arXiv:2601.20350v1 [math.PR] 28 Jan 2026

McKean–Vlasov随机微分方程的导数的混沌传播及其应用 *

Xiao-Yu Zhao天津大学应用数学中心和 KL-AAGDM，中国天津 300072，
zhxy 0628@tju.edu.cn

-

2026年1月29日

摘要

作为对 Kac混沌传播 现有结果的拓展，这些结果描述了当粒子数趋于无穷时，平均场粒子系统收敛到相互独立的 McKean–Vlasov粒子系统。我们证明了关于初始值和噪声扰动的导数层面的收敛，并给出了可能达到锐利的显式收敛速率。由此，单个粒子分布的内在导数收敛到相互独立的 McKean–Vlasov 随机微分方程对应的内在导数。

AMS学科分类：60B05, 60B10。
关键词：混沌传播、McKean–Vlasov 随机微分方程、相互作用粒子系统、方向导数、Malliavin 导数、Bismut 公式。

1 引言

Kac混沌性质，也称为Boltzmann性质，是推导空间齐次Boltzmann方程的一个关键概念；参见 [9]。其动力学版本——混沌传播 [17], ——表明，在平均场系统中，单个粒子的极限是 McKean–Vlasov 随机微分方程（SDE），这一观点由 [10] 提出。该现象已得到广泛发展；参见综述和专著 [6, 8, 16, 17] ，以及例如 [3, 4, 15, 20] 中具有代表性的定量结果。

本研究旨在建立导数层次上的混沌传播，而这一问题迄今鲜有探索。据我们所知，现有结果（例如 [12] 和 [1] 关于共同噪声的研究）主要关注噪声扰动下导数层次的收敛。它们表明，可以通过将相互作用粒子系统的 Malliavin正则性传递至 McKean–Vlasov

*本研究部分得到国家重点研发计划（编号：2022YFA1006000）资助。

极限来得到 Malliavin可微性，但并未给出导数流收敛的定量速率。这促使我们对导数层次混沌传播的定量分析展开研究。此外，关于初值扰动的导数（称为方向导数）在应用中起着关键作用，例如 Bismut–Elworthy–Li公式中的应用，参见 [2, 13, 19] 。我们还建立了方向导数的混沌传播，并给出了明确的收敛速率。特别是，在某些情形下，本文得到的速率是尖锐的。

令 $(\mathbb{R}^d, |\cdot|)$ 为某个 $d \in \mathbb{N}$ 维欧几里得空间。记 $\mathbb{R}^d \otimes \mathbb{R}^d$ 为所有具有实数元素的 $d \times d$ 矩阵的集合，并赋予算子范数 $\|\cdot\|$。令 A^* 表示 $A \in \mathbb{R}^d \otimes \mathbb{R}^d$ 的转置，并令 $\|\cdot\|_\infty$ 表示取值于 $\mathbb{R}, \mathbb{R}^d$ 或 $\mathbb{R}^d \otimes \mathbb{R}^d$ 的函数的一致范数。令 $\mathscr{P}$ 表示 $\mathbb{R}^d$ 上的概率测度空间。对于任意 $k \in [1, \infty)$， L^k-Wasserstein 空间

$$\mathscr{P}_k := \{\mu \in \mathscr{P} : \mu(|\cdot|^k) < \infty\}$$

在 L^k-Wasserstein 距离下是一个波兰空间

$$\mathbb{W}_k(\mu, \nu) := \inf_{\pi \in \mathscr{C}(\mu,\nu)} \bigg(\int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} |x - y|^k \pi(\mathrm{d}x, \mathrm{d}y) \bigg)^{\frac{1}{k}}, \quad \mu, \nu \in \mathscr{P}_k,$$

其中 $\mathscr{C}(\mu, \nu)$ 是 μ 和 ν 的所有耦合的集合。

对于固定的 $T > 0$，考虑 $\mathbb{R}^d$ 上的 McKean–Vlasov随机微分方程

$$\mathrm{d}X_t = b_t(X_t, \mathscr{L}_{X_t})\mathrm{d}t + \sigma_t(X_t, \mathscr{L}_{X_t})\mathrm{d}W_t, \quad t \in [0, T], \tag{1.1}$$

其中 W_t 是 $(\Omega\ \{\mathscr{F}_t\}_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ 上的 m 维布朗运动，该空间是一个完备滤过概率空间； $\mathscr{L}_\xi$ 是随机变量 ξ 的分布（即其律），并且

$$b : [0, T] \times \mathbb{R}^d \times \mathscr{P}_k \to \mathbb{R}^d, \quad \sigma : [0, T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d \otimes \mathbb{R}^m$$

是可测的。当考虑不同的概率测度时，我们记作 $\mathscr{L}_\xi = \mathscr{L}_{\xi|\mathbb{P}}$ ，以强调 ξ 在 $\mathbb{P}$ 下的分布。

由于（1.1）依赖于分布，许多研究致力于利用随机相互作用粒子系统对其进行近似。令 $N \geq 1$ 为一个整数，且 $(X_0^i,\ \eta^i,\ W_t^i)_{1\leq i\leq N}$ 是 $(X_0,\ \eta,\ W_t)$ 的独立同分布副本，其中 η, η^i 将用作初值扰动。我们还考虑如下非粒子系统 McKean-Vlasov随机微分方程:

$$\mathrm{d}X_t^i = b_t(X_t^i, \mathscr{L}_{X_t^i})\mathrm{d}t + \sigma_t(X_t^i, \mathscr{L}_{X_t^i})\mathrm{d}W_t^i, \quad t \in [0, T],\ 1 \leq i \leq N. \tag{1.2}$$

记

$$\tilde{\mu}_t^N := \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{X_t^j}$$

为 (X_t^i) 的经验分布。考虑平均场相互作用粒子系统:

$$\mathrm{d}X_t^{i,N} = b(X_t^{i,N}, \hat{\mu}_t^N)\mathrm{d}t + \sigma(X_t^{i,N}, \hat{\mu}_t^N)\mathrm{d}W_t^i, \quad t \in [0, T],\ X_0^{i,N} = X_0^i,\ 1 \leq i \leq N, \tag{1.3}$$

其中

$$\hat{\mu}_t^N := \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \delta_{X_t^{j,N}}.$$

本文的主要贡献是证明随机微分方程 (1.2) 和 (1.3) 在导数层面的混沌传播，包括方向导数及相应的 Malliavin导数，分别见下文定理 3.1 和 3.3。这些结果表明，随着粒子数趋于无穷，平均场系统 (1.3) 中单个粒子的两种导数流都收敛到 McKean—Vlasov 随机微分方程 (1.2) 中相应的导数流，并得到了定量收敛速率。当初始分布属于 $\mathscr{P}_\infty$ ，且系数的一阶导数全局利普希茨时，这些收敛速率是尖锐的。作为应用，第 5 节通过证明当 $N \to \infty$ 时，系统 (1.3) 的分布的内在导数收敛到系统 (1.2) 的内在导数，为 (1.2) 的 Bismut 公式给出了有限粒子近似；对于 $C_b^2(\mathbb{R}^d)$ 中的测试函数，还得到了明确的收敛速率。

2 预备知识

2.1 经典结果

我们简要地回顾上述系统之间关系的经典结果。

(H) 存在一个常数 $K > 0$ ，使得 b 和 σ 满足

$$\sup_{t\in[0,T]} \{|b_t(\mathbf{0}, \delta_{\mathbf{0}})| + \|\sigma_t(\mathbf{0}, \delta_{\mathbf{0}})\|\} < \infty,$$

and

$$\begin{aligned} &2\langle x-y, b_t(x,\mu) - b_t(y,\nu)\rangle^+ + \|\sigma_t(x,\mu) - \sigma_t(y,\nu)\|_{HS}^2 \\ &\le K\big(|x-y|^2 + \mathbb{W}_k(\mu,\nu)^2\big), \quad t\in[0,T],\, x,y\in\mathbb{R}^d,\, \mu,\nu\in\mathscr{P}_k(\mathbb{R}^d), \end{aligned}$$

其中，在下文中，对于 $x \in \mathbb{R}^d$，我们用 δ_x 表示位于 x处的狄拉克测度。

根据 [18, 定理 2.1], ，在**(H)** 条件下，对于 $k \ge 1$，任意初始值 $X_0^i \in L^k(\Omega \to \mathbb{R}^d, \mathscr{F}_0, \mathbb{P})$, (1.2) 都有唯一解 $(X_t^i)_{1\le i\le N}$。此外，对于任意 $m \ge 1$，存在一个常数 $c(m) > 0$ ，使得

$$\mathbb{E}\Big[\sup_{t\in[0,T]} |X_t^i|^m \Big| \mathscr{F}_0\Big] \le c(m)(1 + |X_0^i|^m), \quad 1 \le i \le N. \tag{2.1}$$

注意到 (1.2) 的适定性可得

$$\mu_t := \mu_t^1 = \mu_t^i, \quad t\in[0,T],\, 1\le i\le N,$$

不难看出，对于任意 $t \in [0,T]$，$(X_t^i)_{1\le i\le N}$ 是独立同分布的.

以下引理在分析导数流的近似时发挥着至关重要的作用。对于情形 $k = 2$，相应的收敛结果可见于 [5, 引理 1.9 和定理1.10]。证明见附录 A。

引理 2.1。 设对于 $k \geq 1$， **（H）**成立。则对于任意初始值 $X_0 \in L^k$（$\Omega \to \mathbb{R}^d$、$\mathscr{F}_0$、$\mathbb{P}$），（1.3）存在唯一解 $(X^{i,N}_t)_{1\leq i\leq N} \in L^k$（$\Omega \to \mathbb{R}^d$、$\mathscr{F}_0$、$\mathbb{P}$），并且对于任意 $m \geq 1$，存在一个常数 $c(m) > 0$ 使得

$$\mathbb{E}\Big[\sup_{t\in[0,T]} |X^{i,N}_t|^m \Big| \mathscr{F}_0\Big] \leq c(m)\bigg(1 + |X^i_0|^m + \frac{1}{N}\sum_{j=1}^N |X^j_0|^m\bigg), \quad 1 \leq i \leq N. \tag{2.2}$$

因此，

$$\mathbb{E}\Big[\sup_{t\in[0,T]} |X^{i,N}_t|^k\Big] \leq 2c(k)\bigg(1 + \mathbb{E}|X_0|^k\bigg) < \infty, \quad 1 \leq i \leq N. \tag{2.3}$$

此外，

$$\lim_{N\to\infty}\left(\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]} |X^{i,N}_t - X^i_t|^k\right] + \sup_{0\leq t\leq T}\mathbb{E}\left[\mathbb{W}_k(\hat{\mu}^N_t, \mu_t)^k\right]\right) = 0, \quad k \geq 2,\ 1 \leq i \leq N. \tag{2.4}$$

如果进一步假设，对于某个 $q > k \geq 2$，有 $\mu = \mathscr{L}_{X_0} \in \mathscr{P}_q$，那么我们可以找到一个常数 $C > 0$，使得

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]} |X^{i,N}_t - X^i_t|^k\right] + \sup_{0\leq t\leq T}\mathbb{E}\left[\mathbb{W}_k(\hat{\mu}^N_t, \mu_t)^k\right] \leq C\epsilon(N), \quad 1 \leq i \leq N, \tag{2.5}$$

其中

$$\epsilon(N) := \begin{cases} N^{-1/2} + N^{-(q-k)/q}, & if\ k > d/2\ and q \neq 2k \\ N^{-1/2}\log(1+N) + N^{-(q-k)/q}, & if\ k = d/2\ and q \neq 2k, \\ N^{-k/d} + N^{-(q-k)/q}, & if\ k \in (0, d/2)\ and q \neq d/(d-k)。 \end{cases} \tag{2.6}$$

2.2 导数流

为了分析 McKean–Vlasov 随机微分方程的稳定性与正则性，导数估计（例如方向导数和 Malliavin导数）发挥着关键作用，因为它们为建立梯度估计和 Bismut 型公式奠定了基础。针对系数满足各种假设的情形，这类估计已得到广泛研究。例如，为了建立 McKean–Vlasov 随机微分方程的 Bismut公式，文献 [13] 研究了正则情形下的方向导数及其相关的 Malliavin导数，文献 [19] 研究了奇异情形，文献 [2] 研究了路径依赖情形，等等。此外，针对同时满足局部 Lipschitz 条件和单边Lipschitz条件的漂移项，文献 [12] 得到了某一类 Malliavin导数的相关结果。

本部分汇集方向导数和 Malliavin导数的若干基本性质，为下一节研究导数层面的混沌传播做准备。我们指出，本部分的结果可推广至漂移项非全局利普希茨连续的情形。为使表述清晰易读，相关推广及讨论将留待附录B。

对于 $k \geq 2$ 以及任意 $\mu \in \mathscr{P}_k$， μ 处的切空间为

$$T_{\mu,k} = L^k(\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d; \mu) := \{\phi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d \text{ is measurable with } \mu(|\phi|^k) < \infty\},$$

它在范数 $\|\phi\|_{T_{\mu,k}} := \mu(|\phi|^k) < \infty$ 下是一个巴拿赫空间。

这里，我们回顾 $\mathscr{P}_k$ 中内在导数的定义；有关该导数的历史说明，以及测度函数的其他导数的相关链接，请参见 [19] 。

定义 2.1. 设 $k \geq 2$ 和 $f\colon \mathscr{P}_k \to \mathbb{R}$ 为连续函数，且 id 是 $\mathbb{R}^d$ 上的恒等映射。

(1) 若对任意 $\mu \in \mathscr{P}_k$，f 在 $\in \mathscr{P}_k$ 上内在可微，则称 f 为内在可微，

$$T_{\mu,k} \ni \phi \mapsto D_\phi^I f(\mu) := \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{f\left(\mu \circ (id + \varepsilon\phi)^{-1}\right) - f(\mu)}{\varepsilon} \in \mathbb{R}$$

是一个定义良好的有界线性泛函。

$$D^I f(\mu) \in T_{\mu,k}^* := L^{k^*}(\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d; \mu), \quad k^* := \frac{k}{k-1}$$

使得

$$\int_{\mathbb{R}^d} \langle D^I f(\mu)(x), \phi(x)\rangle \mu(\mathrm{d}x) = D_\phi^I f(\mu), \quad \phi \in T_{\mu,k}.$$

(2) f 是 ca 在 $\mathscr{P}_k$ 上称为 L-可微，且具有 $D^L f = D^I f$，如果它本质上可微并且

$$\lim_{\|\phi\|_{T_{\mu,k}} \downarrow 0} \frac{\left|f\left(\mu \circ (id + \phi)^{-1}\right) - f(\mu) - D_\phi^I f(\mu)\right|}{\|\phi\|_{T_{\mu,k}}} = 0, \quad \mu \in \mathscr{P}_k.$$

(3) $\mathscr{D}_k$ 是定义在 $\mathbb{R}^d \times \mathscr{P}_k$ 上的连续函数类 g，满足 $g(x, \mu)$ 关于 x 可微、关于 μ L-可微，并且 $D^L g(x, \mu)(y)$ 存在一个关于 (x, y, μ) 联合连续的版本 $\in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \times \mathscr{P}_k$，使得

$$|D^L g(x,\mu)(y)| \leq c(x,\mu)(1 + |y|^{k-1}), \quad x, y \in \mathbb{R}^d, \mu \in \mathscr{P}_k$$

在 $\mathbb{R}^d \times \mathscr{P}_k$. 上对某个正函数 c 成立

为确保 (1.2) 和 (1.3) 在 $L^k(\Omega \to C([0,T]; \mathbb{R}^d)\ \mathbb{P})$ 中的指令流存在，我们作出以下假设。

($\mathbf{H_1}$) b, σ 满足

$$\sup_{(t,x,\mu) \in [0,T] \times \mathbb{R}^d \times \mathscr{P}_k} \{|b_t(\mathbf{0}, \delta_{\mathbf{0}})| + \|\nabla b_t(x,\mu)\| + \|\sigma_t(\mathbf{0}, \delta_{\mathbf{0}})\| + \|\nabla \sigma_t(x,\mu)\|\} < \infty, \tag{2.7}$$

并且对任意 $t \in [0,T]$、b_t, $\sigma_t \in \mathscr{D}_k$ 使得

$$\sup_{(t,x,y,\mu) \in [0,T] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \times \mathscr{P}_k} \left\{\|D^L b_t(x,\mu)(y)\| + \|D^L \sigma_t(x,\mu)(y)\|\right\} < \infty. \tag{2.8}$$

由于方程 (1.3) 的系数依赖于经验测度，我们首先回顾以下关于经验测度的微分公式，见 [6, 命题 5.35], ，该公式将用于研究与 (1.3) 相关的导数流。请注意，在该参考文献中，这一结果仅针对 $k=2$ 陈述，因为 Lions导数是在 $\mathscr{P}_2$中定义的。尽管如此，该证明同样适用于任意 $k\geq 2$。为避免重复，我们省略证明。

引理 2.2. 设 $k\geq 2$，若 $f:\mathscr{P}_k\to\mathbb{R}$ 连续 L 可微，则对于任意 $N>1$,

$$\partial_{x^i} f\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N \delta_{x^i}\right)=\frac{1}{N}D^L f\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N \delta_{x^i}\right)(x^i),\quad x^i\in\mathbb{R}^d,\,1\leq i\leq N.$$

2.2.1 方向导数流

设 $X_0,\eta\in L^k(\Omega\to\mathbb{R}^d,\mathscr{F}_0,\mathbb{P}),$，并记 $\boldsymbol{\eta}=(\eta^1,\eta^2,\cdots,\eta^N)$。对于任意 $\varepsilon\geq 0, 1\leq i\leq N$，设 $X^{\boldsymbol{\eta},i,}{}_t{}^{\varepsilon}$ 和 $X^{\boldsymbol{\eta},i,N,}{}_t{}^{\varepsilon}$ 分别满足随机微分方程

$$\mathrm{d}X_t^{\boldsymbol{\eta},i,\varepsilon}=b_t(X_t^{\boldsymbol{\eta},i,\varepsilon},\mu_t^{\boldsymbol{\eta},i,\varepsilon})\mathrm{d}t+\sigma_t(X_t^{\boldsymbol{\eta},i,\varepsilon},\mu_t^{\boldsymbol{\eta},i,\varepsilon})\mathrm{d}W_t^i,\quad t\in[0,T],\tag{2.9}$$

and

$$\mathrm{d}X_t^{\boldsymbol{\eta},i,N,\varepsilon}=b_t(X_t^{\boldsymbol{\eta},i,N,\varepsilon},\hat{\mu}_t^{\boldsymbol{\eta},N,\varepsilon})\mathrm{d}t+\sigma_t(X_t^{\boldsymbol{\eta},i,N,\varepsilon},\hat{\mu}_t^{\boldsymbol{\eta},N,\varepsilon})\mathrm{d}W_t^i,\quad t\in[0,T],\tag{2.10}$$

分别取 $X^{\boldsymbol{\eta},i,0}{}_t{}^{\varepsilon}=X^{\boldsymbol{\eta},i,N,0}{}_t{}^{\varepsilon}=X_0^i+\varepsilon\eta^i$，其中

$$\mu_t^{\boldsymbol{\eta},i,\varepsilon}:=\mathscr{L}_{X_t^{\boldsymbol{\eta},i,\varepsilon}},\quad \hat{\mu}_t^{\boldsymbol{\eta},N,\varepsilon}:=\frac{1}{N}\sum_{j=1}^N\delta_{X_t^{\boldsymbol{\eta},j,N,\varepsilon}}.\tag{2.11}$$

显然，$X_t^i=X^{\boldsymbol{\eta},}{}_t{}^{i\,0,}$ 和 $X^{i,}{}_t{}^{N}=X^{\boldsymbol{\eta},}{}_t{}^{i\,N\,0,,}$ 分别满足 (1.2) 和 (1.3)。类似于 (1.2) 和 (1.3)，对于任意 $t\in[0,T]$，$(X^{\boldsymbol{\eta},i,}{}_t{}^{\varepsilon}-X_t^i)_{1\leq i\leq N}$ 相互独立且同分布，而 $(X^{\boldsymbol{\eta},}{}_t{}^{i\,N\,\varepsilon}-X^{i,,,}{}_t{}^{N})_{1\leq i\leq N}$ 同分布但不独立。

下面的引理回顾了

$$v_t^{\boldsymbol{\eta},i}:=\nabla_{\boldsymbol{\eta}}X_t^i=\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{X_t^{\boldsymbol{\eta},i,\varepsilon}-X_t^i}{\varepsilon}=\nabla_{\eta^i}X_t^i=:v_t^{\eta,i},\quad t\in[0,T],\,1\leq i\leq N,\tag{2.12}$$

and

$$v_t^{\boldsymbol{\eta},i,N}:=\nabla_{\boldsymbol{\eta}}X_t^{i,N}=\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{X_t^{\boldsymbol{\eta},i,N,\varepsilon}-X_t^{i,N}}{\varepsilon},\quad t\in[0,T],\,1\leq i\leq N\tag{2.13}$$

存在于 $L^k(\Omega\to C([0,T];\mathbb{R}^d)\ \mathbb{P})$ 中。

引理 2 3 1 $k\geq 1$ $X_0\ \eta\in L^k\ \to\mathbb{R}^d\ \mathscr{F}_0\ \mathbb{P}$ $t\in$**..**假设 (**H**) 成立。则对于任意 **,(Ω , ,)**，任意 **和** ，过程 **(,)和 (,,,)** 存在于 **(Ω** $C([0,T];\mathbb{R}^d)\ \mathbb{P})$**中，并且唯一地满足**

$$\begin{cases}\mathrm{d}v_t^{\eta,i}=\left\{\nabla_{v_t^{\eta,i}}b_t(X_t^i,\mu_t^i)+\left(\mathbb{E}\Big\langle D^L b_t(y^i,\cdot)(\mu_t^i)(X_t^i),v_t^{\eta,i}\Big\rangle\Big|_{y^i=X_t^i}\right)\right\}\mathrm{d}t\\ \quad+\left\{\nabla_{v_t^{\eta,i}}\sigma_t(X_t^i,\mu_t^i)+\left(\mathbb{E}\Big\langle D^L\sigma_t(y^i,\cdot)(\mu_t^i)(X_t^i),v_t^{\eta,i}\Big\rangle\Big|_{y^i=X_t^i}\right)\right\}\mathrm{d}W_t^i,\\ v_0^{\eta,i}=\eta^i,\quad 1\leq i\leq N,\,t\in[0,T]\end{cases}\tag{2.14}$$

and

$$\begin{cases} \mathrm{d}v_t^{\boldsymbol{\eta},i,N} = \left\{ \nabla_{v_t^{\boldsymbol{\eta},i,N}} b_t(X_t^{i,N}, \hat{\mu}_t^N) + \dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{j=1}^{N} \left\langle D^L b_t(X_t^{i,N},\cdot)(\hat{\mu}_t^N)(X_t^{j,N}), v_t^{\boldsymbol{\eta},j,N} \right\rangle \right\} \mathrm{d}t \\ \quad + \left\{ \nabla_{v_t^{\boldsymbol{\eta},i,N}} \sigma_t(X_t^{i,N}, \hat{\mu}_t^N) + \dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{j=1}^{N} \left\langle D^L \sigma_t(X_t^{i,N},\cdot)(\hat{\mu}_t^N)(X_t^{j,N}), v_t^{\boldsymbol{\eta},j,N} \right\rangle \right\} \mathrm{d}W_t^i, \\ v_0^{\boldsymbol{\eta},i,N} = \eta^i, \quad 1 \le i \le N,\, t \in [0,T], \end{cases} \tag{2.15}$$

分别如此。此外，对于任意 $m \ge 1$,

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]} |\nabla_{\boldsymbol{\eta}} X_t^i|^m \Big| \mathscr{F}_0 \right] \le c(1+|\eta^i|^m), \quad 1 \le i \le N \tag{2.16}$$

and

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]} \left|\nabla_{\boldsymbol{\eta}} X_t^{i,N}\right|^m \Big| \mathscr{F}_0 \right] \le c\left(|\eta^i|^m + \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} |\eta^j|^m \right), \quad 1 \le i \le N \tag{2.17}$$

对某个常数 $c > 0$ 成立。

证明。(2.12)、(2.13) 的存在性，以及它们满足随机微分方程 (2.14)、(2.15)，并且估计 (2.16) 已在 [19, 定理 2.1、引理 4.1、命题 4.2] 中得到证明。因此，剩下的任务是证明 (2.17)。此处及下文中，对任意固定的 $\eta \in L^k(\Omega \to \mathbb{R}^d, \mathscr{F}_0, \mathbb{P})$，记

$$v_t^{i,N} = v_t^{\boldsymbol{\eta},i,N},\ X_t^{i,N} = X_t^{\boldsymbol{\eta},i,N},\ X_t^{i,N,\varepsilon} = X_t^{\boldsymbol{\eta},i,N,\varepsilon},\ \hat{\mu}_t^N = \hat{\mu}_t^{\boldsymbol{\eta},N},\ \hat{\mu}_t^{N,\varepsilon} = \hat{\mu}_t^{\boldsymbol{\eta},N,\varepsilon}$$

为任意 $1 \le i \le N$, $t \in [0,T]$, $\varepsilon \ge 0$，为简便起见。由詹森不等式可知，只需假设 $m > k \vee 2$。利用伊藤公式、霍尔德不等式和詹森不等式，以及假设 $(\mathbf{H_1})$，对任意 $m > k \vee 2$, 存在一个常数 $c_1(m) > 0$，使得对任意 $t \in [0,T]$ 和$1 \le i \le N$,

$$d|v_t^{i,N}|^m \le c_1(m)|v_t^{i,N}|^m \mathrm{d}t + c_1(m)\left(\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} |v_t^{j,N}|^m \right)\mathrm{d}t + \mathrm{d}M_t^i, \tag{2.18}$$

其中

$$\mathrm{d}\langle M^i\rangle_t \le c_1(m)|v_t^{i,N}|^{2(m-1)}\left(|v_t^{i,N}|^2 + \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}|v_t^{j,N}|^2 \right)\mathrm{d}t.$$

应用 Burkholder–Dave–Gundy 不等式、Jensen 不等式和 Yong 不等式，可得

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]} |v_t^{i,N}|^m \Big| \mathscr{F}_0 \right] &\le |\eta^i|^m + \frac{1}{2}\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]} |v_t^{i,N}|^m \Big| \mathscr{F}_0 \right] \\ &\quad + c_2(m)\int_0^T \mathbb{E}\left[|v_t^{i,N}|^m + \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}|v_t^{j,N}|^m \Big| \mathscr{F}_0 \right] \mathrm{d}t \end{aligned} \tag{2.19}$$

对于某个常数 $c_2(m) > 0$。接下来，对两边关于 $i = 1, 2, \cdots, N$取平均，可得

$$\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]}|v_t^{j,N}|^m\middle|\mathscr{F}_0\right] \le \frac{2}{N}\sum_{j=1}^{N}|\eta^j|^m + 4c_2(m)\int_0^T \mathbb{E}\left[\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}|v_t^{j,N}|^m\middle|\mathscr{F}_0\right]\mathrm{d}t,$$

则由Gr¨onwall引理可得

$$\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]}|v_t^{j,N}|^m\middle|\mathscr{F}_0\right] \le \frac{2\mathrm{e}^{4c_2(m)T}}{N}\sum_{j=1}^{N}|\eta^j|^m.$$

将此代入(2.19)，并再次使用Gr¨onwall引理，我们得到(2.17) . □

2.2.2 Malliavin导数流

考虑Cameron-Martin空间

$$\mathbb{H} = \left\{h \in C([0,T]\to\mathbb{R}^d) : h_0 = \mathbf{0}, h_t' \text{ exists a.e. } t, \|h\|_{\mathbb{H}}^2 := \int_0^T |h_t'|^2\mathrm{d}t < \infty\right\}.$$

设 $\eta \in L^2(\Omega \to \mathbb{R}^d, \mathscr{F}_0, \mathbb{P})$，其中 $\mathscr{L}_\eta = \mu,$，并设 μ_T为 $W_{[0,T]} := \{W_t\}_{t\in[0,T]}$的分布，它是路径空间 $\mathscr{C}_T := C([0,T]\to\mathbb{R}^d)$上的概率测度（即Wiener测度）。对于 $F \in L^2(\mathbb{R}^d\times\mathscr{C}_T, \mu\times\mu_T)$，称 $F(\eta, W_{[0,T]})$沿方向 $h \in \mathbb{H}$为Malliavin可微，如果方向导数

$$D_hF(\eta, W_{[0,T]}) := \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{F(\eta, W_{[0,T]} + \varepsilon h) - F(\eta, W_{[0,T]})}{\varepsilon}$$

在 $L^2(\Omega\ \mathbb{P})$中存在。若映射 $\mathbb{H} \ni h \mapsto D_hF \in L^2(\Omega\ \mu)$有界，则存在唯一的$DF(\eta, W_{[0,T]}) \in L^2(\Omega \to \mathbb{H}, \mathbb{P})$，使得对所有 $h \in \mathbb{H}$，$\langle DF(\eta, W_{[0,T]})\ h\rangle_{\mathbb{H}} = D_hF(\eta, W_{[0,T]})$在 $L^2(\Omega\ \mathbb{P})$中成立。此时，我们记 $F(\eta, W_{[0,T]}) \in \mathscr{D}(D)$，并称 $DF(\eta, W_{[0,T]})$为 $F(\eta, W_{[0,T]})$的Malliavin导数。众所周知，$(D, \mathscr{D}(D))$是从$L^2(\Omega\ \mathscr{F}_T, \mathbb{P})$到 $L^2(\Omega \to \mathbb{H}, \mathscr{F}_T, \mathbb{P})$的闭线性算子。$(D, \mathscr{D}(D))$的伴随算子$(D^*, \mathscr{D}(D^*))$称为Malliavin散度。为简便起见，下文将 $F(\eta, W_{[0,T]})$记为 F。于是我们有分部积分公式

$$\mathbb{E}\big(D_hF\big|\mathscr{F}_0\big) = \mathbb{E}\big(FD^*(h)\big|\mathscr{F}_0\big), \quad F \in \mathscr{D}(D), h \in \mathscr{D}(D^*). \tag{2.20}$$

众所周知，对于适应的 $h \in L^2(\Omega \to \mathbb{H},\ \mathbb{P})$，有 $h \in \mathscr{D}(D^*)$，其中

$$D^*(h) = \int_0^T \langle h_t', \mathrm{d}W_t\rangle. \tag{2.21}$$

有关 Malliavin微积分的更多细节及其应用，可参阅 [11] 及其中的参考文献。

为计算 X_t^i 和 $X^{i,}{}_t{}^N$ 关于 $\mathscr{L}_{X_0} = \mu \in \mathscr{P}_k$（$k \ge 2$）的 Malliavin 导数，我们将 $X_t^i = F_t^i(\boldsymbol{W}_\cdot)$ 和 $X^{i,}{}_t{}^N = F^{i,}{}_t{}^N(\boldsymbol{W}_\cdot)$ 表示为布朗运动的泛函

$\{\boldsymbol{W}_s = (W_s^1, W_s^2, \cdots, W_s^N)\}_{s\in[0,t]}$。根据定义，对于任意 $\boldsymbol{h} = (h^1, h^2, \cdots, h^N)$，其中$h^1, h^2, \cdots, h^N \in L^k(\Omega \to \mathbb{H}, \mathbb{P})$ 是适应且相互独立的，我们有

$$D_{\boldsymbol{h}} X_t^i = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{F_t^i(\boldsymbol{W}_\cdot + \varepsilon \boldsymbol{h}_\cdot) - F_t^i(\boldsymbol{W}_\cdot)}{\varepsilon},$$
$$D_{\boldsymbol{h}} X_t^{i,N} = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{F_t^{i,N}(\boldsymbol{W}_\cdot + \varepsilon \boldsymbol{h}_\cdot) - F_t^{i,N}(\boldsymbol{W}_\cdot)}{\varepsilon}, \quad t \in [0,T],\ 1 \le i \le N.$$

另一方面，在（$\mathbf{H_1}$）下，由于（1.2）和（1.3）的路径唯一性，$X^{\boldsymbol{h},i,t,\varepsilon} := F_t^i(\boldsymbol{W}_\cdot + \varepsilon \boldsymbol{h}_\cdot)$ 和 $X^{\boldsymbol{h},i,N,t,\varepsilon} := F^{i,t,N}(\boldsymbol{W}_\cdot + \varepsilon \boldsymbol{h}_\cdot)$ 分别满足随机微分方程

$$\mathrm{d}X_t^{\boldsymbol{h},i,\varepsilon} = b_t(X_t^{\boldsymbol{h},i,\varepsilon}, \mathscr{L}_{X_t^i})\mathrm{d}t + \sigma_t(X_t^{\boldsymbol{h},i,\varepsilon}, \mathscr{L}_{X_t^i})\mathrm{d}(W_t^i + \varepsilon h_t^i), \quad t \in [0,T] \tag{2.22}$$

and

$$\mathrm{d}X_t^{\boldsymbol{h},i,N,\varepsilon} = b_t(X_t^{\boldsymbol{h},i,N,\varepsilon}, \bar{\mu}_t^{\boldsymbol{h},N,\varepsilon})\mathrm{d}t + \sigma_t(X_t^{\boldsymbol{h},i,N,\varepsilon}, \bar{\mu}_t^{\boldsymbol{h},N,\varepsilon})\mathrm{d}(W_t^i + \varepsilon h_t^i), \quad t \in [0,T], \tag{2.23}$$

其中 $X^{\boldsymbol{h},i,\varepsilon}_0 = X^{\boldsymbol{h},,i,N,\varepsilon}_0 = X_0^i$。

$$\bar{\mu}_t^{\boldsymbol{h},N,\varepsilon} := \frac{1}{N}\sum_{j=1}^N \delta_{X_t^{\boldsymbol{h},i,N,\varepsilon}}.$$

由于在（$\mathbf{H_1}$）和 $(h^i)' \in L^k(\Omega \times [0,T], \mathbb{P}\times \mathrm{d}t)$下，对任意$1 \le i \le N$，上述两个随机微分方程均适定。

由于技术原因，以下结果仅适用于分布无关的 σ_t。因此，在本部分中，我们仅考虑具有 $\sigma_t(x, \mu) = \sigma_t(x)$ 的（1.2）和（1.3）。我们作出以下假设。

（$\mathbf{H_2}$） $\sigma_t(x, \mu) = \sigma_t(x)$，且 $a := \sigma\sigma^*$ 可逆，$\|a^{-1}\|_\infty < \infty$，其中 σ^* 是 σ 的转置。

对于任意满足 $g_r = 0$和 $g_T = 1$的 $0 \le r < T$及 $g \in C^1([r,T])$，令

$$\begin{aligned} h_t^i &= \int_{t\wedge r}^t 1_{\{s\ge r\}}(\sigma_s^* a_s^{-1})(X_s^i) g_s' v_s^{\eta,i}\,\mathrm{d}s, \\ h_t^{i,N} &= \int_{t\wedge r}^t 1_{\{s\ge r\}}(\sigma_s^* a_s^{-1})(X_s^{i,N}) g_s' v_s^{\boldsymbol{\eta},i,N}\,\mathrm{d}s \quad t \in [0,T],\ 1 \le i \le N, \end{aligned} \tag{2.24}$$

以及 $\boldsymbol{h} = (h^1, h^2, \cdots, h^N)$ $\boldsymbol{h}^N = (h^{1,N}, h^{2,N}, \cdots, h^{N,N})$，其中 $v^{\eta,i}_s$和 $v^{\boldsymbol{\eta},i,N}_s$ 分别求解 (2.14) 和 (2.15)。下面的引理研究.....的性质

$$w_t^{\boldsymbol{h},i} := D_{\boldsymbol{h}} X_t^i := \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \frac{X_t^{\boldsymbol{h},i,\varepsilon} - X_t^i}{\varepsilon} = D_{h^i} X_t^i =: w_t^{h,i}, \quad t \in [0,T],\ 1 \le i \le N$$

and

$$w_t^{\boldsymbol{h},i,N} := D_{\boldsymbol{h}} X_t^{i,N} := \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \frac{X_t^{\boldsymbol{h},i,N,\varepsilon} - X_t^{i,N}}{\varepsilon}, \quad t \in [0,T], \tag{2.25}$$

其取决于方向导数流。

引理 *2.4.* 假设对于 $k \geq 2$，**(H₁)** 和 **(H₂)** 成立。那么，对于任意 X_0、$\eta \in L^k(\Omega \to \mathbb{R}^d, \mathscr{F}_0, \mathbb{P})$、$\boldsymbol{\eta} = (\eta^1, \eta^2, \cdots, \eta^N)$，任意 $0 \leq r < T$ 和 $g \in C^1([r,T])$，满足 $g_r = 0$ 和 $g_T = 1$，令 h^i 和 $h^{i,N}$ 如 *(2.24)* 中所定义，则 $(w^{h,i}_t = D_{\boldsymbol{h}} X^i_t)_{1\leq i\leq N,\, t\in[0,T]}$ 以及 $(w^{\boldsymbol{h},i}_t = D_{\boldsymbol{h}^N} X^{i,N}_t)_{1\leq i\leq N,\, t\in[0,T]}$ 存在于 $L^k(\Omega \to \mathscr{C}_T, \mathbb{P})$ 中，且它们分别是下列方程的唯一解

$$\begin{cases} \mathrm{d}w^{h,i}_t = \nabla_{w^{h,i}_t} b_t(X^i_t, \mu^i_t)\mathrm{d}t + g'_t v^{\eta,i}_t \mathrm{d}t + \nabla_{w^{h,i}_t}\sigma_t(X^i_t)\mathrm{d}W^i_t, \quad t \geq r, \\ w^{h,i}_r = \mathbf{0}, \end{cases} \tag{2.26}$$

and

$$\begin{cases} \mathrm{d}w^{\boldsymbol{h}^N,i,N}_t = \nabla_{w^{\boldsymbol{h}^N,i,N}_t} b_t(X^{i,N}_t, \hat{\mu}^N_t)\mathrm{d}t + g'_t v^{\boldsymbol{\eta},i,N}_t \mathrm{d}t + \nabla_{w^{\boldsymbol{h}^N,i,N}_t}\sigma_t(X^{i,N}_t)\mathrm{d}W^i_t \\ \qquad\qquad + \dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{j=1}^N \langle D^L b_t(X^{i,N}_t, \hat{\mu}^N_t)(X^{j,N}_t), w^{\boldsymbol{h}^N,j,N}_t\rangle \mathrm{d}t, \quad t \geq r, \\ w^{\boldsymbol{h}^N,i,N}_r = \mathbf{0}, \end{cases} \tag{2.27}$$

分别。此外，

$$D_{\boldsymbol{h}} X^i_t = g_t \nabla_{\boldsymbol{\eta}} X^i_t, \quad D_{\boldsymbol{h}^N} X^{i,N}_t = g_t \nabla_{\boldsymbol{\eta}} X^{i,N}_t, \quad t \in [r,T]. \tag{2.28}$$

因此，

$$D_{\boldsymbol{h}} X^i_T = \nabla_{\boldsymbol{\eta}} X^i_T, \quad D_{\boldsymbol{h}^N} X^{i,N}_T = \nabla_{\boldsymbol{\eta}} X^{i,N}_T. \tag{2.29}$$

证明。对于过程 $(w^{h,i}_t = D_{\boldsymbol{h}} X^i_t)_{1\leq i\leq N, t\in[0,T]}$，所需结论可通过重复引理 4.2、定理 6.1] 的论证得到。因此，为避免重复，我们仅证明 (2.25)。

由 **(H₁)**、**(H₂)** 和 (2.17)，容易看出 $h^{i,N} \in L^k(\Omega \to \mathbb{R}^d, \mathscr{F}_0, \mathbb{P})$。此外，由于对任意 $t < r$，$(h^{i,N}_t)' = 0$，于是

$$w^{\boldsymbol{h}^N,i,N}_t = \mathbf{0}, \quad t < r,\, 1 \leq i \leq N.$$

将 (1.3) 视为 $\mathbb{R}^{dN}$ 上的经典随机微分方程，由引理 2.2 和 (2.24) 可得

$$D_{\boldsymbol{h}^N} X^{i,N}_t \in L^k(\Omega \to \mathbb{R}^d, \mathscr{F}_0, \mathbb{P}), \quad 1 \leq i \leq N,\, t \in [0,T]$$

并且是随机微分方程 (2.27) 的唯一解，这是一个众所周知的结果。

令 $\tilde{v}^{\boldsymbol{\eta},i,N}_t = g_t v^{\boldsymbol{\eta},i,N}_t$，其中 $t \in [r,T]$ 和 $1 \leq i \leq N$。那么由 $g_r = 0$ 和 (2.15) 可得

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\tilde{v}^{\boldsymbol{\eta},i,N}_t =& \nabla_{\tilde{v}^{\boldsymbol{\eta},i,N}_t}\sigma_t(X^{i,N}_t)\mathrm{d}W^i_t + g'_t v^{\boldsymbol{\eta},i,N}_t \mathrm{d}t + \nabla_{\tilde{v}^{\boldsymbol{\eta},i,N}_t} b_t(X^{i,N}_t, \hat{\mu}^N_t)\mathrm{d}t \\ &+ \frac{1}{N}\sum_{j=1}^N \langle D^L b_t(X^{i,N}_t, \hat{\mu}^N_t)(X^{j,N}_t), \tilde{v}^{\boldsymbol{\eta},j,N}_t\rangle \mathrm{d}t, \quad t \geq r,\, \tilde{v}^{\boldsymbol{\eta},i,N}_r = \mathbf{0}. \end{aligned} \tag{2.30}$$

因此，由 r 可知随机微分方程 (2.27) 的唯一性，从而得到 (2.28)；结合 $g_T = 1$ 可得

$$D_{\boldsymbol{h}^N} X^{i,N}_T = w^{\boldsymbol{h}^N,i,N}_T = \tilde{v}^{\boldsymbol{\eta},i,N}_T = v^{\boldsymbol{\eta},i,N}_T = \nabla_{\boldsymbol{\eta}} X^{i,N}_T.$$

□

对任意 $t\in[0,T]$、$1\le i\le N$，回顾一下由 (2.24) 定义的 $h_t^{i,N}$，则有如下分解

$$D_{\boldsymbol{h}^N}X_t^{i,N}=\sum_{l=1}^N D_{\boldsymbol{h}^{N,(l)}}X_t^{i,N},\quad \boldsymbol{h}^{N,(l)}=(0,0,\cdots,h^{l,N},\cdots,0). \tag{2.31}$$

在下一节中，我们旨在用 $D_{\boldsymbol{h}^N}$近似 $D_{\boldsymbol{h}}X_t^{1,(1)}X^{1,t^N}$。因此，有必要分别考察各个分量的性质。

命题 *2.5.* 假设对于 $k\ge 2$，*(H₁)* 和 *(H₂)* 成立。则对于任意 X_0、$\eta\in L^k(\Omega\to\mathbb{R}^d,\mathscr{F}_0,\mathbb{P})$，任意满足 $g_r=0$ 和 $g_T=1$ 的 $0\le r<T$ 以及 $g\in C^1([r,T])$，$(w^{\boldsymbol{h}^N,i,N,(l)}_t=D_{\boldsymbol{h}^N,(l)}X^{i,t^N})_{1\le i,l\le N}$ 存在于 $L^k(\Omega\to C([0,T];\mathbb{R}^d);\mathbb{P})$ 中，并唯一地解得

$$\begin{cases}\mathrm{d}w_t^{\boldsymbol{h}^N,i,N,(l)}=\nabla_{w_t^{\boldsymbol{h}^N,i,N,(l)}}\sigma_t(X_t^{i,N})\mathrm{d}W_t^i+g_t'v_t^{\boldsymbol{\eta},i,N}1_{\{l=i\}}\mathrm{d}t+\nabla_{w_t^{\boldsymbol{h}^N,i,N,(l)}}b_t(X_t^{i,N},\hat\mu_t^N)\mathrm{d}t\\ \qquad\qquad+\dfrac{1}{N}\sum_{j=1}^N\langle D^Lb_t(X_t^{i,N},\hat\mu_t^N)(X_t^{j,N}),w_t^{\boldsymbol{h}^N,j,N,(l)}\rangle\mathrm{d}t,\quad t\ge r,\\ w_r^{\boldsymbol{h}^N,i,N,(l)}=\mathbf{0},\quad 1\le i,l\le N.\end{cases} \tag{2.32}$$

此外，存在一个常数 $c>0$ 使得

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[r,T]}|w_t^{\boldsymbol{h}^N,i,N,(l)}|^k\right]\le c\left(1_{\{l=i\}}+\frac{1}{N}\right)\|\eta\|_k^k,\quad 1\le i,l\le N, \tag{2.33}$$

其中 $\|\eta\|_k^k=\mathbb{E}|\eta|^k$。

证明。 SDE (2.32) 的存在性和可解性是经典结论，一旦将其视为 $\mathbb{R}^{dN}$ 中的问题；这里我们只证明 (2.33)。不失一般性，只需证明 (2.33) 对于$r=0$成立。为简便起见，记 $w^{i,t^{N(l)}}=w_t^{\boldsymbol{h}^N,i,N,(l)}$ 以及 $v^{i,N}=v^{\boldsymbol{\eta},iN}$。

由伊藤公式、杨不等式、H¨older 不等式以及假设（$\mathbf{H_1}$），存在一个常数 $c_1>0$，使得对于任意 $t\in[0,T]$、$1\le i$、$l\le N$,

$$\begin{aligned}\mathrm{d}|w_t^{i,N,(l)}|^2=&\mathrm{d}M_t^i+2\langle w_t^{i,N,(l)},\nabla_{w_t^{i,N,(l)}}b_t(X_t^{i,N},\hat\mu_t^N)\rangle\mathrm{d}t+\|\nabla_{w_t^{i,N,(l)}}\sigma_t(X_t^{i,N})\|_{HS}^2\mathrm{d}t\\ &+2_{\{l=i\}}g_t'\langle w_t^{i,N,(l)},v_t^{i,N}\rangle\mathrm{d}t+\frac{2}{N}\sum_{j=1}^N\langle w_t^{i,N,(l)}w_t^{j,N,(l)},D^Lb_t(X_t^{i,N},\hat\mu_t^N)(X_t^{j,N})\rangle\mathrm{d}t\\ \le&\mathrm{d}M_t^i+c_1|w_t^{i,N,(l)}|^2\mathrm{d}t+c_1|v_t^{i,N}|^21_{\{l=i\}}\mathrm{d}t+\frac{c_1}{N}\sum_{j=1}^N|w_t^{j,N,(l)}|^2\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

其中

$$d\langle M^i\rangle_t\le c_1|w_t^{i,N,(l)}|^4\mathrm{d}t.$$

然后再次应用 Itô 公式和 Young不等式，可得

$$\begin{aligned}\mathrm{d}|w_t^{i,N,(l)}|^k \leq & \frac{k}{2}|w_t^{i,N,(l)}|^{k-2}\mathrm{d}M_t^i + c_2|w_t^{i,N,(l)}|^k\mathrm{d}t + c_2|v_t^{i,N}|^k 1_{\{l=i\}}\mathrm{d}t \\ & + \frac{c_2}{N}\sum_{j=1}^N |w_t^{j,N,(l)}|^k \mathrm{d}t, \quad t\in[0,T],\, 1\leq i,l\leq N\end{aligned}$$

对于某个常数 $c_2>0$。应用 Burkholder–Davis–Gundy不等式和 Young 不等式，我们可以找到一个常数 $c_3>0$，使得对任意 $1\leq i,\ l\leq N$,

$$\begin{aligned}U_T^{i,(l)} &:= \mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]}|w_t^{i,N,(l)}|^k\right] \\ &\leq c_3\int_0^T\left(U_t^{i,(l)} + \frac{1}{N}\sum_{j=1}^N U_t^{j,(l)} + \mathbb{E}\left[|v_t^{i,N}|^k 1_{\{l=i\}}\right]\right)\mathrm{d}t + \frac{1}{2}U_T^{i,(l)}.\end{aligned} \tag{2.34}$$

对两边关于 i 取平均，由 (2.17) 可得

$$\begin{aligned}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N U_T^{i,(l)} \leq & 4c_3\int_0^T \frac{1}{N}\sum_{i=1}^N U_t^{i,(l)}\,\mathrm{d}t + 2c_3\int_0^T\frac{1}{N}\mathbb{E}|v_t^{l,N}|^k\,\mathrm{d}t \\ \leq & 4c_3\int_0^T\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N U_t^{i,(l)}\,\mathrm{d}t + \frac{c_4}{N}\|\eta\|_k^k, \quad 1\leq l\leq N\end{aligned}$$

对于某个常数 $c_4>0$。于是，由 Gr¨onwall 引理可得,

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N U_T^{i,(l)} \leq \frac{c_4\mathrm{e}^{4c_3T}}{N}\|\eta\|_k^k, \quad 1\leq l\leq N.$$

将其代入 (2.34)，并再次应用 (2.17) 和 Gr¨onwall 引理，我们可以找到一个常数 $c_5>0$，使得

$$U_T^{i,(l)} \leq c_5\left(1_{\{l=i\}} + \frac{1}{N}\right)\|\eta\|_k^k, \quad 1\leq i,l\leq N,$$

由此完成证明。 □

3 导数流的混沌传播

在本节中，我们首先用 $\nabla_{\boldsymbol{\eta}}X^{1,\ t}{}^N$对任意 $t\in[0,T]$进行 $\nabla_{\eta^1}X_t^1$的近似；基于该近似，我们随后推导相应 Malliavin 导数收敛性的估计。值得注意的是，我们还得到了收敛速率，并且这些速率可能是尖锐的。

此外，还需要 $\nabla b_t(x,\ \mu)$、 $\nabla\sigma_t(x,\ \mu)$($D^L b_t$、$x,\ \mu$)(y) 和 $D^L\sigma_t(x,\ \mu)(y)$具有一致连续性:

(H3) b和 σ 满足

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\sup_{t\in[0,T]}\sup_{|x-x'|\vee\mathbb{W}_k(\mu,\nu)\vee|y-y'|\le\varepsilon}\Big\{\|\nabla b_t(x,\mu)-\nabla b_t(x',\nu)\|+\nabla\sigma_t(x,\mu)-\nabla\sigma_t(x',\nu)\|$$
$$+\|D^L b_t(x,\mu)(y)-D^L b_t(x',\nu)(y')\|+\|D^L\sigma_t(x,\mu)(y)-D^L\sigma_t(x',\nu)(y')\|\Big\}=0.$$

此外，为了获得收敛速率，对于任意 $q>k\ge 2$，需要条件 **(H3)** 的一个更强版本：

(H4) 存在常数 $\alpha\in(0,1]$和 $0\le m\le q(k-\alpha)$，使得对于任意 $t\in[0,T]$,x，x'，y，$y'\in\mathbb{R}^d$, μ，$\nu\in\mathscr{P}_q$，都存在一个常数 $K>0$，使得

$$\begin{aligned}&\|\nabla b_t(x,\mu)-\nabla b_t(x',\nu)\|+\|\nabla\sigma_t(x,\mu)-\nabla\sigma_t(x',\nu)\|\\&\le K\left(1+|x|^{\frac{m}{k}}+|x'|^{\frac{m}{k}}+\|\mu\|_q^{\frac{m}{k}}+\|\nu\|_q^{\frac{m}{k}}\right)\left\{|x-x'|+\mathbb{W}_k(\mu,\nu)\right\}^{\alpha},\end{aligned}\tag{3.1}$$

and

$$\begin{aligned}&\|D^L b_t(x,\mu)(y)-D^L b_t(x',\nu)(y')\|+\|D^L\sigma_t(x,\mu)(y)-D^L\sigma_t(x',\nu)(y')\|\\&\le K\left(1+|x|^{\frac{m}{k}}+|x'|^{\frac{m}{k}}+|y|^{\frac{m}{k}}+|y'|^{\frac{m}{k}}+\|\mu\|_q^{\frac{m}{k}}+\|\nu\|_q^{\frac{m}{k}}\right)\\&\quad\times\left\{|x-x'|+|y-y'|+\mathbb{W}_k(\mu,\nu)\right\}^{\alpha}.\end{aligned}\tag{3.2}$$

3.1 方向导数的混沌传播

定理 3.1. 假设对于 $k\ge 2$，条件 $(\mathbf{H_1})$ 和 $(\mathbf{H_3})$ 成立。则以下断言成立。*(1)* 对于任意 $X_0,\eta\in L^k(\Omega\to\mathbb{R}^d,\mathscr{F}_0,\mathbb{P})$,

$$\lim_{N\to\infty}\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]}\left|\nabla_{\boldsymbol{\eta}}X_t^{1,N}-\nabla_{\eta^1}X_t^1\right|^k\right]=0.\tag{3.3}$$

(2) 若进一步假设对于 $q>k\ge 2$，条件 $(\mathbf{H_4})$ 成立，则对于任意 $X_0,\eta\in L^q(\Omega\to\mathbb{R}^d,\mathscr{F}_0,\mathbb{P})$，存在一个常数 $c>0$，使得

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]}\left|\nabla_{\boldsymbol{\eta}}X_t^{1,N}-\nabla_{\eta^1}X_t^1\right|^k\right]\le c\epsilon(N)^{\alpha\left(\frac{q-k}{m+\alpha q}\wedge 1\right)},\tag{3.4}$$

其中，$\epsilon(N)$ 在 (2.6) 中定义。

注释 3.2。对于任意 $k\ge 2$，随着 α 和 q 增大以及 m 减小，我们得到的上述收敛速率会提高。

特别是，对于任意固定的 $q>k\ge 2$，当$m=0$, $\alpha=1$时，我们的框架可达到最优速率，也就是说，存在一个常数 $K>0$，使得

$$\begin{aligned}&\|\nabla b_t(x,\mu)-\nabla b_t(x',\nu)\|+\|\nabla\sigma_t(x,\mu)-\nabla\sigma_t(x',\nu)\|\\&+\|D^L b_t(x,\mu)(y)-D^L b_t(x',\nu)(y')\|+\|D^L\sigma_t(x,\mu)(y)-D^L\sigma_t(x',\nu)(y')\|\end{aligned}$$

$$\leq \tilde{K}\left\{|x-x'|+|y-y'|+\mathbb{W}_k(\mu,\nu)\right\},\quad t\in[0,T],\, x,x',y,y'\in\mathbb{R}^d,\,\mu,\nu\in\mathscr{P}_q,$$

在这种情况下，速率变为 $\epsilon(N)^{1-\frac{k}{q}}$。此外，若取 $q=\infty$，即 $X_0,\eta\in L^\infty(\Omega\to\mathbb{R}^d,\mathscr{F}_0,\mathbb{P})$，则估计可简化为精确速率

$$\epsilon(N)=\begin{cases}N^{-1/2}, & if\ k>d/2,\\ N^{-1/2}\log(1+N), & if\ k=d/2,\\ N^{-k/d}, & if\ k\in(0,d/2),\end{cases}$$

与原粒子系统 (2.5) 的标准收敛速率相同。

定理 *3.1* 的证明。 对于任意 $X_0,\ \eta\in L^k(\Omega\to\mathbb{R}^d,\ \mathscr{F}_0,\ \mathbb{P})$，对于任意 $1\leq i\leq N$，记 $v_t^i=v^{\boldsymbol{\eta},\ i}_{\cdot,\ t}$, $v^{i,\ }_{\cdot,\ t}{}^N=v^{\boldsymbol{\eta},\ i\,N,}_{\cdot,\ t}$，并令 $\Phi^{i,\ }_{\cdot,\ t}{}^N=v_t^i-v^{i,\ }_{\cdot,\ t}{}^N$，则由 (2.14) 和 (2.15)，可得

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\Phi_t^{i,N}=&\left\{\nabla_{\Phi_t^{i,N}}b_t(X_t^{i,N},\hat{\mu}_t^N)+\frac{1}{N}\sum_{j=1}^N\langle D^Lb_t(X_t^{i,N},\hat{\mu}_t^N)(X_t^{j,N}),\Phi_t^{j,N}\rangle+\xi_t^{i,N}+\zeta_t^{i,N}\right\}\mathrm{d}t\\&+\left\{\nabla_{\Phi_t^{i,N}}\sigma_t(X_t^{i,N},\hat{\mu}_t^N)+\frac{1}{N}\sum_{j=1}^N\langle D^L\sigma_t(X_t^{i,N},\hat{\mu}_t^N)(X_t^{j,N}),\Phi_t^{j,N}\rangle+\chi_t^{i,N}+\psi_t^{i,N}\right\}\mathrm{d}W_t^i,\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}\xi_t^{i,N}:=&\nabla_{v_t^i}b_t(X_t^i,\mu_t)-\nabla_{v_t^i}b_t(X_t^{i,N},\hat{\mu}_t^N)\\&+\frac{1}{N}\sum_{j=1}^N\langle D^Lb_t(X_t^i,\mu_t)(X_t^j)-D^Lb_t(X_t^{i,N},\hat{\mu}_t^N)(X_t^{j,N}),v_t^j\rangle,\\ \zeta_t^{i,N}:=&\mathbb{E}\left[\langle D^Lb_t(z,\mu_t)(X_t^i),v_t^i\rangle\right]|_{z=X_t^i}-\frac{1}{N}\sum_{j=1}^N\langle D^Lb_t(X_t^i,\mu_t)(X_t^j),v_t^j\rangle,\\ \chi_t^{i,N}:=&\nabla_{v_t^i}\sigma_t(X_t^i,\mu_t)-\nabla_{v_t^i}\sigma_t(X_t^{i,N},\hat{\mu}_t^N)\\&+\frac{1}{N}\sum_{j=1}^N\langle D^L\sigma_t(X_t^i,\mu_t)(X_t^j)-D^L\sigma_t(X_t^{i,N},\hat{\mu}_t^N)(X_t^{j,N}),v_t^j\rangle,\\ \psi_t^{i,N}:=&\mathbb{E}\left[\langle D^L\sigma_t(z,\mu_t)(X_t^i),v_t^i\rangle\right]|_{z=X_t^i}-\frac{1}{N}\sum_{j=1}^N\langle D^L\sigma_t(X_t^i,\mu_t)(X_t^j),v_t^j\rangle.\end{aligned}\tag{3.5}$$

由于现在 $k\geq 2$，由 Itô 公式、H¨older 不等式和假设 **($\mathbf{H_1}$)**、**($\mathbf{H_3}$)**，我们可以找到一个常数 $c_1>0$，使得

$$\mathrm{d}|\Phi_t^{i,N}|^k\leq c_1\left\{|\Phi_t^{i,N}|^k+\frac{1}{N}\sum_{j=1}^N|\Phi_t^{j,N}|^k+\Psi_t^{i,N}\right\}\mathrm{d}t+\mathrm{d}M_t^i,\quad t\in[0,T],\tag{3.6}$$

其中 $\Psi^{i,\ }_{\cdot,\ t}{}^N:=|\xi^{i,\ }_{\cdot,\ t}{}^N|^k+|\zeta^{i,\ }_{\cdot,\ t}{}^N|^k+\|\chi^{i,\ }_{\cdot,\ t}{}^N\|^k+\|\psi^{i,\ }_{\cdot,\ t}{}^N\|^k$ 和

$$\mathrm{d}\langle M^i\rangle_t\leq c_1\left\{|\Phi_t^{i,N}|^{2k}+|\Phi_t^{i,N}|^{2(k-1)}\left[\left(\frac{1}{N}\sum_{j=1}^N|\Phi_t^{j,N}|^k\right)^{\frac{2}{k}}+\|\chi_t^{i,N}+\psi_t^{i,N}\|^2\right]\right\}\mathrm{d}t.$$

结合 Burkholder–Dave–Gundy 不等式、杨不等式以及 $(\Phi^{i,\ t^N})_{1\le i\le N}$ 的同分布性质，可得

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]}|\Phi_t^{i,N}|^k\right] &\le c_1\int_0^T\mathbb{E}\left[|\Phi_t^{i,N}|^k+\frac{1}{N}\sum_{j=1}^N|\Phi_t^{j,N}|^k+\Psi_t^{i,N}\right]\mathrm{d}t\\ &\quad+c_1\mathbb{E}\left(\int_0^T|\Phi_t^{i,N}|^{2k}+|\Phi_t^{i,N}|^{2(k-1)}\left[\left(\frac{1}{N}\sum_{j=1}^N|\Phi_t^{j,N}|^k\right)^{\frac{2}{k}}+\|\chi_t^{i,N}+\psi_t^{i,N}\|^2\right]\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (3.7)\\ &\le c_2\int_0^T\mathbb{E}\left[|\Phi_t^{i,N}|^k+\Psi_t^{i,N}\right]\mathrm{d}t+\frac{1}{2}\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]}|\Phi_t^{i,N}|^k\right]\end{aligned}$$

对某个常数 $c_2>0$成立。因此，由于 (2.16)、(2.17) 以及 Gr¨onwall 引理，存在一个常数 $c_3>0$，使得

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]}|\Phi_t^{i,N}|^k\right]\le c_3\int_0^T\mathbb{E}\Psi_t^{i,N}\,\mathrm{d}t<\infty,\quad 1\le i\le N. \qquad (3.8)$$

(1) 根据 (3.8)，要证明 (3.3)，只需证明

$$\lim_{N\to\infty}\mathbb{E}\Psi_t^{1,N}=0,\quad t\in[0,T]. \qquad (3.9)$$

首先，由于 $(\mathbf{H_1})$ 和 $(\mathbf{H_3})$，对于任意 $n\ge1$ 和任意 $\varepsilon>0$，可得

$$\begin{aligned}|\xi_t^{1,N}|+\|\chi_t^{1,N}\|\le&|v_t^1|\left\{n\left(|X_t^1-X_t^{1,N}|+\mathbb{W}_k(\mu_t,\hat\mu_t^N)\right)^{\frac{1}{k}}+s_n\right\}+\frac{1}{N}\sum_{j=1}^N|v_t^j|\\ &\cdot\left\{n\left(|X_t^1-X_t^{1,N}|+|X_t^j-X_t^{j,N}|+\mathbb{W}_k(\mu_t,\hat\mu_t^N)\right)^{\frac{1}{k}}+s_n\right\},\end{aligned} \qquad (3.10)$$

其中，对于

$$\begin{aligned}\varphi(r):=\sup_{|x-x'|\vee\mathbb{W}_k(\mu,\nu)\vee|y-y'|\le r}\Big\{&\|\nabla b_t(x,\mu)-\nabla b_t(x',\nu)\|+\|\nabla\sigma_t(x,\mu)-\nabla\sigma_t(x',\nu)\|\\ &+\|D^Lb_t(x,\mu)(y)-D^Lb_t(x',\nu)(y')\|+\|D^L\sigma_t(x,\mu)(y)-D^L\sigma_t(x',\nu)(y')\|\Big\},\end{aligned}$$

我们有

$$s_n:=\sup_{r\ge0}\left\{\varphi(r)-nr^{\frac{1}{k}}\right\}\downarrow0\text{ as }n\uparrow\infty. \qquad (3.11)$$

对于任意的 $1\le j\le N$和 $t\in[0,T]$，令

$$H_t^{j,N,n}=n^k\left(|X_t^1-X_t^{1,N}|+|X_t^j-X_t^{j,N}|+\mathbb{W}_k(\mu_t,\hat\mu_t^N)\right)+s_n^k,\quad n\ge1,$$

由 (2.4) 和 (3.11) 可知，其满足

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{N\to\infty}\max_{1\le j\le N}\mathbb{E}H_t^{j,N,n}=0,\quad t\in[0,T]. \tag{3.12}$$

另一方面，由于（$\mathbf{H_1}$）和 H¨older 不等式，可得

$$\mathbb{E}\left[|\xi_t^{1,N}|^k+\|\chi_t^{1,N}\|^k\right]\le\frac{c_5}{N}\sum_{j=1}^{N}\mathbb{E}\left[\left(|v_t^1|^k+|v_t^j|^k\right)\left(H_t^{j,N,n}\wedge c_4\right)\right]$$

对于某些常数 $c_4,c_5>0$。由于由 (2.16) 和 (3.12) 可知,

$$\begin{aligned}&\sup_{1\le j\le N}\mathbb{E}\left[\left(|v_t^1|^k+|v_t^j|^k\right)\left(H_t^{j,N,n}\wedge c_4\right)\right]\\ \le&2c_4\mathbb{E}\left[|v_t^1|^k\mathbf{1}_{\{|v_t^1|^k>M\}}\right]+2M\sup_{1\le j\le N}\mathbb{E}H_t^{j,N,n},\quad M\ge1\end{aligned}$$

在依次取极限 $N\to\infty$、 $n\to\infty$，然后取 $M\to\infty$ 时收敛到 0，因此我们有

$$\lim_{N\to\infty}\mathbb{E}\left[|\xi_t^{1,N}|^k+\|\chi_t^{1,N}\|^k\right]=0. \tag{3.13}$$

随后，由于 $(X_t^i,v_t^i)_{1\le i\le N}$ 是独立同分布的，根据 (2.8)、(2.16)，我们有

$$\begin{aligned}\mathbb{E}|\zeta_t^{1,N}|^k\le&c_6\mathbb{E}\left|\mathbb{E}\left[\langle D^Lb_t(z,\mu_t)(X_t^1),v_t^1\rangle\right]|_{z=X_t^1}-\frac{1}{N}\sum_{j=2}^{N}\langle D^Lb_t(X_t^1,\mu_t)(X_t^j),v_t^j\rangle\right|^k\\ &+c_6\mathbb{E}\left|\frac{1}{N}\langle D^Lb_t(X_t^1,\mu_t)(X_t^1),v_t^1\rangle\right|^k\\ =&c_6\mathbb{E}\left\{\mathbb{E}\left[\left|\mathbb{E}\left[\langle D^Lb_t(z,\mu_t)(X_t^1),v_t^1\rangle\right]-\frac{1}{N}\sum_{j=2}^{N}\langle D^Lb_t(z,\mu_t)(X_t^j),v_t^j\rangle\right|^k\right]\Big|_{z=X_t^1}\right\}\\ &+c_6\mathbb{E}\left|\frac{1}{N}\langle D^Lb_t(X_t^1,\mu_t)(X_t^1),v_t^1\rangle\right|^k\\ =&c_7\mathbb{E}\left\{\mathbb{E}\left[\left|\mathbb{E}\left[\langle D^Lb_t(z,\mu_t)(X_t^1),v_t^1\rangle\right]-\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\langle D^Lb_t(z,\mu_t)(X_t^j),v_t^j\rangle\right|^k\right]\Big|_{z=X_t^1}\right\}\\ &+c_7\mathbb{E}\left\{\mathbb{E}\left[\left|\frac{1}{N}\langle D^Lb_t(z,\mu_t)(X_t^1),v_t^1\rangle\right|^k\right]\Big|_{z=X_t^1}\right\}\\ &+c_7\mathbb{E}\left|\frac{1}{N}\langle D^Lb_t(X_t^1,\mu_t)(X_t^1),v_t^1\rangle\right|^k\le\frac{c_8}{N^k}\end{aligned} \tag{3.14}$$

对于某些常数 $c_6,c_7,c_8>0$。将上述论证中的 b 替换为 σ 后重复进行，我们也可找到一个常数 $c_9>0$，使得

$$\mathbb{E}|\psi_t^{1,N}|^k\le\frac{c_9}{N^k}. \tag{3.15}$$

因此，将 (3.13)、(3.14) 与 (3.15) 结合即可得到所需的估计 (3.9)。

(2) 接下来，对于某个 $q>k$，任意 $X_0,\eta\in L^q(\Omega\to\mathbb{R}^d,\mathscr{F}_0,\mathbb{P})$，我们聚焦于 (3.4)。将 (3.8) 与 (3.14) 和 (3.15) 结合后，我们只需证明

$$\mathbb{E}\left[|\xi_t^{1,N}|^k+\|\chi_t^{1,N}\|^k\right]\le C_0\epsilon(N)^{\alpha\left(\frac{q-k}{m+\alpha q}\wedge 1\right)},\quad t\in[0,T] \tag{3.16}$$

对某个常数 $C_0>0$。给定 **($\mathbf{H_1}$)**、**($\mathbf{H_3}$)** 以及 $\eta\in L^q(\Omega\to\mathbb{R}^d,\mathscr{F}_0,\mathbb{P})$，对于 $q>k$，根据 (2.1)、(2.5) 以及 Hölder 不等式，可找到常数 $C_1,C_2,C_3>0$，使得

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[|\xi_t^{1,N}|^k+\|\chi_t^{1,N}\|^k\right]\le&\frac{C_1}{N}\sum_{j=1}^N\mathbb{E}\left[\left(|v_t^1|^k+|v_t^j|^k\right)(J_t^{j,N})^k\right]\\ \le&C_2\left(\mathbb{E}|v_t^1|^q\right)^{\frac{k}{q}}\cdot\frac{1}{N}\sum_{j=1}^N\left(\mathbb{E}\left[(J_t^{j,N})^{\frac{kq}{q-k}}\right]\right)^{\frac{q-k}{q}}\\ \le&\frac{C_3\|\eta\|_q^k}{N}\sum_{j=1}^N\left(\mathbb{E}\left[(J_t^{j,N})^{\frac{kq}{q-k}}\right]\right)^{\frac{q-k}{q}},\quad t\in[0,T],\end{aligned} \tag{3.17}$$

其中

$$\begin{aligned}J_t^{j,N}:=&|\nabla b_t(X_t^i,\mu_t)-\nabla b_t(X_t^{i,N},\hat\mu_t^N)|+\|D^Lb_t(X_t^i,\mu_t)(X_t^j)-D^Lb_t(X_t^{i,N},\hat\mu_t^N)(X_t^{j,N})\|\\&+\|\nabla\sigma_t(X_t^i,\mu_t)-\nabla\sigma_t(X_t^{i,N},\hat\mu_t^N)\|_{HS}+\|D^L\sigma_t(X_t^i,\mu_t)(X_t^j)-D^L\sigma_t(X_t^{i,N},\hat\mu_t^N)(X_t^{j,N})\|.\end{aligned}$$

取

$$\beta=\frac{q-k}{m+\alpha q}\wedge 1$$

使得

$$\frac{m\beta}{q-k}+\frac{\alpha\beta q}{q-k}\le 1,$$

并利用 Hölder 不等式、杨不等式以及 (2.1)、(2.2) 和 (2.5)，我们得到

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[(J_t^{j,N})^{\frac{kq}{q-k}}\right]\le&K\mathbb{E}\Bigg[C_4\wedge\Bigg\{\left(1+|X_t^1|^q+|X_t^{1,N}|^q+|X_t^j|^q+|X_t^{j,N}|^q+\frac{1}{N}\sum_{j=1}^N|X_t^{j,N}|^q\right)^{\frac{m}{q-k}}\\&\times\left(|X_t^1-X_t^{1,N}|^k+|X_t^j-X_t^{j,N}|^k+\mathbb{W}_k(\mu_t,\hat\mu_t^N)^k\right)^{\frac{\alpha q}{q-k}}\Bigg\}\Bigg]\\ \le C_5\mathbb{E}\Bigg[&\left(1+|X_t^1|^q+|X_t^{1,N}|^q+|X_t^j|^q+|X_t^{j,N}|^q+\frac{1}{N}\sum_{j=1}^N|X_t^{j,N}|^q\right)^{\frac{\beta m}{q-k}}\\&\times\left(|X_t^1-X_t^{1,N}|^k+|X_t^j-X_t^{j,N}|^k+\mathbb{W}_k(\mu_t,\hat\mu_t^N)^k\right)^{\frac{\alpha\beta q}{q-k}}\Bigg]\\ \le C_6\Bigg(\mathbb{E}\Bigg[&\left(1+|X_t^1|^q+|X_t^{1,N}|^q+|X_t^j|^q+|X_t^{j,N}|^q+\frac{1}{N}\sum_{j=1}^N|X_t^{j,N}|^q\right)\Bigg]\Bigg)^{1-\frac{\alpha\beta q}{q-k}}\\&\times\left(\mathbb{E}\left[\left(|X_t^1-X_t^{1,N}|^k+|X_t^j-X_t^{j,N}|^k+\mathbb{W}_k(\mu_t,\hat\mu_t^N)^k\right)\right]\right)^{\frac{\alpha\beta q}{q-k}}\le C_7\epsilon(N)^{\frac{\alpha\beta q}{q-k}}\end{aligned}$$

对于某些常数 $C_4, C_5, C_6, C_7 > 0$。结合 (3.17)，我们得到 (3.16)。 □

3.2 Malliavin导数的混沌传播

定理 3.3. 假设对 $k \geq 2$，条件 $(\mathbf{H_1})$–$(\mathbf{H_3})$ 成立。那么对于任意满足 $g_r = 0$ 和 $g_T = 1$ 的 $0 \leq r < T$ 和 $g \in C^1([r, T])$，以下断言成立。

(1) 对任意 $X_0, \eta \in L^k(\Omega \to \mathbb{R}^d, \mathscr{F}_0, \mathbb{P})$，

$$\lim_{N\to\infty} \mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]} \left|D_{\boldsymbol{h}^{N,(1)}} X_t^{1,N} - D_{h^1} X_t^1\right|^k\right] = 0. \tag{3.18}$$

(2) 若进一步假设 $(\mathbf{H_4})$ 对 $q > k \geq 2$ 成立，则对任意 $X_0, \eta \in L^q(\Omega \to \mathbb{R}^d, \mathscr{F}_0, \mathbb{P})$，存在一个常数 $c > 0$ 使得

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]} \left|D_{\boldsymbol{h}^{N,(1)}} X_t^{1,N} - D_{h^1} X_t^1\right|^k\right] \leq c\epsilon(N)^{\alpha\left(\frac{q-k}{m+\alpha q}\wedge 1\right)}. \tag{3.19}$$

证明。对于任意 $1 \leq i, l \leq N$ 和 $t \in [0, T]$，记 $w_t^i = D_{h^i} X_t^i$, $w^{i,\ N\,(l)}_t = D_{\boldsymbol{h}^{N,(l)}} X^{i,\ N}_{\cdot,t}$, $v_t^i = v^{\boldsymbol{\eta}^{\ i}}_{\cdot,t}$, $v^{i,\ N}_t = v^{\boldsymbol{\eta}^{\ i\,N,}}_t$，并令 $\Xi^{i,\ N}_t = w_t^i - w^{i,\ N\,(i)\,,}_t$。注意到对任意 $t < r$，$(h^{i,\ N}_{\cdot,t})' = (h_t^i)' = 0$，我们有

$$w_t^i = w_t^{i,N,(l)} = \mathbf{0}, \quad t < r,\ 1 \leq i, l \leq N.$$

因此，只需考虑 $t \geq r$。不失一般性，设 $r = 0$。于是，由 (2.26) 和 (2.32)，对于任意 $t \in [0, T]$, $1 \leq i \leq N$，可推得

$$\mathrm{d}\Xi_t^{i,N} := \left\{\nabla_{\Xi_t^{i,N}} b_t(X_t^{i,N}, \hat{\mu}_t^N) + \tilde{\xi}_t^{i,N} - \tilde{\zeta}_t^{i,N}\right\}\mathrm{d}t + \left\{\nabla_{\Xi_t^{i,N}} \sigma_t(X_t^{i,N}) + \tilde{\chi}_t^{i,N}\right\}\mathrm{d}W_t^i, \tag{3.20}$$

其中

$$\begin{aligned}
\tilde{\xi}_t^{i,N} :=& \nabla_{w_t^i} b_t(X_t^i, \mu_t) - \nabla_{w_t^i} b_t(X_t^{i,N}, \hat{\mu}_t^N) + g_t'\big(v_t^i - v_t^{i,N}\big),\\
\tilde{\zeta}_t^{i,N} :=& \frac{1}{N}\sum_{j=1}^N \langle D^L b_t(X_t^{i,N}, \hat{\mu}_t^N)(X_t^{j,N}), w_t^{j,N,(i)}\rangle,\\
\tilde{\chi}_t^{i,N} :=& \nabla_{w_t^i} \sigma_t(X_t^i) - \nabla_{w_t^i} \sigma_t(X_t^{i,N}).
\end{aligned}$$

由于 (2 .16) 和 (2.28)，通过将 w_t^i 替换为 v_t^i，重复定理 3.1 的证明，可得 s

$$\lim_{N\to\infty} \mathbb{E}\left[|\tilde{\xi}_t^{1,N}|^k + \|\tilde{\chi}_t^{1,N}\|^k\right] = 0, \quad t \in [0, T], \tag{3.21}$$

并且，若进一步假设对于 $q > k \geq 2$ 有 $(\mathbf{H_4})$，则对于 X_0, $\eta \in L^q(\Omega \to \mathbb{R}^d$, $\mathscr{F}_0$, $\mathbb{P})$，可得

$$\mathbb{E}\left[|\tilde{\xi}_t^{1,N}|^k + \|\tilde{\chi}_t^{1,N}\|^k\right] \leq c_1\epsilon(N)^{\alpha\left(\frac{q-k}{m+\alpha q}\wedge 1\right)} \tag{3.22}$$

根据（3.4），对于某个常数 $c_1 > 0$

另一方面，利用（$\mathbf{H_1}$）、（2.33）和詹森不等式，

$$\mathbb{E}\left[|\tilde{\zeta}_t^{1,N}|^k\right] \le \frac{c_2}{N}\sum_{j=1}^{N}\mathbb{E}|w_t^{j,N,(i)}|^k \le c_3 N^{-1}, \quad t\in[0,T] \tag{3.23}$$

对某些常数 $c_2, c_3 > 0$成立。与定理 3.1 证明中所用的论证类似，将 (3.21)、(3.22) 与 (3.23) 结合起来即可完成证明。 □

推论 3.4. 假设对于 $k \ge 2$，($\mathbf{H_1}$)–($\mathbf{H_3}$) 成立。在定理 *3.3* 中采用相同的定义，记

$$\hat{h}_t^1 = \int_{t\wedge r}^{t} 1_{\{s\ge r\}}(\sigma_s^* a_s^{-1})(X_s^1)\left(\mathbb{E}\langle D^L b_s(y,\cdot)(\mathscr{L}_{X_s^1})(X_s^1), g_s v_s^{\boldsymbol{\eta},1}\rangle\right)|_{y=X_s^1}\,\mathrm{d}s,$$

那么对于任意 $X_0, \eta \in L^k(\Omega \to \mathbb{R}^d, \mathscr{F}_0, \mathbb{P})$，

$$\lim_{N\to\infty}\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]}\left|\sum_{l=2}^{N} D_{\boldsymbol{h}^{N,(l)}}X_t^{1,N} - D_{\hat{h}^1}X_t^1\right|^k\right] = 0. \tag{3.24}$$

此外，若进一步假设对于 $q > k \ge 2$，($\mathbf{H_4}$) 成立，那么对于任意 $X_0, \eta \in L^q(\Omega \to \mathbb{R}^d, \mathscr{F}_0, \mathbb{P})$，存在一个常数 $c > 0$ 使得

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]}\left|\sum_{l=2}^{N} D_{\boldsymbol{h}^{N,(l)}}X_t^{1,N} - D_{\hat{h}^1}X_t^1\right|^k\right] \le c\epsilon(N)^{\alpha\left(\frac{q-k}{m+\alpha q}\wedge 1\right)}. \tag{3.25}$$

备注 3.5. 该推论解释了为什么 *McKean–Vlasov*随机微分方程的 *Bismut* 公式相比通常的随机微分方程多出一个分量。在粒子层面，这一分量对应于相互作用项产生的扰动

$$D_{\boldsymbol{h}^{N,(j)}}X_\cdot^{i,N}, \quad 1\le i\ne j\le N.$$

尽管每个扰动都很微小，但它们的平均效应在平均场极限中仍然存在，并且恰好成为极限 *Bismut* 公式中的期望项，具体来说，就是下方 (4.2) 中的第二个分量；另见 *[19, (1.16)], [13,* 定理 *2.3]* 等。

推论 *3.4* 的证明。 根据 [13, 定理 4.1] 和 (2.28)，对于任意 $t\in[0,T]$，

$$g_t v_t^{\eta,1} = g_t\nabla_{\eta^1}X_t^1 = D_{h^1+\hat{h}^1}X_t^1 =: w_t^{h+\hat{h},1} = w_t^{h,1} + w_t^{\hat{h},1},$$
$$g_t v_t^{\boldsymbol{\eta},1,N} = \nabla_{\boldsymbol{\eta}}X_t^{1,N} = D_{\boldsymbol{h}^N}X_t^{1,N} = w_t^{\boldsymbol{h}^N,1,N} = \sum_{l=1}^{N} w_t^{\boldsymbol{h}^N,1,N,(l)},$$

这意味着

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]}\left|w_t^{\hat{h},1} - \sum_{l=2}^{N} w_t^{\boldsymbol{h}^N,1,N,(l)}\right|^k\right]\\
\le& c_1(k)\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]}\left|w_t^{h+\hat{h},1} - w_t^{\boldsymbol{h}^N,1,N}\right|^k\right] + c_1(k)\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]}\left|w_t^{h,1} - w_t^{\boldsymbol{h}^N,1,N,(1)}\right|^k\right]\\
\le& c_2(k)\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]}\left|v_t^{\eta,1} - v_t^{\boldsymbol{\eta},1,N}\right|^k\right] + c_2(k)\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]}\left|w_t^{h,1} - w_t^{\boldsymbol{h}^N,1,N,(1)}\right|^k\right]
\end{aligned}$$

对于某些常数 $c_1(k)$ $c_2(k) > 0$。因此，所需的估计 (3.24) 和 (3.25) 可直接由定理 3.1 和 3.3 得出。

□

4 应用：内在导数的混沌传播

记

$$P_t f(\mu) = \mathbb{E}\left[f(X_t^1)\right], \quad P_t^N f(\mu) = \mathbb{E}\left[f(X_t^{1,N})\right], \quad t \in [0,T],\, \mu \in \mathscr{P}_k,\, f \in \mathscr{B}_b(\mathbb{R}^d),$$

其中， X_t^1 和 $X^{1,}{}_t{}^N$ 分别是满足 $\mathscr{L}_{X_0^1} = \mathscr{L}_{X^{1,}{}_0{}^N} = \mu$的方程 (1.2) 和 (1.3) 的唯一解。于是，对于任意 $\mu \in \mathscr{P}_k$, $\phi \in T_{\mu,k}$和 $t \in [0,T]$, $P_t f(\mu)$ 和 $P_t^N f(\mu)$ 的分布的内在导数可写为

$$D_\phi^I(P_t f)(\mu) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{P_t f\left(\mu \circ (id + \varepsilon\phi)^{-1}\right) - P_t f(\mu)}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \mathbb{E}\left[f(X_t^{\phi,1,\varepsilon}) - f(X_t^1)\right],$$

$$D_\phi^I(P_t^N f)(\mu) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{P_t^N f\left(\mu \circ (id + \varepsilon\phi)^{-1}\right) - P_t^N f(\mu)}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \mathbb{E}\left[f(X_t^{\phi,1,N,\varepsilon}) - f(X_t^{1,N})\right],$$

其中， $X^{\phi,}{}_t{}^{1,\varepsilon}$ 和 $X^{\phi,}{}_t{}^{1,N,\varepsilon}$ 分别满足方程 (2.9) 和 (2.10)，其中 $\eta^i = \phi(X_0^i)$ $1 \le i \le N$。

作为定理 3.1 和 3.3 的应用，本节中，对于任意 $f \in C_b^1(\mathbb{R}^d)$，通过取 $N \to \infty$，我们证明 $D_\phi^I(P_t^N f)(\mu)$ 收敛到 $D_\phi^I(P_t f)(\mu)$，并在 $f \in C_b^2(\mathbb{R}^d)$ 时给出显式的收敛速率。

为此，我们首先给出 (1.3) 的 Bismut 型公式。证明可由引理 2.4 按标准方法得到，详情请参见 [13, (2.3)], 的证明，此处为避免重复不再赘述。

引理 4.1. 假设 $(\mathbf{H_1})$ 和 $(\mathbf{H_2})$ 对 $k \ge 2$成立。那么，对任意 $f \in \mathscr{B}_b(\mathbb{R}^d)$ 和 $t \in (0,T]$,$P_t^N f$在 $\mathscr{P}_k$ 上本质可微。此外，对任意 $\mu \in \mathscr{P}_k$, $\phi \in T_{\mu,k}$, $t \in (0,T]$, 以及$g \in C^1([0,t])$，满足 $g_0 = 0$ 和 $g_t = 1$,

$$D_\phi^I(P_t^N f)(\mu) = \sum_{i=1}^N \mathbb{E}\left[f(X_t^{1,N}) \int_0^t \left\langle (\sigma_s^* a_s^{-1})(X_s^{i,N}) g_s' v_s^{\phi,i,N},\, \mathrm{d}W_s^i \right\rangle\right], \quad f \in \mathscr{B}_b(\mathbb{R}^d), \tag{4.1}$$

其中 $v^{\phi,}{}_t{}^{i\,N}$,是满足 (2.15) 且具有 $\eta^i = \phi(X_0^i)$的唯一解。

实际上，(4.1) 给出了分布依赖随机微分方程的 Bismut 公式的粒子系统近似，其有效性将在下文的定理 4.2 中得到证明。

定理 4.2. 假设对于 $k \ge 2$，条件 $(\mathbf{H_1})$–$(\mathbf{H_3})$ 成立。那么对于任意 $f \in C_b^1(\mathbb{R}^d)$、 $t \in (0、T]$、$\mu \in \mathscr{P}_k$以及 $\phi \in T_{\mu,k}$,

$$\lim_{N\to\infty} D_\phi^I(P_t^N f)(\mu) = D_\phi^I(P_t f)(\mu) = \mathbb{E}\left[f(X_t^1) \int_0^t \left\langle \zeta_s^\phi,\, \mathrm{d}W_s^1 \right\rangle\right],$$

其中 X_t^1满足(1.2)，其中 $i = 1$、 $\mathscr{L}_{X_0^1} = \mu$，且 $v^{\phi,1}$ 满足(2.14)，其中 $\eta^1 = \phi(X_0^1)$,

$$\zeta_t^\phi := (\sigma_t^* a_t^{-1})(X_t^1) \left\{ g_t' v_t^{\phi,1} + \left(\mathbb{E}\langle D^L b_t(y,\cdot)(\mathscr{L}_{X_t^1})(X_t^1), g_t v_t^{\phi,1}\rangle\right)\big|_{y=X_t^1} \right\}. \tag{4.2}$$

若进一步假设($\mathbf{H_4}$) 对 $q > k \geq 2$成立，则存在一个常数 $c > 0$ ，使得对任意$f \in C_b^2(\mathbb{R}^d)$, $t \in (0,\ T]$、 $\mu \in \mathscr{P}_q$和 $\phi \in T_{\mu,q}$,

$$\left|D_\phi^I(P_t^N f)(\mu) - D_\phi^I(P_t f)(\mu)\right| \leq c\epsilon(N)^{\alpha\left(\frac{q-k}{m+\alpha q}\wedge 1\right)}. \tag{4.3}$$

证明。为简便起见，对于任意 $\phi \in T_{\mu,k}$，记作 $(\eta^i = \phi(X_0^i))_{1\leq i\leq N}$。那么 $(\eta^i)_{1\leq i\leq N}$ 是 $\eta = \phi(X_0)$ 的独立同分布副本。

结合 [19] 的结果，并重复 [13]，中对应于情形 $k = 2$ 的证明，在假设 $(\mathbf{H_1})$–$(\mathbf{H_3})$ 下，我们得到

$$D_{\eta^1}^I(P_t f)(\mu) = \mathbb{E}\left[f(X_t^1)\int_0^t \left\langle \zeta_s^{\eta^1},\ \mathrm{d}W_s^1\right\rangle\right],\quad f \in \mathscr{B}_b(\mathbb{R}^d),\, t \in (0,T],\, \mu \in \mathscr{P}_k,$$

其中 $\zeta_t^{\eta^1}$ 定义为式 (4.2)，其中 $\eta^1 := \phi(X_0^1)$。

另一方面，对于任意 $\mu \in \mathscr{P}_k$、 $f \in C_b^1(\mathbb{R}^d)$ 和 $t \in (0,T]$，我们有

$$\begin{aligned} D_{\boldsymbol{\eta}}^I(P_t^N f)(\mu) &= \mathbb{E}\left[\langle \nabla f(X_t^{1,N}), \nabla_{\boldsymbol{\eta}} X_t^{1,N}\rangle\right], \\ D_{\eta^1}^I(P_t f)(\mu) &= \mathbb{E}\left[\langle \nabla f(X_t^1), \nabla_{\eta^1} X_t^1\rangle\right]. \end{aligned}$$

由于 Hölder 不等式给出

$$\begin{aligned} &\left|\mathbb{E}\left[\langle \nabla f(X_t^{1,N}), \nabla_{\boldsymbol{\eta}} X_t^{1,N}\rangle - \langle \nabla f(X_t^1), \nabla_{\eta^1} X_t^1\rangle\right]\right| \\ \leq &\|\nabla f\|_\infty \mathbb{E}|\nabla_{\boldsymbol{\eta}} X_t^{1,N} - \nabla_{\eta^1} X_t^1| + \left(\mathbb{E}|\nabla_{\eta^1} X_t^1|^2 \cdot \mathbb{E}|\nabla f(X_t^{1,N}) - \nabla f(X_t^1)|^2\right)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned} \tag{4.4}$$

于是，由 (2.4)、(2.16) 和 (3.3) 可知，对于任意 $f \in C_b^1(\mathbb{R}^d)$ $t \in (0,T]$ 及 $\mu \in \mathscr{P}_k$,

$$\lim_{N\to\infty} D_{\boldsymbol{\eta}}^I(P_t^N f)(\mu) = \mathbb{E}\left[\langle \nabla f(X_t^1), \nabla_{\eta^1} X_t^1\rangle\right] = D_{\eta^1}^I(P_t f)(\mu).$$

此外，若进一步假设对 $q > k \geq 2$, $\mu \in \mathscr{P}_q$, $\phi \in T_{\mu,q}$ 和 $\|\nabla f\|_\infty + \|\nabla^2 f\|_\infty < \infty$，$(\mathbf{H_4})$ 成立，则由 (4.4) 可得

$$\begin{aligned} &\left|\mathbb{E}\left[\langle \nabla f(X_t^{1,N}), \nabla_{\boldsymbol{\eta}} X_t^{1,N}\rangle - \langle \nabla f(X_t^1), \nabla_{\eta^1} X_t^1\rangle\right]\right| \\ \leq &\|\nabla f\|_\infty \mathbb{E}|\nabla_{\boldsymbol{\eta}} X_t^{1,N} - \nabla_{\eta^1} X_t^1| + \|\nabla^2 f\|_\infty \left(\mathbb{E}|\nabla_{\eta^1} X_t^1|^2 \cdot \mathbb{E}|X_t^{1,N} - X_t^1|^2\right)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

将其与 (2.5)、(2.16) 和 (3.4) 结合，便可得到 (4.3)。 □

引理 2.1 的证明

(1) 对于任意 $t \in [0,T]$, $\boldsymbol{x} = (x^1, x^2, \cdots, x^N) \in \mathbb{R}^{dN}$对于 $x^i \in \mathbb{R}^d$, $1 \leq i \leq N$以及 $\hat{}\mu^N(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^N \delta_{x^i}$，记

$$B_t^N(\boldsymbol{x}) := \left(b_t(x^1, \hat{\mu}^N(\boldsymbol{x})), b_t(x^2, \hat{\mu}^N(\boldsymbol{x})), \cdots, b_t(x^N, \hat{\mu}^N(\boldsymbol{x}))\right),$$

$$\Sigma_t^N(\boldsymbol{x}) = \left(\sigma_t(x^1, \hat{\mu}^N(\boldsymbol{x})), \sigma_t(x^2, \hat{\mu}^N(\boldsymbol{x})), \cdots, \sigma_t(x^N, \hat{\mu}^N(\boldsymbol{x}))\right).$$

那么，在假设 **(H)** 下，对于任意 $N \geq 1$，存在一个常数 $C(N) > 0$，使得对于任意 $t \in [0,T]$, $\boldsymbol{x} = (x^1, x^2, \cdots, x^N)$ $\boldsymbol{y} = (y^1, y^2, \cdots, y^N) \in \mathbb{R}^{dN}$对于 $x^i, y^i \in \mathbb{R}^d$, $1 \leq i \leq N$,

$$\sup_{t\in[0,T]} \left\{|B_t^N(\mathbf{0})| + \|\Sigma_t^N(\mathbf{0})\|\right\} < \infty,$$

and

$$\begin{aligned}
&2\langle \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}, B_t^N(\boldsymbol{x}) - B_t^N(\boldsymbol{y})\rangle^+ + \left\|\Sigma_t^N(\boldsymbol{x}) - \Sigma_t^N(\boldsymbol{y})\right\|_{HS}^2 \\
&\leq K \sum_{j=1}^N \left(|x^j - y^j|^2 + \mathbb{W}_k(\hat{\mu}^N(\boldsymbol{x}), \hat{\mu}^N(\boldsymbol{y}))^2\right) \\
&\leq K \left(\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|_2^2 + N^{1-\frac{2}{k}} \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|_k^2\right) \leq C(N)\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|_2^2,
\end{aligned}$$

其中 $\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|_p^p := \sum_{j=1}^N |x^j - y^j|^p$, $p \geq 1$，第二个不等式由

$$\mathbb{W}_k(\hat{\mu}^N(\boldsymbol{x}), \hat{\mu}^N(\boldsymbol{y})) \leq \left(\frac{1}{N}\sum_{j=1}^N |x^j - y^j|^k\right)^{\frac{1}{k}} = N^{-\frac{1}{k}} \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|_k, \tag{A.1}$$

最后一个不等式由

$$\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|_q \leq \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|_p \leq N^{1/p - 1/q} \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|_q, \quad 1 \leq p \leq q \leq \infty.$$

注意到，(1.3) 可写成关于 $(\mathbb{R}^d)^N$ 的系统，其中 $\boldsymbol{X}_0 = (X_0^1, X_0^2, \cdots, X_0^N)$:

$$\mathrm{d}\boldsymbol{X}_t = B_t^N(\boldsymbol{X}_t)\mathrm{d}t + \Sigma_t^N(\boldsymbol{X}_t)\mathrm{d}\boldsymbol{W}_t, \quad t \in [0,T], \tag{A.2}$$

其中 $\boldsymbol{X} = (X^1, X^2, \cdots, X^N)$ 和 $\boldsymbol{W} = (W^1, W^2, \cdots, W^N)$，根据一般随机微分方程理论，(1.3) 是适定的，例如参见 [14, 定理 1.3。1] 需要指出的是，对任意 $t \in [0,T]$，$(X^i{}_t{}^N)_{1\leq i\leq N}$并非相互独立，但它们同分布。

下面证明估计式 (2.2)。根据詹森不等式，只需证明 (2.2) 对$m > k \vee 2$成立。利用 Itô 公式并根据 **(H)**，存在一个常数 $c_1 > 0$，使得对任意 $1 \leq i \leq N$, $t \in [0,T]$,

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}|X_t^{i,N}|^2 =& \left\{2\langle X_t^{i,N}, b_t(X_t^{i,N}, \hat{\mu}_t^N)\rangle + \|\sigma_t(X_t^{i,N}, \hat{\mu}_t^N)\|_{HS}^2\right\}\mathrm{d}t + 2\langle X_t^{i,N}, \sigma_t(X_t^{i,N}, \hat{\mu}_t^N)\mathrm{d}W_t^i\rangle \\
\leq& c_1 \left\{1 + |X_t^{i,N}|^2 + \frac{1}{N}\sum_{j=1}^N |X_t^{j,N}|^2\right\}\mathrm{d}t + 2\langle X_t^{i,N}, \sigma_t(X_t^{i,N}, \hat{\mu}_t^N)\mathrm{d}W_t^i\rangle.
\end{aligned}$$

由伊藤公式、詹森不等式和杨不等式可知，对任意 $m > k \vee 2$，有

$$\mathrm{d}|X_t^{i,N}|^m \leq c_2(m) \left\{1 + |X_t^{i,N}|^m + \frac{1}{N}\sum_{j=1}^N |X_t^{j,N}|^m\right\}\mathrm{d}t + \mathrm{d}N_t^i, \quad t \in [0,T],\ 1 \leq i \leq N$$

其中存在某个常数 $c_2(m)$，满足

$$\mathrm{d}\langle N^i\rangle_t \le c_2(m)|X_t^{i,N}|^{2m-2}\left(|X_t^{i,N}|^2+\Big(\frac{1}{N}\sum_{j=1}^N|X_t^{j,N}|^k\Big)^{\frac{2}{k}}\right)\mathrm{d}t.$$

Inv应用 Burkholder–Davis–Gundy不等式、Jensen 不等式和 Young 不等式，记 g

$$U_t^i=\mathbb{E}\left[\sup_{s\in[0,t]}\left(1+|X_s^{i,N}|^m\right)\Big|\mathscr{F}_0\right],\quad t\in[0,T],\,1\le i\le N,$$

我们有

$$\begin{aligned}
U_t^i \le&\Big(1+|X_0^i|^m\Big)+c_2(m)\int_0^t\left\{U_s^i+\frac{1}{N}\sum_{j=1}^N U_s^j\right\}\mathrm{d}s\\
&+\mathbb{E}\left[\left(c_2(m)\int_0^t|X_s^{i,N}|^{2m-2}\Big(|X_s^{i,N}|^2+\Big(\frac{1}{N}\sum_{j=1}^N|X_s^{j,N}|^k\Big)^{\frac{2}{k}}\Big)\mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{2}}\Big|\mathscr{F}_0\right]\\
\le&\Big(1+|X_0^i|^m\Big)+c_3(m)\int_0^t\left\{U_s^i+\frac{1}{N}\sum_{j=1}^N U_s^j\right\}\mathrm{d}s\\
&+\frac{1}{2}U_t^i+c_3(m)\int_0^t\mathbb{E}\left[|X_s^{i,N}|^{m-2}\Big(\frac{1}{N}\sum_{j=1}^N|X_s^{j,N}|^k\Big)^{\frac{2}{k}}\Big|\mathscr{F}_0\right]\mathrm{d}s\\
\le&\Big(1+|X_0^i|^m\Big)+c_4(m)\int_0^t\Big(U_s^i+\frac{1}{N}\sum_{j=1}^N U_s^j\Big)\mathrm{d}s+\frac{1}{2}U_t^i,\quad 1\le i\le N,\,t\in[0,T]
\end{aligned}\tag{A.3}$$

对于某些常数 $c_3(m)$ $c_4(m)>0$，成立。由此可得

$$\frac{1}{N}\sum_{j=1}^N U_t^j\le\frac{2}{N}\sum_{j=1}^N(1+|X_0^j|^m)+4c_4(m)\int_0^t\frac{1}{N}\sum_{j=1}^N U_s^j\,\mathrm{d}s,\quad t\in[0,T],$$

结合 Gr¨onwall 不等式，可得

$$\frac{1}{N}\sum_{j=1}^N U_t^j\le 2\mathrm{e}^{4c_4(m)T}\left(1+\frac{1}{N}\sum_{j=1}^N|X_0^j|^m\right),\quad t\in[0,T].$$

将其代入 (A.3)，并再次应用 Gr¨onwall 不等式，可找到一个常数$c_5(m)>0$，使得

$$U_t^i\le c_5(m)\left(1+|X_0^i|^m+\frac{1}{N}\sum_{j=1}^N|X_0^j|^m\right),\quad t\in[0,T],\,1\le i\le N,$$

这意味着（2.2）。

（2）在下文中，我们假设 $k \geq 2$。由于（X_t^i）$_{1\leq i\leq N}$ 是独立同分布的，我们有

$$\lim_{N\to\infty} \sup_{t\in[0,T]} \mathbb{E}\left[\mathbb{W}_k(\tilde{\mu}_t^N, \mu_t)^k\right] = 0. \tag{A.4}$$

事实上，(2.1) 意味着 ($\mathbb{W}_k(\tilde{\mu}_t^N,\ \mu_t)^k)_{N\geq 1}$ 是一致可积的。因此，由大数定律和 [6, 定理 5.5]可得 (A.4)。

另一方面，根据 Itˆo 公式，

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}|X_t^{i,N} - X_t^i|^2 =& \Big\{2\langle X_t^{i,N} - X_t^i, b_t(X_t^{i,N}, \hat{\mu}_t^N) - b_t(X_t^i, \mu_t)\rangle \\
&+ \|\sigma_t(X_t^{i,N}, \hat{\mu}_t^N) - \sigma_t(X_t^i, \mu_t)\|_{HS}^2\Big\}\mathrm{d}t + \mathrm{d}M_t^i \\
\leq& K\left(|X_t^{i,N} - X_t^i|^2 + \mathbb{W}_k(\hat{\mu}_t^N, \mu_t)^2\right)\mathrm{d}t + \mathrm{d}M_t^i,\quad 1\leq i\leq N,\, t\in[0,T],
\end{aligned}$$

其中 $M_t^i := 2\langle X^{i,\ N}_{\cdot,\ t} - X_t^i,\ (\sigma_t(X^{i,\ N}_{\cdot,\ t},\ \hat{}\mu_t^N) - \sigma_t(X_t^i,\ \mu_t))\mathrm{d}W_t^i\rangle$。然后再次使用 Itˆo 公式，并应用 Young不等式，存在一个常数 $c_6(k) > 0$，使得对于任意 $t\in[0,T],\ 1\leq i\leq N$,

$$\mathrm{d}|X_t^{i,N} - X_t^i|^k \leq c_6(k)\left(|X_t^{i,N} - X_t^i|^k + \mathbb{W}_k(\hat{\mu}_t^N, \mu_t)^k\right)\mathrm{d}t + \mathrm{d}\tilde{M}_t^i, \tag{A.5}$$

其中

$$\mathrm{d}\langle\tilde{M}^i\rangle_t \leq c_6(k)|X_t^{i,N} - X_t^i|^{2k-2}\left(|X_t^{i,N} - X_t^i|^2 + \mathbb{W}_k(\hat{\mu}_t^N, \mu_t)^2\right)\mathrm{d}t.$$

利用 (A.1)、Burkholder–Davis–Gundy不等式、Young 不等式和三角不等式，并注意到对于任意 $t\in[0,T]$，($X^{i,\ N}_{\cdot,\ t} - X_t^i)_{1\leq i\leq N}$ 均同分布，可得

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]}|X_t^{i,N} - X_t^i|^k\right] \leq c_6(k)\int_0^T\left(\mathbb{E}|X_t^{i,N} - X_t^i|^k + \mathbb{E}\mathbb{W}_k(\hat{\mu}_t^N, \mu_t)^k\right)\mathrm{d}t \\
&\qquad + \mathbb{E}\left(c_6(k)\int_0^T|X_t^{i,N} - X_t^i|^{2k-2}\left(|X_t^{i,N} - X_t^i|^2 + \mathbb{W}_k(\hat{\mu}_t^N, \mu_t)^2\right)\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq c_7(k)\int_0^T\left(\mathbb{E}|X_t^{i,N} - X_t^i|^k + \mathbb{E}\mathbb{W}_k(\hat{\mu}_t^N, \mu_t)^k\right)\mathrm{d}t \\
&\qquad + \frac{1}{2}\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]}|X_t^{i,N} - X_t^i|^k\right] + c_7(k)\int_0^T\mathbb{E}\left[|X_t^{i,N} - X_t^i|^{k-2}\mathbb{W}_k(\hat{\mu}_t^N, \mu_t)^2\right]\mathrm{d}t \\
&\leq c_8(k)\int_0^T\mathbb{E}|X_t^{i,N} - X_t^i|^k\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]}|X_t^{i,N} - X_t^i|^k\right] \\
&\qquad + c_8(k)\int_0^T\mathbb{E}\mathbb{W}_k(\hat{\mu}_t^N, \tilde{\mu}_t^N)^k\,\mathrm{d}t,\quad 1\leq i\leq N
\end{aligned} \tag{A.6}$$

对于某些常数 $c_7(k)$ $c_8(k) > 0$。结合 Gr¨onwall 不等式可知

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]}|X_t^{i,N}-X_t^i|^k\right] \le c_4(k)\sup_{t\in[0,T]}\mathbb{E}\mathbb{W}_k(\hat{\mu}_t^N,\tilde{\mu}_t^N)^k, \quad 1\le i\le N \tag{A.7}$$

对于某个常数 $c_4(k) > 0$，根据(A.4)，它趋于0。此外，结合(A.1)和三角不等式，还可得到

$$\lim_{N\to\infty}\sup_{t\in[0,T]}\mathbb{E}\left[\mathbb{W}_k(\hat{\mu}_t^N,\mu_t)^k\right]=0.$$

因此，我们得到了所需的估计(2.4)。

(3) 若进一步假设 $\mu=\mathscr{L}_{X_0}\in\mathscr{P}_q$ 对于某个 $q>k\ge 2$，根据 [7, 定理 1],

$$\mathbb{E}\mathbb{W}_k(\hat{\mu}_t^N,\tilde{\mu}_t^N)^k \le c(q,k)\epsilon(N) \tag{A.8}$$

对于某个常数 $c(q,\ k) > 0$。于是，由(A.1)、(A.7)、(A.8)和三角不等式可得(2.5)。因此，证明完成。

B 引理2.3和2.4的推广

当以下较弱条件替代($\mathbf{H_1}$)时，引理2.3和2.4的结论仍然成立。

($\mathbf{H_B}$) 存在常数 $K>0$ 和 $q\ge k$ 使得

(B_1) For any $(t,x,\mu)\in[0,T]\times\mathbb{R}^d\times\mathscr{P}_q$,

$$\|\nabla b_t(x,\mu)\| \le K\left\{1+|x|^{\frac{q-k}{k}}+\|\mu\|_q^{\frac{q-k}{k}}\right\}, \tag{B.1}$$

其中 $\|\mu\|_q^q:=\mu(|\cdot|^q)$。

(B_2) 对任意 $t\in[0,T]$, $b_t,\sigma_t\in\mathscr{D}_q$ 使得

$$\sup_{(t,x,\mu)\in[0,T]\times\mathbb{R}^d\times\mathscr{P}_q}\left\{\|D^L b_t(x,\cdot)(\mu)\|_{L^{k^*}(\mu)}+\|D^L\sigma_t(x,\cdot)(\mu)\|_{L^{k^*}(\mu)}\right\}<\infty, \tag{B.2}$$

并且对任意 $(t,x,v,\mu)\in[0,T]\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d\times\mathscr{P}_q$,

$$2\langle v,\nabla_v b_t(\cdot,\mu)(x)\rangle^+ + \|\nabla_v\sigma_t(\cdot,\mu)(x)\|_{HS}^2 \le K|v|^2.$$

引理 B.1. 将引理*2.3*和*2.4*中的假设($\mathbf{H_1}$) 替换为($\mathbf{H_B}$)，其中 $k\ge 2$，其余假设保持不变。则对于任意 $X_0,\eta\in L^q(\Omega\to\mathbb{R}^d,\mathscr{F}_0,\mathbb{P})$，引理*2.1*和*2.2*的结论仍然成立。

证明. 由于附加论证完全相同，为避免重复，我们仅给出 (2.13) 的证明。注意到 (2.2) 得出 $\hat{\mu}_t^N \in \mathscr{P}_k$ 几乎必然成立，因此由 (B.2) 可得

$$\begin{aligned}&\frac{1}{N}\sum_{j=1}^N \left|D^L b_t(X_t^{i,N},\cdot)(\hat{\mu}_t^N)(X_t^{j,N})\right|^{k^*} + \frac{1}{N}\sum_{j=1}^N \left|D^L \sigma_t(X_t^{i,N},\cdot)(\hat{\mu}_t^N)(X_t^{j,N})\right|^{k^*} \\ &= \|D^L b_t(X_t^{i,N},\hat{\mu}_t^N)\|^{k^*}_{L^{k^*}(\hat{\mu}_t^N)} + \|D^L \sigma_t(X_t^{i,N},\hat{\mu}_t^N)\|^{k^*}_{L^{k^*}(\hat{\mu}_t^N)} < M, \quad \text{a.s.}\end{aligned} \tag{B.3}$$

对于某个常数 $M>0$。结合 H¨older 不等式以及原证明 (2.17) 中所用的论证，我们可得，对于任意 $m \geq 1$，存在一个常数 $c>0$，使得

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]} |v_t^{i,N}|^m \middle| \mathscr{F}_0\right] \leq c\left(|\eta^i|^m + \frac{1}{N}\sum_{j=1}^N |\eta^j|^m\right), \quad 1\leq i\leq N. \tag{B.4}$$

接下来，只需证明

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\max_{1\leq i\leq N}\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]}\left|\frac{X_t^{i,N,\varepsilon}-X_t^{i,N}}{\varepsilon} - v_t^{i,N}\right|^k\right] = 0, \quad k\geq 2. \tag{B.5}$$

Let

$$\tilde{v}_t^{i,N,\varepsilon} = \frac{X_t^{i,N,\varepsilon}-X_t^{i,N}}{\varepsilon}, \quad 1\leq i\leq N,\, \varepsilon\in(0,1],$$

那么，由 (A.1)、Itô 公式、Jensen 不等式和杨不等式可知，对于任意 $q\geq k\geq 2$，我们可以找到一个常数 $c_3>0$，使得

$$\begin{aligned}\mathrm{d}|\tilde{v}_t^{i,N,\varepsilon}|^q \leq& c_3\left\{|\tilde{v}_t^{i,N,\varepsilon}|^q + \varepsilon^{-q}\mathbb{W}_k(\hat{\mu}_t^{N,\varepsilon},\hat{\mu}_t^N)^q\right\}\mathrm{d}t + \mathrm{d}M_t^i \\ \leq& c_3\left\{|\tilde{v}_t^{i,N,\varepsilon}|^q + \frac{1}{N}\sum_{j=1}^N |\tilde{v}_t^{j,N,\varepsilon}|^q\right\}\mathrm{d}t + \mathrm{d}M_t^i, \quad 1\leq i\leq N,\, t\in[0,T]\end{aligned}$$

其中 $\tilde{v}^{i,N,0} = \eta^i$，其中

$$\mathrm{d}\langle M^i\rangle_t \leq c_3|\tilde{v}_t^{i,N,\varepsilon}|^{2q-2}\left\{|\tilde{v}_t^{i,N,\varepsilon}|^2 + \left(\frac{1}{N}\sum_{j=1}^N |\tilde{v}_t^{j,N,\varepsilon}|^k\right)^{\frac{2}{k}}\right\}\mathrm{d}t.$$

利用 Burkholder–Davis–Gundy不等式、Jensen 不等式和杨不等式，我们得到

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]}|\tilde{v}_t^{i,N,\varepsilon}|^q\right] \leq \|\eta\|_q^q + \frac{1}{2}\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]}|\tilde{v}_t^{i,N,\varepsilon}|^q\right] + c_4\int_0^T \mathbb{E}|\tilde{v}_t^{i,N,\varepsilon}|^q\,\mathrm{d}t, \quad 1\leq i\leq N$$

对某个常数 $c_4>0$，其中以及下文中，$\|\eta\|_q^q := \mathbb{E}|\eta|^q$。因此，Gr¨onwall 不等式表明，存在一个常数 $c_5>0$，使得

$$\max_{1\leq i\leq N}\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]}|\tilde{v}_t^{i,N,\varepsilon}|^q\right] \leq c_5\|\eta\|_q^q < \infty. \tag{B.6}$$

随后，对于任意 $t\in[0,T],\quad \theta\in[0,1]$，记

$$\gamma_t^{i,N,\theta}=X_t^{i,N}+\theta(X_t^{i,N,\varepsilon}-X_t^{i,N}),\ 1\le i\le N,\quad \hat{\mu}_t^{N,\theta}=\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\delta_{\gamma_t^{j,N,\theta}},$$

并记

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\tilde{v}_t^{i,N,\varepsilon}&=\nabla_{\tilde{v}_t^{i,N,\varepsilon}}b_t(X_t^{i,N},\hat{\mu}_t^N)\mathrm{d}t+\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\left\langle D^Lb_t(X_t^{i,N},\cdot)(\hat{\mu}_t^N)(X_t^{j,N}),\tilde{v}_t^{j,N,\varepsilon}\right\rangle\mathrm{d}t\\&+\left\{\nabla_{\tilde{v}_t^{i,N,\varepsilon}}\sigma_t(X_t^{i,N},\hat{\mu}_t^N)+\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\left\langle D^L\sigma_t(X_t^{i,N},\cdot)(\hat{\mu}_t^N)(X_t^{j,N}),\tilde{v}_t^{j,N,\varepsilon}\right\rangle\right\}\mathrm{d}W_t^i\\&+\alpha_t^{i,\varepsilon}\mathrm{d}t+\beta_t^{i,\varepsilon}\mathrm{d}W_t^i,\quad t\in[0,T],\,1\le i\le N,\end{aligned}\tag{B.7}$$

其中，根据引理 2.2,

$$\begin{aligned}\alpha_t^{i,\varepsilon}&:=\frac{b_t(X_t^{i,N,\varepsilon},\hat{\mu}_t^N)-b_t(X_t^{i,N},\hat{\mu}_t^N)}{\varepsilon}-\nabla_{\tilde{v}_t^{i,N,\varepsilon}}b_t(X_t^{i,N},\hat{\mu}_t^N)\\&+\frac{b_t(X_t^{i,N,\varepsilon},\hat{\mu}_t^{N,\varepsilon})-b_t(X_t^{i,N,\varepsilon},\hat{\mu}_t^N)}{\varepsilon}-\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\left\langle D^Lb_t(X_t^{i,N,\varepsilon},\cdot)(\hat{\mu}_t^N)(X_t^{j,N}),\tilde{v}_t^{j,N,\varepsilon}\right\rangle\\&=\int_0^1\left\{\nabla_{\tilde{v}_t^{i,N,\varepsilon}}b_t(\gamma_t^{i,N,\theta},\hat{\mu}_t^N)-\nabla_{\tilde{v}_t^{i,N,\varepsilon}}b_t(X_t^{i,N},\hat{\mu}_t^N)\right\}\mathrm{d}\theta\\&+\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\int_0^1\left\{\left\langle\tilde{v}_t^{j,N,\varepsilon},D^Lb_t(X_t^{i,N,\varepsilon},\cdot)(\hat{\mu}_t^{N,\theta})(\gamma_t^{j,N,\theta})-D^Lb_t(X_t^{i,N,\varepsilon},\cdot)(\hat{\mu}_t^N)(X_t^{j,N})\right\rangle\right\}\mathrm{d}\theta,\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}\beta_t^{i,\varepsilon}&:=\frac{\sigma_t(X_t^{i,N,\varepsilon},\hat{\mu}_t^N)-\sigma_t(X_t^{i,N},\hat{\mu}_t^N)}{\varepsilon}-\nabla_{\tilde{v}_t^{i,N,\varepsilon}}\sigma_t(X_t^{i,N},\hat{\mu}_t^N)\\&+\frac{\sigma_t(X_t^{i,N,\varepsilon},\hat{\mu}_t^{N,\varepsilon})-\sigma_t(X_t^{i,N,\varepsilon},\hat{\mu}_t^N)}{\varepsilon}-\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\left\langle D^L\sigma_t(X_t^{i,N,\varepsilon},\cdot)(\hat{\mu}_t^N)(X_t^{j,N}),\tilde{v}_t^{j,N,\varepsilon}\right\rangle\\&=\int_0^1\left\{\nabla_{\tilde{v}_t^{i,N,\varepsilon}}\sigma_t(\gamma_t^{i,N,\theta},\hat{\mu}_t^N)-\nabla_{\tilde{v}_t^{i,N,\varepsilon}}\sigma_t(X_t^{i,N},\hat{\mu}_t^N)\right\}\mathrm{d}\theta\\&+\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\int_0^1\left\{\left\langle\tilde{v}_t^{j,N,\varepsilon},D^L\sigma_t(X_t^{i,N,\varepsilon},\cdot)(\hat{\mu}_t^{N,\theta})(\gamma_t^{j,N,\theta})-D^L\sigma_t(X_t^{i,N,\varepsilon},\cdot)(\hat{\mu}_t^N)(X_t^{j,N})\right\rangle\right\}\mathrm{d}\theta,\end{aligned}$$

其满足

$$\lim_{\varepsilon\to0}\max_{1\le i\le N}\left\{|\alpha_t^{i,\varepsilon}|+\|\beta_t^{i,\varepsilon}\|\right\}=0,\quad\mathbb{P}\text{-a.s., }t\in(0,T]\tag{B.8}$$

通过重复 [19,(2.18)、(4.9)] 的证明。

此外，假设 (A)、H¨older 不等式以及 (B.3) 表明

$$|\alpha_t^{i,\varepsilon}|^k + \|\beta_t^{i,\varepsilon}\|^k \leq \frac{c_0}{N}\sum_{j=1}^N \left(|\tilde{v}_t^{j,N,\varepsilon}|^k + |\tilde{v}_t^{i,N,\varepsilon}|^k\right)\left\{1 + |X_t^{i,N}|^{q-k} + |X_t^{i,N,\varepsilon} - X_t^{i,N}|^{q-k} + \left(\frac{1}{N}\sum_{j=1}^N |X_t^{j,N}|^q\right)^{\frac{q-k}{q}}\right\}$$

对于某个常数 $c_0 > 0$。由于 $X_0,\ \eta \in L^q(\Omega \to \mathbb{R}^d,\ \mathscr{F}_0,\ \mathbb{P})$，根据 (2.2)、(B.6) 和 H¨older 不等式，可得

$$\sup_{\varepsilon\in(0,1]}\max_{1\leq i\leq N}\mathbb{E}\left[\int_0^T \left\{|\alpha_t^{i,\varepsilon}|^k + \|\beta_t^{i,\varepsilon}\|^k\right\}\mathrm{d}t\right] < \infty,$$

结合 (B.8) 和控制收敛定理，可得

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\max_{1\leq i\leq N}\mathbb{E}\left[\int_0^T \left\{|\alpha_t^{i,\varepsilon}|^k + \|\beta_t^{i,\varepsilon}\|^k\right\}\mathrm{d}t\right] = 0. \tag{B.9}$$

接下来，对于任意 $t\in[0,T],\ \ 1\leq i\leq N$，记 $\Lambda_t^{i,N,\varepsilon} = \tilde{v}_t^{i,N,\varepsilon} - v_t^{i,N}$，应用 Itô 公式，推得

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}|\Lambda_t^{i,N,\varepsilon}|^2 \leq& \left\{2\langle\Lambda_t^{i,N,\varepsilon}, \nabla_{\Lambda_t^{i,N,\varepsilon}} b_t(X_t^{i,N},\hat{\mu}_t^N)\rangle + 3\|\nabla_{\Lambda_t^{i,N,\varepsilon}}\sigma_t(X_t^{i,N},\hat{\mu}_t^N)\|_{HS}^2\right\}\mathrm{d}t\\
&+ 3\left\|\frac{1}{N}\sum_{j=1}^N\left\langle D^L\sigma_t(X_t^{i,N},\cdot)(\hat{\mu}_t^N)(X_t^{j,N}),\Lambda_t^{i,N,\varepsilon}\right\rangle\right\|_{HS}^2\mathrm{d}t + 3\|\beta_t^{i,\varepsilon}\|_{HS}^2\mathrm{d}t\\
&+ 2\left\{\frac{1}{N}\sum_{j=1}^N\left\langle D^L b_t(X_t^{i,N},\cdot)(\hat{\mu}_t^N)(X_t^{j,N}),\Lambda_t^{i,N,\varepsilon}\Lambda_t^{j,N,\varepsilon}\right\rangle\mathrm{d}t + \langle\Lambda_t^{i,N,\varepsilon},\alpha_t^{i,\varepsilon}\rangle\right\}\mathrm{d}t\\
&+ \frac{2}{N}\sum_{j=1}^N\left\langle D^L\sigma_t(X_t^{i,N},\cdot)(\hat{\mu}_t^N)(X_t^{j,N}),\Lambda_t^{i,N,\varepsilon}\Lambda_t^{j,N,\varepsilon}\mathrm{d}W_t^i\right\rangle\\
&+ 2\left\langle\Lambda_t^{i,N,\varepsilon},\left\{\nabla_{\Lambda_t^{i,N,\varepsilon}}\sigma_t(X_t^{i,N},\hat{\mu}_t^N) + \beta_t^{i,\varepsilon}\right\}\mathrm{d}W_t^i\right\rangle,\quad t\in[0,T],\ 1\leq i\leq N
\end{aligned}$$

其中 $\Lambda_0^{i,N,\varepsilon} = 0$。再次应用 Itô 公式，根据 (B.3)、H¨older 不等式和杨不等式，存在一个常数 $c_6 > 0$，使得对于任意 $t\in[0,T],\ \ 1\leq i\leq N$，

$$\mathrm{d}|\Lambda_t^{i,N,\varepsilon}|^k \leq c_6\left\{|\Lambda_t^{i,N,\varepsilon}|^k + \frac{1}{N}\sum_{j=1}^N|\Lambda_t^{j,N,\varepsilon}|^k\right\}\mathrm{d}t + c_6\left\{|\alpha_t^{i,N}|^k + \|\beta_t^{i,N}\|^k\right\}\mathrm{d}t + \mathrm{d}M_t^i,$$

其中

$$\mathrm{d}\langle M^i\rangle_t \leq c_6|\Lambda_t^{i,N,\varepsilon}|^{2k-2}\left(|\Lambda_t^{i,N,\varepsilon}|^2 + \|\beta^{i,\varepsilon}\|^2 + \left\|\frac{1}{N}\sum_{j=1}^N\left\langle D^L\sigma_t(X_t^{i,N},\cdot)(\hat{\mu}_t^N)(X_t^{j,N}),\Lambda_t^{j,N,\varepsilon}\right\rangle\right\|^2\right)\mathrm{d}t.$$

由 B.3、H¨older 不等式和 Burkholder–Davis–Gundy不等式,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]}|\Lambda_t^{i,N,\varepsilon}|^k\right] \leq & c_7\int_0^T \mathbb{E}\left\{|\Lambda_t^{i,N,\varepsilon}|^k + \frac{1}{N}\sum_{j=1}^N |\Lambda_t^{j,N,\varepsilon}|^k\right\}\mathrm{d}t \\ & + \frac{1}{2}\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]}|\Lambda_t^{i,N,\varepsilon}|^k\right] + c_7\int_0^T\left\{|\alpha_t^{i,\varepsilon}|^k + \|\beta_t^{i,\varepsilon}\|^k\right\}\mathrm{d}t\end{aligned}$$

对某个 $c_7>0$ 以及任意 $1\leq i\leq N$成立。然后重复导出 (A.7) 的论证，可得对于某个常数 $c_8>0$,

$$\max_{1\leq i\leq N}\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]}|\Lambda_t^{i,N,\varepsilon}|^k\right] \leq c_8\max_{1\leq i\leq N}\mathbb{E}\left[\int_0^T\left\{|\alpha_t^{i,\varepsilon}|^k + \|\beta_t^{i,\varepsilon}\|^k\right\}\mathrm{d}t\right],$$

根据 (B.9)，当 $\varepsilon\to 0$ 时该式趋于 0。至此，证明完毕。 □

致谢

作者　　感谢 Feng-Yu Wang教授提供有益的交流和指正 s.

声明与披露

利益冲突： 作者声明不存在利益冲突。**数据可用性：** 本研究未生成或分析任何数据集，因此不适用数据共享。

参考文献

[1] J. Bao, G. dos Reis, Z. Wilde，共同噪声下*McKean-Vlasov*随机微分方程的*Malliavin*可微性，Electronic Communications in Probability，30(2025)，1–14。[2] J. Bao, P. Ren, F.-Y. Wang，分布路径依赖随机微分方程的*Lions*导数*Bismut* 公式，J. Diff. Equat. 282(2021)，285–329。[3] J. Bao, X. Huang，不规则系数*McKean–Vlasov*随机微分方程的逼近，J. Theoret. Probab. 35(2) (2022)，1187–1215。[4] D. Bresch, P.-E. Jabin, Z. Wang，奇异吸引核下的平均场极限与定量估计，Duke Math. J. 172(2023)，2591–2641。[5] R. Carmona，倒向随机微分方程、随机控制与随机微分博弈讲义：金融应用，Financial Mathematics，第1卷，工业与应用数学学会（SIAM），费城，宾夕法尼亚州，2016年。

[6] R. Carmona 和 F. Delarue，平均场博弈的概率理论及其应用 *I*，概率论与随机建模，第83卷，Springer-Verlag，2018年。[7] N. Fournier, G. Arnaud，经验测度在 *Wasserstein*距离下的收敛速率，概率论及相关领域 162(3) (2015年)，707–738。[8] F. Golse，平均场极限下大规模粒子系统的动力学，载于《宏观与大尺度现象：粗粒化、平均场极限与遍历性》，应用数学与力学讲义第3卷，Springer（2016年），1–144。[9] M. Kac，动理学理论基础，《第三届伯克利数学统计与概率研讨会论文集》，1954–1955年，第III卷。伯克利：加利福尼亚大学出版社，（1956年），171–197。[10] H. P. McKean，与非线性抛物型方程相关的一类马尔可夫过程，Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 56(1966年)，1907–1911。[11] D. Nualart，*Malliavin*微积分及相关主题，Springer，柏林，2006年。[12] G. dos Reis, Z. Wilde，局部*Lipschitz*系数*McKean-Vlasov*随机微分方程的*Malliavin*可微性，arXiv:2310.13400。[13] P. Ren, F.-Y. Wang，分布依赖随机微分方程的*Lions*导数*Bismut* 公式及其应用，J. Diff. Equat, 267(8)(2019年)，4745–4777。[14] P. Ren, F.-Y. Wang，分布依赖随机微分方程，World Scientific，2024年，新加坡。[15] J. Shao, T. Tian, S. Wang，带跳跃和马尔可夫调制切换的条件*McKean-Vlasov*随机微分方程：适定性、混沌传播、平均原理，J. Math. Anal. Appl. 534(2024年)，128080。[16]H. Spohn，相互作用粒子的大尺度动力学，物理学文本与专著，Springer，1991年。[17] A.-S. Sznitman，混沌传播专题，数学讲义第1464卷，第165–251页，Springer，柏林，1991年。[18] F.-Y. Wang，*Landau*型方程的分布依赖随机微分方程，Stoch. Process. Appl. 128(2018年)，595–621。[19] F.-Y. Wang，奇异*McKean-Vlasov*随机微分方程的导数公式，Commun. Pure Appl. Anal. 22(2023年)，1866–1898。[20] H. Wu, J. Hu, S. Gao, C. Yuan，基于离散时间状态观测和反馈控制的随机*McKean-Vlasov*方程稳定化，SIAM J. Control Optim. 60(2022年)，2884–2901。