a}}(I)) \ \leq\ d - |G_{\mathbf{a}}| - 1.$$

证明。 记 $F = G_{\mathbf{a}}$ ，并令 $\mathbf{a}^+ \in \mathbb{N}^n$ 由$\mathbf{a}$ 将负项替换为 0 得到。可以看出

$$\Delta_{\mathbf{a}}(J) = \mathrm{link}_{\Delta_{\mathbf{a}^+}(J)}(F), \qquad \Delta_{\mathbf{a}}(I) = \mathrm{link}_{\Delta_{\mathbf{a}^+}(I)}(F),$$

因此

$$(*) \qquad \dim(\Delta_{\mathbf{a}}(J), \Delta_{\mathbf{a}}(I)) \leq \dim \Delta_{\mathbf{a}^+}(J) - |F|.$$

由于 $H^i_{\mathfrak{m}}(I/J)_{\mathbf{a}} \neq 0$，某个局部化 $(I/J)_{x_F}$中存在一个多重次数为$\mathbf{a}$ 的非零元素。等价地，存在 $\mathbf{u} \in \mathbb{N}^n$和 $t \gg 0$，使得

$$\mathbf{u} - t\mathbf{1}_F = \mathbf{a} \quad \text{and} \quad x^{\mathbf{u}} \in IS_{x_F} \setminus JS_{x_F}.$$

清除分母后，存在 $N \gg 0$ 使得

$$x^{\mathbf{c}} := x_F^N x^{\mathbf{u}} \in I \setminus J,$$

并且逐坐标有 $\mathbf{c}\ \geq \mathbf{a}^+$ 。

由于 $x^{\mathbf{c}}$ 可被 $x^{\mathbf{a}^+}$ 整除，因此 $(J:\ x^{\mathbf{c}}) \subseteq (J:\ x^{\mathbf{a}^+})$。也就是说，$\Delta_{\mathbf{a}^+}(J) \subseteq \Delta_{\mathbf{c}}(J)$。因此，

$$\dim \Delta_{\mathbf{a}^+}(J) \le \dim \Delta_{\mathbf{c}}(J).$$

因为 $x^{\mathbf{c}} \in I \setminus J$，引理 5.1 给出 $\dim\ \Delta_{\mathbf{c}}(J) \le d-1$. 将其与 $(*)$ 结合可得

$$\dim(\Delta_{\mathbf{a}}(J), \Delta_{\mathbf{a}}(I)) \le (d-1) - |F| = d - |G_{\mathbf{a}}| - 1,$$

如所需。 □

现在我们可以给出精确的 Reisner 刻画。

定理 5.2 (相对 Reisner 判据)。 设 $d = \dim(I/J)$。以下条件等价：

(1) I/J 是 *Cohen-Macaulay*。*(2)* 对每个 $\mathbf{a} \in \mathbb{Z}^n$ 以及每个面 $F \in \Delta_{\mathbf{a}}(J)$，

$$\widetilde{H}^j\big((\mathrm{link}_{\Delta_{\mathbf{a}}(J)}(F), \mathrm{link}_{\Delta_{\mathbf{a}}(I)}(F)); \Bbbk\big) = 0 \quad \textit{for all } j < d - |G_{\mathbf{a}}| - |F| - 1.$$

证明。 (1) $\Longrightarrow$ (2)。假设 I/J 是维数为 d 的 Cohen-Macaulay。固定 $\mathbf{a}$ 并令 $F \in \Delta_{\mathbf{a}}(J)$。设 $\mathbf{b} \in \mathbb{Z}^n$ 定义如下：

$$b_i = \begin{cases} -1, & i \in F, \\ a_i, & i \notin F. \end{cases}$$

然后 $G_{\mathbf{b}} = G_{\mathbf{a}} \cup F$ 和

$$\Delta_{\mathbf{b}}(J) = \mathrm{link}_{\Delta_{\mathbf{a}}(J)}(F), \qquad \Delta_{\mathbf{b}}(I) = \mathrm{link}_{\Delta_{\mathbf{a}}(I)}(F).$$

由于 I/J 是 Cohen-Macaulay 的，$H^i_{\mathfrak{m}}(I/J) = 0$ 对所有 $i < d$ 均成立。将定理 3.2 应用于 $\mathbf{b}$ 可得

$$\widetilde{H}^{\,i-|G_{\mathbf{b}}|-1}\big(\mathrm{link}_{\Delta_{\mathbf{a}}(J)}(F), \mathrm{link}_{\Delta_{\mathbf{a}}(I)}(F)\big) = 0 \quad \text{for all } i < d,$$

这等价于所述的消失条件。

(2) $\Longrightarrow$ (1)。在 (2) 中取 $F = \varnothing$ 可得

$$\widetilde{H}^j(\Delta_{\mathbf{a}}(J), \Delta_{\mathbf{a}}(I)) = 0 \quad \text{for all } j < d - |G_{\mathbf{a}}| - 1.$$

根据推论 3.3，这意味着 I/J 是 Cohen-Macaulay 的。 □

广义 Cohen-Macaulay 单项式理想商。 回顾一下，如果对于所有 $i < d$，M 是广义 *Cohen-Macaulay* 的，则 $H^i_{\mathfrak{m}}(M)$ 具有有限长度。下面的结果通过相应相对次数复形的约化同调的消失刻画了广义 Cohen-Macaulay 单项式理想商。

定理 5.3 (广义 Cohen-Macaulay 性质)。 以下各项等价：

(1) I/J 是广义 *Cohen-Macaulay*。*(2)* 对于每个 $i < d$，都存在一个整数 $N(i)$，使得对于所有满足 $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{N}^n$ 且 $\max(a_j) \ge N(i)$ 的情形，

$$\widetilde{H}^{\,i-1}((\Delta_{\mathbf{a}}(J), \Delta_{\mathbf{a}}(I)); \Bbbk) = 0.$$

证明。 取 $i < d$。由于 $H^i_{\mathfrak{m}}(I/J)$ 是 $\mathbb{Z}^n$-分次的，当且仅当存在$N(i)$ 使得 $H^i_{\mathfrak{m}}(I/J)_{\mathbf{a}} = 0$对于所有 $\mathbf{a} \in \mathbb{N}^n$满足 $\max(a_j) \geq N(i)$。对于 $\mathbf{a} \in \mathbb{N}^n$，我们有$G_{\mathbf{a}} = \varnothing$，因此定理 3.2 给出

$$H^i_{\mathfrak{m}}(I/J)_{\mathbf{a}} \cong \widetilde{H}^{i-1}((\Delta_{\mathbf{a}}(J), \Delta_{\mathbf{a}}(I)); \Bbbk).$$

因此， $H^i_{\mathfrak{m}}(I/J)$具有有限长度，等价于所述约化相对上同调最终消失。对所有 $i < d$ ，这一结论成立当且仅当 I/J 是广义 Cohen-Macaulay。□

6. Symbolic Quotients

在本节中，我们使用相对次数复形的 Hochster–Takayama 公式来研究符号商 $I^{(t)}/I^{(t+1)}$，其中 $t \geq 1$，且平方自由单 I。我们的主要结果揭示了这一性质与相应单纯复形的拟阵结构之间另一种有趣的联系，这与文献 $I^{(t)}$中给出的 $t \geq 1$关于[16, 24]的 Cohen-Macaulay 性质的精细刻画相似。

我们先来看下面这个简单的观察。

引理 6.1. 设 Δ是一个单纯复形， $I = I_\Delta$ 是其 *Stanley-Reisner* 理想。假设 $I \neq (0)$ ，并设 J 是满足 $I^t \subseteq J \subseteq I^{(t)}$的单项式理想。那么，对任意$t \geq 1$,

$$I^{(t+1)} : J = I.$$

特别地，维数 $I^{(t)}/I^{(t+1)}$ =维数 S/I。

证明。 显然， $IJ \subseteq I.I^{(t)} \subseteq I^{(t+1)}$。反设存在一个单项式$x^{\mathbf{a}} \in (I^{(t+1)} : J) \setminus I$。于是，平方自由单项式 $x_G = \sqrt{x^{\mathbf{a}}} \notin I$，这意味着$G \in \Delta$。令 F 为 Δ 的一个面，使得 $G \subseteq F$。

注意到 $F \neq [n]$，因此存在 $u \in [n] \setminus F$。由此可得 $F \cup \{u\} \notin \Delta$，即存在 I的一个极小生成元，其形式为 $x_u x_{F'}$，其中 $F' \subseteq F$。因此，

$$x^{\mathbf{a}}(x_u x_{F'})^t \in x^{\mathbf{a}} I^t \subseteq x^{\mathbf{a}} J \subseteq I^{(t+1)} = \bigcap_{H \in \mathcal{F}(\Delta)} P_H^{t+1}.$$

另一方面，可以看出 $\operatorname{supp}(x^{\mathbf{a}}(x_{F'})^t) \subseteq G \cup F' \subseteq F$。因此， $x^{\mathbf{a}}(x_u x_{F'})^t \notin P_F^{t+1}$ ，这与此矛盾。断言得证。□

本节的主要结果陈述如下。

定理 6.2 (Cohen-Macaulay 符号商)。 设 Δ 是定义在 $[n]$ 上的单纯复形， $I = I_\Delta$ 是其 *Stanley–Reisner* 理想。那么下列条件等价：

(1) 对所有 $t \geq 1$， $I^{(t)}/I^{(t+1)}$ 都是 *Cohen-Macaulay*；

(2) 对某个 $t \geq 2$， $I^{(t)}/I^{(t+1)}$ 是 *Cohen-Macaulay*；

(3) Δ 是拟阵。

此外，若 维数 $S/I \geq 2$，则上述条件还等价于：

(4) 对所有 $t \geq 1$， $I^{(t)}/I^{(t+1)}$ 满足 *Serre* 条件 (S_2) ； *(5)* 对某个 $t \geq 2$， $I^{(t)}/I^{(t+1)}$ 满足 *Serre* 条件 (S_2) 。

若 维数 $S/I \leq 1$，则 $I^{(t)}/I^{(t+1)}$ 对所有 $t \geq 1$ 都平凡地满足 (S_2) 。

证明。 显然，(1) $\Longrightarrow$(2)。假设 (3) 成立。由 [16, 24]， $S/I^{(t)}$ 对于任意 $t \geq 1$ 都是 Cohen-Macaulay。这一点结合引理 6.1 并考虑短正合列

$$0 \to I^{(t)}/I^{(t+1)} \to S/I^{(t+1)} \to S/I^{(t)} \to 0$$

以及它所对应的局部上同调长正合列，推出对所有 $t \geq 1$， $I^{(t)}/I^{(t+1)}$ 都是一个 Cohen-Macaulay 模。也就是说，(3) $\Longrightarrow$ (1)。

我们将证明 (2) $\Longrightarrow$ (3)。假设对于某个 $t \geq 2$， $I^{(t)}/I^{(t+1)}$ 是 Cohen-Macaulay，而 Δ 不是拟阵。那么，必要时重新编号后，存在 F， $G \in \Delta$ ，使得 $F \setminus G = \{1\}$、 $G \setminus F = \{2,3\}$ 且 $F \cup \{2\} \notin \Delta$， $F \cup \{3\} \notin \Delta$。

设 $L =$ 链接$_\Delta\{1\} \cap$ 链接$_\Delta\{2,3\}$。注意到 $F \cap G \in L$，因此我们可以取 L 的一个面 U，使得 $F \cap G \subseteq U$。令 $\mathbf{a} = t\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_U$。特别地， $\mathbf{a}^+ = t\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$且 $G_\mathbf{a} = U$。可以验证

$$\Delta_{\mathbf{a}^+}(I^{(t+1)}) = \operatorname{star}_\Delta\{1\} \cup \operatorname{star}_\Delta\{2,3\}$$

and

$$\Delta_{\mathbf{a}^+}(I^{(t)}) \text{ is a cone over } \{1\}.$$

此外，我们得到

$$\begin{aligned}\Delta_\mathbf{a}(I^{(t+1)}) &= \operatorname{link}_{\Delta_{\mathbf{a}^+}(I^{(t+1)})} G_\mathbf{a} \\ &= \operatorname{link}_{\operatorname{star}_\Delta\{1\}} U \cup \operatorname{link}_{\operatorname{star}_\Delta\{2,3\}} U.\end{aligned}$$

首先注意到，由于 $\{1\} \in$ link$_{\operatorname{star}_\Delta\{1\}} U$且 $\{2,3\} \in$ link$_{\operatorname{star}_\Delta\{2,3\}} U$，这两个链接都不是空复形或零复形。我们还将证明

$$\operatorname{link}_{\operatorname{star}_\Delta\{1\}} U \cap \operatorname{link}_{\operatorname{star}_\Delta\{2,3\}} U = \{\varnothing\}.$$

事实上，反设存在一个顶点 $x \in [n]$ 属于交集 link$_{\operatorname{star}_\Delta\{1\}} U \cap$link$_{\operatorname{star}_\Delta\{2,3\}} U$。那么， $x \notin U$， $U \cup \{x\} \in$star$_\Delta\{1\}$且 $U \cup \{x\} \in$star$_\Delta\{2,3\}$。换言之， $x \notin U, U \cup \{x,1\} \in \Delta$ 且 $U \cup \{x,2,3\} \in \Delta$。注意， x必定不同于 1， 2， 3——因为若 $x = 2$， 则 $U \cup \{1,2\} \in \Delta$，从而 $(F \cap G) \cup \{1,2\} = F \cup \{2\} \in \Delta$，这就产生了矛盾——对于 $x = 1$ 或 $x = 3$的情形也可作类似论证。因此，我们得到 $U \cup \{x\} \in$ link$_\Delta\{1\}$ 且 $U \cup \{x\} \in$ link$_\Delta\{2,3\}$。于是，我们有 $U \cup \{x\} \in L$，这与 U在 L中的极大性矛盾。因此，link$_{\operatorname{star}_\Delta\{1\}} U \cap$link$_{\operatorname{star}_\Delta\{2,3\}} U = \{\varnothing\}$。

我们刚刚证明了 $\Delta_\mathbf{a}$（$I^{(t+1)}$）是不相交并集，由非空单纯复形链接$_{\operatorname{star}_\Delta\{1\}} U$和链接$_{\operatorname{star}_\Delta\{2,3\}} U$组成。令 $r = |U| + 1$。根据定理 3.2，有

$$\begin{aligned}H^r_\mathfrak{m}(I^{(t)}/I^{(t+1)})_\mathbf{a} &\cong \widetilde{H}^{r-|G_\mathbf{a}|-1}(\Delta_\mathbf{a}(I^{(t+1)}), \Delta_\mathbf{a}(I^{(t)})) \\ &= \widetilde{H}^{r-|U|-1}(\operatorname{link}_{\Delta_{\mathbf{a}^+}(I^{(t+1)})} U, \operatorname{link}_{\Delta_{\mathbf{a}^+}(I^{(t)})} U) \\ &= \widetilde{H}^0(\operatorname{link}_{\operatorname{star}_\Delta\{1\}} U \cup \operatorname{link}_{\operatorname{star}_\Delta\{2,3\}} U, \text{ the cone over } \{1\}) \\ &\cong \widetilde{H}^0(\operatorname{link}_{\operatorname{star}_\Delta\{1\}} U \cup \operatorname{link}_{\operatorname{star}_\Delta\{2,3\}} U) \neq (0).\end{aligned}$$

这里，最后一个同构来自由一对单纯复形及其相对复形的标准长正合列。

最后注意到 $|U| \leq$ dim(链接$_\Delta\{2,3\}$) $+ 1 \leq$ dim $\Delta - 1$。因此 e,

$$r = |U| + 1 \leq \dim \Delta < \dim(S/I) = \dim(I^{(t)}/I^{(t+1)}),$$

其中最后一个等式由引理6.1得出。这意味着 $I^{(t)}/I^{(t+1)}$ 不是 Cohen-Macaulay，矛盾。我们已经证明了 (1)、(2) 和 (3) 等价。

现在假设 $\dim S/I \geq 2$。根据引理 6.1，对于所有 $t \geq 1$，$\dim(I^{(t)}/I^{(t+1)}) = \dim S/I \geq 2$。显然，(1)$\Longrightarrow$(4)$\Longrightarrow$(5)，因为 Cohen-Macaulay 蕴含 (S_2)。接下来只需证明 (5)$\Longrightarrow$(3)。如果 Δ 不是拟阵，那么在 (2)$\Longrightarrow$(3) 的证明中构造的同一个见证多重次数 a 会产生 $\widetilde{H}^0\big((\Delta_{\mathbf{a}}(I^{(t+1)}) \ \Delta_{\mathbf{a}}(I^{(t)}))\big) \neq 0$，其中 $t \geq 2$。因此，$H^1_{\mathfrak{m}}(I^{(t)}/I^{(t+1)}) \neq 0$，所以 $\operatorname{depth}(I^{(t)}/I^{(t+1)}) \leq 1$。由于 $d \geq 2$，这与 $\mathfrak{m}$处的 (S_2) 矛盾。因此，Δ 必定是拟阵。□

例 6.3. 考虑 $I = (x_1x_2,\ x_2x_3,\ x_3x_4,\ x_4x_5,\ x_5x_1)$，其中 $S = \Bbbk[x_1, x_2, x_3, x_4, x_5]$。那么，$I$ 是一个 5-圈的 Stanley-Reisner 理想，它不是拟阵。在此例中，$I^{(t)}/I^{(t+1)}$是 Cohen-Macaulay 的充要条件是 $t = 1$。

我们希望了解6.2定理中类似的刻画是否对一般的单项式理想成立。

问题 6.4. 当 I 是单项式理想时，对所有 $t \geq 1$，刻画 $I^{(t)}/I^{(t+1)}$的 Cohen-Macaulay 性。

对于纯 单纯复形，广义 Cohen-Macaulay 符号商具有与 Cohen-Macaulay 符号商类似的刻画，正如下述评述所示。

注 6.5（广义 Cohen-Macaulay 符号商）。固定 $t \geq 2$ 并令 $M = I_\Delta^{(t)}/I_\Delta^{(t+1)}$。假设 $\dim S/I_\Delta \geq 2$。由引理 6.1，$\dim M = \dim S/I_\Delta \geq 2$。

注意，根据定义，若 M 是广义 Cohen-Macaulay，则 M 在去心谱上是 Cohen-Macaulay。在 $x_F = \prod_{i\in F} x_i$ 处局部化，对任意非空面$F \in \Delta$，并利用符号幂与局部化可交换这一事实（因为 I_Δ 是根理想），我们得到

$$M_{x_F} \cong \Bbbk[x_i^{\pm 1} \mid i \in F] \otimes_{\Bbbk} \left(I^{(t)}_{\operatorname{link}_\Delta(F)}/I^{(t+1)}_{\operatorname{link}_\Delta(F)}\right).$$

因此，M_{x_F} 对每个 $F \neq \varnothing$ 都是 Cohen-Macaulay。根据定理 6.2 中的 Cohen-Macaulay 分类，这意味着 $\operatorname{link}_\Delta(F)$ 对每个非空面 $F \in \Delta$ 都是拟阵。特别地，Δ 是 局部拟阵的。

另一方面，由标准短正合列可知，$\operatorname{Ass}(M) \subseteq \operatorname{Ass}(S/I_\Delta^{(t)}) \cup \operatorname{Ass}(S/I_\Delta^{(t+1)}) = \operatorname{Min}(I_\Delta)$。因此，若 Δ 是纯的，则 M 是等维的。特别地，若此外 M 在去心谱上是 Cohen-Macaulay 的，则 M 是广义 Cohen-Macaulay 的。

因此，我们证明了在 Δ 是纯的、$t \geq 2$且 $\dim S/I_\Delta \geq 2$这些假设下，

$$I_\Delta^{(t)}/I_\Delta^{(t+1)} \text{ is generalized CM} \Longleftrightarrow \Delta \text{ is locally matroidal.}$$

换言之，若 Δ是纯的且维数至少为 1，则以下条件等价：

(1) 对所有 $t \geq 1$，$I_\Delta^{(t)}/I_\Delta^{(t+1)}$ 都是广义 Cohen-Macaulay；

(2) 对某个 $t \geq 2$，$I_\Delta^{(t)}/I_\Delta^{(t+1)}$ 是广义 Cohen-Macaulay；(

3) Δ 是局部拟阵的。

7. Dimension Stability and Symbolic-Ordinary Discrepancy Modules

本节考察单项式理想商的维数及其与次数复形的关系。我们还研究函数 $\dim I^{(t)}/I^t$，其中 I 是某个图的边理想。

对于单项式理想 I，令 $\mathcal{G}(I)$ 表示I的唯一极小单项式生成元集合。对于单项式理想 $J \subseteq I$，为简便起见，我们将 $x^{\mathbf{a}} \in \mathcal{G}(I) \setminus J$ 记为 I 中不属于 J的极小单项式生成元集合。以下引理使我们能够根据相应的次数复形理解单项式理想商的维数。

引理 7.1. 设 $J \subseteq I$ 为单项式理想。那么，

$$\begin{aligned}\dim(I/J) &= \max_{x^{\mathbf{a}} \in I \setminus J} \{\dim(S/\sqrt{J : x^{\mathbf{a}}})\} = \max_{x^{\mathbf{a}} \in I \setminus J} \{\dim(\Delta_{\mathbf{a}}(J)) + 1\} \\ &= \max_{x^{\mathbf{a}} \in \mathcal{G}(I) \setminus J} \{\dim(S/\sqrt{J : x^{\mathbf{a}}})\} = \max_{x^{\mathbf{a}} \in \mathcal{G}(I) \setminus J} \{\dim(\Delta_{\mathbf{a}}(J)) + 1\}.\end{aligned}$$

证明. 可以看出

$$\sqrt{\operatorname{Ann}(I/J)} = \sqrt{J : I} = \bigcap_{x^{\mathbf{a}} \in I \setminus J} \sqrt{J : x^{\mathbf{a}}} = \bigcap_{x^{\mathbf{a}} \in \mathcal{G}(I) \setminus J} \sqrt{J : x^{\mathbf{a}}}.$$

这意味着

$$\dim(I/J) = \max_{x^{\mathbf{a}} \in I \setminus J} \{\dim(S/\sqrt{J : x^{\mathbf{a}}})\} = \max_{x^{\mathbf{a}} \in \mathcal{G}(I) \setminus J} \{\dim(S/\sqrt{J : x^{\mathbf{a}}})\}.$$

进一步可得，$S/\sqrt{\operatorname{Ann}(I/J)}$ 是以下对象的 Stanley-Reisner 环

$$\bigcup_{x^{\mathbf{a}} \in I \setminus J} \Delta_{\mathbf{a}}(J) = \bigcup_{x^{\mathbf{a}} \in \mathcal{G}(I) \setminus J} \Delta_{\mathbf{a}}(J).$$

特别地，这一断言可由众所周知的关系推出：Stanley-Reisner 环的维数与其对应的单纯复形的维数之间存在这种关系（例如，参见[21]）。□

引理 7.2。设 $J \subseteq I$ 为单项式理想。若 I/J 是维数为 α的 *Cohen-Macaulay* 环，则对任意 $x^{\mathbf{a}} \in I \setminus J$，$\Delta_{\mathbf{a}}(J)$都是维数为 $\alpha - 1$的 *Cohen-Macaulay* 环。

证明。任取一个 $\in \mathbb{N}^n$使得 $x^{\mathbf{a}} \in I \setminus J$。由引理7.1，$\dim(\Delta_{\mathbf{a}}(J)) \leq \alpha - 1$。

若 $\dim(\Delta_{\mathbf{a}}(J)) = \alpha - 1$，则由 Cohen-Macaulay Stanley-Reisner 环的 Reisner 判据（例如，参见 [21]）、引理3.1和定理3.2可知 $\Delta_{\mathbf{a}}(J)$ 是 Cohen-Macaulay 的。

现在假设 $\dim(\Delta_{\mathbf{a}}(J)) < \alpha - 1$。对于固定的 $F \in \Delta_{\mathbf{a}}(J)$，考虑 $\mathbf{b} \in \mathbb{Z}^n$满足$\mathbf{b}_i = \mathbf{a}_i$，若 $i \notin F$；否则满足 $\mathbf{b}_i = -1$。于是，$\operatorname{link}_{\Delta_{\mathbf{a}}(J)} F = \Delta_{\mathbf{b}}(J)$。由定理 3.2，对于任意 $j \leq \dim(\operatorname{link}_{\Delta_{\mathbf{a}}(J)} F) < \alpha - |F| - 1$,

$$\widetilde{H}^j(\operatorname{link}_{\Delta_{\mathbf{a}}(J)} F) = \widetilde{H}^j(\Delta_{\mathbf{b}}(J)) = (0). \tag{7.1}$$

由于 $x^{\mathbf{a}} \notin J$，我们有 $\Delta_{\mathbf{a}}(J) \neq \varnothing$。取 F 为 $\Delta_{\mathbf{a}}(J)$ 的一个面。于是，$\operatorname{link}_{\Delta_{\mathbf{a}}(J)} F = \{\varnothing\}$。由此可得 $H^{-1}(\operatorname{link}_{\Delta_{\mathbf{a}}(J)} F) \neq (0)$。这与 (7.1) 矛盾，因为 $|F| \leq \dim(\Delta_{\mathbf{a}}(J)) + 1 < \alpha$，因此 $-1 < \alpha - |F| - 1$。结论得证。□

本节余下部分，我们考虑形式为 $I^{(t)}/I^t$ 的单项式理想商，其中 $I \subseteq S$ 是一个单项式理想，并探讨以下问题。

问题 **7.3.** 哪些数值函数 $f:\mathbb{N}\to\mathbb{Z}$ 可以作为维数函数

$$t\mapsto \dim I^{(t)}/I^t?$$

注 7.4. 由 [8, 定理 3.3 和命题 5.1]可知，$\dim(I^{(t)}/I^t)$ 渐近为常数函数。我们感兴趣的问题是，哪些渐近为常数的函数可以作为单项式理想的维数函数。

我们将确定一类单项式理想（包括图的边理想），使得函数 $t\mapsto \dim I^{(t)}/I^t$ 是递增函数。

定义 7.5（Herzog–Qureshi）。若诺特环中的理想 I 满足*Ratliff* 条件，则称其满足*Ratliff* 条件，如果 $I^{t+1}:I=I^t$ 对所有 $t\geq 1$ 均成立。

文献 [9] 证明了，若 I 满足 Ratliff 条件，则 I 其幂的关联素理想具有（强）持续性。我们将证明，对于满足 Ratliff 条件的理想，7.3 中所讨论的维数函数7.3 必定是非递减的。

定理 7.6（符号差异的维数函数）。设 I 是满足 *Ratliff* 条件的单项式理想。对任意 $t\in\mathbb{N}$，有

$$\dim(I^{(t)}/I^t)\leq \dim(I^{(t+1)}/I^{t+1}).$$

证明。由引理 7.1，存在一个 $\in\mathbb{N}^n$ 使得 $x^{\mathbf{a}}\in\mathcal{G}(I^{(t)})\setminus I^t$ 且

$$\dim(I^{(t)}/I^t)=\dim(\Delta_{\mathbf{a}}(I^t))+1.$$

注意到，由于 $I^{t+1}:I=I^t$，我们有

$$I^t:x^{\mathbf{a}}=\bigcap_{e\in E(G)} I^{t+1}:(x^{\mathbf{a}}\cdot x_e).$$

因此，根据维数定理，存在一条边 $f\in G$ 使得

$$\dim(S/\sqrt{I^t:x^{\mathbf{a}}})=\dim\left(S\Big/\sqrt{I^{t+1}:(x^{\mathbf{a}}\cdot x_f)}\right).$$

容易看出 $x^{\mathbf{a}}\cdot x_f\in I^{(t+1)}$ 因为 $x^{\mathbf{a}}\in I^{(t)}$。此外，由于 $x^{\mathbf{a}}\notin I^t$，$\dim(S/\sqrt{I^{t+1}:(x^{\mathbf{a}}\cdot x_f)}=\dim(S/\sqrt{I^t}:x^{\mathbf{a}})\geq 0$，因此 $x^{\mathbf{a}}\cdot x_f\notin I^{t+1}$。所以，由引理7.1，我们有

$$\begin{aligned}\dim(I^{(t)}/I^t)&=\dim(S/\sqrt{I^{t+1}:(x^{\mathbf{a}}\cdot x_f)})\\&\leq \max\{\dim(S/\sqrt{I^{t+1}:x^{\mathbf{b}}})\;\big|\;x^{\mathbf{b}}\in I^{(t+1)}\setminus I^{t+1}\}\\&=\dim(I^{(t+1)}/I^{t+1}).\end{aligned}$$

断言得证。 □

定理 7.6 的证明给出了以下有趣的推论。

推论 7.7. 设 I 是满足 *Ratliff* 条件的单项式理想。假设对于某个 $t\in\mathbb{N}$，$I^{(t)}/I^t$ 是一个非零的 *Cohen-Macaulay* 模。那么，对于任意 $s\leq t$，要么$I^{(s)}/I^s=0$，要么 $\dim(I^{(s)}/I^s)=\dim(I^{(t)}/I^t)$。

证明. 假设 $I^{(s)}:\ I^s \neq \varnothing$。注意，由 Ratliff 条件可知，$I^t:\ I^{t-s} = I^s$。因此，对于任意 $x^{\mathbf{a}} \in I^{(s)} \setminus I^s$，我们有

$$I^s : x^{\mathbf{a}} = \bigcap_{x^{\mathbf{b}} \in \mathcal{G}(I^{t-s})} I^t : (x^{\mathbf{a}} \cdot x^{\mathbf{b}}).$$

另一方面，由引理 7.1 和 7.2可知，对于任意满足 $x^{\mathbf{b}} \in \mathcal{G}(I^{t-s})$ 的 $x^{\mathbf{a}} \cdot x^{\mathbf{b}} \notin I^t$(显然，$x^{\mathbf{a}} \cdot x^{\mathbf{b}} \in I^{(t)}$)，有

$$\dim(S/\sqrt{I^t : (x^{\mathbf{a}} \cdot x^{\mathbf{b}})}) = \dim(I^{(t)}/I^t).$$

因此，

$$\dim(S/\sqrt{I^s : x^{\mathbf{a}}}) = \dim(I^{(t)}/I^t).$$

这对任意 $x^{\mathbf{a}} \in I^{(s)} \setminus I^s$ 都成立。因此，根据引理 7.1，$I^{(s)}/I^s$ 与 $I^{(t)}/I^t$具有相同的维数。□

现在我们将重点研究图的边理想这一类，并考察其符号幂与普通幂差异模的维数函数。

推论 7.8。设 G 是一个图，且 $I = I(G)$ 是它的边理想。则函数$t \mapsto$ 维 $I^{(t)}/I^t$ 是一个递增函数。

证明。由 [18, 引理 2.12]可知 $I(G)$ 满足 Ratliff 条件。由此，断言可直接由定理7.6推出。□

对于图 G，令 $t(G)$ 表示 $\dim(I(G)^{(t)}/I(G)^t)$ 的稳定化指标；也就是说，$t(G)$ 是满足以下条件的最小整数 t_0：对于所有 $t \geq t_0$，都有 $\dim(I(G)^{(t)}/I(G)^t)$ $=\dim(I(G)^{(t_0)}/I(G)^{t_0}$。

问题 7.9. 设 $c(G) \in \mathbb{N}$ 满足：若 G 是二部的，则 $2c(G)+1$ 是 G ($c(G)=0$ 中诱导奇圈的最大长度。是否有

$$t(G) \leq c(G) + 1?$$

我们将给出两个例子，在这两个例子中，$t(G)$ 可以明确确定，而且问题7.9 的答案是肯定的。回顾一下，若图只有一个圈，则称其为单圈的 。还需注意，若 G 是二部的图，即 G 不包含任何奇圈，那么 $I^{(t)} = I^t$ 对所有 $t \in \mathbb{N}$ (参见例如 [6, 20])。因此，我们将考虑包含奇圈的单圈图。再回顾一下，$\alpha(G)$ 表示独立集在 G中的最大大小；也就是说，该集合中的顶点两两不相邻。容易看出，对于任意图 G，都有 $\dim(S/I(G)) = \alpha(G)$。

定理 7.10（单圈图符号幂与普通幂差异的维数函数）。设 G 是一个包含奇圈的单圈图。令 C_{2s+1} 表示 G 中的唯一奇圈（长度为 $2s+1$，其中 $s \geq 1$），并令 $I = I(G)$。对于任意 $t \geq s+1$，我们有

$$\dim(I^{(t)}/I^t) = \dim(I^{(s+1)}/I^{s+1}) = \alpha(G[V \setminus N[C_{2s+1}]]).$$

证明。由 [5, 定理 3。4], 可得 $I^{(s+1)} = I^{s+1} + (x^{\mathbf{a}})$，其中 $x^{\mathbf{a}} = \prod_{i \in C_{2s+1}} x_i$。根据引理 7.1，

$$\dim(I^{(s+1)}/I^{s+1}) = \dim(\Delta_{\mathbf{a}}(I^{s+1})) + 1.$$

任取 $t \geq s+1$ 并记 $t = k(s+1) + r$，其中 $0 \leq r \leq s$。 [5, 定理 3。4] 再次给出

$$I^{(t)} = \sum_{i=0}^{k} I^{t-i(s+1)}(x^{\mathbf{a}})^i.$$

根据引理7.1，存在 $x^{\mathbf{b}} \in I^{t-i(s+1)}$，对于某个 $1 \leq i \leq k$，使得 t

$$\dim(I^{(t)}/I^t) = \dim\left(S/\sqrt{I^t : x^{\mathbf{b}}(x^{\mathbf{a}})^i}\right) = \max_{x^{\mathbf{c}} \in \mathcal{G}(I^{t-i(s+1)})} \{\dim(S/\sqrt{I^t : x^{\mathbf{c}}(x^{\mathbf{a}})^i})\}.$$

我们将证明，该情形可归结为 $r = 0$ 且 $i = k$的情形。事实上，根据 [18,引理 2.12], $I^t : I^{t-i(s+1)} = I^{i(s+1)}$，因此 $I^{i(s+1)} : (x^{\mathbf{a}})^i = \bigcap_{x^{\mathbf{c}} \in \mathcal{G}(I^{t-i(s+1)})} I^t : [(x^{\mathbf{a}})^i \cdot x^{\mathbf{c}}]$.特别地,

$$\dim\left(S\Big/\sqrt{I^{i(s+1)} : (x^{\mathbf{a}})^i}\right) = \max_{x^{\mathbf{c}} \in \mathcal{G}(I^{t-i(s+1)})} \{\dim(S/\sqrt{I^t : (x^{\mathbf{a}})^i \cdot x^{\mathbf{c}}})\} = \dim(S/\sqrt{I^t : x^{\mathbf{b}}(x^{\mathbf{a}})^i}).$$

也就是说，我们可以用 $I^{(t)}/I^t$ 替代 $I^{(i(s+1))}/I^{i(s+1)}$ 。进一步注意，对于任意$i \in \mathbb{N}$,

$$\sqrt{I^{i(s+1)} : (x^{\mathbf{a}})^i} = I(G[V \setminus N[C_{2s+1}]]) + (N[C_{2s+1}])$$

因此，$\dim(S/\sqrt{I^{i(s+1)} : (x^{\mathbf{a}})^i}) = \dim(S/\sqrt{I^{s+1} : x^{\mathbf{a}}})$，所需结论得证。□

回忆一下，完美图是指该图及其补图都不含长度为 ≥ 5 的奇数导出圈。

定理 7.11（完美图中符号幂与普通幂差异的维数函数）。设 G 是一个完美图，且 $I = I(G)$。那么，对于任意 $t \geq 2$，有

$$\dim(I^{(t)}/I^t) = \dim(I^{(2)}/I^2).$$

证明。 根据著名的强完美图定理， G不包含长度为 ≥ 5 的诱导奇圈。因此， G 要么是一个二分图，要么 G 包含导出三角形。否则结论显然成立，因此我们不妨设 G不是二分图。我们将通过归纳法证明 $t \geq 2$ 的断言。对于 $t = 2$，该命题显然成立。设 $t \geq 3$ ，并由引理 7.1，$\dim(I^{(t)}/I^t) = \dim(\Delta_{\mathbf{a}}(I^t)) + 1 = \dim(S/\sqrt{I^t : x^{\mathbf{a}}})$，其中某个 $x^{\mathbf{a}} \in G(I^{(t)}) \setminus I^t$。

由 [22, 定理 3.10], 可得

$$x^{\mathbf{a}} = \prod_{i=1}^{r} x_{V_i}$$

其中， V_i 是 G 的团，满足 $|V_i| \geq 2$, $\sum_1^r (|V_i| - 1) = t$ ，并且由于 $x^{\mathbf{a}} \notin I^t$，存在一些值 i 使得 $|V_i| \geq 3$。

首先注意，我们可以将问题归约到对所有 $i = 1, \ldots, r$ 都有 $|V_i| \geq 3$ 的情形。事实上，如有必要，重新编号后，我们可以假设对 $i = 1, \ldots, s$ 有 $|V_i| \geq 3$，且对$i = s+1, \ldots, r$ 有 $|V_i| = 2$。将 $x^{\mathbf{a}} = x^{\mathbf{b}} \cdot x^{\mathbf{c}}$ 改写为 $x^{\mathbf{b}} = \prod_{i=1}^{s} x_{V_i}$，其中 $x^{\mathbf{c}} = \prod_{i=s+1}^{r} x_{V_i}$。由 [18,引理 2.12], , 可得

$$\bigcap_{x^{\mathbf{b}} \in I^{(s)} \setminus I^s} I^{t-(r-s)} : x^{\mathbf{b}} = \bigcap_{x^{\mathbf{b}} \in I^{(s)} \setminus I^s} \bigcap_{x^{\mathbf{c}} \in I^{r-s}} I^t : (x^{\mathbf{b}} \cdot x^{\mathbf{c}}) = \bigcap_{x^{\mathbf{a}} \in I^{(t)} \setminus I^t} I^t : x^{\mathbf{a}}.$$

因此，我们可以用 $x^{\mathbf{b}}$替换 $x^{\mathbf{a}}$ 。

我们接下来通过证明以下断言来展开论述。

断言： $\sqrt{I^t : x^{\mathbf{a}}} = \bigcap_{i\in \operatorname{supp}\mathbf{a}} \sqrt{I^{t-1} : x^{\mathbf{a}-\mathbf{e}_i}}$.

断言的证明：设 x_F 是 $\sqrt{I^t}$ 的一个极小（无平方）单项式生成元：$x^{\mathbf{a}}$。不妨设 F 是 G 的一个独立集，因为若 F 不是独立集，则$x_F \in I \subseteq \sqrt{I^{t-1} : x^{\mathbf{a}}}$ 显然成立。令 $x^{\mathbf{a}}(F) = \prod_{i\notin N[F]} x_i^{a_i}$。根据 [17, 引理 218],，我们有

$$\sum_{j\in N(F)} a_j + \operatorname{ord}_I(x^{\mathbf{a}}(F)) \geq t.$$

· 固定 $i \in \operatorname{supp} \mathbf{a}$，并令 $\mathbf{b} = \mathbf{a} - \mathbf{e}_i$。若 $i \in N(F)$，则 $\sum_{j\in N(F)} b_j = \sum_{j\in N(F)} a_j - 1$且 $x^{\mathbf{a}}(F) = x^{\mathbf{b}}(F)$。另一方面，若 $i \notin N(F)$，则 $\sum_{j\in N(F)} b_j = \sum_{j\in N(F)} a_j$且 $\operatorname{ord}_I(x^{\mathbf{b}}(F)) \geq \operatorname{ord}_I(x^{\mathbf{a}}(F)) - 1$。那么，在这两种情况下，我们总有

$$\sum_{j\in N(F)} b_j + \operatorname{ord}_I(x^{\mathbf{b}}(F)) \geq t - 1.$$

再次使用 [17, 引理 2.18]，我们得到 $x_F \in \sqrt{I^{t-1} : x^{\mathbf{b}}}$。

反过来，假设 x_F 是 $\bigcap_{i\in \operatorname{supp}\mathbf{a}} \sqrt{I^{t-1}}$ 的一个无平方因子单项式生成元：$x^{\mathbf{a}-\mathbf{e}_i}$，并且 F 是 G的一个独立集。那么，存在一个正整数 α，使得

$$x_F^{\alpha} \cdot x^{\mathbf{a}-\mathbf{e}_i} \in I^{t-1} \quad \text{for all } i \in \operatorname{supp} \mathbf{a}.$$

如果 $N(F) \cap \operatorname{supp}(\mathbf{a}) \neq \varnothing$，则取 $j \in N(F) \cap \operatorname{supp}(\mathbf{a})$。我们有

$$x_F^{\alpha+1} x^{\mathbf{a}} = (x_F^{\alpha} \cdot x^{\mathbf{a}-\mathbf{e}_j}) \cdot (x_F x_j) \in I^t.$$

这意味着 $x_F \in \sqrt{I^t : x^{\mathbf{a}}}$。

假设 $N(F) \cap \operatorname{supp}(\mathbf{a}) = \varnothing$。在这种情况下，由于 F是 G的一个独立集，对于所有 $i \in \operatorname{supp}(\mathbf{a})$，$x^{\mathbf{a}-\mathbf{e}_i}$都必须属于 I^{t-1}。特别地，$\deg(x^{\mathbf{a}}) \geq 2t - 1$。另一方面，我们有

$$\deg(x^{\mathbf{a}}) = \sum_{i=1}^{r} |V_i| = t + r.$$

因此 $r \geq t - 1$。但对于所有 i，$|V_i| \geq 3$，这意味着

$$t = \sum_{1}^{r} (|V_i| - 1) \geq 2r \geq 2(t - 1),$$

这是一个矛盾。断言现已得证。 □

我们继续 证明定理7.11。由前一个断言可知 t

$$\dim(S/\sqrt{I^t : x^{\mathbf{a}}}) = \dim(S/\sqrt{I^{t-1} : x^{\mathbf{a}-\mathbf{e}_i}})$$

对某个 $i \in \operatorname{supp}\mathbf{a}$成立。此外，由于 $|V_i| \geq 3$，[22, 定理 3.10] 蕴含 $x^{\mathbf{a}-\mathbf{e}_i} \in I^{(t-1)}$。由于 $\dim(S/\sqrt{I^{t-1} : x^{\mathbf{a}-\mathbf{e}_i}}) = \dim(S/\sqrt{I^t : x^{\mathbf{a}}}) \geq 0$，我们也有 $x^{\mathbf{a}-\mathbf{e}_i} \notin I^{t-1}$。因此 $\dim(I^{(t)}/I^t) \leq \dim(I^{(t-1)}/I^{t-1})$。结合引理 7.1，得到

$$\dim(I^{(t)}/I^t) = \dim(I^{(t-1)}/I^{t-1}).$$

由归纳法，$\dim(I^{(t)}/I^t) = \dim(I^{(2)}/I^2)$，如所要求。 □

下面的例子表明，$\dim(I^{(t)}/I^t)$ 可以取 2 个不同的值，且这些值不−1；这 2 个值之间的差距可以任意大。我们不知道有任何例子表明 $\dim(I^{(t)}/I^t)$ 可以取 3 个不同的值，且这些值不 -1。

例 7.12. 对于任意 $r \geq 1$，令 $S = \Bbbk[w_1, \cdots, w_5, x_1, \cdots x_{2+r}]$，并考虑

$$I = (w_1w_2, w_2w_3, w_3w_4, w_4w_5, w_5w_1, w_1x_1, w_1x_2, x_1x_2, x_2x_3, \cdots, x_2x_{2+r}) \subseteq S.$$

于是，

$$\dim(I^{(t)}/I^t) = \begin{cases} -1 & \text{if } t = 1 \\ 1 & \text{if } t = 2 \\ r & \text{otherwise.} \end{cases}$$

问题 7.13. 用 G 的组合数据计算或估计 $t(G)$。

8. Cohen-Macaulay Symbolic-Ordinary Discrepancy Modules

我们继续研究形如 $I^{(t)}/I^t$ 的单项式理想商，其中 I 是某个图的边理想，并考察它们的 Cohen-Macaulay 性质。本节中，G 表示顶点集为 $V = [n]$ 的图，而 $I = I(G)$ 是它的边理想。我们还假设 G 不是二部图，即 G 含有诱导奇圈。

引理 8.1. 设 $C = C_{2t+1}$ 是 G 中由顶点 $\{1, \ldots, 2t+1\}$ 构成的最小长度诱导奇圈。那么，对于任意 $s \geq 1$，有 $x_C \cdot (x_1x_2)^{s-1} \in I^{(t+s)} \setminus I^{t+s}$，且

$$\sqrt{I^{t+s} : (x_C \cdot (x_1x_2)^{s-1})} = I + (N[C]).$$

证明。显然，由于 $x_C \in I^{(t+1)}$, $x_C \cdot (x_1x_2)^{s-1} \in I^{(t+s)}$。通过次数比较，也可以看出 $x_C \cdot (x_1x_2)^{s-1} \notin I^{t+s}$。

此外，容易看出，若 $y \in N[C]$，则 $yx_C(x_1x_2)^{s-1} \in I^{t+s}$，即 $y \in I^{t+s} : (x_C \cdot (x_1x_2)^{s-1})$。因此，

$$\sqrt{I^{t+s} : (x_C \cdot (x_1x_2)^{s-1})} \supseteq I + (N[C]).$$

另一方面，设 x_F 是 $\sqrt{I^{t+s} : (x_C \cdot (x_1x_2)^{s-1})}$ 的一个极小单项式生成元。则 $x_F \in I$ 或 F 是 G的一个独立集。若 F 是一个独立集，根据 [17, 引理 2。18], 我们有

$$\sum_{j \in N(F)} \operatorname{ord}_{x_j}(x_C \cdot (x_1x_2)^{s-1}) \geq (t+s) - \operatorname{ord}_I(x_C \cdot (x_1x_2)^{s-1}) = (t+s) - (t+s-1) = 1.$$

因此，$N(F) \cap C \neq \varnothing$，即 $F \cap N[C] \neq \varnothing$。换言之，$x_F \in (N[C])$，由此可得

$$\sqrt{I^{t+s} : (x_C \cdot (x_1x_2)^{s-1})} \subseteq I + (N[C]).$$

引理得以证明。 □

引理 8.2。 假设与引理 *8.1* 中的假设相同。设 $y \in N[C]$ C特别地，$y \in N[1]$。那么，对于任意 $s \geq 2$，有 $x_C \cdot (x_1x_2)^{s-2}(x_1y) \in I^{(t+s)} \setminus I^{t+s}$并且

$$\sqrt{I^{t+s} : (x_C \cdot (x_1x_2)^{s-2}(x_1y))} = I + (N[C]) + (N(y)).$$

证明。 证明与引理 8.1 的证明几乎完全相同。和之前一样，我们首先注意到$x_C \cdot (x_1x_2)^{s-2}(x_1y) \in I^{(t+s)} \setminus I^{t+s}$。不难看出

$$\sqrt{I^{t+s} : (x_C \cdot (x_1x_2)^{s-2}(x_1y))} \supseteq I + (N[C]) + (N(y)).$$

为证明反向包含关系，我们再次考虑一个极小的无平方因子单项式生成元 x_F属于 $\sqrt{I^{t+s} : (x_C \cdot (x_1x_2)^{s-2}(x_1y))}$。我们还可以假设 F 是 G 中的一个独立集，并且 $F \cap N[C] = \varnothing$. 利用同样的论证，并结合 [17, 引理 2，18], 我们便得到 $F \cap N(y) \neq \varnothing$。由此得到所需的反向包含关系，并证明了该引理。□

引理 8.3。 假设与引理 8.2中的假设相同。设 $z \in N(y)\setminus N[C]$。那么，对于 $s \geq 3$，有 $x_C \cdot (x_1x_2)^{s-3}(x_1y)(yz) \in I^{(t+s)} \setminus I^{t+s}$ 并且

$$\sqrt{I^{t+s} : (x_C \cdot (x_1x_2)^{s-3}(x_1y)(yz))} = I + (N[C]) + (N(y,z)).$$

证明。 证明过程与引理 8.1 和 8.2中的论证完全相同。详细内容留给感兴趣的读者。□

回顾备注 7.4，$\dim(I^{(t)}/I^t)$ 渐近地为一个常数。和之前一样，令 $t(G)$ 表示从其开始 $\dim(I(G)^{(t)}/I(G)^t)$ 为常数的最小整数。此外，令 $c(G) \in \mathbb{N}$ 使得 $2c(G)+1$ 是 G ($c(G) = 0$ 中诱导圈的最大长度（如果 G 是二部图）。我们的最后一个主要结果陈述如下。

定理 8.4 (Cohen-Macaulay 符号幂-普通幂差异模)。 设 G 为一个非二部的连通图，并令 $I = I(G)$ 为其边理想。令

$$t_0 := \max\{t(G), c(G)\} + 3.$$

以下命题等价：

(1) 对所有 $t \geq 1$， $I^{(t)}/I^t$ 都是 *Cohen-Macaulay*；*(2)* 对某个 $t \geq t_0$， $I^{(t)}/I^t$ 是 *Cohen-Macaulay*；*(3)* 对所有 $t \geq 1$， $I^{(t)}/I^t = (0)$ 或 $\dim(I^{(t)}/I^t) = 0$；*(4)* 对于 G 中的任意诱导奇圈 C，都有 $N[C] = [n]$。

证明。I 显然，(3) $\Longrightarrow$ (1) $\Longrightarrow$(2)。我们将证明 (2) $\Longrightarrow$(4) $\Longrightarrow$ (3)

(2) $\Longrightarrow$ (4)。假设对于某个 $t \geq \max\{t(G)\ c(G)\}+3$， $M = I^{(t)}/I^t$ 是 Cohen-Macaulay。令 $\alpha = \dim(M)$。由 [3, 定理 4.1] 和 [12, 推论 4.5]， $M \neq 0$，因此 $\alpha \geq 0$。利用引理 7.2，我们得到对于任意 $x^{\mathbf{a}} \in I^{(t)} \setminus I^t$， $\Delta_{\mathbf{a}}(I^t)$ 都是维数为 $\alpha - 1$ 的 Cohen-Macaulay。于是由引理 7.1 可知，对于所有$x^{\mathbf{a}} \in I^{(t)} \setminus I^t$， $S/\sqrt{I^t} : x^{\mathbf{a}}$ 都是维数为 α 的 Cohen-Macaulay。

考虑 G 中的任意诱导奇圈 C，不妨设 C 的顶点为 $\{1, 2, \ldots, 2t'+1\}$，其中 $t' \leq c(G)$。设 $t = t' + s$，其中 $s \geq 3$。反设 $[n] \setminus N[C] \neq \varnothing$。于是，由 G 的连通性，存在 G 的顶点 y、z，使得 $y \in N[C] \setminus C$、 $z \notin N[C]$，且 $yz \in G$。不妨设 $y \in N(x_1)$。令

$$x^{\mathbf{b}} = x_C \cdot (x_1x_2)^{s-1}$$
$$x^{\mathbf{c}} = x_C \cdot (x_1x_2)^{s-3}(x_1y)(yz).$$

由于 $x_C \in I^{(t'+1)}$，和 $x^{\mathbf{c}}$ 都属于 $I^{(t'+s)}$。此外，通过次数比较可以看出，和 $x^{\mathbf{c}}$ 都不属于 $I^{t'+s}$。因此，由引理 8.1 和 8.3，有

$$\dim\big(S/I+(N[C])\big)=\dim\big(S/I+(N[C])+(N(y))+(N(z))\big)=\alpha.$$

另一方面，注意到，若 F 是与 $I+(N[C])+(N(y))+(N(z))$ 相关联的图中的一个最大基数独立集，则 $z\notin F$ 和 $F\cup\{z\}$ 是与 $I+(N[C])$ 相关联的图中的一个独立集。这意味着

$$\dim\big(S/I+(N[C])\big)\geq\alpha+1>\alpha,$$

矛盾。我们已经证明，对于 G 中的任意诱导奇圈 C，$N[C]=[n]$。

(4) $\Longrightarrow$ (3)。假设对于 G 中的任意诱导奇圈 C，$N[C]=[n]$。由 [12, 定理 4.4] 可知，对于任意 $t\in\mathbb{N}$，要么 I^t 没有嵌入素理想，要么 I^t 的嵌入素理想具有形式 $P_F=(x_i\mid x_i\in F)$，其中某个 $F\subseteq V$ 满足存在 $U\subseteq V$，使得 $N[U]\subseteq F$，且 G 在 U 上的诱导子图 G_U 是一个强非二分图（在附加条件下）。由于 G_U 是一个非二分图，它包含一个诱导奇圈 C_1。特别地，$N[U]\supseteq N[C_1]=[n]$，这意味着 $F=[n]$ 和 $P_F=\mathfrak{m}$。也就是说，对于任意 $t\in\mathbb{N}$，要么 $I^t=I^{(t)}$，要么 I^t 的唯一嵌入素理想是 $\mathfrak{m}$。在后一种情况下，我们有 $I^t=I^{(t)}\cap\mathfrak{q}$，其中 $\sqrt{\mathfrak{q}}=\mathfrak{m}$。因此，

$$\dim(I^{(t)}/I^t)=\dim\frac{I^{(t)}}{I^{(t)}\cap\mathfrak{q}}=\dim\frac{I^{(t)}+\mathfrak{q}}{\mathfrak{q}}=0.$$

该结果得证。 □

注 8.5. 设 G 是定义在 $[n]$ 上的简单连通图，其边理想为 $I=I(G)$。固定 $t\geq1$ 并令

$$Q_t(G):=I^{(t)}/I^t.$$

假设 $\dim Q_t(G)\geq2$。那么 $Q_t(G)$ 是广义 Cohen-Macaulay，当且仅当它在去心谱上是 Cohen-Macaulay；也就是说，当且仅当对每个非空单项式 x_F，$(Q_t(G))_{x_F}$ 都是 Cohen-Macaulay。

等价地，只需检验 $x_F=\prod_{i\in F}x_i$，其中 F 是 G的非空独立集（即 $\varnothing\neq F\in$Ind(G)）。此时存在一个自然同构

$$(Q_t(G))_{x_F}\cong\Bbbk[x_i^{\pm1}:i\in F]\otimes_{\Bbbk}Q_t\big(G-N_G[F]\big).$$

因此，$Q_t(G)$ 是广义 Cohen-Macaulay，当且仅当对每个非空独立集 $F(G-N_G[F]$，Q_t 都是 Cohen-Macaulay。根据定理 8.4，这等价于满足以下条件：对于 G 中的任意独立集 F 以及 $G-N_G[F]$中的任意奇数诱导圈 C，$N_G[C]\cup N_G[F]=[n]$。

我们以以下问题结束本文。

问题 8.6. 设 I 为一个单项式理想。

(1) 对所有 $t\geq1$，刻画 $I^{(t)}/I^t$ 的 Cohen-Macaulay 性。(2) 若对某个 $u<v$，$I^{(t)}/I^t$ 在 $t=u$ 和 $t=v$时是 Cohen-Macaulay 的，那么能否推出对所有 $u\leq t\leq v$，$I^{(t)}/I^t$ 都是 Cohen-Macaulay 的？(3) 哪些函数可以作为深度/正则性函数 depth($I^{(t)}/I^t$)（或 reg($I^{(t)}/I^t$）？

致谢。本文部分工作是在作者访问越南高等数学研究所（VIASM）期间完成的。我们感谢 VIASM 提供的热情接待和经费支持。

数据可用性。 本文不适用数据共享，因为本研究期间未生成或分析任何数据集。

利益冲突。 作者没有需要披露的相关财务或非财务利益。

References

[1]K.A. Adiprasito 和 R. Sanyal, 《相对 Stanley–Reisner 理论与闵可夫斯基和的上界定理》, Publ. Math. Inst. Hautes ´Etudes Sci. 124 (2016), 99–163.[2] W. Bruns 和 J. Herzog, 《Cohen-Macaulay 环》, 剑桥大学出版社, 1998.[3] J. Chen、S. Morey 和 A. Sung, 《图的理想的关联素理想稳定集》, Rocky Mountain J. Math. 32 (2002), no. 1, 71–89.[4] L. Ein、R. Lazarsfeld 和 K. S mith, 《光滑簇上的一致界与符号幂》, Invent. Math. 144 (2001), no. 2, 241–252.[5] Y. Gu、H.T. H`a、J.L. O'Rourke 和 J.W. Skelton, 《图的边理想的符号幂》, Comm. Algebra 48 (2020), no. 9, 3743–3760.[6] H.T. H`a 和 S. Morey, 《平方自由单项式理想幂的嵌入关联素理想》, J. Pure Appl. Algebra 214 (2010), no. 4, 301–308.[7] J. Herzog、T. Hibi 和 N.V. Trung, 《单项式理想的符号幂与顶点覆盖代数》, Adv. Math. 210 (2007), no. 1, 304–322.[8] J. Herzog、T.J. Puthenpurakal 和 J.K. Verma, 《希尔伯特多项式与理想的幂》, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 145 (2008), no. 3, 623–642.[9] J. Herzog 和 A.A. Qureshi, 《理想幂的持续性与稳定性》, J. Pure Appl. Algebra 219 (2015), 530–542.[10] M. Hochster, 《Cohen-Macaulay 环、组合学与单纯复形》, 载于 《环论 *II*（第二届会议论文集，俄克拉何马大学，俄克拉何马州诺曼，*1975* 年）, 第 *171–223* 页, Lect. Notes Pure Appl. Math., Vol. 26, Marcel Dekker, Inc., New York-Basel, 1977[11] M. Hochster 和 C. Huneke, 《理想的符号幂与普通幂的比较》, Invent. Math. 147 (2002), no. 2, 349–369.[12] H.M. Lam 和 N.V. Trung, 《边理想幂的关联素理想与图的耳分解》, Trans. Amer. Math. Soc. 372 (2019), no. 5, 3211–3236.[13] E. Miller 和 B. Sturmfels, 《组合交换代数》, Grad. Texts in Math., 227 Springer-Verlag, New York, 2005. xiv+417 页.[14] N.C. Minh、L.D. Nam、T.D. Phong、P.T. Thuy 和 T. Vu, 《边理想的符号幂与普通幂的小次幂正则性的比较》, J. Combin. Theory Ser. A 190 (2022), 105621.[15] N.C. Minh 和 Y. Nakamura, 《维数为 1 的 Stanley–Reisner 理想的符号幂的 Buchsbaum性质》, J. Pure Appl. Algebra 215 (2011), 161–167.[16] N.C. Minh 和 N.V. Trung, 《单项式理想的 Cohen-Macaulay 性与 Stanley-Reisner 理想的符号幂》, Adv. Math. 226 (2011), 1285–1306.[17] N.C. Minh 和 T. Vu, 《一维单纯复形的 Sta nley-Reisner 理想幂的正则性》, Math. Nachr. 296 (2023), no. 8, 3539–3558.[18] S. Morey 和 R.H. Villarreal, 《边理想：代数与组合性质》, 《交换代数进展》1, 85–126. Walter de Gruyter & Co., Berlin, 2012[19] G.A. Reisner, 《多项式环的 Cohen-Macaulay 商》, Adv. Math. 21 (1976), no. 1, 30–49.[20] A. Simis、W.V. Vasconcelos、R.H. Villarreal, 《关于图的理想理论》, 《代数杂志》167 (1994), 389–416。

[21]R. Stanley, 《组合学与交换代数》, 第 2 版, 数学进展, 第 41 卷, Birkh¨auser 波士顿, 波士顿, 1996 年。[22] S. Sullivant, 《组合符号幂》, 《代数杂志》319（2008）, 第 1 期, 115–142。[23] Y. Takayama, 《广义 Cohen-Macaulay 单项式理想的组合刻画》, Bull. Math. Soc. Math. Roumanie（N.S.）48（96）（2005）, 327–344。[24] M. Varbaro, 《符号幂与拟阵》, 《美国数学会会刊》139（2011）, 第 7 期, 2357–2366。
Tulane University, Mathematics Department,
6823 St. Charles Ave., New Orleans, LA70118, USA电子邮箱地址: tha@tulane.edu
Faculty of Mathematics and Informatics, Hanoi University of Science and Technology,
1 Dai Co Viet, Hanoi, Vietnam电子邮箱地址: minh.nguyencong@hust.edu.vn