arXiv:2601.20322v1 [math.CT] 28 Jan 2026

核、松弛代数、移位与超相干性

Martin Markl 和 Dominik Trnka

摘要。我们证明，一个带基点的范畴具有核，当且仅当它是箭头 2-单子的一个松代数；而这又当且仅当它是某个超相干结构的退移。随后，我们将把具有核的范畴解释为所寻求的一元运算子范畴的弱版本。

目录

引言 1
1. 箭头余单子 4 2. 从余代数到代数 6 3. 核作为代数 10 4. 纺锤嵌入 17 5. $\mathbb{A}$-松代数的神经 21
6. 核的单纯刻画 24 7. 迈向弱运算子范畴 31 参考文献 33

引言

带基点范畴中，态射的核 是态射$f\colon a \to b$的一个态射 $\kappa\colon k \to a$，使得复合$f\,\kappa\colon k \to b$是零态射，并且 κ 在所有具有此性质的态射中是终端对象。带核范畴是指每个态射都有核的范畴。这样的例子比比皆是：每个阿贝尔范畴都有核，群范畴也是如此，等等。

我们首先证明，带基点范畴是 2-余单子 $\mathbb{A}$ 的余代数；该 2-余单子将一个范畴 $\mathtt{C}$ 映射为其箭头范畴 $\mathbb{A}(\mathtt{C})$。随后，我们将带核范畴刻画为由 $\mathbb{A}$ 在 $\mathbb{A}$-余代数范畴上诱导的 2-单子的松弛代数。

John F. Jardine 在其卓越的1991年文章中，将超相干结构 [10], 引入为带核范畴中一种特殊的松弛单纯对象 $X_\bullet$。我们的第二个主要

2020 数学主题分类。 主要分类号 18C15、18N50、18M60。关键词与短语。 核、超相干性、松代数、运算范畴。M.M. 获 RVO: 67985840 资助。D.T. 获 FSI-S-26-8958 资助。

结果表明，基点范畴 $\mathcal{C}$ 是带核范畴，当且仅当其神经 $\mathbb{N}_\bullet(\mathcal{C})$ 是某个超相干结构 $X_\bullet$ 的 décalage $\mathrm{dec}_\bullet(X)$。因此，带核范畴提供了超相干性的另一个例子，与 Jardine 关于幺半范畴的巴构造这一经典例子并列。

略去细节，我们由此证明，对于带基点的范畴 $\mathcal{C}$，以下条件等价：

– 范畴 $\mathcal{C}$有核，– 范畴 $\mathcal{C}$ 是箭头 2-单子 $\mathbb{A}$的松代数，且 – 范畴 $\mathcal{C}$ 的神经是某个超相干结构的 décalage。

上述等价关系综合了定理 8 和 26，而这两条定理共同构成了本文的主要结果。

动机与启发。 运算子范畴于 [1]，引入，是这样一类范畴：其中每个态射都有纤维。在一元运算子范畴中，这样的纤维是唯一的。从概念上看，阿贝尔范畴应当提供一些例子，其中纤维由核给出。然而，这种结构不满足运算子范畴的主要公理；该公理要求，核之间的诱导态射的核应等同于 原始态射的核；而在一般的阿贝尔范畴中，这些核仅同构。这个事实，加上范畴论中对严格相等的常见异议，表明需要一种弱版本的运算子范畴。关于这一观点的进一步讨论见第7节。

运算子范畴及其与其他结构的关系，已成为多项研究的主题。对我们而言，尤其重要的是 [9], , 它使错位余单子$\mathbb{D}$： $\mathtt{Cat} \to \mathtt{Cat}$成为焦点。作者证明，一元运算子范畴是范畴中 $\mathbb{D}$-余代数上的诱导单子的代数。我们的另一个灵感来源，是将一元运算子范畴刻画为其神经为某个单纯集合的上错位的范畴；例如参见 [2]。

因此，我们的策略是将弱歌剧范畴定义 为诱导错位单子 $\mathbb{D}$的松弛代数，或者将其定义为单纯集合的松弛版本的错位。前一种方法的困难在于， $\mathbb{D}$ 不是一个 2-（余）单子，因此松弛代数的概念并不成立。必须以箭头（余）单子 $\mathbb{A}$取而代之；从思想上说，它是 $\mathbb{D}$的 2-完备化。至于后一种方法，将单纯集合替换为 Jardine 的超相干结构，就需要将神经 $\mathbb{N}_\bullet$（$\mathcal{C}$）解释为 $\mathtt{Cat}$ 中的单纯对象，而不是单纯集合。

将视角转向 2-范畴层次，彻底改变了整个图景。事实证明，按照上述思路定义的“弱”一元运算子范畴中，态射的纤维会自动带有一个指向其定义域的态射，因此它更像是核，而非纤维。值得注意的是，核的泛性质也得到了满足，这使我们意识到，

弱一元运算子范畴实际上是一个带核范畴！更多详情请见第7节。

我们的最终目标是提出这一理论的双变版本，使其同时涵盖核与余核，并结合可加性，将阿贝尔范畴刻画为某个 2-双单子的松双代数；等价地，将其刻画为超相干结构的双重——上移位与下移位。这将是未来工作的主题。这条路径上的第一步已在 [12]中迈出。

范畴论背景。本文从箭头范畴函子的余单子结构 $\mathbb{A}$ 出发，随后研究范畴 $\mathbb{A}$-余代数上的诱导单子 $\mathbb{A}$ 。与此略有不同，一种基于 $\mathbb{A}$ 上自然单子结构的对偶方法已在 [7]中得到研究，其中 $\mathbb{A}$-代数被识别为正交分解系统。我们承认，本文第 1 节的灵感来自该论文所用的方法。

我们的工作涉及类性质结构和（余）松弛幂等2-单子的领域，例如 [11]中所讨论的那样。一个带单位 η 的2-单子 $\mathbb{T}$ 若满足：对于每个代数 $\mathrm{a}\colon \mathbb{T}(\mathrm{A}) \to \mathrm{A}$，都存在一个2-胞腔 $\theta\colon \mathrm{id}_{\mathbb{T}(A)} \Rightarrow \eta_A \circ \mathrm{a}$，使得 (id, θ) 构成伴随 $\mathrm{a} \dashv \eta_A$的余单位-单位对，则称其为松弛幂等的。等价地，给定两个 $\mathbb{T}$-代数 $\mathrm{a}\colon \mathbb{T}(\mathrm{A}) \to \mathrm{A}$、$\mathrm{b}\colon \mathbb{T}(\mathrm{B}) \to \mathrm{B}$ 以及一个态射 $\mathrm{f}\colon \mathrm{A} \to \mathrm{B}$，则存在唯一的2-胞腔 f，将 f 扩展为 $\mathbb{T}$-代数的松弛态射；参见[11, 定理6.2]。特别地，同一对象 A 上的任意两个 $\mathbb{T}$-代数结构 a'、$\mathrm{a}''\colon \mathbb{T}\,\mathrm{A} \to \mathrm{A}$ 都通过唯一的 $\mathbb{T}$-代数同构相关联，因此，Cat 上松弛幂等2-单子的代数通常是配备了满足某个指定泛性质的结构的范畴。一个典型例子是2-单子 $\mathbb{T}$ ，它为每个范畴 C 赋予关于给定余极限类的自由余完备化。于是，一个 $\mathbb{T}$-代数就是一个拥有所有此类余极限的范畴。正如我们所展示的，对于基点范畴 C，一个 $\mathbb{A}$-代数结构对应于为 C中的每个态射选择一个核。根据核的泛性质，任意两种选择都同构，因此相应的代数结构也彼此同构。

—

论文结构。 在第 1 节中，我们引入箭头 2-余单子 $\mathbb{A}\colon \mathtt{Cat} \to \mathtt{Cat}$ 并分析其余代数。随后在第2节中，我们明确描述由 $\mathbb{A}$ 在其余代数范畴上诱导的 2-单子 $\mathbb{A}$ 的松弛代数。第3节包含本文的第一个主要结果——定理 8，它将核刻画为箭头单子 $\mathbb{A}$的归一化松弛代数。第 4 节包含辅助材料，阐述脉络集的组合学与箭头范畴之间的关系；这些材料将在第5节用于描述松弛代数的脉络集。第6节包含第二个主要结果——定理26，它通过超相干结构的 décalage 刻画核。最后，第7节将具有核的范畴解释为弱一元运算子范畴。

约定。 我们假定所有范畴相对于一个足够大的环境全集都是小范畴。我们还假定选择公理成立，因此无需区分具有核的范畴与具有代数 核的范畴，也就是说，无需区分每个态射都具有选定 核的范畴。

致谢。 两位作者感谢波恩马克斯·普朗克数学研究所，在本研究的最后阶段给予他们热情接待和经费支持。

1. 箭头余单子

在本文余下部分中，符号 1（带或不带下标）将根据上下文表示恒等自同态、函子或变换。令$\mathbf{1}$ 为终端范畴，并用 0 表示其唯一对象。令$\mathbf{2}$ 为一个具有两个对象 0、1 和一个非恒等态射 $a\colon 0 \to 1$的范畴。范畴 $\mathbf{2}\times\mathbf{2}$由一个交换方块组成

$$\mathbf{2}\times\mathbf{2} = \begin{array}{ccc} (00) & \xrightarrow{a1} & (10) \\ {\scriptstyle 0a}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle 1a} \\ (01) & \xrightarrow{a0} & (11). \end{array} \tag{1}$$

记 $m\colon \mathbf{2}\times\mathbf{2} \to \mathbf{2}$为如下函子：它将对象 $(ij) \in \mathbf{2}\times\mathbf{2}$映为$s(ij) = \max\{i,j\}$；因此，其在态射上的取值也随之确定。具体而言，$m(01) = m(10) = m(11) = 1$，$m(00) = 0$，且$m(a1) = 1 = m(1a)$，$m(a0) = a = m(0a)$。再考虑函子$e\colon \mathbf{1} \to \mathbf{2}$，其中$e(0) = 0$。假设典范同构 $(\mathbf{2}\times\mathbf{2})\times\mathbf{2} \cong \mathbf{2}\times(\mathbf{2}\times\mathbf{2})$ 和 $\mathbf{2}\times\mathbf{1} \cong \mathbf{2} \cong \mathbf{1}\times\mathbf{2}$，则图表

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{2}\times\mathbf{2}\times\mathbf{2} & \xrightarrow{\mathbf{2}\times m} & \mathbf{2}\times\mathbf{2} \\ {\scriptstyle m\times\mathbf{2}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle m} \\ \mathbf{2}\times\mathbf{2} & \xrightarrow{m} & \mathbf{2} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathbf{2} & \xrightarrow{\mathbf{2}\times e} & \mathbf{2}\times\mathbf{2} \\ & {\scriptstyle \mathbb{1}}\searrow & \downarrow{\scriptstyle m} \\ & & \mathbf{2} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathbf{2} & \xrightarrow{e\times\mathbf{2}} & \mathbf{2}\times\mathbf{2} \\ & {\scriptstyle \mathbb{1}}\searrow & \downarrow{\scriptstyle m} \\ & & \mathbf{2} \end{array}$$

可交换。因此，$(\mathbf{2}, m, e)$ 是 $(\mathtt{Cat}, \times, \mathbf{1})$ 中的一个幺半群。记 $\tau\colon \mathbf{2}\times\mathbf{2} \cong \mathbf{2}\times\mathbf{2}$ $\mathtt{Cat}$ 中笛卡尔积的对称同构。等式 $\max\{i,j\} = \max\{j,i\}$ 可转写为

$$m\tau = m, \tag{2}$$

因此，$\mathbf{2}$ 是一个严格对称且严格结合的幺半范畴。$\mathbf{2}$的幺半结构导出一个作用于 $\mathtt{Cat}$上的余单子 $\mathbb{A}$，其中

$$\mathbb{A}(\mathtt{C}) := [\mathbf{2} \to \mathtt{C}],\ \mathtt{C} \in \mathtt{Cat}, \tag{3}$$

函子与自然变换构成的范畴。

让我们更详细地描述箭头范畴的 2-函子 $\mathbb{A}\colon \mathtt{Cat} \to \mathtt{Cat}$。 $\mathbb{A}(\mathtt{C})$ 的对象是 $\mathtt{C}$ 中的态射，而 $\mathbb{A}(\mathtt{C})$ 的态射是 $\mathtt{C}$中的交换方块。一个态射

$$S = (h_0, h_1)\colon f \longrightarrow g$$

$\mathbb{A}(\mathtt{C})$ 中的态射将表示为交换图

$$S = \begin{array}{ccc} a & \xrightarrow{h_0} & c \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ b & \xrightarrow{h_1} & d. \end{array} \tag{4}$$

按照惯例， $\mathbb{A}(\mathtt{C})$ 中的态射总是从交换图的左边指向右边。对于函子 $F\colon \mathtt{C}\to\mathtt{D}$，其值 $\mathbb{A}(F)\colon \mathbb{A}(\mathtt{C})\to\mathbb{A}(\mathtt{D})$ 由与 F 作后复合给出，即

$$\mathbb{A}(F)(f\colon a\to b) = F(f)\colon F(a)\longrightarrow F(b),$$
$$\mathbb{A}(F)\big((h_0,h_1)\colon f\to g\big) = \big(F(h_0),F(h_1)\big)\colon F(f)\longrightarrow F(g).$$

最后，给定自然变换 $\omega\colon F\Rightarrow G$，变换 $\mathbb{A}(\omega)\colon \mathbb{A}(F)\Rightarrow\mathbb{A}(G)$ 的分量为

(5) $$\mathbb{A}(\omega)_f = (\omega_a,\omega_b)\colon F(f)\longrightarrow G(f).$$

$\mathbb{A}$ 的余单子结构由分别与m 和e作预复合给出，利用自然同构

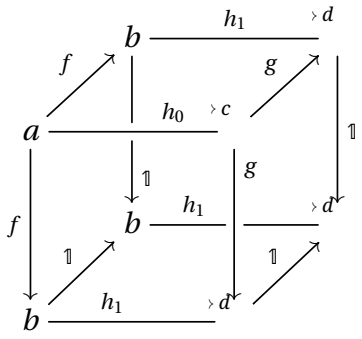
$$[\mathbf{2}\times\mathbf{2}\to\mathtt{C}]\cong\big[\mathbf{2}\to[\mathbf{2}\to\mathtt{C}]\big] = \mathbb{A}^2\mathtt{C}, \text{ and } [\mathbf{1}\to\mathtt{C}]\cong\mathtt{C}.$$

下面显式描述余单子余乘法 $\delta_{\mathtt{C}} := m^*_{\mathtt{C}}\colon \mathbb{A}\mathtt{C}\to\mathbb{A}^2\mathtt{C}$。首先，

$$\delta_{\mathtt{C}}(f\colon a\to b) = \begin{array}{ccc} a & \xrightarrow{f} & b \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathbb{1}} \\ b & \xrightarrow{\mathbb{1}} & b \end{array}$$

并且，对于 (4) 中的态射 $S=(h_0,h_1): f\to g$ in $\mathbb{A}(\mathtt{C})$，我们有

$\delta_{\text{范畴 C}(S)} =$



我们的约定是， $\mathbb{A}^2(\mathtt{C})$中的态射总是从立方体的左侧面指向右侧面。余单位$\varepsilon_{\text{范畴 C}} := e^*_{\mathtt{C}}\colon \mathtt{C}\to\mathbb{A}(\mathtt{C})$将$f\colon a\to b\in\mathbb{A}(\mathtt{C})$映射为$a$，并将形如式（4）的态射$S$映射为$h_0$。

根据 定义中， $\mathbb{A}$-余代数是一个范畴 $\mathtt{C}$，带有一个函子 $\beta\colon \mathtt{C}\to\mathbb{A}(\mathtt{C})$，满足 s

(6a) $$\varepsilon_{\mathtt{C}}\circ\beta = \mathbb{1}$$

and

(6b) $$\mathbb{A}(\beta)\circ\beta = \delta_{\mathtt{C}}\circ\beta.$$

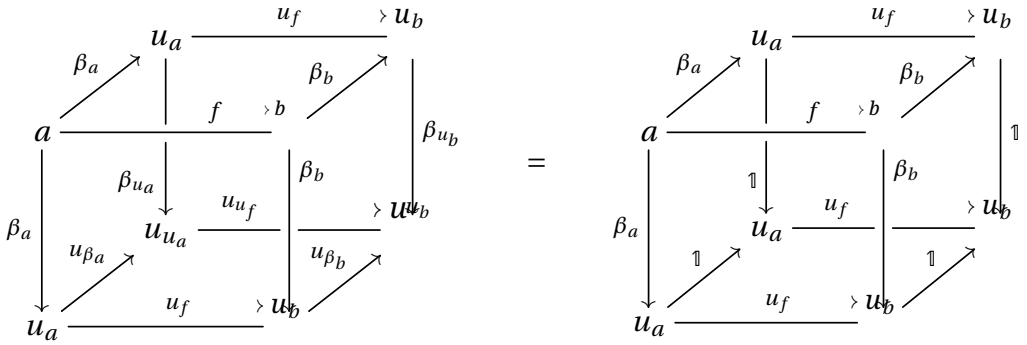
通俗地说，函子 β为 $\mathtt{C}$ 赋予了函子性地选择交换方块的方式

$$\beta_f = \begin{array}{ccc} \beta^0_a & \xrightarrow{\beta_a} & \beta^1_a \\ {\scriptstyle \beta^0_f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \beta^1_f} \\ \beta^0_b & \xrightarrow{\beta_b} & \beta^1_b \end{array}$$

它们对任意的$f\colon\ a \to b$在$\mathtt{C}$中均有定义。方程（6a）给出 $\beta^0{}_f = f$。若将 $\beta^1{}_f\colon\ \beta^1_a \to \beta^1{}_b$记作$uf\colon u_a \to u_b$，则交换图 β_f具有如下形式

$$\beta_f = \quad \begin{array}{ccc} a & \xrightarrow{\beta_a} & u_a \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle u_f} \\ b & \xrightarrow{\beta_b} & u_b. \end{array}$$

Eq将等式 (6b) 应用于态射 $f\colon a \to b \in \mathtt{C}$，得到立方体相等



这意味着 $u_{\beta_a} = \beta_{u_a} = \mathbb{1}_{u_a}$，因此对于 $\mathtt{C}$ 的任意对象 a，有 $u^{u_a} = u_a$；并且对于 $\mathtt{C}$ 的任意态射 f，有$u^{u_f} = uf$。

上述方程表明，$\mathbb{A}$-余代数是一个幂等函子 $u\colon\ \mathtt{C} \to \mathtt{C}$，并配有一个自然变换 $\beta\colon\ 1_\mathtt{C} \Rightarrow u$，使得变换的等式 $u\beta = \beta u = \mathbb{1}_u$成立。这意味着 $(u,\ 1\colon\ u^2 = u,\ \beta\colon\ \mathbb{1} \Rightarrow u)$ 是 $\mathtt{C}$ 上的一个单子。

例 1. 任何具有终对象 $\mathtt{t}$ 的范畴都是一个 $\mathbb{A}$-余代数，其 $\beta_a := !_a$ 是从 a 到 $\mathtt{t}$的唯一映射。选择不同的（必然同构的）终对象，会得到不同但同构的余代数结构。

2. 从余代数到代数

范畴 $\mathtt{Cat}$ 上的任意余单子 $(\mathbb{C}, \delta, \varepsilon)$ 都会在 $\mathbb{C}$-余代数范畴 $\mathtt{Cat}_\mathbb{C}$ 上诱导一个单子 $\mathbb{C}$；该单子由遗忘–余自由伴随生成。

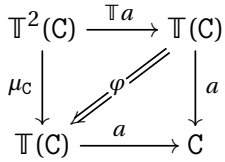
$$\overline{\mathbb{C}} \circlearrowright \mathtt{Cat}_\mathbb{C} \quad \underset{}{\overset{}{\perp}} \quad \mathtt{Cat}\,.$$

给定一个 $\mathbb{C}$-余代数 $(\mathtt{C}, \beta\mathtt{C})$，诱导单子 $\mathbb{C}$ 在 $\mathtt{C}$ 上的取值是余自由余代数 $(\mathbb{C}(\mathtt{C}), \mathrm{c}\mathtt{C})$，其余乘法为 $\mathrm{c}\mathtt{C} := \delta\mathtt{C}\colon\ \mathbb{C}(\mathtt{C}) \to \mathbb{C}^2(\mathtt{C})$。单子 $\mathbb{C}$ 的乘法 $\mu\mathtt{C}$ 和单位 $\eta\mathtt{C}$ 的分量分别由 $\mu\mathtt{C} = \mathbb{C}\varepsilon\mathtt{C}$ 和 $\eta\mathtt{C} = \beta\mathtt{C}$，$\mathtt{C} \in \mathtt{Cat}_\mathbb{C}$ 给出。事实上，$\mu\mathtt{C}\colon\ \mathbb{C}^2(\mathtt{C}) \to \mathbb{C}(\mathtt{C})$ 和 $\beta\mathtt{C}\colon (\mathtt{C}, \beta\mathtt{C}) \to (\mathbb{C}(\mathtt{C}), \mathrm{c}\mathtt{C})$ 是余代数态射，而 $(\mathbb{C}, \mu, \eta)$ 的单位性和结合性则由余单子 $\mathbb{C}$ 以及余代数结构映射 $\beta\mathtt{C}$ 的性质推出。

我们将把这一构造应用于第 1 节中引入的箭头余单子 $\mathbb{A}$。范畴 $\mathbb{A}$ 上的余代数所诱导的单子记作 $\mathbb{A}$。事实上，它是一个 2-单子，作用于 2-范畴

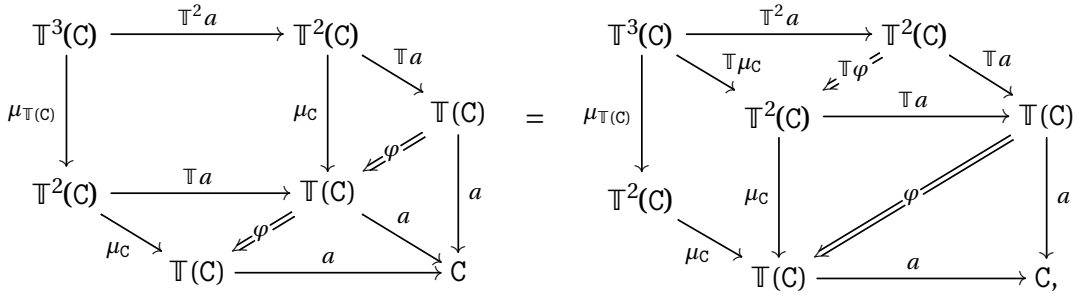
Cat，因此我们可以考虑其归一化松弛代数，这些代数将在第 [5, 章 6] 中回顾。“松弛归一化”是指代数结构映射 $\mathcal{K}\colon \mathbb{A}(\mathtt{C}) \to \mathtt{C}$ 通过一个相容自然变换（即松弛性）与单子乘法相互作用，并且复合 $\mathcal{K}\circ\beta_{\text{范畴 C}}\colon \mathtt{C}\to\mathtt{C}$ 在 $\mathtt{C}$ 上严格等于恒等态射（即归一化）。具体如下

定义 2. 设 $(\mathbb{T},\mu,\eta)$ 是 Cat 上的一个 2-单子。规范化的松弛 $\mathbb{T}$-代数是一个范畴 $\mathtt{C}$，连同一个函子 $a\colon \mathbb{T}(\mathtt{C}) \to \mathtt{C}$ 以及一个自然变换 $\varphi\colon a\circ \mathbb{T}a \Longrightarrow a\circ\mu_{\text{范畴 C}}$，满足

(7)


以下四个条件：

(i) $a\circ\eta_{\text{范畴 C}} = \mathbb{1}_{\text{范畴 C}}$, (ii)
存在如下 2-胞腔等式



(iii) $\varphi\cdot\mathbb{T}\eta_{\text{范畴 C}} = \mathbb{1}_a$,
以及 (iv) $\varphi\cdot\eta_{\mathbb{T}(\mathtt{C})} = \mathbb{1}_a$。

再次设 $(\mathbb{C},\delta,\varepsilon)$ 为一个 2-余单子，$\mathbb{C} = \overline{(}\mathbb{C},\mathbb{C}\varepsilon,\beta)$ 为本节开头明确描述的、由其在 $\mathbb{C}$-余代数范畴上诱导的 2-单子。固定一个 $\mathbb{C}$-余代数 $\mathtt{C}$，其结构映射为 $\beta_{\text{范畴 C}}\colon \mathtt{C}\to\mathbb{C}(\mathtt{C})$；并回忆一下，$\mathtt{C}$ 上自由 $\mathbb{C}$-余代数的结构映射为 $\delta_{\text{范畴 C}}\colon \mathbb{C}(\mathtt{C}) \to \mathbb{C}^2(\mathtt{C})$。下文的定理 4 将介绍一种有用的方法，从而在 $\mathtt{C}$ 上构造规范化松弛代数结构。

设 $K\colon \mathbb{C}(\mathtt{C}) \to \mathtt{C}$ 是一个 $\mathbb{C}$-余代数态射，即满足 $\mathbb{C}K\circ\delta_{\text{范畴 C}} = \beta_{\text{范畴 C}}\circ K$ 的函子。另假设 $K\circ\beta_{\text{范畴 C}} = \mathbb{1}_{\text{范畴 C}}$，并假定存在一个自然变换 $\nu\colon \mathbb{1}_{\mathbb{C}(\mathtt{C})} \Rightarrow \beta_{\text{范畴 C}}\circ\varepsilon_{\text{范畴 C}}$。我们将考虑复合自然变换

(8) $$\kappa := (K\cdot\nu)\colon K \Longrightarrow \varepsilon_{\mathtt{C}} \text{ and } \varphi := (K\cdot\mathbb{C}\kappa)\colon K\circ\mathbb{C}K \Longrightarrow K\circ\mathbb{C}\varepsilon_{\mathtt{C}}.$$

引理 3。我们有

(9) $$(\kappa\cdot\varepsilon_{\mathbb{C}(\mathtt{C})})\square(\kappa\cdot\mathbb{C}K) = (\kappa\cdot\mathbb{C}\varepsilon_{\mathtt{C}})\square(K\cdot\mathbb{C}\kappa).$$

在上述方程中，与之前一样，$\cdot$ 表示变换和函子的水平复合，而 $\square$ 表示垂直复合。

证明。变换 $\alpha\colon\ F \Rightarrow G$的自然性意味着，对于每个态射 $f\colon\ x \to y$，图表

(10a)
$$\begin{array}{ccc} F(x) & \xrightarrow{\alpha_x} & G(x) \\ {\scriptstyle F(f)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle G(f)} \\ F(y) & \xrightarrow{\alpha_y} & G(y) \end{array}$$

c交换。将方程 (9) 作用于对象 $z \in \mathbb{C}^2(\mathbb{C})$ 上，得到图表

(10b)
$$\begin{array}{ccc} K\mathbb{C}K(z) & \xrightarrow{(\kappa\cdot\mathbb{C}K)(z)} & \varepsilon_{\mathbb{C}}\mathbb{C}K(z) = K\varepsilon_{\mathbb{C}(\mathbb{C})}(z) \\ {\scriptstyle (K\cdot\mathbb{C}\kappa)(z)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle (\kappa\cdot\varepsilon_{\mathbb{C}(\mathbb{C})})(z)=(\varepsilon_{\mathbb{C}}\cdot\mathbb{C}\kappa)(z)} \\ K\mathbb{C}\varepsilon_{\mathbb{C}}(z) & \xrightarrow{(\kappa\cdot\mathbb{C}\varepsilon_{\mathbb{C}})(z)} & \varepsilon_{\mathbb{C}}\mathbb{C}\varepsilon_{\mathbb{C}}(z) = \varepsilon_{\mathbb{C}}\varepsilon_{\mathbb{C}(\mathbb{C})}(z) \end{array}$$

其中，各等式均由余单位 $\varepsilon\colon\ \mathbb{C} \to \mathbb{1}$ 的 2-自然性得出。取 (10a) 中 $F = K$、$G = \varepsilon_{\mathbb{C}}$、$x = \mathbb{C}K(z)$、$y = \mathbb{C}\varepsilon\mathbb{c}(z)$、$f = \mathbb{C}\kappa(z)$ 以及 $\alpha = \kappa$，可见 (10b) 表示 κ 的自然性。由于对象 z 是任意的，等式 (9) 成立。□

定理 4. 设 $(\mathbb{C}, \delta, \varepsilon)$ 是一个 2-余单子，$\mathbb{C} = (\mathbb{C}, \mathbb{C}\varepsilon, \beta)$ 是其在 $\mathbb{C}$-余代数范畴上诱导的 2-单子。设 $\beta C\colon\ \mathbb{C} \to \mathbb{C}(\mathbb{C})$ 是范畴 $\mathbb{C}$ 上的一个余代数结构，且 $\nu\colon \mathbb{1}_{\mathbb{C}(\mathbb{C})} \Rightarrow \beta C \circ \varepsilon C$ 是一个自然变换，满足 $\varepsilon C \cdot \nu = \mathbb{1}_{\varepsilon_{\mathbb{C}}}$，以及 $\nu \cdot \beta C = \mathbb{1}_{\beta_{\mathbb{C}}}$。最后，设 $K\colon\ \mathbb{C}(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ 是一个 $\mathbb{C}$-余代数的态射，满足 $K \circ \beta C = \mathbb{1}C$，并令 φ 如 (8) 所示。若 $\varphi \cdot \delta C = \mathbb{1}_K$，则 $(\mathbb{C}, K, \varphi)$ 是一个规范化的松弛 $\mathbb{C}$-代数。此外，任一规范化松弛 $\mathbb{C}$-代数 $(\mathbb{C}, K, \varphi)$ 中的相干性 φ 均由 K 和 ν 唯一确定。

证明。 我们需要验证定义 2 中表述的四个条件。条件 (i) 由定理假设成立。条件 (ii) 中要求的自然变换复合相等，可由以下等式链得出

(11a) $$(\varphi\cdot\mathbb{C}\varepsilon_{\mathbb{C}(\mathbb{C})})\square(\varphi\cdot\mathbb{C}^2K) = (K\cdot\mathbb{C}\kappa\cdot\mathbb{C}\varepsilon_{\mathbb{C}(\mathbb{C})})\square(K\cdot\mathbb{C}\kappa\cdot\mathbb{C}^2K)$$

(11b) $$= K\cdot\mathbb{C}\big((\kappa\cdot\varepsilon_{\mathbb{C}(\mathbb{C})})\square(\kappa\cdot\mathbb{C}K)\big)$$

(11c) $$= (K\cdot\mathbb{C}\big((\kappa\cdot\mathbb{C}\varepsilon_{\mathbb{C}})\square(K\cdot\mathbb{C}\kappa)\big)$$

(11d) $$= (K\cdot\mathbb{C}\kappa\cdot\mathbb{C}^2\varepsilon_{\mathbb{C}})\square(K\cdot\mathbb{C}K\cdot\mathbb{C}^2\kappa) = (\varphi\cdot\mathbb{C}^2\varepsilon_{\mathbb{C}})\square(K\cdot\mathbb{C}\varphi).$$

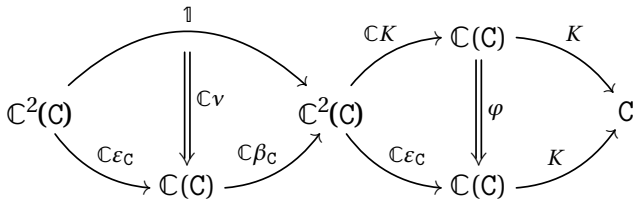
(11a) 中的各项表示条件 (ii) 中方程的左侧，(11b) 是将 $K\cdot\mathbb{C}$提取出来后得到的，(11c) 由 (9) 得出，而 (11d) 则是条件 (ii) 中方程的右侧。条件 (iii) 可由以下直接的等式链得出

$$\varphi\cdot\mathbb{C}\beta_{\mathbb{C}} = K\cdot\mathbb{C}\kappa\cdot\mathbb{C}\beta_{\mathbb{C}} = K\cdot(\mathbb{C}K\cdot\mathbb{C}\nu)\cdot\mathbb{C}\beta_{\mathbb{C}} = (K\circ\mathbb{C}K)\cdot\mathbb{C}\nu\cdot\mathbb{C}\beta_{\mathbb{C}} = (K\circ\mathbb{C}K)\cdot\mathbb{1}_{\mathbb{C}\beta_{\mathbb{C}}} = \mathbb{1}_K.$$

条件 (iv) 导致的 $\varphi\cdot\beta_{\mathbb{C}(\mathbb{C})} = \varphi\cdot\delta_{\text{范畴 }\mathbb{C}} = \mathbb{1}_K$由定理的其余假设保证成立。

为了证明相干性的唯一性，设 $(\mathbb{C}, K, \varphi)$ 是一个归一化的 lax $\mathbb{C}$-代数。特别地，我们假设 $\varphi\circ\mathbb{1}_{\mathbb{C}(\beta_{\mathbb{C}})} = \varphi\cdot\mathbb{C}(\beta_{\text{范畴 }\mathbb{C}}) = \mathbb{1}_K$，并提醒读者，$\mathbb{1}_{\varepsilon_{\mathbb{C}}}\circ\nu = \varepsilon_{\text{范畴 }\mathbb{C}}\cdot\nu = \mathbb{1}_{\varepsilon_{\mathbb{C}}}$是由

该定理假设的。φ 的唯一性源于图表中 2-胞的水平复合的唯一性



这意味着图表交换

$$\begin{array}{ccc} K\circ\mathbb{C}K & \xRightarrow{(K\circ\mathbb{C}K)\cdot\mathbb{C}\nu} & (K\circ\mathbb{C}K)\circ(\mathbb{C}\beta_{\mathsf{C}}\circ\mathbb{C}\varepsilon_{\mathsf{C}}) \\ \Downarrow{\scriptstyle\varphi} & & \Downarrow{\scriptstyle\varphi\cdot(\mathbb{C}\beta_{\mathsf{C}}\circ\mathbb{C}\varepsilon_{\mathsf{C}})} \\ K\circ\mathbb{C}\varepsilon_{\mathsf{C}} & \xRightarrow{(K\circ\mathbb{C}\varepsilon_{\mathsf{C}})\cdot\mathbb{C}(\nu)} & K\circ\mathbb{C}\varepsilon_{\mathsf{C}} \end{array}$$

自然变换的。在该图表中，按假设，右侧的竖直变换和底部的水平变换都是恒等变换。□

注 5. 定理 4 中的条件 $\varepsilon_{\text{范畴 C}}\cdot\nu=\mathbb{1}_{\varepsilon_{\mathsf{C}}}$ 和 $\nu\cdot\beta_{\text{范畴 C}}=\mathbb{1}_{\beta_{\mathsf{C}}}$ 等价于伴随 $(1,\nu):\varepsilon_{\text{范畴 C}}\dashv\beta_{\text{范畴 C}}$，其单位为 $\nu\colon\mathbb{1}_{\mathbb{C}(\mathsf{C})}\Rightarrow\beta_{\text{范畴 C}}\circ\varepsilon_{\text{范畴 C}}$，余单位为 $1:\varepsilon_{\text{范畴 C}}\circ\beta_{\text{范畴 C}}=\mathbb{1}_{\text{范畴 C}}$。若定义 $\theta:\beta_{\text{范畴 C}}\circ K\Rightarrow\mathbb{1}$ 为

$$\theta:=\mathbb{C}K\cdot\mathbb{C}\nu\cdot\delta_{\mathsf{C}}$$

我们得到另一个伴随 $(\theta,1)\colon\ \beta_{\text{范畴 C}}\dashv K\colon\ \ \mathbb{C}(\mathsf{C})\to\mathsf{C}$，于是定理 4 可由 [13,引理 2.4.16] 的对偶推出。

基点范畴是一个范畴，其中选定的对象 0 既是始对象也是终对象。对于对象 a，我们用 $!_a\colon a\to 0$ 和 $!^a\colon\ 0\to a$ 表示唯一的映射。零态射 $0\colon\ a\to b$，按定义，是一个可经由 0 分解的态射。

现在我们将定理 4 应用于 $\mathbb{C}=\mathbb{A}$ 为第 1 节中描述的带有余单子结构 $(\mathbb{A},\delta,\varepsilon)$ 的箭头范畴函子的情形。正如例 1 所述，每个基点范畴 C 都是一个 $\mathbb{A}$-余代数，其中 $\beta_{\text{范畴 C}}(a)=!_a$，且 $\beta_{\text{范畴 C}}(f\colon a\to b)=(!_a,!_b)\colon\ f\to 0$。在这个特定情形下，我们有一个典范的显式自然变换 $\nu\colon\ \mathbb{1}_{\mathbb{A}(\mathsf{C})}\Rightarrow\beta_{\text{范畴 C}}\circ\varepsilon_{\text{范畴 C}}$，其定义如下

$$\nu_{(f\colon a\to b)}=(\mathbb{1}_a,!_b)\colon f\longrightarrow !_a. \tag{12}$$

命题 *6.* 设 C 是一个带基点的范畴，$\mathcal{K}\colon\ \mathbb{A}(\mathsf{C})\to\mathsf{C}$ 是一个函子，且 $\varphi\colon\ \mathcal{K}\circ\mathbb{A}\mathcal{K}\Rightarrow\mathcal{K}\circ\mathbb{A}\varepsilon\mathcal{C}$ 是通过 *(12)* 中的 ν 和 *(8)* 中的公式 $\mathcal{K}$ 定义的变换。若 $\mathcal{K}\circ\beta\mathcal{C}=\mathbb{1}\mathcal{C}$、$\mathbb{A}\mathcal{K}\circ\delta\mathcal{C}=\beta\mathcal{C}\circ\mathcal{K}$ 且 $\varphi\cdot\delta\mathcal{C}=\mathbb{1}_{\mathcal{K}}$，则 $(\mathsf{C},\mathcal{K},\varphi)$ 是一个规范化的松弛 $\mathbb{A}$-代数。此外，任何规范化松弛 $\mathbb{A}$-代数 $(\mathsf{C},\mathcal{K},\varphi)$ 中的相干性 φ 都由 $\mathcal{K}$ 唯一确定。

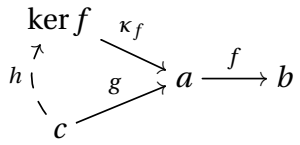
证明。条件 $\varepsilon_{\text{范畴 C}}\cdot\nu=\mathbb{1}_{\varepsilon_{\mathsf{C}}}$ 和 $\nu\cdot\beta_{\text{范畴 C}}=\mathbb{1}_{\beta_{\mathsf{C}}}$ 显然成立，因此定理 4 适用 s. □

3. 核作为代数

从本节开始，我们始终假设范畴 C 是带基点的，并将其理解为一个 $\mathbb{A}$-余代数，其中 $\beta_{\text{范畴 }\mathsf{C}}(a) = !_a$ 以及 $\beta_{\text{范畴 }\mathsf{C}}(f\colon a \to b) = (!_a, !_b) : f \to 0$，参见例 1。

定义 7. 带基点的范畴 C 具有代数核，若对每个态射 $f\colon a \to b$，在 C 中都可以选取一个核，使其是态射 $\kappa_f\colon \ker f \to a$，并满足

(i) 复合 $\ker f \xrightarrow{\kappa_f} a \xrightarrow{f} b$ 是零态射；(ii) $\kappa_{\mathbb{1}_a} = !^a$ 且 $\kappa_{!_a} = \mathbb{1}_a$ 对任意 $a \in \mathsf{C}$ 都成立（归一化）；(iii) 以下泛性质成立：对于任意 $g\colon c \to a$，若 fg 是零态射，则在图表中存在唯一的 $h\colon c \to \ker f$



其中 $\kappa_f h = g$。

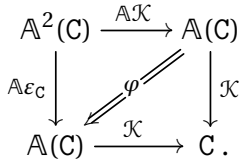
假设选择公理成立，则每个带核范畴都具有代数核。此时，核与代数核这两个概念等价，因此我们将始终默认核是代数核，而不再另行说明。本节的主要结果如下：

Th定理 8. 设 C 是一个带基点的范畴。以下条件等价 .

(i) 范畴 C 带有一个规范化的松弛$\mathbb{A}$代数结构。*(ii)* 范畴 C有核。

在证明定理之前，我们先明确描述规范化的 lax $\mathbb{A}$-代数的结构。单子 $\mathbb{A}$ 的定义 2 中的数据可表示为 $\mathbb{T} = \mathbb{A}$, $\mu_{\text{范畴 }\mathsf{C}} = \mathbb{A}\varepsilon_{\text{范畴 }\mathsf{C}} = \mathbb{A}e^*_{\mathsf{C}}$, $\eta_{\text{范畴 }\mathsf{C}} = \beta_{\text{范畴 }\mathsf{C}}$，或者在 C 已知的情况下简写为 β，以及 $\eta_{\mathbb{T}(\mathsf{C})} = \beta_{\mathbb{A}(\mathsf{C})} = \delta_{\text{范畴 }\mathsf{C}} = m^*_{\mathsf{C}}$，即余自由余代数 $\mathbb{A}(\mathsf{C})$ 的结构映射。此外，我们将用 $\mathcal{K}$ 代替 a。因此，规范化的 lax $\mathbb{A}$-代数是一个$\mathbb{A}$-余代数 $(\mathsf{C}, \beta\colon \mathsf{C} \to \mathbb{A}(\mathsf{C}))$，带有代数结构映射 $\mathcal{K}\colon \mathbb{A}(\mathsf{C}) \to \mathsf{C}$ 和一个相容自然变换 φ in

(13)



我们将采用受 [1] 启发的记号 $\mathcal{K}f \triangleright a_f \longrightarrow b$，表示 $\mathcal{K}f$ 是 $\mathcal{K}$ 在态射 $f\colon a \to b$ 上的取值。刻画 lax $\mathbb{A}$-代数结构的典型图表如下：

(14)
$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{K}(\mathcal{K}S) & \triangleright & \mathcal{K}f & \xrightarrow{\mathcal{K}S} & \mathcal{K}g \\ {\scriptstyle\varphi_S}\downarrow & & & & \\ \mathcal{K}h_0 & \triangleright & a & \xrightarrow{h_0} & c \\ & & {\scriptstyle f}\downarrow & S & \downarrow{\scriptstyle g} \\ & & b & \xrightarrow{h_1} & d. \end{array}$$

归一化条件 $\mathcal{K}\circ\beta = \mathbb{1}_{\text{范畴 }\mathsf{C}}$ 给出，对于 $a \in \mathsf{C}, \mathcal{K}\beta_a = a$。对于范畴 C 中的态射 f 及其关联态射 $\beta_f = (f, 0) : !_a \to !_b$，在 $\mathbb{A}(\mathsf{C})$ 中它给出等式 $\mathcal{K}\beta_f = f$。结合归一化条件 $\varphi\cdot\mathbb{A}\beta = \mathbb{1}_{\mathcal{K}}$，可表示为

(15)
$$\begin{array}{ccccc} & & \mathcal{K}f & \triangleright & a & \xrightarrow{f} & b \\ & {\scriptstyle\varphi_{\beta_f}=\mathbb{1}_{\mathcal{K}f}}\downarrow & & & & & \\ & & \mathcal{K}f & \triangleright & a & \xrightarrow{f} & b \\ & & & & {\scriptstyle !_a}\downarrow & \beta_f & \downarrow{\scriptstyle !_b} \\ & & & & 0 & \xrightarrow{0} & 0. \end{array}$$

函子 $\mathcal{K}\colon \mathbb{A}(\mathsf{C}) \to \mathsf{C}$ 必须是一个 $\mathbb{A}$-余代数同态，从余自由 $\mathbb{A}$-余代数 $(\mathbb{A}(\mathsf{C}), \delta_{\text{范畴 }\mathsf{C}})$ 到 (C, β)。这意味着图表

(16)
$$\begin{array}{ccc} \mathbb{A}(\mathsf{C}) & \xrightarrow{\mathcal{K}} & \mathsf{C} \\ {\scriptstyle\delta_{\mathsf{C}}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\beta} \\ \mathbb{A}^2(\mathsf{C}) & \xrightarrow{\mathbb{A}\mathcal{K}} & \mathbb{A}(\mathsf{C}) \end{array}$$

交换。将 (16) 代入 $f\colon a \to b \in \mathsf{C}$，得到态射之间的等式

(17)
$$\big(\mathbb{A}\mathcal{K}(\delta_{\mathsf{C}}(f)) : \mathcal{K}f \longrightarrow \mathcal{K}\mathbb{1}_b\big) \;=\; (\beta_{\mathcal{K}f} : \mathcal{K}f \longrightarrow 0).$$

连同 第二个归一化条件 $\varphi\cdot\delta_{\text{范畴 }\mathsf{C}} = \mathbb{1}_{\mathcal{K}}$，可通过图表表示

(18)
$$\begin{array}{ccccc} & & \mathcal{K}f & \triangleright & \mathcal{K}f & \xrightarrow{\beta_{\mathcal{K}f}} & 0 \\ & {\scriptstyle\varphi_{\delta_{\mathsf{C}}(f)}=\mathbb{1}_{\mathcal{K}f}}\downarrow & & & & & \\ & & \mathcal{K}f & \triangleright & a & \xrightarrow{f} & b \\ & & & & {\scriptstyle f}\downarrow & \delta_{\mathsf{C}}(f) & \downarrow{\scriptstyle\mathbb{1}_b} \\ & & & & b & \xrightarrow{\mathbb{1}_b} & b. \end{array}$$

特别是，

(19)
$$\mathcal{K}\mathbb{1}_b = 0$$

对于任意以 f 为目标的 b。

将 (16) 作用于由 (4) 中交换图表示的态射 $S = (h_0, h_1)$，得到图表相等

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{K}f & \xrightarrow{\mathcal{K}S} & \mathcal{K}g \\ {\scriptstyle \mathbb{A}\mathcal{K}(\delta_{\mathsf{C}}(f))}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathbb{A}\mathcal{K}(\delta_{\mathsf{C}}(g))} \\ \mathcal{K}\mathbb{1}_b & \xrightarrow{\mathcal{K}P} & \mathcal{K}\mathbb{1}_d \end{array} \;=\; \begin{array}{ccc} \mathcal{K}f & \xrightarrow{\mathcal{K}S} & \mathcal{K}g \\ {\scriptstyle \beta_{\mathcal{K}f}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \beta_{\mathcal{K}g}} \\ 0 & \xrightarrow{0} & 0 \end{array}$$

其中 $P = (h_1, h_1)\colon \mathbb{1}_b \to \mathbb{1}_d$。结合 (17)，可得等式 $\mathcal{K}P = 0$，可表示为

$$\begin{array}{ccc} 0 & \xrightarrow{0} & 0 \\ b & \xrightarrow{h_1} & d \\ {\scriptstyle \mathbb{1}_b}\downarrow & P & \downarrow{\scriptstyle \mathbb{1}_d} \\ b & \xrightarrow{h_1} & d. \end{array}$$

定理 *8* 的证明。 设 $\mathsf{C} = (\mathsf{C}, \beta_{\text{范畴 C}}, \mathcal{K}, \varphi)$ 为一个松弛归一化的 $\mathbb{A}$-代数，并回顾 (12) 中给出的自然变换 $\nu\colon \mathbb{1}_{\mathbb{A}(\mathsf{C})} \Rightarrow \beta_{\text{范畴 C}} \circ \varepsilon_{\text{范畴 C}}$：

$$\nu_{(f\colon a \to b)} = (\mathbb{1}_a, !_b)\colon f \longrightarrow !_a.$$

对于任意 $f\colon a \to b$（属于 C），考虑分量

$$\kappa_f := (\mathcal{K} \cdot \nu)_f = \mathcal{K}\left(\begin{array}{ccc} a & \xrightarrow{\mathbb{1}_a} & a \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle !_a} \\ b & \xrightarrow{!_b} & 0 \end{array} \right) = \Big(\mathcal{K}(f) \xrightarrow{\mathcal{K}(\mathbb{1}_a, !_b)} \mathcal{K}(!_a) \Big) = \Big(\mathcal{K}(f) \xrightarrow{\mathcal{K}(\mathbb{1}_a, !_b)} a \Big). \tag{20}$$

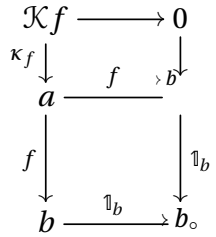
因此，对象 $\mathcal{K}(f)$ 通过自然变换 $\kappa = \mathcal{K} \cdot \nu$ 的一个分量与 f 的定义域相连。因此，对于 $\mathbb{A}(\mathsf{C})$ 中的任意态射 $S = (h_0, h_1)\colon f \to g$，图表 (14) 中的三角形可以替换为实际映射 κ_f 和 κ_g，如下所示

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{K}f & \xrightarrow{\mathcal{K}S} & \mathcal{K}g \\ {\scriptstyle \kappa_f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \kappa_g} \\ a & \xrightarrow{h_0} & c \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ b & \xrightarrow{h_1} & d \end{array} \tag{21}$$

使得上方方形可交换。事实上，上方方形 $(\kappa_f, \kappa_g)\colon \mathcal{K}S \to h_0$ 是自然变换 $\mathbb{A}\kappa = \mathbb{A}\mathcal{K} \cdot \mathbb{A}\nu\colon \mathbb{A}\mathcal{K} \Rightarrow \mathbb{A}\varepsilon_{\text{范畴 C}}$ 的分量 $(\mathbb{A}\kappa)_S = (\kappa_f, \kappa_g)$，参见 (5)。由 (19)，$\mathcal{K}\mathbb{1}_a = 0$，因此 $\kappa_{\mathbb{1}_a} = !^a\colon 0 \to a$。此外，$\nu_{!_a} = (\mathbb{1}_a, !_0) = \mathbb{1}_{!_a}$，所以由函子 $\mathbb{A}\mathcal{K}$ 的函子性可得 $\kappa_{!_a} = \mathcal{K}\mathbb{1}_{!_a} = \mathbb{1}_{\mathcal{K}!_a} = \mathbb{1}_a$。而且，对 C 的任意态射 f $\kappa_f = 0$，这可由以下 (21) 的特例推出

其中$S = \delta$范畴 $\mathsf{C}(f)$。

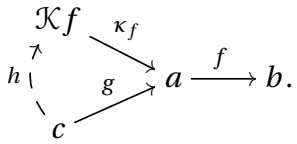
(22)



我们将证明，$\kappa_f\colon \mathcal{K}f \to a$是$f\colon a \to b$的一个核。

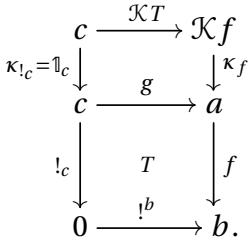
设$g\colon c \to a$是一个态射，且$fg = 0$。我们必须证明图表中存在唯一的$h\colon c \to \mathcal{K}f$

(23)



我们将态射$(g, !^b)\colon !_c \to f$记作T。图表的交换性

(24)



这意味着 $\mathcal{K}T\colon c \to \mathcal{K}f$满足 $\kappa_f \circ \mathcal{K}T = g$。因此，态射 $\mathcal{K}T\colon c \to \mathcal{K}f$将成为（23）中虚线箭头的候选。接下来需要证明，$h := \mathcal{K}T$是使（23）可交换的唯一态射。

设 $h\colon c \to \mathcal{K}(f)$ 是任意满足 $\kappa_f \circ h = g$ 的态射。$h = \mathcal{K}(T)$ 的唯一性由立方体上 $\mathbb{A}\mathcal{K}(X)$ 的取值推出

$$X = \left(\mathbb{1}_{!_c},\ \mathbb{A}\kappa_{\delta_{\mathsf{C}}(f)}\right)\colon \mathbb{A}\beta(h) \to T$$

参见（1），将其视为 $\mathbb{A}^2(\mathsf{C})$ 中的态射。根据命题 6，有 $\varphi = (\mathcal{K} \circ \mathbb{A}\mathcal{K}) \cdot \mathbb{A}\nu$，因此定义 2 的归一化条件（iv）给出

$$\mathbb{1}_{\mathcal{K}} = \varphi \cdot \delta_{\mathsf{C}} = (\mathcal{K} \circ \mathbb{A}\mathcal{K}) \cdot \mathbb{A}\nu \cdot \delta_{\mathsf{C}} = \mathcal{K} \cdot \mathbb{A}(\mathcal{K} \cdot \nu) \cdot \delta_{\mathsf{C}} = \mathcal{K} \cdot \mathbb{A}\kappa \cdot \delta_{\mathsf{C}}.$$

注意

$$(\mathbb{A}\kappa \cdot \delta_{\mathsf{C}})(f) = \mathbb{A}\kappa_{\delta_{\mathsf{C}}(f)} = (\kappa_f, !^b)\colon !_{\mathcal{K}f} \to f$$

是X的后方交换方块。因此，图 1 顶部交换图 $\mathbb{A}\mathcal{K}(X)$ 的后边是$\mathcal{K}\left(\mathbb{A}\kappa_{\delta_{\mathsf{C}}(f)}\right) = \mathbb{1}_{\mathcal{K}}(f)$，这证明了$h = \mathcal{K}(T)$。

* * * * *

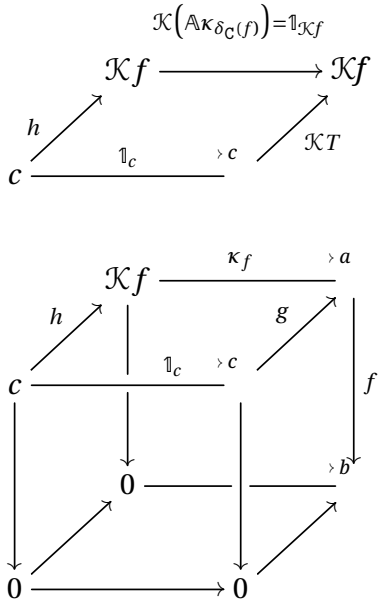
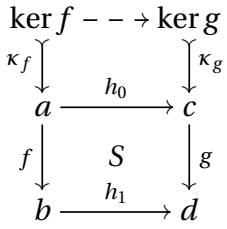


图 1. 带光环的立方体。

反过来，假设 C 配备了核 $\kappa_f\colon \ker f \to a$。核都是单态射；在合适的情况下，我们用带分叉尾部的箭头来表示它们，以示强调。我们将归一化 lax $\mathbb{A}$-代数结构在 $f \in \mathbb{A}(\mathsf{C})$ 上的作用定义为

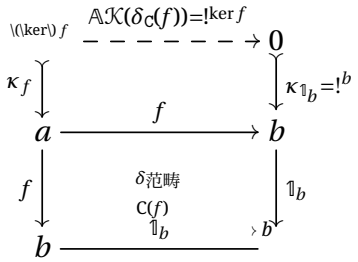
$$\mathcal{K}f := \ker f.$$

令 $S = (h_0, h_1)\colon f \to g$ 为表示范畴 $\mathbb{A}(\mathsf{C})$ 中一个态射的交换方块。由于 $gh^0\kappa_f = h_1 f \kappa_f = 0$，存在一个从 $\ker f$ 到 $\ker g$ 的唯一态射，使得图表的上方交换图



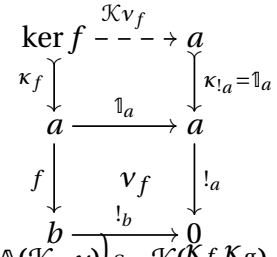
可交换。我们将 $\mathcal{K}S\colon \ker f \to \ker g$ 定义为上图中的虚线箭头。根据核的泛性质，该指派的函子性由此得证。此外，κ_f 组装成一个自然变换 $\kappa\colon \mathcal{K} \to \varepsilon_{\text{范畴 }\mathsf{C}}$。根据命题 6，剩下只需验证条件 $\mathcal{K}\circ\beta_{\text{范畴 }\mathsf{C}} = \mathbb{1}_{\text{范畴 }\mathsf{C}}$、$\mathbb{A}\mathcal{K}\circ\delta_{\text{范畴 }\mathsf{C}} = \beta_{\text{范畴 }\mathsf{C}}\circ\mathcal{K}$ 以及 $\varphi\cdot\delta_{\text{范畴 }\mathsf{C}} = \mathbb{1}_{\mathcal{K}}$。

首先，对于任意 $a \in \mathsf{C}$，条件 $\mathcal{K} \circ \beta_{\text{范畴 C}} = \mathbb{1}_{\text{范畴 C}}$ 可直接由归一化假设 $\kappa_{!_a} = \mathbb{1}_a$ 推出。条件 $\mathbb{A}\mathcal{K} \circ \delta_{\text{范畴 C}} = \beta_{\text{范畴 C}} \circ \mathcal{K}$ 则由图表得出



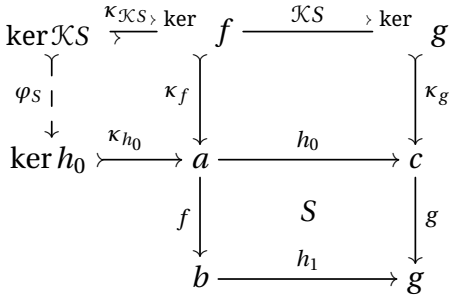
这里用到了第二个归一化假设 $\kappa_{\mathbb{1}_b} = !^b$。

为了证明 $\varphi \cdot \delta_{\text{范畴 C}} = \mathbb{1}_{\mathcal{K}}$，我们首先需要描述自然变换$\varphi = \mathcal{K} \cdot \mathbb{A}(\mathcal{K} \cdot \nu)$ 在式（8）中的定义分量。分量 $(\mathcal{K} \cdot \nu)f$来自图表

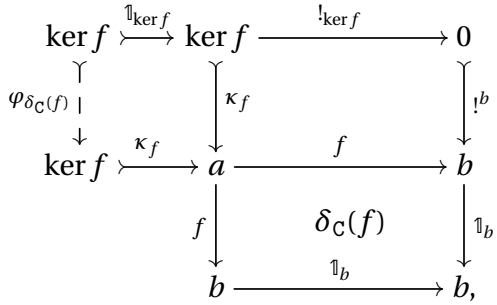


因此 $(\mathcal{K} \cdot \nu)f = \kappa_f$。所以 $\varphi_S = \big(\mathcal{K} \cdot \mathbb{A}(\mathcal{K} \cdot \nu)\big)_S = \mathcal{K}(\kappa_f, \kappa_g)$，如图表所示

(25)



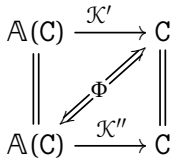
在 $S = \delta_{\text{范畴 C}}(f)$ 处求值时，条件 $\varphi \cdot \delta_{\text{范畴 C}} = \mathbb{1}_{\mathcal{K}}$ 可由该图表推出



其中左上方的交换图可交换，且映射κ_f是单态射。 □

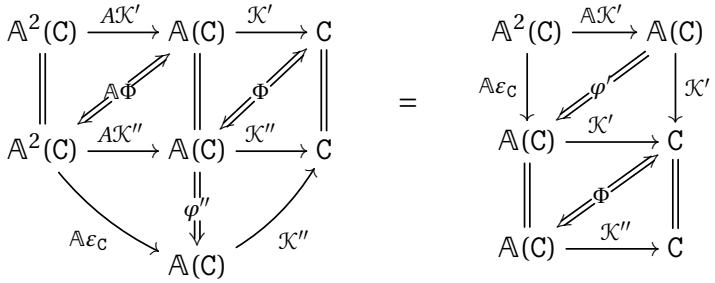
命题 9. 带基点的范畴 C 上的任意两个规范化松弛 $\mathbb{A}$-代数，都由一个伪同构连接，其函子部分是 C 上的恒等函子。

证明。根据定理 8，命题中的两个规范化松弛代数结构等同于范畴 C 上的两个核系统 $\mathcal{K}'$ 和 $\mathcal{K}''$。该命题断言，图表中存在一个自然同构 $\Phi\colon \mathcal{K}' \Rightarrow \mathcal{K}''$



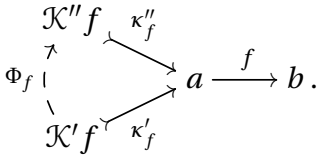
它满足相干性

(26)



其中涉及 (25) 中相应的变换 φ' 和 φ''。由于归一化，涉及单子单位的标准相干性对每个$a \in \mathsf{C}$都化简为 $\Phi_{!a} = \mathbb{1}_a$。

变换 Φ 按如下方式构造。给定$f\colon a \to b \in A\mathsf{C}$，则 $\Phi_f\colon \mathcal{K}'f \to \mathcal{K}''f$是图表中的唯一态射



其存在性由核的泛性质得出，并且满足 $\kappa''_f \circ \Phi_f = \kappa'_f$。

条件 $\Phi_{!a} = \mathbb{1}_a$ 显然成立。为验证 (26)，只需检查等式

$$\Phi_{h_0} \circ \varphi'_S = \varphi''_S \circ \mathcal{K}''\Phi_S \circ \Phi_{\mathcal{K}'S}. \tag{27}$$

在交换图 $S = (h_0, h_1)$ 上：$f \to g \in \mathbb{A}^2(\mathsf{C})$。我们计算

$$\begin{aligned} \kappa''_{h_0} \circ \Phi_{h_0} \circ \varphi'_S = \kappa'_{h_0} \circ \varphi'_S = \kappa'_f \circ \kappa'_{\mathcal{K}'S} = \kappa'_f \circ \kappa''_{\mathcal{K}'S} \circ \Phi_{\mathcal{K}'S} \\ = \kappa''_f \circ \Phi_f \circ \kappa''_{\mathcal{K}'S} \circ \Phi_{\mathcal{K}'S} \qquad \text{(28a)} \\ = \kappa''_f \circ \kappa''_{\mathcal{K}''S} \circ \mathcal{K}''\Phi_S \circ \Phi_{\mathcal{K}'S} = \kappa''_{h_0} \circ \varphi''_S \circ \mathcal{K}''\Phi_S \circ \Phi_{\mathcal{K}'S}. \qquad \text{(28b)} \end{aligned}$$

行 (28a) 与 (28b) 之间的等式用到了这样一个事实：κ'' 是一个自然变换$\kappa''\colon \mathcal{K}'' \Rightarrow \varepsilon_{\text{范畴 }\mathsf{C}}$，且 $\varepsilon_{\text{范畴 }\mathsf{C}}(\Phi_S) = \Phi_f$。由于 κ''_{h_0}是单态射，等式 (27) 成立。□

注 10. 命题 9 有一种概念性的解释。根据注 5，任意两个松弛 $\mathbb{A}$-代数结构 $\mathcal{K}', \mathcal{K}''$ 都参与伴随 $\beta_{\text{范畴 }\mathsf{C}} \dashv \mathcal{K}'$ 和 $\beta_{\text{范畴 }\mathsf{C}} \dashv \mathcal{K}''$；由于伴随函子在同构意义下唯一，代数结构也如此。相对余松弛幂等性的概念阐明了我们的结果与类性质结构之间的联系：我们称

若对任意松弛 $\mathbb{T}$-代数 $a\colon\ \mathbb{T}(A)\to A$ 满足 $A\in\mathtt{P}$，都存在一个 2-胞腔 $\theta\colon\ \eta_A\circ a\Rightarrow \mathbb{1}_{\mathbb{T}(A)}$，使得 $(\theta,$ 1) 构成伴随 $\eta_A\dashv a$ 的余单位 - 单位对，那么带有单位 η 的 2- 单子 $\mathbb{T}$ 在满子范畴 $\mathtt{P}\subseteq\mathtt{R}$ 上是余松弛幂等的。

我们的 2-单子 $\mathbb{A}$ 在带基点范畴的子范畴 $\mathtt{PtCat}\subseteq\mathtt{Cat}_{\mathbb{A}}$ 上是余松弛幂等的。因此，对于松弛 $\mathbb{A}$-代数 $\mathcal{K}'\colon\ \mathbb{A}(\mathtt{C}')\to$ 范畴 $\mathcal{C}'$，$\mathcal{K}''\colon\ \mathbb{A}(\mathtt{C}'')\to\mathtt{C}''$，其中 $\mathtt{C}',\mathtt{C}''\in\mathtt{PtCat}$；对于 $\mathtt{PtCat}$ 中的函子 $F\colon\ \mathtt{C}'\to\mathtt{C}''$，存在唯一的 2-胞腔 $F\colon\ F\circ\mathcal{K}'\Rightarrow\mathcal{K}''\circ\mathbb{A}(F)$，使得这对 (F,F) 成为 $\mathbb{A}$-代数的余松弛态射。函子 F的唯一延拓由核图给出

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{K}''F(f) & \xrightarrow{\kappa''_{F(f)}} & \\ \uparrow{\scriptstyle \overline{F}_f} & & F(a)\xrightarrow{F(f)}F(b)\,, \\ F(\mathcal{K}'f) & \xrightarrow{F(\kappa'_f)} & \end{array}$$

其中 $f\colon\ a\to b\in\mathtt{C}'$。

4. 纺锤嵌入

本节旨在研究函子 $\mathbb{A}$ （在 (3) 中定义）的迭代与巴构造之间的关系。尽管它起辅助作用，但仍包含有趣的组合构造。

令 $\underline{\mathtt{n}}$ 为有序集 $\{0<1<\cdots<n\}$，并将其视为一个范畴；令 $\mathbb{N}_n(\mathtt{C}):=[\underline{\mathtt{n}},\mathtt{C}]$ 为 $\mathtt{C}$ 的标准单纯神经的范畴版本的第 n 部分。后者是由可复合箭头链组成的范畴

$$[f_1,\dots,f_n]:=\bullet\xrightarrow{f_1}\bullet\xrightarrow{f_2}\cdots\qquad\cdots\bullet\xrightarrow{f_{n-1}}\bullet\xrightarrow{f_n}\bullet\,. \tag{29}$$

$\mathbb{N}_n(\mathtt{C})$ 的态射是交换梯形

$$\begin{array}{ccccc} \bullet & \xrightarrow{f'_1} & \bullet & \xrightarrow{f'_2} & \cdots \\ \downarrow{\scriptstyle\varphi_0} & & \downarrow{\scriptstyle\varphi_1} & & \\ \bullet & \xrightarrow[f''_1]{} & \bullet & \xrightarrow[f''_2]{} & \cdots \end{array}\qquad\qquad \begin{array}{ccccc} \cdots\bullet & \xrightarrow{f'_{n-1}} & \bullet & \xrightarrow{f'_n} & \bullet \\ & & \downarrow{\scriptstyle\varphi_{n-1}} & & \downarrow{\scriptstyle\varphi_n} \\ \cdots\bullet & \xrightarrow[f''_{n-1}]{} & \bullet & \xrightarrow[f''_n]{} & \bullet \end{array} \tag{30}$$

于 $\mathtt{C}$ 中。我们用 $\mathbb{N}^w_n(\mathtt{C})\subset\mathbb{N}_n(\mathtt{C}),\ n\geq 0$ 表示宽（又称 luff）子范畴，其态射如 (30) 所示，其中除 φ_0 外，所有 φ_i 均为恒等态射。范畴之间的自然同构

$$\mathbb{N}^w_a(\mathbb{N}^w_b(\mathtt{C}))\cong\mathbb{N}^w_{a+b}(\mathtt{C}) \tag{31}$$

容易验证。配备神经的标准单纯算子的集合 $\{\ \mathbb{N}_n(\mathtt{C})\ \mid n\geq 0\}$ 和 $\{\mathbb{N}^w_n(\mathtt{C})\ \mid n\geq 0\}$ 构成范畴 $\mathtt{Cat}$ 中的单纯对象 $\mathbb{N}_\bullet(\mathtt{C})$ 和 $\mathbb{N}^w_\bullet(\mathtt{C})$。

回忆一下，（范畴）décalage 是函子 $\mathbb{D}\colon\mathtt{Cat}\to\mathtt{Cat}$，它将一个范畴 $\mathtt{C}$ 映为余积

$$\mathbb{D}(\mathtt{C}):=\bigsqcup_{a\in\mathtt{C}}\mathtt{C}/a. \tag{32}$$

Th单纯对象 $S_\bullet$ 的上 décalage dec，即以 $S_\bullet$ 为单纯对象的 wit h

$$\mathrm{dec}(S)_n := S_{n+1},\ n \geq 0,$$

其单纯算子 d'_i、s'_j由 d_i 的单纯算子、s_j由 $S_\bullet$ 的单纯算子给出，如下

$$d'_i : \mathrm{dec}(S)_n = S_{n+1} \xrightarrow{d_i} S_n = \mathrm{dec}(S)_{n-1},\ n \geq 1,\ 0 \leq i \leq n, \text{ and}$$
$$s'_j : \mathrm{dec}(S)_n = S_{n+1} \xrightarrow{s_j} S_{n+2} = \mathrm{dec}(S)_{n+1},\ n \geq 0,\ 0 \leq j \leq n;$$

遗忘了顶端算子 $d_{n+1} : S_{n+1} \to S_n$ 和 $s_{n+1} : S_{n+1} \to S_{n+2}$。这两个 décalage 之间的关系见

命题 11. 存在一个 Cat 中单纯对象的函子性同构

$$\mathrm{dec}(\widetilde{\mathbb{N}}^w(\mathtt{C}))_\bullet \cong \mathbb{N}_\bullet(\mathbb{D}(\mathtt{C})). \tag{33}$$

这里，$\widetilde{\mathbb{N}}^w_\bullet(\mathtt{C}) = \{\widetilde{\mathbb{N}}^w_n(\mathtt{C}) \mid n \geq 0\}$ 是由另一组宽子范畴 $\widetilde{\mathbb{N}}^w_n(\mathtt{C})$ 构成的单纯对象，这些宽子范畴属于 $\mathbb{N}_n(\mathtt{C})$，其态射(30) 具有 $\varphi_n = \mathbb{1}$。

证明。（33）中各范畴的对象之间的典范同构显而易见且广为人知，例如参见 [9] 引言中的注释。验证态射部分及函子性是直接的。□

命题 12. 对于每个 $n \geq 0$，函子 $\mathbb{N}^w_n \colon \mathtt{Cat} \to \mathtt{Cat}$ 和 $\mathbb{D}^n \colon \mathtt{Cat} \to \mathtt{Cat}$ 同构。

证明。我们将归纳地构造函子同构

$$\mathbb{N}^w_n(\mathtt{C}) \cong \mathbb{D}^n(\mathtt{C}),\ \mathtt{C} \in \mathtt{Cat},\ n \geq 0, \tag{34}$$

。对于 $n = 0$，无需证明任何内容。将 $n = 1$ 代入方程 (34)，可得

$$\mathbb{N}^w_1(\mathtt{C}) \cong \mathbb{D}(\mathtt{C}),\ \mathtt{C} \in \mathtt{Cat}, \tag{35}$$

这是范畴之间显然的同构。现在，我们将此等式中的 C 替换为 $\mathbb{N}^w_1(\mathtt{C})$。结果为

$$\mathbb{N}^w_1(\mathbb{N}^w_1(\mathtt{C})) \cong \mathbb{D}(\mathbb{N}^w_1(\mathtt{C})).$$

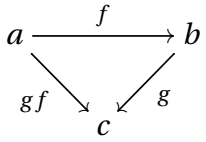
根据 (31)，左边等于 $\mathbb{N}^w_2(\mathtt{C})$；而根据 (35)，右边为 $\mathbb{D}^2(\mathtt{C})$。这就验证了 $n = 2$ 时的 (34)。重复此过程，即可得到任意 n 时的 (34)。□

示例 13. $n = 1$ 时的 (34) 中的同构，将态射 $f \colon a \to b \in \mathbb{N}^w_1(\mathtt{C})$ 解释为 $\mathtt{C}/b \subset \mathbb{D}(\mathtt{C})$ 的一个元素。对于 $n = 2$，它将 $a \xrightarrow{r} b \xrightarrow{s} c \in \mathbb{N}^w_2(\mathtt{C})$ 变为三角形

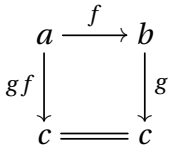
$$\begin{array}{ccc} a & \xrightarrow{\quad r \quad} & b \\ & {\scriptstyle sr}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle s} & \\ & c & \end{array} \tag{36}$$

表示一个态射 $sr \to s$ 属于 $\mathtt{C}/c$，也就是说，将其视为 $\mathbb{D}(\mathtt{C})/s \subset \mathbb{D}^2(\mathtt{C})$ 的一个对象。

考虑函子之间的变换 $J\colon \mathbb{D} \to \mathbb{A}$，它们属于 $\mathtt{Cat}$，满足 $J_{\mathtt{C}}\colon \mathbb{D}(C) \to \mathbb{A}(C)$ 在对象上是恒等映射，并将由以下内容表示的态射 $gf \to g \in \mathbb{D}(\mathtt{C})$



到交换图



表示一个态射 $gf \to f$ 于 $\mathbb{A}(\mathtt{C})$ 中。

定义 14。 纺锤嵌入 是复合映射

$$\wr_n^w\colon \mathbb{N}_n^w(\mathtt{C}) \xrightarrow{\cong} \mathbb{D}^n(\mathtt{C}) \xrightarrow{J_{\mathtt{C}}^n} \mathbb{A}^n(\mathtt{C}) \tag{37}$$

同构 (34) 与

$$J_{\mathtt{C}}^n := \mathbb{A}^{n-1}J_{\mathtt{C}} \circ \mathbb{A}^{n-2}J_{\mathbb{D}(\mathtt{C})} \circ \cdots \circ J_{\mathbb{D}^{n-1}(\mathtt{C})}.$$

展开定义 14 可得纺锤作用于一个链上的值的显式公式

$$\Phi : a_0 \xrightarrow{\varphi_1} a_1 \xrightarrow{\varphi_2} \cdots \xrightarrow{\varphi_n} a_n \in \mathbb{N}_n^w(\mathtt{C}) \tag{38}$$

如下所示。与前文一样，用 $\mathbf{2}^{\times n}$ 表示偏序集/范畴

$$\mathbf{2}^{\times n} = \{v = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) \mid \varepsilon_i \in \{0,1\}, 1 \le i \le n\},$$

其偏序关系为 $v\prime \le v''$ 当且仅当 $\varepsilon' i \le \varepsilon'' i$ 对所有 $1 \le i \le n$ 均成立。 $\mathbb{A}^n(\mathtt{C})$ 的对象是函子 $\mathbf{2}^{\times n} \to \mathtt{C}$，即形如 n 维立方体 1-骨架的交换图表，其顶点标记为范畴 C 的对象，边标记为态射。对于顶点 $v \in \mathbf{2}^{\times n}$，定义

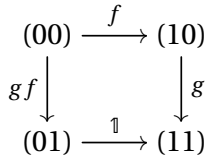
$$p(v) = \begin{cases} \max\{i \mid \varepsilon_i = 1\}, & \text{if } \varepsilon \neq (00\cdots0); \\ 0, & \text{if } \varepsilon = (00\cdots0). \end{cases}$$

将纺锤嵌入应用于 (38) 中的 Φ，会将顶点 $v \in \mathbf{2}^{\times n}$ 标记为 $a^{p(v)}$，并将相邻两个顶点之间的箭头 $v' \prec v''$ 标记为 (38) 中态射的唯一复合 $a_{p(v')} \to a_{p(v'')}$，如果 $p(v\prime) < p(v'')$；若 $p(v') = p(v'')$，则将其标记为恒等态射。

例15. 纺锤嵌入 $\wr_n^w\colon \mathbb{N}_n^w(\mathtt{C}) \hookrightarrow \mathbb{A}^n(\mathtt{C})$ 的前三个始对象步骤如下。

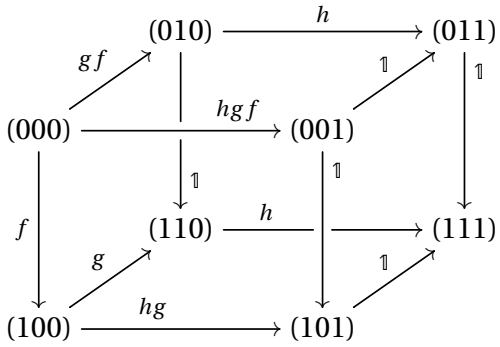
• 范畴 $\mathbb{N}w1$ (C) 和 $\mathbb{A}^1(\mathtt{C})$ 具有相同的对象，并且 $\wr w1$ 在对象上是恒等态射。

• $\wr_w 2 : \mathbb{N}_w 2\,(\mathtt{C}) \hookrightarrow \mathbb{A}^2(\mathtt{C})$ 将 $a0 \underline{\ f\rangle\ a1\ g\rangle\ a2\ }$ 映射为



其中，(00) 装饰有 a_0, (10) 装饰有 a_1, ，而 (01)、(11) 装饰有 a_2。

• $\wr_w 3 :\ \mathbb{N}_w 3\,(\mathtt{C}) \hookrightarrow \mathbb{A}^3(\mathtt{C})$ 将 $a0 \underline{\ f\rangle\ a1\ g\rangle\ a2\ h\rangle\ a3\ }$ 映射为



其中 (000) 装饰有 a_0, (100) 装饰有 a_1, (010) 和 (110) 装饰有 a_2, ，其余顶点装饰有 a_3。

Pro位置 16。 纺锤嵌入扩展为一个函子 $\wr_n :\ \mathbb{N}_n(\mathtt{C}) \to \mathbb{A}^n(\mathtt{C})$。

证明。 这直接来自上文给出的纺锤嵌入的显式描述。也可由下文的命题18得出。□

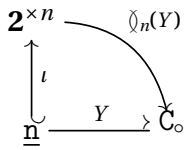
定义 17. 令 $\iota : \mathtt{n} \to \mathbf{2}^{\times n}$ 为如下嵌入，它将路径 $0 \to 1 \to \mathbf{2} \to \cdots \to n$ 在 $\mathtt{n}$ 中映到路径

$$(000\cdots0) \longrightarrow (100\cdots0) \longrightarrow (110\cdots0) \longrightarrow \cdots \longrightarrow (111\cdots1)$$

在 $\mathbf{2}^{\times n}$ 中。我们将后者称为立方体 $\mathbf{2}^{\times n}$ 的脊柱 。对脊柱的限制定义了一个函子 $R_n : \mathbb{A}^n(\mathtt{C}) \to \mathbb{N}_n(\mathtt{C})$。

由上文给出的纺锤嵌入的描述可知，复合 $\mathbb{N}_n(\mathtt{C}) \xrightarrow{\wr_n} \mathbb{A}^n(\mathtt{C}) \xrightarrow{R^n} \mathbb{N}_n(\mathtt{C})$ 等于恒等态射。

命题 18. 纺锤嵌入 $\wr_n(Y)$ 是函子 $Y : \mathtt{n} \to \mathtt{C}$ 沿着图表中的 ι 的右 *Kan* 延拓



等价地，存在自然同构

$$[X, \wr_n(Y)] \cong [R_n(X), Y] \tag{39}$$

对于每个 $X \in \mathbb{A}^n$（C）和 $Y \in \mathbb{N}_n$（C）。

注意，命题 18 蕴含了 $\wr_n\colon \mathbb{N}_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{A}^n(\mathbb{C})$ 的函子性。事实上，由 (39) 以及 $R_n \wr_n = \mathbb{1}$ 可得

$$[Y', Y''] = [R_n \wr_n(Y'), Y''] \cong [\wr_n(Y'), \wr_n(Y'')].$$

命题 18 中所述右 Kan 延拓的存在性可由一般定理推出，因此只需证明它由我们的显式公式给出。由于这里用不到这一事实，我们省略证明。

5. LAX $\mathbb{A}$-代数的神经

设 $\mathbb{A} = (\mathbb{A}, \mu, \eta)$，$\mu := \mathbb{A}\varepsilon\colon \mathbb{A}^2 \to \mathbb{A}$, $\eta := \beta\colon \mathbb{1} \to \mathbb{A}$ 是范畴 $\mathtt{Cat}_{\mathbb{A}}$ 中 $\mathbb{A}$-余代数上的诱导单子，参见第2节。恒等函子 $1\colon \mathtt{Cat}_{\mathbb{A}} \to \mathtt{Cat}_{\mathbb{A}}$ 按照 [6, 定义 II.6.3]，的意义，是一个右 $\mathbb{A}$-函子。 [14]，亦见 $\varrho\colon \mathbb{1}\mathbb{A} = \mathbb{A} \to \mathbb{1}$，其作用由余单子的余单位 $\varepsilon\colon \mathbb{A} \to \mathbb{1}$ 给出。因此，对于一个作用为 $\mathsf{a}\colon \mathbb{A}(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ 的 $\mathbb{A}$-代数 $\mathbb{C}$，我们可以构造单子条构造 $\mathbb{B}_\bullet(1, \mathbb{A}, \mathbb{C})$，其中 $\mathrm{B}_n(1, \mathbb{A}, \mathbb{C}) := \mathbb{1}\mathbb{A}^n(\mathbb{C}) = \mathbb{A}^n(\mathbb{C})$ [6, 定义 XII.1.1]。边界算子由下式给出

$$d_i^{\mathbb{A}} := \begin{cases} \mathbb{A}^i \varepsilon \mathbb{A}^{n-i-1} & \text{for } 0 \le i < n, \\ \mathbb{A}^{n-1} a & \text{for } i = n, \end{cases} \tag{40}$$

退化算子由 $s^{\mathbb{A}}{}_i := \mathbb{A}^i \beta \mathbb{A}^{n-i}$, $0 \le i \le n$ 给出。下面介绍 Jardine 的超相干结构的一个版本。

定义 19. 几乎严格超相干结构 $X_\bullet$ 由范畴 X_n, $n \ge 0$、函子 $d_i\colon X_n \to X_{n-1}$, $0 \le i \le n$, $n \ge 1$ 以及 $s^j\colon X_n \to X_{n+1}$, $0 \le j \le n$ 组成，其中 X_0 等于终端范畴 $\mathbf{1}$，并且满足标准单纯形恒等式，即

$$d_i d_j = d_{j-1} d_i \text{ if } i < j, \tag{41a}$$

$$s_i s_j = s_{j+1} s_i \text{ if } i \le j, \text{ and} \tag{41b}$$

$$d_i s_j = \begin{cases} s_{j-1} d_i & \text{if } i < j, \\ \mathbb{1} & \text{if } i = j, i = j+1, \\ s_j d_{i-1} & \text{if } i > j+1. \end{cases} \tag{41c}$$

成立，但 (41a) 除外；其中 $i = n-1, j = n$ 被一个自然变换取代

$$\alpha_n : d_{n-1} d_n \Longrightarrow d_{n-1} d_{n-1} \tag{42}$$

该自然变换位于函子 $X_n \to X_{n-2}$, $n \ge 2$ 之间。此外，我们还要求，第 115–117 页上涉及变换 (42) 的图表的显然类比图表均可交换。 [10]

定理 20. 设 $(\mathbb{C}, a, \varphi)$ 是一个归一化的 *lax* $\mathbb{A}$-代数，其中：$\mathbb{A}(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$, $\varphi : a\ \mathbb{A}a \Longrightarrow a\ \mathbb{A}\varepsilon$ 范畴 $\mathbb{C}$。那么，上文定义的算子 $d^{\mathbb{A}}{}_i$ 和 $s^{\mathbb{A}}{}_i$ 使 $\mathbb{A}^\bullet(\mathbb{C})$ 成为一个几乎严格超相干结构。

证明。 直接验证；(42) 中的变换由 $\alpha_n := \mathbb{A}^{n-2}\varphi$, $n \ge 2$ 给出。 □

命题 21。 神经的标准单纯算子

$$d_i : \mathbb{N}_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{N}_{n-1}(\mathbb{C}) \ \textit{and} \ s_i : \mathbb{N}_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{N}_{n+1}(\mathbb{C})$$

对 $1 \leq i \leq n$ 成立

$$d_i = R_{n-1} d^{\mathbb{A}}_{i-1} \rangle_n, \ \textit{and} \tag{43a}$$

$$s_i = R_{n+1} s^{\mathbb{A}}_{i-1} \rangle_n . \tag{43b}$$

证明。 根据纺锤嵌入的显式描述，可以直接验证，算子 $d^{\mathbb{A}}_{n-1} = \mathbb{A}^n \varepsilon$ 会从表示范畴 $\mathbb{A}^n(\mathbb{C})$ 中一个对象的带标饰立方体中移除所有满足 $\varepsilon_{n-1} = 1$ 的顶点 $v = (\varepsilon_0 \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_{n-1})$，以及相邻边。显然，这一操作会移除带标饰脊柱的最后一条线段

$$\Phi : (00\cdots000) \xrightarrow{\varphi_1} (10\cdots000) \xrightarrow{\varphi_2} \cdots \xrightarrow{\varphi_{n-1}} (11\cdots100) \xrightarrow{\varphi_n} (11\cdots110), \tag{44}$$

这正是 d_n 对神经 $\mathbb{N}_n(\mathbb{C})$ 所做的操作。由此可得，当 $i = n$ 时，(43a) 成立 .

同理，$d^{\mathbb{A}}{}_{i-1} = \mathbb{A}^{i-1} \varepsilon \mathbb{A}^{n-i}$ 会移除所有满足 $\varepsilon_{i-1} = 1$ 的顶点 $v = (\varepsilon_0 \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_{n-1})$。对带标饰脊柱 (44) 的作用是将 φ_{i+1} 与 φ_i 复合，这正是 d_i 对 $\mathbb{N}_n(\mathbb{C})$ 所做的操作。由此可得，对于其余的 i，即 $1 \leq i < n$，(43a) 成立。

现在来看（43b）。关键观察是， $\beta\mathbb{A}\colon \mathbb{A}(\mathbb{C}) \to \mathbb{A}^2(\mathbb{C})$ 将 $f\colon a \to b$of $\mathbb{A}(\mathbb{C})$to

$$\begin{array}{ccc} a & \xrightarrow{f} & b \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathbb{1}} \\ b & \xrightarrow{\mathbb{1}} & b \end{array} \in \mathbb{A}^2(\mathbb{C}).$$

由此，对于 $1 \leq i \leq n$，我们可以描述 $s^{\mathbb{A}}{}_{i-1} = \mathbb{A}^{i-1} \beta \mathbb{A}^{n-i+1} = \mathbb{A}^{i-1}(\beta\mathbb{A})\mathbb{A}^{n-i}$，其中用到了从立方体 $\mathbf{2}^{\times(n+1)}$ 的顶点到立方体 $\mathbf{2}^{\times n}$ 的顶点的一个映射，定义如下。 $\mathbf{2}^{\times(n+1)}$ 的顶点$w = (\eta_0, \ldots, \eta_n)$ 映射到 $\mathbf{2}^{\times n}$ 的顶点 $w_{i-1} = (\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_{n-1})$，满足

$$\varepsilon_r = \begin{cases} \eta_r & \text{if } 0 \leq r < i-1, \\ \max\{\eta_{i-1}, \eta_i\} & \text{if } r = i, \text{ and} \\ \eta_{r+1} & \text{if } i-1 < r \leq n-1. \end{cases}$$

像之前一样，将 $\mathbb{A}^n(\mathbb{C})$ 和 $\mathbb{A}^{n+1}(\mathbb{C})$ 的对象解释为带标饰立方体，则 $\mathrm{x} \in \mathbb{A}^n(\mathbb{C})$ 确定 $\mathrm{s}^{\mathbb{A}}\,\mathrm{i}_{-1}(\mathrm{x}) \in \mathbb{A}^{n+1}(\mathbb{C})$，使得 $\mathbf{2}^{\times n}$ 中的顶点 w 继承对应的 $\mathbf{2}^{\times n}$中顶点 w_{i-1}的标饰；而 $\mathbf{2}^{\times(n+1)}$中顶点 w'与 w''之间的映射，是 $\mathbf{2}^{\times n}$中顶点 $\mathrm{w}'\mathrm{i}_{-1}$与 $\mathrm{w}''\mathrm{i}_{-1}$之间的映射（如果存在这样的映射），否则就不存在映射。规则 $\mathrm{x} \mapsto \mathrm{s}^{\mathbb{A}}\,\mathrm{i}_{-1}(\mathrm{x})$ 描述了映射 $\mathrm{s}^{\mathbb{A}}\,\mathrm{i}_{-1}\colon \mathbb{A}^n(\mathbb{C}) \to \mathbb{A}^{n+1}(\mathbb{C})$ 的作用。容易验证，对带标饰脊柱 (44) 的作用，就是在 φ_i 和 φ_{i+1} 之间插入恒等态射；这正是退化算子 s_i 对 $\mathbb{N}_n(\mathbb{C})$ 所做的操作。□

我们通过引入辅助算子 $d^{\mathbb{A}}_{-1}\colon \mathbb{A}^n(\mathbb{C}) \to \mathbb{A}^{n-1}(\mathbb{C})$（其中 $n \geq 1$）来扩展 (40) 中边界算子的定义。为此，我们将 $\mathbb{A}^n(\mathbb{C})$ 的对象解释为态射$S\colon X \to Y$（属于 $\mathbb{A}^{n-1}(\mathbb{C})$），并将 $d^{\mathbb{A}}_{-1}(S)$ 定义为 S 的目标，

$$d^{\mathbb{A}}_{-1}(S) = Y \in \mathbb{A}^{n-1}(\mathbb{C}). \tag{45a}$$

同样地，我们定义 $s^{\mathbb{A}}_{-1}\colon \mathbb{A}^n(\mathbb{C}) \to \mathbb{A}^{n+1}(\mathbb{C})$ 为

$$s^{\mathbb{A}}_{-1}(X) := X \xrightarrow{\mathbb{1}} X \in \mathbb{A}^{n+1}(\mathbb{C}) \tag{45b}$$

对于 $X \in \mathbb{A}^n(\mathbb{C})$、$n \geq 0$。

命题 22。 *(45a)* 和 *(45b)* 中的算子满足等式

$$d^{\mathbb{A}}_{n-1} d^{\mathbb{A}}_{-1} = d^{\mathbb{A}}_{-1} d^{\mathbb{A}}_{n},\ n \geq 2, \tag{46a}$$

$$d^{\mathbb{A}}_{n+1} s^{\mathbb{A}}_{-1} = s^{\mathbb{A}}_{-1} d^{\mathbb{A}}_{n},\ n \geq 1, \tag{46b}$$

$$s^{\mathbb{A}}_{n+1} s^{\mathbb{A}}_{-1} = s^{\mathbb{A}}_{-1} s^{\mathbb{A}}_{n},\ n \geq 0. \tag{46c}$$

(45a) 和 *(45b)* 中的算子还与巴构造 $\mathbb{N}_\bullet(\mathbb{C})$ 的标准单纯算子 $d_0\colon \mathbb{N}_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{N}_{n-1}(\mathbb{C})$ 和 $s_0\colon \mathbb{N}_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{N}_{n+1}(\mathbb{C})$ 相关，其关系为

$$d_0 = R_{n-1} d^{\mathbb{A}}_{-1} \between_n,\ n \geq 1,\ \textit{and}\ \ s_0 = R_{n+1} s^{\mathbb{A}}_{-1} \between_n,\ n \geq 0. \tag{47}$$

证明。方程 (46a) 由 $\mathrm{d}^{\mathbb{A}}_n$ 和 $\mathrm{d}^{\mathbb{A}}{}_{n-1}$ 的函子性得到。事实上，设 $\mathrm{S} : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ 是 $\mathbb{A}^{n-1}(\mathbb{C})$ 中的一个态射，表示 $\mathbb{A}^n(\mathbb{C})$ 的一个对象。则 $\mathrm{d}^{\mathbb{A}}_n(\mathrm{S})$ 是诱导映射 $\mathrm{d}^{\mathbb{A}}{}_{n-1}(\mathrm{S}) : \mathrm{d}^{\mathbb{A}}{}_{n-1}(\mathrm{X}) \to \mathrm{d}^{\mathbb{A}}{}_{n-1}(\mathrm{Y})$，因此根据 (45a)，$\mathrm{d}^{\mathbb{A}}_{-1}\mathrm{d}^{\mathbb{A}}{}_n(\mathrm{S}) = \mathrm{d}^{\mathbb{A}}{}_{n-1}(\mathrm{Y})$。另一方面，$\mathrm{d}^{\mathbb{A}}_{-1}(\mathrm{S}) = \mathrm{Y}$，因此 $\mathrm{d}^{\mathbb{A}}{}_{n-1}\mathrm{d}^{\mathbb{A}}_{-1}(\mathrm{S}) = \mathrm{d}^{\mathbb{A}}{}_{n-1}(\mathrm{Y})$，这就验证了 (46a)。等式 (46b) 和 (46c) 以同样方式由 $\mathrm{d}^{\mathbb{A}}{}_n$、$\mathrm{d}^{\mathbb{A}}_{n+1}$、$\mathrm{s}^{\mathbb{A}}_n$ 和 $\mathrm{s}^{\mathbb{A}}_{n+1}$ 的函子性得到。细节留给读者。方程 (47) 可直接由算子 $\mathrm{d}^{\mathbb{A}}_{-1}$ 和 $\mathrm{s}^{\mathbb{A}}_{-1}$ 的定义得到。□

推论23。 在定理 *20* 的假设下，神经 $\mathbb{N}_\bullet(\mathbb{C})$ 是一个~几乎严格超相干结构 $\mathbb{N}_\bullet(\mathbb{C})$的上错位。

~证明。 超相干结构 $\mathbb{N}_\bullet(\mathbb{C})$ 定义为 $\mathbb{N}_{\bullet_{-1}}(\mathbb{C})$，并通过令 $\mathbb{N}_{-1}(\mathbb{C}) := \mathbf{1}$（终端范畴）来扩展。额外的单纯形算子定义如下：

$$d_n := R_{n-2} d^{\mathbb{A}}_{n-1} \between_{n-1} : \mathbb{N}_{n-1}(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{N}_{n-2}(\mathbb{C}) \text{ for } n \geq 2, \text{ and} \tag{48a}$$

$$s_n := R_n s^{\mathbb{A}}_{n-1} \between_{n-1} : \mathbb{N}_{n-1}(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{N}_n(\mathbb{C}) \text{ for } n \geq 1. \tag{48b}$$

算子 $d_i\colon \mathbb{N}_0(\mathbb{C}) \to \mathbb{N}_{-1}(\mathbb{C})$、$i = 1, 2$ 是到终端范畴的唯一态射，而 $s_0\colon \mathbb{N}_{-1}(\mathbb{C}) \to \mathbb{N}_0(\mathbb{C})$ 将 $\mathbf{1}$ 的唯一对象映射到 $\mathbb{C}$ 中选定的终对象 0。

纺锤嵌入将 $\mathbb{N}_\bullet(\mathbb{C})$ 与其在 $\mathbb{A}^\bullet(\mathbb{C})$ 中的像等同起来。由 (43a)–(43b) 以及定义方程 (48a)–(48b) 可知，在此等同下，这些算子

$$d_1, \ldots, d_n : \mathbb{N}_{n-1}(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{N}_{n-2}(\mathbb{C}), n \geq 2, \text{ and } s_1, \ldots, s_n : \mathbb{N}_{n-1}(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{N}_n(\mathbb{C}),\ n \geq 1, \tag{49}$$

是这些算子的限制

$$d_0^{\mathbb{A}},\dots,d_{n-1}^{\mathbb{A}}:\mathbb{A}^{n-1}(\mathcal{C})\longrightarrow\mathbb{A}^{n-2}(\mathcal{C}),\ n\geq 2,\text{ and }s_0^{\mathbb{A}},\dots,s_{n-1}^{\mathbb{A}}:\mathbb{A}^{n-1}(\mathcal{C})\longrightarrow\mathbb{A}^{n}(\mathcal{C}),n\geq 1.$$

~这表明，扩展神经 $\mathbb{N}_\bullet(\mathcal{C})=\mathbb{N}_{\bullet-1}(\mathcal{C})$ 是一种几乎严格超相干结构，其中 (42) 中的变换由下式给出

$$\alpha_n:=R_{n-3}\alpha_{n-1}^{\mathbb{A}}\wr_{n-1}\colon d_{n-2}^{\mathbb{A}}d_{n-1}^{\mathbb{A}}\longrightarrow d_{n-2}^{\mathbb{A}}d_{n-2}^{\mathbb{A}},\ n\geq 3,$$

其中 $\alpha_{n-1}^{\mathbb{A}}\colon d^{\mathbb{A}}{}_{n-2}d_{n-1}^{\mathbb{A}}\longrightarrow d^{\mathbb{A}}{}_{n-2}d_{n-2}^{\mathbb{A}}$ 是几乎严格超相干结构 $\mathbb{A}^\bullet(\mathcal{C})$ 的约束。

我们还需要验证，d_0 和 s_0 s 满足关于 (49) 中算子的所需关系。由于 $d_1,\dots,d_{n-1}$ 和 $s_1,\dots,s_{n-1}$ 是巴构造的标准单纯算子，我们只需考察涉及 $d_n\colon\mathbb{N}_{n-1}(\mathcal{C})\to\mathbb{N}_{n-2}(\mathcal{C}),\ n\geq 2$ 以及 $s_n\colon\mathbb{N}_{n-1}(\mathcal{C})\to\mathbb{N}_n(\mathcal{C}),\ n\geq 1$ 的关系。不过，这些关系可由 (46a)–(46c) 以及 d_0 和 s_0 是 $d_{-1}^{\mathbb{A}}$ 和 $s_{-1}^{\mathbb{A}}$ 在 $\mathbb{N}(\mathcal{C})_\bullet$ 上的限制这一事实推出，见 (47)。

~最后需要检查的是涉及以 $\mathbb{N}_0(\mathcal{C})=\mathbb{N}_{-1}(\mathcal{C})$ 为目标的关系／恒等式。~不过，这些关系／恒等式自动成立，因为根据定义，$\mathbb{N}_0(\mathcal{C})$ 是终端范畴。□

在神经 $\mathbb{N}_\bullet(\mathcal{C})$ 上构造扩展单纯形结构，可由下图表示

$$\begin{array}{lccccccc}\mathbb{A}^{n-1}(\mathcal{C}):&d_{-1}^{\mathbb{A}}&d_0^{\mathbb{A}}&d_1^{\mathbb{A}}&\cdots&d_{n-2}^{\mathbb{A}}&d_{n-1}^{\mathbb{A}}.\\ \uparrow\wr_n&\downarrow&\downarrow&\downarrow&&\downarrow&\downarrow\\ \widetilde{\mathbb{N}}_n(\mathcal{C}):&d_0&d_1&d_2&\cdots&d_{n-1}&d_n\end{array}$$

在该图表中，通过脊嵌入，将 $\widetilde{\mathbb{N}}_n(\mathcal{C})$ 识别为 $\mathbb{A}^{n-1}(\mathcal{C})$ 的一个子范畴，而箭头 $\longmapsto$ 表示限制。需要强调的是，$d_{-1}^{\mathbb{A}}$ 和 $s_{-1}^{\mathbb{A}}$ 并不扩展 $\mathbb{A}^\bullet(\mathcal{C})$ 的单纯形结构。我们使用这些辅助算子，是因为它们满足 (46a)–(46c)，并且根据 (47)，限制为 d_0 和 s_0。

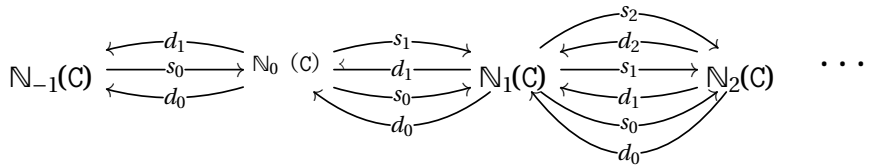
6. 核的单纯形刻画

对 (3) 中定义的函子 $\mathbb{A}$ 进行迭代，可得到箭头、方形和立方体的演算；而函子性神经则给出箭头、三角形和单形的演算。本节将定理 8 推广到单纯形情形。现在，设 $\mathcal{C}$ 是一个带基点的范畴，$\mathbb{N}_\bullet(\mathcal{C})$ 是其在第4节中回顾的函子性单纯形神经。零对象 0 通过以下方式扩展该神经

– 终端范畴 $\mathbb{N}_{-1}(\mathcal{C}):=\{0\}$，– 选取零对象的函子 $s_0\colon\mathbb{N}_{-1}(\mathcal{C})\to\mathbb{N}_0(\mathcal{C})$，– 定义为到 $\mathbb{N}_{-1}(\mathcal{C})=\{0\}$ 的终端函子的函子 $d_0,d_1\colon\mathbb{N}_0(\mathcal{C})\to\mathbb{N}_{-1}(\mathcal{C})$，以及 – 由与指向 0 的终端态射作后复合给出的附加函子 $s_{n+1}\colon\mathbb{N}_n(\mathcal{C})\to\mathbb{N}_{n+1}(\mathcal{C})$、$n\geq 0$，即将 (29) 发送到

$$[f_1,\dots,f_n,!]=\bullet\xrightarrow{f_1}\bullet\xrightarrow{f_2}\cdots\qquad\cdots\bullet\xrightarrow{f_{n-1}}\bullet\xrightarrow{f_n}\bullet\xrightarrow{!}0\in\mathbb{N}_{n+1}(\mathcal{C}).$$

结果就是该结构



容易验证，这些新的算子与神经的其余单纯形算子相容，也就是说，在有定义时，它们满足式（41）中回顾的标准单纯形恒等式。我们定义一族自然变换

$$\nu\colon \mathbb{1}_{\mathbb{N}_{n+1}(\mathtt{C})} \Longrightarrow s_{n+1}d_{n+1},\ n\geq 0,$$

在函子 $\mathbb{N}_{n+1}(\mathtt{C}) \to \mathbb{N}_{n+1}(\mathtt{C})$ 之间如下定义。对于一个对象 $T=[f_1,\ldots,f_{n+1}]\in\mathbb{N}_{n+1}(\mathtt{C})$，相应的分量 ν_T 是态射

$$\nu_T=(\mathbb{1},\ldots,\mathbb{1},!)\colon [f_1,\ldots,f_{n+1}]\to[f_1,\ldots,f_n,!]$$

在 $\mathbb{N}_{n+1}(\mathtt{C})$ 中，即态射

(50)
$$\nu_T=\begin{array}{ccccccccc} \bullet & \xrightarrow{f_1} & \bullet & \xrightarrow{f_2} & \bullet & \cdots & \bullet & \xrightarrow{f_n} & \bullet & \xrightarrow{f_{n+1}} & \bullet \\ \downarrow{\scriptstyle \mathbb{1}} & & \downarrow{\scriptstyle \mathbb{1}} & & \downarrow{\scriptstyle \mathbb{1}} & & \downarrow{\scriptstyle \mathbb{1}} & & \downarrow{\scriptstyle \mathbb{1}} & & \downarrow{\scriptstyle !} \\ \bullet & \xrightarrow{f_1} & \bullet & \xrightarrow{f_2} & \bullet & \cdots & \bullet & \xrightarrow{f_n} & \bullet & \xrightarrow{!} & 0. \end{array}$$

Prop命题 24。 设 $\mathtt{C}$ 是一个基点范畴，并且另有两个函子 *rs*

(51a)
$$d_3\colon \mathbb{N}_2(\mathtt{C})\longrightarrow\mathbb{N}_1(\mathtt{C})\ \textit{and}\ d_2\colon\mathbb{N}_1(\mathtt{C})\longrightarrow\mathbb{N}_0(\mathtt{C}),$$

与上文所考虑的单纯形算子相容，也就是说，满足（41）中的方程。若进一步

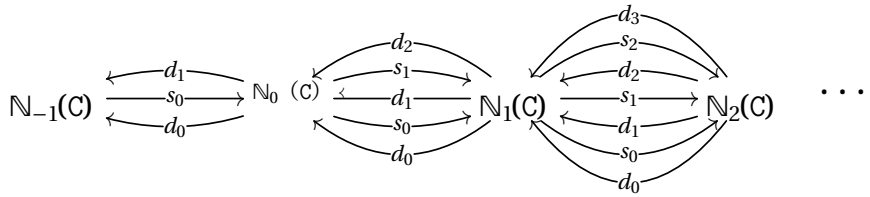
(51b)
$$d_2\big(d_3(\nu_{s_1(f)})\big)=\mathbb{1}_{d_2(f)},$$

then

$$\kappa_f:=d_2(\nu_f)\colon d_2(f)\longrightarrow a,$$

其中 $f\colon a\to b$ 是 $\mathtt{C}$ 的一个态射，它为 $\mathtt{C}$ 配备了核。

因此，命题中的结构涉及如下算子



为证明命题 24，注意到可合成对 $[g、f]\in\mathbb{N}_2(\mathtt{C})$ 处的值 $\kappa_{[g,f]}:=d_3(\nu_{[g,f]})$ 由以下交换方块给出会很方便

(52)
$$\kappa_{[g,f]}=\begin{array}{ccc} d_2(fg) & \xrightarrow{d_3[g,f]} & d_2(f) \\ {\scriptstyle \kappa_{fg}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \kappa_f} \\ a & \xrightarrow{\ g\ } & b. \end{array}$$

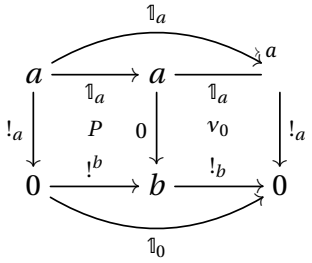
竖边 κ_{fg}和 κ_f由单纯形恒等式确定，因此 $\kappa_{[g,f]}$ 是一个态射

$$\kappa_{[g,f]} = (\kappa_{fg}, \kappa_f) \colon d_3[g,f] \to g.$$

证明命题 24 时，我们还需要以下

引理 25. 对于任意零态射 $0 \colon a \to b$，态射 $\kappa_0 \colon d_2(0) \to a$ 有一个截面，即存在态射 $r : a \to d_2(0)$ 使得 $\kappa_0 r = \mathbb{1}_a$。

证明。 截面 r定义为 $r := d_2(P)$，其中态射 $P = (\mathbb{1}_a, !^b) \colon !_a \to 0$ 由下图左侧交换图表示。利用函子 $d_2 \colon \mathbb{N}_1(\mathbb{C}) \to \mathbb{N}_0(\mathbb{C})$ 的函子性，可得 $\mathbb{N}_1(\mathbb{C})$ 中以下交换图的复合：P（左侧）和 ν_0（右侧）



我们计算得

$$\kappa_0 \circ r = d_2(\nu_0) \circ d_2(S) = d_2(\nu_0 \circ S) = d_2(\mathbb{1}_{!_a}) = \mathbb{1}_{d_2(!_a)} = \mathbb{1}_a,$$

因此r 确实是 κ_0的一个截面。 □

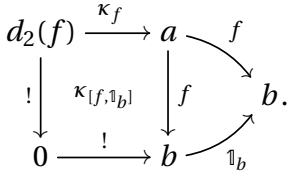
命题 *24* 的证明。我们将证明态射 $\kappa_f \colon d_2(f) \to a$给出了核。首先注意，单纯形恒等式给出

$$d_2(\mathbb{1}_a) = d_2(s_0(a)) = s_0(d_1(a)) = s_0(0) = 0,$$

因此 $\kappa_{\mathbb{1}_a} = !^a \colon 0 \to a$。类似地，$d_2(!a) = d_2(s_1(a)) = a$，并且由于函子$d_2$ 保持恒等态射，因此可得

$$\kappa_{!_a} = d_2(\mathbb{1}_{!_a}) = \mathbb{1}_{d_2(!_a)} = \mathbb{1}_a.$$

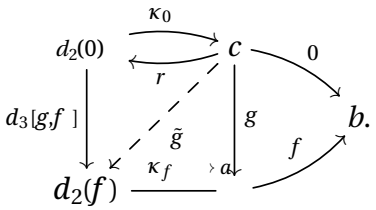
这给出了定义 7 的 (ii) 中的两个归一化条件。对于任意态射$f \colon a \to b$，定义 7 的第 (i) 项所要求的等式$f\ \kappa_f = 0$ 由交换图 $\kappa_{[f,\mathbb{1}_b]}$ 的交换性可得



我们来考察定义 7 的第 (i) 项。因此假设$g \colon c \to a$ 是一个满足$fg = 0$的态射。到核的诱导态射 $\tilde{g} \colon c \to d_2(f)$由 (52) 中的交换图 $\kappa_{[g,f]}$ 给出，即态射$d_3[g,f]$ 与引理 25 中的截面r复合而成，也就是说

$$\tilde{g} := d_3[g,f] \circ r.$$

换句话说， $\tilde{}g$是图表中交换图的对角线



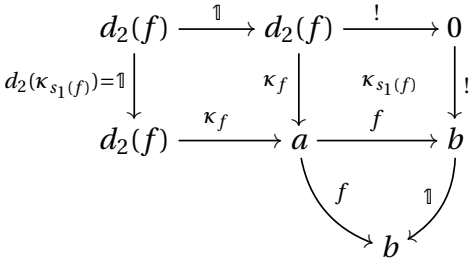
等式 $\kappa_f \tilde{}g = g$很容易验证，因为

$$\kappa_f \circ \tilde{g} = \kappa_f \circ d_3[g,f] \circ r = g \circ \kappa_0 \circ r = g.$$

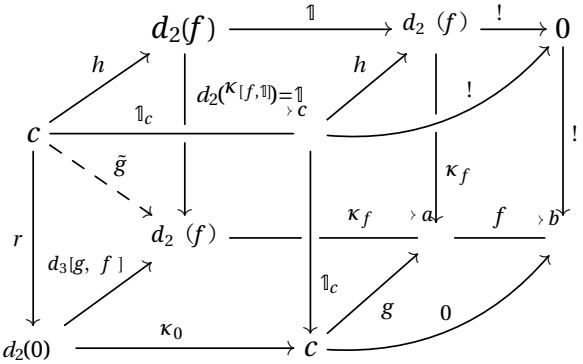
为证明 $\tilde{}g$ 的唯一性，首先注意，对于对象 $f\colon a \to b \in \mathbb{N}_1(\mathbb{C})$， $s_1(f)$ 是可复合的一对 $s_1(f) = [f, \mathbb{1}_b] = a_f \to b \xrightarrow{\mathbb{1}} b$，并且由 (51b) 可得，

$$d_2(\kappa_{[f,\mathbb{1}_b]}) = d_2(\kappa_{s_1(f)}) = d_2(d_3(\nu_{s_1(f)})) = \mathbb{1}_{d_2(f)}, \tag{53}$$

这由下图所示的图表记录。



设 $h\colon c \to d_2(f)$ 是另一个满足 $\kappa_f h = g$ 的态射。由图表最左侧交换图的交换性可得唯一性 $h = \tilde{}g$



与（53）结合起来。这个交换图是$d_3(\mathbb{1}_c, \kappa_f, !)$ 在该态射上的值d_3

$$(\mathbb{1}_c, \kappa_f, !)\colon [h, !\,] \longrightarrow [g, f]$$

在 $\mathbb{N}_2(\mathbb{C})$ 中，由该图表右侧的棱柱表示。我们得出结论：

$$d_2(\kappa_{[f,\mathbb{1}]}) \circ h = d_3[g,f] \circ r = \tilde{g}.$$ □

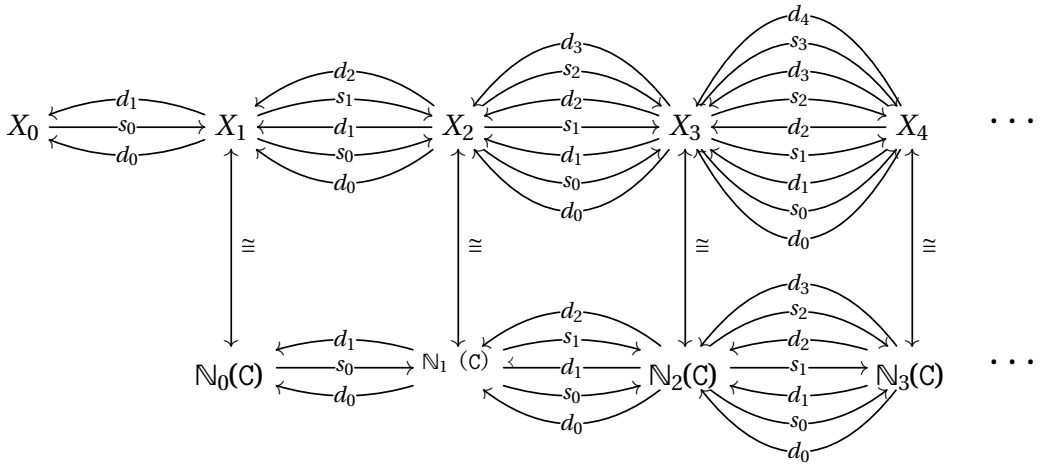
Theo注 26. 带基点的范畴 $\mathtt{C}$ 存在核，当且仅当存在一个同构

$$\mathbb{N}_\bullet(\mathtt{C}) \cong \mathrm{dec}(X)_\bullet,$$

其中 X 是一个几乎严格超相干结构。

在证明定理之前，我们先陈述一条必要的辅助材料。当$\mathbb{N}_\bullet(\mathtt{C}) \cong \mathrm{dec}_\bullet(X)$ 时，情形可归结为以下图式

(54)



垂直同构为 $\mathtt{C}$ 的神经赋予了额外的算子

$$d_{n+1}\colon \mathbb{N}_n(\mathtt{C}) \to \mathbb{N}_{n-1}(\mathtt{C}),\ n \geq 1,$$

$$s_{n+1}\colon \mathbb{N}_n(\mathtt{C}) \to \mathbb{N}_{n+1}(\mathtt{C}), n \geq 0,$$

这些算子与神经的标准单纯算子完全相容。我们将需要以下

引理 27. 设 $X_\bullet$ 是一个几乎严格超相干结构。此外，假设 $\mathtt{C}$ 是一个范畴，使得 $\mathbb{N}_\bullet(\mathtt{C}) \cong \mathrm{dec}_\bullet(X)$。那么，对每个 $n \geq 0$,

$$s_{n+1}(A_0 \xrightarrow{f_1} A_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow A_{n-1} \xrightarrow{f_n} A_n) = A_0 \xrightarrow{f_1} A_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow A_{n-1} \xrightarrow{f_n} A_n \xrightarrow{!} U, \tag{55}$$

其中，U 是 $\mathtt{C}$ 的一个固定终对象。

证明。 记$U := s_0(*)$，其中 $*$ 是终端范畴 X_0 的唯一对象。对于$A \in \mathtt{C} = \mathbb{N}_0(\mathtt{C})$，$s_1(A) \in \mathbb{N}_1(\mathtt{C})$ 的形式为 $R\, s \xrightarrow{A} T \in \mathbb{N}_1(\mathtt{C})$。利用$d_0 s_1 = s_0 d_0$，我们得到

$$T = d_0(s_1(A)) = s_0(d_0(A)) = s_0(*) = U.$$

由于 $d_1 s_1 = \mathbb{1}$，同理可得

$$A = d_1(s_1(A)) = d_1(R \xrightarrow{s_A} T) = R,$$

因此，对于每个$A \in \mathtt{C}$,

$$s_1(A) = A \xrightarrow{s_A} U \tag{56}$$

其中映射s_A 由A确定。此外，我们得到

$$s_1(U) = s_1(s_0(*)) = s_0(s_0(*)) = s_0(U) = U \xrightarrow{\mathbb{1}_U} U,$$

因此 $s_U = \mathbb{1}_U$ – 归一化。接下来继续。由于 $d_2 s_2 = \mathbb{1}$，我们看到 $s_2(A\, f \to B</style})$ 具有 $A\, f \to B \to Y$ 的形式，其中 $B \to Y$ 是一个未指定的态射。然而，将等式 $d_0 s_2 = s_1 d_0$ 与 (56) 结合起来，可知这个态射等于

$$d_0\big(s_2(A \xrightarrow{f} B)\big) = s_1\big(d_0(A \xrightarrow{f} B)\big) = s_1(B) = B \xrightarrow{s_B} U,$$

因此 $s_2(Af \to B) = Af \to Bs \xrightarrow{B} U$。恒等态射 $d_1 s_2 = s_1 d_1$ 给出

$$s_B \circ f = d_1\big(s_2(A \xrightarrow{f} B)\big) = s_1\big(d_1(A \xrightarrow{f} B)\big) = s_A.$$

在特殊情形下，当 $f\colon A \to U$ 时，上述方程给出 $s_U \circ f = s_A$；由于 $s_U = \mathbb{1}_U$，这意味着 $f = s_A$。这表示每个态射 $f\colon A \to U$ 都等于 s_A，因此 U 是终对象，而 s_A 是到终对象 U 的唯一态射 $!_A$。

上述计算证明了当 $n = 0$ 时的 (55)。接下来我们通过归纳法继续，假设已证明 $(n-1)$ 时的 (55)，其中 $n \geq 2$。显然，(55) 的右侧具有如下形式

$$B_0 \xrightarrow{g_1} B_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow B_{n-1} \xrightarrow{g_n} B_n \longrightarrow T.$$

由于 $d_{n+1} s_{n+1} = \mathbb{1}$，

$$\begin{aligned} B_0 \xrightarrow{g_1} B_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow B_{n-1} \xrightarrow{g_n} B_n &= d_{n+1} s_{n+1}(A_0 \xrightarrow{f_1} A_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow A_{n-1} \xrightarrow{f_n} A_n) \\ &= A_0 \xrightarrow{f_1} A_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow A_{n-1} \xrightarrow{f_n} A_n. \end{aligned}$$

将归纳假设与 $d_0 s_{n+1} = s_n d_0$ 结合起来，我们得到

$$\begin{aligned} B_1 \xrightarrow{g_2} B_2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow B_{n-1} \xrightarrow{g_n} B_n \longrightarrow T &= s_n(A_1 \xrightarrow{f_2} A_2 \cdots \longrightarrow A_{n-1} \xrightarrow{f_n} A_n) \\ &= A_1 \xrightarrow{f_2} A_2 \cdots \longrightarrow A_{n-1} \xrightarrow{f_n} A_n \xrightarrow{!} U. \end{aligned}$$

以上两个式子合起来给出 n 的 (55)，从而证明了归纳步骤。 □

定理*26*的证明。令 $\mathbb{N}_\bullet(\mathcal{C}) \cong \mathrm{dec}_\bullet(X)$，并在 (51a) 中选择由同构 (54) 诱导的算子 d_2 和 d_3。我们将证明，对于这一选择，(51b) 中的条件成立。由于 $\mathcal{C}$ 是带基点的，(55) 中的终对象 U 也是始对象，因此我们可以将其选作零对象 $0 \in \mathcal{C}$。态射 $\nu_{s_1(f)}\colon s_1(f) \to s_2(f)$ 由下图给出

$$\begin{array}{ccccc} a & \xrightarrow{f} & b & \xrightarrow{\mathbb{1}_b} & b \\ \downarrow{\scriptstyle \mathbb{1}_a} & & \downarrow{\scriptstyle \mathbb{1}_b} & & \downarrow{\scriptstyle !} \\ a & \xrightarrow{f} & b & \xrightarrow{!} & 0. \end{array}$$

根据引理 27，底行确实等于 $s_2(f)$。$X_\bullet$ 的相干性 $\psi\colon d_2 d_3 \Rightarrow d_2 d_2$ 参与了下图

$$\begin{array}{ccccc} d_2(d_3(s_1(f))) & \xrightarrow{\psi_{s_1(f)}} & d_2(d_2(s_1(f))) & = & d_2(f) \\ \downarrow{\scriptstyle d_2(d_3(\nu_{s_1(f)}))} & & \downarrow{\scriptstyle d_2(d_2(\nu_{s_1(f)}))} & & \downarrow{\scriptstyle \mathbb{1}} \\ d_2(d_3(s_2(f))) & \xrightarrow{\psi_{s_2(f)}} & d_2(d_2(s_2(f))) & = & d_2(f). \end{array}$$

我们回顾一下，$\psi_{s_1}(f) = \mathbb{1}$ 由 [10, (1.4.5)] 以及 $\psi_{s_2}(f) = \mathbb{1}$ 由 [10, (1.4.4)]。右侧交换图的交换性直接源于这一显然事实：$d_2(\nu_{s_1}(f)) = \mathbb{1}_f$。我们得出结论：

$$d_2(d_3(\nu_{s_1(f)})) = \mathbb{1}_{d_2(f)},$$

这就是（51b）。因此，核的存在性由命题 24 得出。

反向蕴含很简单。若 C 有核，则由定理 8，它带有一个归一化的宽松 $\mathbb{A}$-代数结□构；因此，根据推论23，它是某个几乎严格超相干结构的 dècalage。证毕。□

在本节余下部分，我们将说明，同构 $\mathbb{N}_\bullet(\mathsf{C}) \cong \mathrm{dec}_\bullet(X)$ 对$X_\bullet$的相干约束 ψ 施加了很强的限制。

命题28。 若 $\mathbb{N}_\bullet(\mathsf{C}) \cong \mathrm{dec}_\bullet(X)$，则相干约束 $\psi : d_{n-1}d_n \Rightarrow d_{n-1}d_{n-1}$ 由顶边界算子 $d_n : X_n \to X_{n-1}$，$n \geq 1$ 唯一确定。

证明。 重复必要时通过一个同构的结构进行粘合，我们将假设实际的 ly

$$\mathbb{N}_\bullet(\mathsf{C}) = \mathrm{dec}_\bullet(X),$$

也就是说，(C)， ≥ 1。证明的关键将是式 (50) 中引入的变换 ν。我们断言

$$\psi = d_{n-1}(d_n(\nu)),\ n \geq 2. \tag{57}$$

首先注意，对于 C，由引理 27 可知，式 (50) 的底行等于 $_{n+1}(_{n+1}())$。作为热身，我们详细分析 (57) 在第一个非平凡情形下的情况。对于 $= [,\ ] \in \mathbb{N}_2(\mathsf{C})$， ν_T是态射

$$\nu_T = \begin{array}{ccccc} \bullet & \xrightarrow{f} & \bullet & \xrightarrow{g} & \bullet \\ \downarrow{\scriptstyle \mathbb{1}} & & \downarrow{\scriptstyle \mathbb{1}} & & \downarrow{\scriptstyle !} \\ \bullet & \xrightarrow{f} & \bullet & \xrightarrow{!} & 0 \end{array}$$

而变换 ψ 的自然性蕴含了以下交换图成立

$$\begin{array}{ccc} d_2d_3[f,g] & \xrightarrow{\psi_{[f,g]}} & d_2d_2[f,g] = d_2(f) \\ {\scriptstyle d_2d_3(\nu_{[f,g]})}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle d_2d_2(\nu_{[f,g]})} \\ d_2d_3s_2d_2[f,g] = d_2(f) & \xrightarrow{\psi_{s_2d_2[f,g]}} & d_2d_2s_2d_2[f,g] = d_2(f). \end{array}$$

在此图表中，$\psi_{s_2d_2[f,g]} = \psi_{s_2}(f)$ 由 [10, (1.4.4)] 可知是恒等态射；等式 $d_2d_2(\nu_{[f,g]}) = \mathbb{1}_{d_2}(f)$ 已经得到证明。因此，该图表简化为

$$\begin{array}{ccc} d_2(d_3[f,g]) & \xrightarrow{\psi_{[f,g]}} & d_2(f) \\ {\scriptstyle d_2d_3(\nu_{[f,g]})}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathbb{1}} \\ d_2(f) & \xrightarrow{\mathbb{1}} & d_2(f) \end{array}$$

从而得到 $n=3$ 的 (57)。对于一般的 $T\in \mathbb{N}_{n-1}(\mathbb{C})=X_n$, $n\geq 3$，同样可得交换图

$$\begin{array}{ccc} d_{n-1}d_n(T) & \xrightarrow{\psi_T} & d_{n-1}d_{n-1}(T) \\ {\scriptstyle d_{n-1}d_n(\nu_T)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathbb{1}} \\ d_{n-1}d_{n-1}(T) & \xrightarrow{\mathbb{1}} & d_{n-1}d_{n-1}(T)\,. \end{array}$$

我们再次用到了 $\psi_{s_{n-1}d_{n-1}(T)}$ 是恒等态射；又由于 $d_{n-1}(\nu_T)=\mathbb{1}_{d_{n-1}(T)}$，$d_{n-1}d_{n-1}(\nu_T)$ 也为恒等态射。 □

命题 29. 假设 $X_\bullet$ 是定义 *19* 中所述的一族范畴，唯一的区别是我们不预先假设这些函子之间存在任何关系

$$d_{n-1}d_n\colon X_n\to X_{n-2}\ \textit{and}\ d_{n-1}d_{n-1}\colon X_n\to X_{n-2},\ n\geq 2.$$

进一步假设，对于某个范畴 $\mathbb{C}$，$\mathrm{dec}(X)_\bullet\cong \mathbb{N}_\bullet(\mathbb{C})$。那么，$X_\bullet$ 实际上是一个几乎严格超相干结构，即 *(42)* 中存在自然变换，当且仅当 *(51b)* 成立。若此条件成立，则上述变换唯一。

证明。 公式 (57) 定义了自然变换 $\psi\colon d_{n-1}d_n\Rightarrow d_{n-1}d_{n-1}$、$n\geq 2$，而条件 (51b) 保证了 Jardine 相干性。细节留给读者。□

7. 迈向弱歌剧范畴

运算子范畴在 [1]，中被提出，旨在为各种非常一般的类运算子结构提供一个自然的框架。运算子范畴 $\mathtt{O}$ 按定义配备了从 基数函子 $\vdash\colon \mathtt{O}\to \mathtt{Fin}$ 到有限集的骨架范畴的函子。运算子范畴结构为 $\mathtt{O}$ 中的每个态射 $f\colon X\to Y$ 指定了 $\mathtt{O}$ 中的 n 个对象，称为 f 的 纤维，其中 $n\geq 0$ 是 Y 的基数。我们将用下式表示这样的 f 具有纤维 $F_1,\ldots,F_n$：

$$F_1,\ldots,F_n \rhd f\colon X\longrightarrow Y. \tag{58a}$$

我们不打算重复一般运算子范畴的全部公理；这些公理不仅可以在原始论文 [1]，中轻易找到，也可见于若干后续研究 [2, 3, 8, 9, 15]。我们还将下面的讨论限制在一元 运算子范畴内，即每个对象的基数均为一的运算子范畴。一般运算子范畴的情形在概念上是相似的，但还涉及多个纤维这一无趣的记账工作。在一元情形下，(58a) 简化为更为简单的

$$F\rhd f\colon X\longrightarrow Y. \tag{58b}$$

我们还要指出，即使是朴素的单元版本的运算范畴，也涵盖了诸如分解空间、2-Segal 空间等有趣的结构。

[1, 第 1634] 页中公理的第 (iii) 项要求，(58b) 中的纤维赋值 $f \mapsto F$ 具有函子性，也就是说，它组装成纤维函子

$$\mathcal{F} : \mathbb{D}(\mathsf{O}) \longrightarrow \mathsf{O},$$

来自范畴 O 的 décalage（32）。运算子范畴公理的第 (iv) 条要求图表中纤维的恒等态射 $X = Y$

(59)
$$\begin{array}{ccccc} X & \rhd & F & \xrightarrow{\mathcal{F}(S)} & G \\ \| & & & & \\ Y & \rhd & A & \xrightarrow{f} & B \\ & & {\scriptstyle gf}\searrow & {\scriptstyle S}\quad\swarrow{\scriptstyle g} & \\ & & & C, & \end{array}$$

其中，$\mathcal{F}(S)$ 是纤维函子在映射 $S : gf \to f$（属于 $\mathtt{D}(\mathsf{O})$）上的取值。对于运算子范畴发明之初所针对的应用而言，这一要求完全合理且有充分依据。然而，在某些情况下，人们希望用存在一个自然同构 $\varphi_S : X \to Y$ 来替代等式 $X = Y$，从而将（59）替换为

(60)
$$\begin{array}{ccccc} X & \rhd & F & \xrightarrow{\mathcal{F}(S)} & G \\ {\scriptstyle \varphi_S}\downarrow & & & & \\ Y & \rhd & A & \xrightarrow{f} & B \\ & & {\scriptstyle gf}\searrow & {\scriptstyle S}\quad\swarrow{\scriptstyle g} & \\ & & & C. & \end{array}$$

例如，当 O 是一个阿贝尔范畴且其纤维由核给出时，就会出现这种情况，参见 [1, 例 1。22]。此时，φ_S 由核的泛性质唯一确定，方式与定理 8 证明第二部分中的方式相同。此外，在范畴论学家看来，同构比等式更令人赏心悦目。当然，问题在于如何准确说明“φ_S的自然性”是什么意思。

正如 [9], 所注意到的，$\mathbb{D}$ 移位函子 $\mathtt{Cat}$在δ中是一个余单子，其余乘法 $\mathbb{D}\colon \mathtt{C}(\to \mathbb{D}^2)\mathtt{C}$给出如下：

$$\delta(f : A \to B) := \begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ & {\scriptstyle f}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle \mathbb{1}_B} & \\ & B & \end{array}$$

以及余单位 $\eta\colon\ \mathbb{D}(\mathtt{C}) \to \mathtt{C}$ 由定义域函子给出。余单子 $\mathbb{D}$ 以标准方式在范畴 $\mathtt{Cat}_{\mathbb{D}}$ 上诱导出一个单子 $\mathbb{D}$，其对象为 $\mathbb{D}$-余代数。[9] 的定理 10 接着指出，$\mathbb{D}$-代数恰好是一元运算子范畴。因此，一个诱人的想法是模仿前几节应用于箭头余单子 $\mathbb{A}$ 的方案，将松弛运算子范畴定义 为松弛的 $\mathbb{D}$-代数。这样，图表 (60) 就可以用函子 $\mathcal{F}\colon\ \mathbb{D}(\mathtt{C}) \to \mathtt{C}$ 的松弛结合性来表达，参见图表 (7)。

需要注意的是，只有对于 2-单子，谈论松弛单子代数才有意义；否则，定义 2 的 (ii) 中诱导的自然变换 $\mathbb{T}\varphi$ 便无从定义。然而，与箭头余单子 $\mathbb{A}$ 不同，$\mathbb{D}$ 只是一个普通余单子，因此诱导单子 $\mathbb{D}$ 也只是一个普通单子。事实上，式 (5) 或任何类似公式对 $\mathbb{D}$ 都没有意义。因此，一只“无形之手”引导我们使用 $\mathbb{A}$ 而非 $\mathbb{D}$。

原则上，另一种方案可以基于这样一种方法：将一元运算范畴刻画为其单纯形神经 $\mathbb{N}_\bullet(\mathbb{C})$ 是单纯集合 $X_\bullet$ 的一个移位，参见 [2,第 1]节。此时，纤维函子便体现为额外的单纯形算子

$$d_{n+1} : \mathbb{N}(\mathbb{C})_n \to \mathbb{N}(\mathbb{C})_{n-1},\ n \geq 1. \tag{61}$$

然后，可以将“严格”的单纯集合 $X_\bullet$ 替换为一种超相干结构，从而得到一个松弛版本，正如本文第6节所做的那样。然而，超相干性需要范畴化，因此算子 (61) 必须是作用于范畴化神经各分量上的函子。对于 $n = 1$，这意味着实际的纤维函子 d_2，以函子方式作用于交换图

$$\begin{array}{ccc} a & \xrightarrow{h_0} & c \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ b & \xrightarrow{h_1} & d \end{array}$$

它们表示范畴 $\mathbb{N}_1(\mathbb{C}) = \mathbb{A}(\mathbb{C})$ 中的态射 $(h_0, h_1) \colon f \to g$。这使我们回到了箭头范畴。

结论。对松弛操类别采取朴素方法并不可行，因为这必然意味着纤维函子的扩展函子性。最接近于可称为松弛一元操类别的概念，是箭头范畴单子上的松代数 $\mathbb{A}$，等价于一个核系统。一般的非一元松弛操类别应当作为这一概念的推广出现。

参考文献

[1] M.A. Batanin 和 M. Markl。《操类别与双幺半 Deligne 猜想》。《*Adv. Math.*》，285：1630–1687，2015年。[2] M.A. Batanin 和 M. Markl。《Operads、操类别与 blob 复形》。《*Appl. Categ. Struct.*》，32(6)，49页，2024年。[3] M.A. Batanin 和 M. Markl。操类别作为 Koszul 对偶的自然环境。《*Compositionality*》5(3)，46页，2023年。[4] J. Beck。分配律。《三元组与范畴同调理论研讨会，*ETH 1966/67*年》，Springer，119–140，1969年。[5] J. Bourke。二维普遍代数中的余下降对象。博士论文，悉尼大学，2010年。可在`www.math.muni.cz/~bourkej/papers/JohnBThesis.pdf`查阅。[6] A.D. Elmendorf、I. Kˇríž、M.A. Mandell、J.P. May。《稳定同伦论中的环、模与代数》，《数学调查与专著》，第47卷，美国数学会，罗德岛州普罗维登斯，1996年。[7] M. Korostenski 和 W. Tholen。《作为 Eilenberg–Moore 代数的分解系统》。《*J. Pure Appl. Algebra*》，85：57–72，1993年。[8] S. Lack。《操类别及其集合的斜幺半范畴》。《*Higher Structures*》，2(1)：1–29，2018年。

[9] R. Garner、J. Kock 和 M. Weber。运算子范畴与 décalage。《*Adv. Math.*》，377：107440，2021年。[10] J.F. Jardine。超相干性。《*J. Pure Appl. Algebra*》，75：103–194，1991年。[11] G.M. Kelly 和 S. Lack。关于类性质结构。《范畴论与应用》，3(9)：213–250，1997年。[12] M. Markl。双变幺半范畴。预印本 arXiv:2402.12963，2024年。[13] M. Šťepán。2-范畴论中的 Lax结构。博士论文。可通过arXiv:2504.04467获取，2025年。[14] B. Stonek。THH 与单子条构造。可在https://bruno.stonek.com/查阅。[15] D. Trnka。范畴化歌剧与运算子范畴。博士论文，https://is.muni.cz/th/q7elr/，2025年。

Martin Markl：捷克科学院数学研究所，Žitná 25，110 00 布拉格1区，捷克共和国

Dominik Trnka：理工大学数学研究所，Technická 2896，616 69 布尔诺，捷克共和国

电子邮箱地址： markl@math.cas.cz; trnka@fme.vutbr.cz