arXiv:2601.20490v1 [math.CO] 28 Jan 2026

关于模式与图的 1-11 表示中的语言

Biswajit Das 和 Ramesh Hariharasubramanian d.biswajit@iitg.ac.in，

ramesh h@iitg.ac.in 数学系，印度理工学院古瓦哈提分校，古瓦哈提，阿萨姆邦781039，印度

2026年1月29日

摘要

图 $G(V, E)$ 的 1-11表示是字母表 V 上的一个词，其中两个不同的顶点 x 和 y 相邻，当且仅当限制词 $w_{\{x,y\}}$ （从 w 中删除除 x 和 y之外的所有字母而得到）至多包含一次 xx 或 yy。尽管每个图都具有 1-11表示，但此类表示中可能出现或必然出现的重复模式尚未得到充分研究。

本文研究图的无立方与平方自由的 1-11 表示。我们首先证明，在最小长度的 1-11 表示中，立方并非总能被避免：我们给出一个图，其每一个最短1-11表示都必然包含一个立方。随后，我们关注置换型 1-11 表示，其中表示词是顶点集的排列的拼接。在此设定下，我们证明，排列式 1-11 表示中出现的任何立方都可以被移除，而不改变所表示的图。因此，每一个达到置换型1-11表示数的排列式 1-11 表示都是无立方的。我们进一步表明，这一性质并不能推广到平方：我们给出一个图，其每一个具有最少排列数的排列式 1-11 表示都必然包含一个平方。

Fin地，我们证明，给定图的所有 1-11 表示所构成的语言是正则的。更-
之上，我们证明，图的所有排列式 1-11 表示所构成的语言也是正则的。

关键词： 1-11表示、1-11 表示数、排列式 1-11 表示、立方、平方、正则。

1 引言

图论与理论计算机科学交叉领域的一个重要问题是如何高效地进行图的编码。一种方法是用一个词来表示图，其中字母表由图的顶点构成，而邻接信息则从词中的局部模式中恢复。此类编码方案有很多种，但基于简单且统一规则的方案已被证明尤为实用。

一个广为人知的例子是词可表示图的概念。在这一概念中，当且仅当两个不同顶点x 和 y 对应的字母在一个词中交替出现时，它们才相邻。Kitaev 和 Pyatkin [11], 在 Kitaev 和 Seif[12]早期思想的基础上，首次系统地研究了这种表示。尽管这一模型涵盖了大量图，且已得到广泛研究，但它并不包含所有图。

词可表示图的另一种推广是 k-11 表示，最初由 Remmel 提出，后来由 Cheon 等人 [2]进行了详细研究。在这种表示中，图 G的一条边对应于表示 G的词中连续模式 11 至多 k 次出现。因此，词可表示图恰好就是 0-11 可表示图。文献 [2] 证明，利用排列的连接，每个图都可以用 2-11 表示表示。此外，Chv´atal 图、Mycielski 图、分裂图，以及顶点集可划分为一个可比图和一个独立集的图，都获得了 1-11 表示 [7]。最近，文献 [9] 证明，每个图都存在排列式 1-11 表示。

词可表示图研究中的一个重要问题，是确定包含或避免给定模式的表示。若存在指标 $1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_m \le n$，使得词 $\tau_1\tau_2\cdots\tau_m$ 与子序列 $w_{i_1}w_{i_2}\cdots w_{i_m}$ 顺序同构，则称模式 $\tau = \tau_1\tau_2\cdots\tau_m$ 在词 $w = w_1w_2\cdots w_n$ 中出现。模式避免型词表示的研究始于 [13,第 7 节8]。随后，Gao 等人 [8]和 Mandelshtam [14] 分别研究了避免 132 模式和 123 模式的词可表示图。关于禁用模式刻画的更多结果，见 [15, 3, 5] 和 [1,第 7 节4]。

除了排列模式，词组合学还研究平方、立方、重叠和边界等无序模式。若词 u 包含词 v 作为因子，即 $u = xvy$，其中词 x 和 y 可以为空，则称其满足这一性质。平方（分别为立方）是将一个非空词连续重复两次（分别为三次）得到的。因此，若词 $w \in \Sigma^*$ 可以写成 $w = s_1XXs_2$ （分别为 $w = s_1XXXs_2$）的形式，其中s_1， $s_2 \in \Sigma^*$ 和 $X \in \Sigma^+$，则称其包含平方（分别为立方）。自 Axel Thue 的工作以来，平方自由词一直受到词组合学领域的广泛关注 [16]。这项工作开创了词组合学研究，并证明了在三字母字母表上存在无限平方自由词。避免所有非平凡立方的一种词是 Peano 词 [10]。图的平方自由词表示和无立方词表示在 [13, 第 7.1 节3]中被引入。该节证明，每个词可表示图都存在无立方词表示；除双顶点空图外，所有词可表示图都存在平凡的平方自由词表示。后来又证明，除双顶点空图外，每个词可表示图都存在非平凡的平方自由词表示 [4]。

由于并非所有图都是词可表示图，因此很自然会问：不可词表示的图是否存在其他避免重复的表示，例如平方或立方。从形式语言视角来看，已知对于词可表示图，所有表示该图的词构成一个正则语言 [6]。由于 1-11 表示是词表示的推广，因此很自然会问：给定图的所有 1-11 表示构成的语言是否也是正则语言。

本文针对立方给出了肯定的答案。对于词可表示图， [13] 中证明了立方总是可以从词表示中删除的。这一性质并不适用于 1-11 表示。具体而言，我们构造了一个图，使得它的每个最短1-11表示都必然包含立方，而且若不增加表示的长度，就无法删除这些立方。我们还表明，对于排列式 1-11 表示，情况有所改善。每个图都存在无立方置换 1-11 表示，其中表示词是顶点集的排列的连接。然而，平方并不遵循相同的规律。尽管可以从任意词表示中删除平方， [13, 4], 但这对于 1-11 表示同样不成立。上文使用的同一个图也表明，无法在最短1-11表示中得到无平方词。对于排列式 1-11 表示，确实存在无立方表示。然而，我们给出了一个图，使得它的每个包含最少排列数的排列式 1-11 表示都必然包含一个平方。这些结果表明，重复规避

对于 1-11 表示和词表示而言有所不同。

2 预备知识

本文所讨论的所有图都是有限的、简单的且无向的。对于图 $G(V,\ E)$，令 V^+ 表示字母表 V 上所有非空词的集合。

定义1 ([13], 定义3.0.3.)。设 w 是一个词，x 和 y 是其中两个不同的字母。如果从 w 中删去除 x 和 y 的副本以外的所有字母后，得到的词为 $xyxy\cdots$（长度为偶数或奇数）或 $yxyx\cdots$（长度为偶数或奇数），则称字母 x 和 y 在 w 中交替出现。如果 x 和 y 在 w 中不交替出现，则称这两个字母在 w 中不交替。

在词 w 中，如果 x 和 y 交替出现，那么 w 包含 $xyxy\cdots$ 或 $yxyx\cdots$（长度为奇数或偶数）作为子词。

定义2 ([13], 定义3.0.5.)。如果存在一个字母表为 V 的词 w，使得两个不同字母 x 和 y 在 w 中交替出现，当且仅当 x 和 y 在 G 中相邻，则称简单图 $G(V,E)$ 是词可表示的。如果词 w 表示 G，则 w 至少包含 $V(G)$ 中的每个字母一次。

对于词 w，$w_{\{x_1,\cdots,x_m\}}$ 表示通过从 w 中删除除字母x_1、.....、x_m之外的所有字母而得到的词。

定义3 ([2]). 如果对于每一对不同的顶点 x、$y\in V$，顶点 x 与 y 在图 G 中相邻，当且仅当限制词 $w_{\{x,y\}}$ 中形如 xx 或 yy 的因子至多出现一次，则称词 $w\in V^+$ 为图 $G(V,E)$ 的1-11表示 。

等价地，x 与 y 在 G 中不相邻，当且仅当限制词 $w_{\{x,y\}}$ 中至少出现两次 xx，或至少出现两次 yy，或二者各至少出现一次。

定义4 ([9])．G 的1-11 表示数 （记作 $\mathcal{R}(G)$）是能够表示 G 的词 w 的最小长度。

定义5 ([2])。*A*1-11-表示 w *of* G 称为置换型的，如果 w 可以写成 V的排列的串接。在这种情况下，我们称 G 具有置换型1-11-表示。

定义6 ([9])。 $\mathcal{R}_\pi(G)$表示 G的置换型1-11-表示数，即 G的任意置换型1-11-表示中排列的最少数量。

定理7 ([9], 定理2.2)。设 $G(V,E)$ 是一个图。那么存在一个字母表为 V的词 w，它以置换型1-11-表示 *G*。

在接下 文中，我们给出一些模式的定义以及关于这些模式的已知结果 .

定义8。词中的平方（分别为立方）是指两个（分别为三个）连续相同的因子。若 $w\in\Sigma^*$ 满足 $w=s_1XXs_2$（分别为 $w=s_1XXXs_2$），其中 s_1、$s_2\in\Sigma^*X\in\Sigma^+$，则称词 $w\in\Sigma^*$ 包含平方（分别为立方）。

定理 9 （[13], 定理7.1.9。）。对于任意单词表示图 G，都存在一个表示 G 的无立方单词。

定理 10 （[4], 定理 2。）。</style}如果 G 是一个连通图，且 w 是表示 G 的词，其中 w至少包含一个平方，那么存在一个表示 *G*的平方自由词 w'。

定理 *11*（[4], 定理 *3*。）。设 G 是一个非连通的单词表示图，且 G_i、$1 \leq i \leq n$、$n \in \mathbb{N}$ 是 G的连通分量。设 w_i 是 G_i的平方自由词表示，G_1是一个非空的单词表示图。则词 $w = w_1 \setminus l\ (w_1)\ w_2 \cdots w_n l\ (w_1)\ \sigma\ (w_n)\ \cdots \sigma\ (w_2)\ \sigma\ (w_1)\ \setminus l\ (w_1)\ \sigma\ (w_2)\ \cdots\ \sigma\ (w_n)\ l\ (w_1)$ 表示 G，且 w是一个平方自由词。这里，$l\ (w_1)$ 表示 w_1 的最后一个字母，而 $w_1 \setminus l\ (w_1)$ 表示去掉 w_1最后一个字母后得到的词。

引理 12 ([4], 引理 4.). 若 G 是一个连通的单词表示图，且 G的表示数为 k，那么每个 k-均匀的表示 G 的词都是平方自由的。

推论 13 ([4], 推论 1). 对于连通的单词表示图 G，每个表示 G 的最短词都是平方自由的。

定理 14 ([6],定理 26). 表示给定图的词所构成的语言是正则语言。

在本文中，记号 $w = a_1 a_2 \cdots a_n$ 表示词 w 包含因子 $a_1, a_2, \ldots, a_n$，其中每个 a_i 都是可能为空的词。

3 无立方图的 1-11 表示

本节研究图的无立方 1-11 表示。虽然每个允许 1-11 表示的图，其表示词中都可能含有立方，但自然会让人想到，这类立方是否不可避免，或者能否在不改变所表示的图的情况下将其消除。我们的目标是理解无立方表示何时存在，以及立方结构在置换型 1-11 表示中的表现。

我们先从一个小型非连通图入手，说明在最短表示长度下，无立方1-11表示未必存在。这个例子表明，无立方性是一项非平凡的限制，也说明了在排列情形下研究结构性结果的必要性。

定理 15. 设 G 是一个非连通图，由一个连通分量 K_3 和一个孤立顶点v组成。那么 $\mathcal{R}(G) = 6$，并且不存在长度为6 的无立方词 w，使其成为 G的1-11表示。

证明。设 $\{1, 2, 3\}$ 是连通分量 K_3的顶点集。由于 v是孤立的，它与 1, 2, 和 3 均不相邻，而顶点 1, 2,3 两两相邻。考虑集合 $S = \{123vvv,\ vvv123,\ 1vvv23,12vvv3\}$。在 S中的每个词里，字母 1,2, 和 3 两两交替出现，从而保证它们彼此邻接；而因子 vvv 保证 v 与 1,2, 和 3 均不相邻。因此，S 中的每个词都是 G的有效 1-11 表示。所以，$\mathcal{R}(G) \leq 6$. 我们知道，如果图中的 x 和 y 是不相邻顶点，那么任何 1-11 表示都必须包含两个 xx、两个 yy，或至少各包含一个。由于 1,2, 和 3 均与 v不相邻，因此对每一对 $\{v, x\}$（其中 $x \in \{1, 2, 3\}$），这一条件都必须成立。

如果 v 在 w 中只出现两次（也就是说，出现了 vv，但没有出现 vvv），那么 vv 至多只能对一个数对 $\{v, x\}$ 满足此条件。因此，其余数对迫使 11、22 和 33 出现。于是，词 w 的长度至少为 8，这与 $|w| < 6$ 矛盾。因此，$\mathcal{R}(G) = 6$。

最后，S 中的每个词都包含因子 vvv，而它是一个立方。此外，如果 $|w| = 6$ 和 w 是 G的一个 1-11表示，那么 v 必须恰好出现三次，其余字母 1，2，和 3 必须各出现一次并交替出现，这就迫使 w 属于集合 S。因此，不存在长度为 6 的 G 无立方1-11表示。 □

根据定理 9，可以从同一图的任意词表示中删除立方，而不改变所表示的图。然而，1-11 表示并非如此。对于词可表示图，两个不同的顶点 x 和 y 不相邻，当且仅当至少存在一次 xx 或 yy的出现，因此从一个立方中删除一次出现仍能保持非邻接。相比之下，1-11 表示要求至少出现两次这样的情况，而删除一个立方可能会破坏这一条件。这个例子表明，即使表示数较小，极小 1-11 表示中也未必能够避免立方。本节余下部分因此聚焦于排列表示，并探究何时能够系统地删除立方。

我们首先证明，排列式 1-11 表示中的立方受到严格限制。特别地，重复块的长度必须是排列长度的倍数。

引理 16. 假设 w 是图 $G(V,E)$的一个排列式 1-11 表示，其中 $|V| = n$。那么， w 不能包含立方 XXX，其中 $X \in V^+$，且 X 的长度不是 n的倍数。

证明。 反设词 w 包含一个因子 XXX，使得

$$|X| = i \times n + l,$$

其中 $i \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ 且 $1 \le l < n$。我们分两种情形讨论。

情形 1： $|X| < n$。

由于 $|X| < n$，并非 V的所有顶点都能在 X中出现。又因为 $X \in V^+$，存在互不相同的顶点 x, $y \in V$，使得 x 在 X 中出现，但 y 不出现。因此，限制词 $(XXX)_{\{x,y\}} = xxx$。于是，我们得到 $w_{\{x,y\}} = s_1\, xxx\, s_2$，其中 $s_1, s_2 \in \{x,y\}^*$。由于 w是一个排列表示， x 的三次出现分别属于 w中的三个不同排列 P_1、 P_2 和 P_3 。每个排列都必须包含 y。顶点 y 可能出现在 s_1 和 s_2中，从而解释它为何出现在 P_1 和 P_3中；但它不可能出现在排列 P_2中，这就产生了矛盾。因此， $|X| \ge n$。

情形 2： $|X| = i \times n + l$**，其中** $i \in \mathbb{Z}^+$ **和** $1 \le l < n$。S

由于 w 是排列表示，w 是由 V的排列拼接而成，每个排列的长度为 n。考虑因子 XXX 在 w中的出现。由于 $|X|$ 不是 n的倍数， w 中的每个 X 副本都恰好包含 i 个完整排列，以及另一个排列的真部分。假设

$$\begin{aligned} w = P_1P_2\cdots P_{i1}\, P_{i2}P_{i+1}\cdots P_{j-1}P_{j1}\, P_{j2}P_{j+1}\cdots P_{l-1}P_{l1} \\ P_{l2}P_{l+1}\cdots P_{k-1}P_{k1}\, P_{k2}\cdots P_p, \end{aligned}$$

其中每个 P_r 以及每个拼接 $P_{r1}P_{r2}$ 都是 V的排列。此外，

$$X = P_{i2}P_{i+1}\cdots P_{j-1}P_{j1} = P_{j2}P_{j+1}\cdots P_{l-1}P_{l1} = P_{l2}P_{l+1}\cdots P_{k-1}P_{k1}.$$

由于 $l < n$，我们有 $1 \le |P_{i2}P_{j1}| = |P_{j2}P_{l1}| = |P_{l2}P_{k1}| < n$. 因此，存在不同的顶点$x, y \in V$，使得 x 在 X 中恰好出现 i次，而 y在 X中出现 $i-1$次或 $i-2$次，因为每个顶点都必须在 w的每个排列中出现一次。因此，

$$|(XXX)_{\{x\}}| = 3 \times i \quad \text{and} \quad 3 \times (i-2) \le |(XXX)_{\{y\}}| \le 3 \times (i-1).$$

因此，在词 w 中存在三个排列 P_a、 P_b和 P_c ，它们在XXX 中出现的部分都不包含 y。如果其中两个部分属于 X的同一个副本，那么该 X副本中 y 的出现次数就会少于另外两个副本，这是不可能的。因此，这些部分分别属于 X的三个不同副本。

不失一般性，假设 P_a 和 P_c 分别对 XXX中的 X 的第一个和第三个副本作出贡献。对于这些排列，y 的唯一出现位于 XXX之外。剩下的排列 P_b 要么是 $P_{j1}P_{j2}$ 的形式，要么是 $P_{l1}P_{l2}$的形式。

如果 $P_b = P_{j1}P_{j2}$，那么 P_{j2} 是 P_b 中出现在 X 的第二个副本里的部分，且不包含 y，因此y 必定出现在 P_{j1}中。由于 x 出现在 P_{i2}中， X 的第一个副本包含的 x 和 y的出现次数相同，矛盾。当 $P_b = P_{l1}P_{l2}$时也会产生类似的矛盾；在这种情况下， y 必定出现在 P_{l2}中，从而迫使 x 和 y 在 X的第三个副本中的出现次数相等。

因此， X 不能在 $1 \le l < n$的情况下具有长度 $i \times n + l$。 □

引理 16 表明，长度不符合排列块大小的立方无法出现。这一限制对于确定哪些立方在结构上可以被移除起着关键作用。

接下来，我们证明，可以移除连续的相同排列块，而不改变所表示的图。

引理 17。 设 w 是图 $G(V, E)$的一个置换型1-11-表示。如果 w 包含一个满足 $X = P_i$的平方 XX ，则可以移除 P_i 的一次出现，而不影响 G的表示。

证明。设

$$w = P_1 P_2 \cdots P_i P_i \cdots P_k,$$

其中每个 P_j 都是 V的一个排列。令 w' 为从 w 中删除一次 P_i出现后得到的词。我们证明 w' 表示同一个图 G。

情形 1：邻接关系的保持。

设 $x, y \in V$ 在 G中相邻。由于 w 是一个排列式 1-11 表示，限制词$w_{\{x,y\}}$ 交替出现，即

$$w_{\{x,y\}} \in \{(xy)^t,\ (yx)^t,\ (xy)^{t_1}(yx)^{t_2},\ (yx)^{t_1}(xy)^{t_2}\}$$

对于某个 $t, t_1, t_2 \ge 1$。特别地， P_i 在 $\{x, y\}$ 上的限制要么是 xy，要么是 yx。删除 P_i 的一个副本，恰好会从 $w_{\{x,y\}}$中删除 xy 或 yx 的一次出现，因此剩余的词 $w'_{\{x,y\}}$ 仍然交替出现。因此， x和 y 在 w'中仍然相邻。

情形 2：非邻接关系的保持。

设 $x, y \in V$ 在 G中不相邻。那么， $w_{\{x,y\}}$ 至少包含 xx 和 yy各一次出现，并且可以写成以下形式之一：

$$(xy)^{k_1}(yx)^{k_2}(xy)s \quad \text{or} \quad (yx)^{k_1}(xy)^{k_2}(yx)s,$$

其中 $k_1, k_2 \ge 1$和 $s \in \{x, y\}^*$。同样， P_i 在 $\{x, y\}$ 上的限制词为 xy或 yx。因此，我们得到 $(P_iP_i)_{\{x,y\}} = (xy)^2$ 或 $(yx)^2$。删除一个 P_i 副本会使指数 k_1 或 k_2 之一减 1，但不会消除限制词中 xx 或 yy 的出现。因此， $w'_{\{x,y\}}$ 仍包含一个平方，并且 x 和 y 在 w'中仍不相邻。

在这两种情况下，邻接和非邻接都得以保留。因此，删除 P_i的一次出现不会改变 w所表示的图。 □

引理 17 表明，删除连续相同置换不会改变所表示的图。该结果可用于删除立方等更大的重复部分。

推论 18. 假设 w 是图 $G(V,E)$的置换型1-11-表示。如果 w 包含一个立方 XXX，其中 $X = P_i$，那么我们可以删除两个 P_i。

证明。 直接由引理 17 得出。 □

现在我们结合前面的结果，证明置换型 1-11 表示中的立方并非必不可少。事实上，可以消去任意这样的立方，同时保持所表示的图不变。

定理 19。 如果 w 是图 $G(V,E)$ 的一个置换型 1-11-表示，且 w 包含一个立方XXX，其中 $X \in V^+$，那么存在一个 G的无立方置换型 1-11-表示。

证明。 假设

$$w = P_1 P_2 \cdots P_p,$$

其中每个 P_i 都是 V的一个排列，并假设 w 包含一个立方 XXX，其中 $X \in V^+$。

若对于某个 i， $X = P_i$ ，则根据引理 17，可以删除两个 P_i 的出现，所得的词仍表示 G。因此，我们可以假设 X 不是单个排列。于是，因子 XXX 在 w 中以下列形式出现:

$$\begin{aligned} w = P_1 P_2 \cdots P_{i1}\, P_{i2} P_{i+1} \cdots P_{j-1} P_{j1}\, P_{j2} P_{j+1} \cdots P_{l-1} P_{l1} \\ P_{l2} P_{l+1} \cdots P_{k-1} P_{k1}\, P_{k2} \cdots P_p, \end{aligned}$$

其中，每个 P_r 以及每个拼接 $P_{r1}P_{r2}$ 都是 V 的一个排列，并且

$$X = P_{i2} P_{i+1} \cdots P_{j-1} P_{j1} = P_{j2} P_{j+1} \cdots P_{l-1} P_{l1} = P_{l2} P_{l+1} \cdots P_{k-1} P_{k1}.$$

根据引理 16， X 的长度必定是 $|V| = n$ 的倍数。因此，

$$|P_{i2}| + |P_{j1}| = |P_{j2}| + |P_{l1}| = |P_{l2}| + |P_{k1}| = n,$$

并且

$$|P_{i1}| + |P_{i2}| = |P_{j1}| + |P_{j2}| = |P_{l1}| + |P_{l2}| = |P_{k1}| + |P_{k2}| = n.$$

由于每个块 P_{ab}（其中 $a \in \{i,j,l,k\}$ 且 $b \in \{1,2\}$）都是 X 的前缀或后缀，因此可得 $P_{i2} = P_{j2} = P_{l2}$ 和 $P_{j1} = P_{l1} = P_{k1}$. 。此外，这些边界块之间的排列序列在 X 的三个副本中必定相同。因此，词 w 可改写为

$$\begin{aligned} w &= P_1 P_2 \cdots P_{i1}\, X\, X\, X\, P_{k2} \cdots P_p \\ &= P_1 P_2 \cdots P_{i1} \left(P_{i2} P_{i+1} \cdots P_{j-1} P_{j1}\right)^3 P_{k2} \cdots P_p. \end{aligned}$$

设 w' 为从 w 中删除 X 的中间副本后得到的词，即 $w' = P_1 P_2 \cdots P_{i1}\, X\, X P_{k2} \cdots P_p$.。我们证明 w' 仍是 G 的一个排列式 1-11 表示。

情形 1：邻接关系的保持。

设 x、 $y \in V$在 G中相邻。删除 X 的中间副本，会删除相同数量的 x 和 y的出现。由于 $P_{j1}P_{i2}$ 是 V的一个排列，删除一个 P_{i2} 和 P_{j1} 的出现不会产生形如 xx 或 yy的因子。因此， x 和 y 在 $w_{\{x,y\}}$ 中的交替模式在 $w'_{\{x,y\}}$中得以保持，邻接关系也保持不变。

情形 2：非邻接关系的保持。

设 x、$y \in V$在 G中不相邻。那么 $w_{\{x,y\}}$ 中至少出现两次 xx 或 yy，或者二者各至少出现一次。如果至少有一次这样的出现完全位于立方 XXX之外，那么删除 X 的中间副本不会消除所有这样的出现。如果一次出现位于 X内，那么 X 的另一个相同副本仍保留在 w'中，从而保持非邻接关系。唯一剩下的可能性是，这两次出现与 X连续副本之间的边界重叠，而这要求 $P_{j1}P_{i2}$中有重复字母。但这是不可能的，因为 $P_{j1}P_{i2}$ 是 V的一个排列。因此，非邻接关系在 w'中得以保持。

因此，w' 与 w表示同一个图 G。

最后，可以迭代应用此过程，移除 w中的所有立方。由于每个立方的中间副本都会被移除，因此这一过程中不会产生新的立方。于是，我们得到 G的一个无立方置换 1-11 表示。

□

定理 19 表明，每个排列式 1-11 表示都可以变为无立方表示。结合前面的例子可知，无立方表示未必能以最小长度存在，但排列表示总是存在无立方表示。

下一个结果揭示了无立方性与图的排列式 1-11 表示数之间的关系。

推论 20. 设 $G(V, E)$ 是一个图，其 $\mathcal{R}_\pi(G)$ 为 $= k$。那么，每个由 k 个排列组成且表示 G 的词 w 都是无立方的。

证明。假设，$w = P_1P_2 \cdots P_k$是一个由 k 个排列组成的词，它以 1-11 表示图 G，且w包含一个立方。根据定理 19，可以移除该立方，得到一个更短的词 $w' = P_1P_2 \cdots P_\ell$，其 $\ell < k$ 仍以 1-11 表示 G。这与假设 $\mathcal{R}_\pi(G) = k$矛盾。因此，每个由 k 个排列组成且表示 G 的词都必须是无立方的。

□

因此，任何具有该置换型 1-11 表示数的排列式 1-11 表示必然是无立方的。

现在我们证明，适用于置换型 1-11 表示的无立方结论并不适用于平方自由表示。

定理 21。 设 G 是一个非连通图，由一个连通分量 K_3 和一个孤立顶点 v组成。那么 $\mathcal{R}_\pi(G) = 3$，且不存在由两个排列组成、并且是 G的1-11-表示的平方自由词。

证明。由于只有完全图才能用一个排列得到排列式 1-11 表示，因此有 $\mathcal{R}_\pi(G) > 1$。设 $\{1, 2, 3\}$ 是连通分量 K_3的顶点集。词 $w = 123\,v\,123\,v\,123$ 是 G的排列式 1-11 表示。因此，$\mathcal{R}_\pi(G) \leq 3$.

现在我们证明 $\mathcal{R}_\pi(G) \neq 2$。反设 $w' = P_1P_2$ 是 G的一个排列式 1-11 表示。回想一下，如果 x 和 y 是不相邻顶点，那么任何 1-11 表示都必须包含两个 xx的出现、两个 yy的出现，或者至少各出现一次。由于v与 1、2、和 3 都不相邻，因此对于每一对满足 $x \in \{1, 2, 3\}$的 $\{v, x\}$，这一条件都必须成立。

然而，w' 不能包含两个 vv 或 xx的出现，因为每个排列都恰好包含每个顶点一次。因此，对于每个 $x \in \{1, 2, 3\}$，限制词 $w'_{\{v,x\}}$ 必须恰好包含一次 vv 和一次 xx。由此可得，$w'_{\{v,1\}} \in \{vv11, 11vv\}$. 无论哪种情况，排列 P_1 或 P_2 之一都必须包含两个 v 或两个 1，这是不可能的。因此，w' 不能表示 G，故 $\mathcal{R}_\pi(G) = 3$。

接下来，假设存在一个平方自由词 $w = P_1P_2P_3$，其中每个 P_i 都是V的排列，且该词 1-11-表示 G。由于每个顶点在每个排列中恰好出现一次，因此每个顶点

在 w 中恰好出现三次。由于 w 是平方自由的，它不能包含形如 vvv 或 111、222 或 333 的因子。

对于每个 $x \in \{1,2,3\}$，限制词 $w_{\{v,x\}}$ 因此必为 $xvvxxv$ 或 $vxxvvx$的形式。如果w 以 v开头，那么 $w_{\{v,1\}} = v11vv1, \quad w_{\{v,2\}} = v22vv2, \quad w_{\{v,3\}} = v33vv3$. 在这种情况下，顶点 1，2、或 3 都不会出现在 v 的第二次和第三次出现之间，这会在 w中产生一个平方 vv。这与假设 w 是平方自由的相矛盾。因此， w 必须以 1，2、或 3 开头。假设 $w_{\{v,1\}} = 1vv11v, \quad w_{\{v,2\}} = 2vv22v, \quad w_{\{v,3\}} = 3vv33v$. 那么，1，2和 3 的第一次出现都早于 v的第一次出现，而它们的第二次出现都晚于 v的第二次出现，这又会在 w中产生一个平方 vv 。

为避免这种情况， $\{1,2,3\}$ 中至少有一个顶点必须在 v第一次和第二次出现之间出现两次，另一个顶点必须在 v第二次和第三次出现之间出现两次。不失一般性，假设 2 在 v第一次和第二次出现之间出现两次，而 3 在 v第二次和第三次出现之间出现两次。由于 2 和 3 相邻，受限词 $w_{\{2,3\}}$ 至多包含因子 22 或 33 之一，但不能同时包含二者。然而，根据 $w_{\{v,2\}} = v22vv2$ 和 $w_{\{v,3\}} = 3vv33v$，2 和 3 都不能分别出现在 33 和 22 之间。这意味着 $w_{\{2,3\}}$ 同时包含 22 和 33，这与 2 和 3 相邻相矛盾。

因此， G 的任何仅含三个排列的排列式 1-11 表示都必须包含一个平方。因此， G 不允许有无平方置换式 1-11 表示。 □

结合前面的推论可知，虽然在置换型 1-11 表示数中总能消除立方，但平方可能无法避免。由于这些条件仅取决于词中的固定模式，我们现在从形式语言的角度研究所有这类表示构成的集合。

4 1-11表示的语言

本节将通过描述一个能够刻画这类表示的正则语言，证明给定图 G 的所有 1-11 表示构成的语言是正则语言。我们先回顾确定性有限自动机的概念。

确定性有限自动机 （*DFA*）是一个五元组 $\mathcal{A} = (Q, V, \delta, q_0, F)$，其中 Q 是有限状态集， V 是有限输入字母表， $\delta: Q \times V \to Q$ 是转移函数， $q_0 \in Q$ 是初始状态， $F \subseteq Q$ 是接受状态集。

图 1 中的确定有限自动机识别的语言是

$$L_{a,\ b} = \left\{ w \in \Sigma^* \;\middle|\; \begin{matrix} a \\ w \end{matrix}, \ b \in \Sigma, \ w_{\{a,b\}} \text{至少包含} a \text{ 和 } b \text{ 各一次出现} a \text{和} b, \ w_{\{a,b\}} \text{最多包含一次 } aa \quad bb \right\}.$$

或，来自 $\Sigma \setminus \{a,b\}$ 的符号可以出现在

该语言刻画了图的 1-11表示中的邻接条件。顶点a 和 b 相邻，当且仅当$w_{\{a,b\}}$ 中 aa 或 bb的出现次数至多为一次；否则它们非邻接。由于正则语言对补集运算封闭，刻画非邻接的语言 $L_{a,_\ b}$ 也是正则语言。

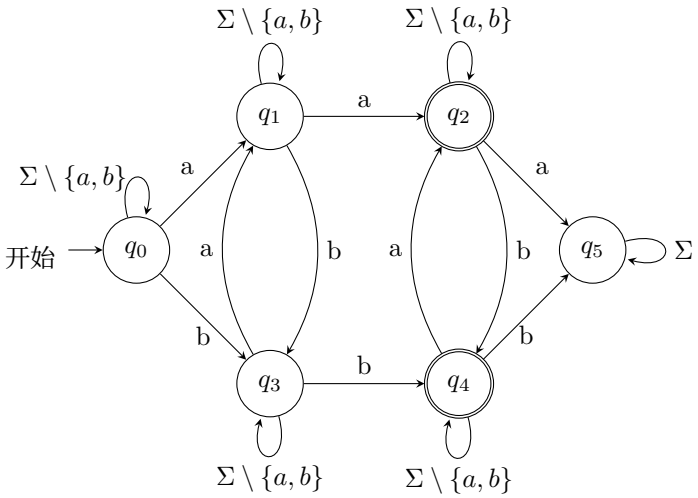

图 1：识别语言 $L_{a,\ b}$ 的确定有限自动机。

Theo推论 22。给定图 $G(V,E)$ 的所有1-11-表示所构成的语言是正则语言。

证明。设字母表为 V。对于任意一对不同的顶点 $a,\ b \in V$，令 $L_{a,\ b}$ 表示所有满足以下条件的词 $w \in V^*$ 的集合：子词 $w_{\{a,b\}}$ 中 a 和 b各至少出现一次，且 aa 或 bb的出现次数至多为一次。令 $L_{a,\ b}$ 表示 V^*中$L_{a,\ b}$ 的补集。

令 L 表示图 G 的所有 1-11 表示构成的语言。词 $w \in V^*$ 属于 L，当且仅当对于每一对相邻顶点 a 和 b，w 属于 $L_{a,\ b}$；并且对于每一对不相邻顶点 a 和 b，w 属于 $L_{a,\ b}$。

等价地，L 是所有语言 $L_{a,\ b}$（遍历所有相邻顶点数对 a 和 b）以及所有语言 $L_{a,\ b}$（遍历所有不相邻顶点数对 a 和 b）的交集。对于每一对顶点 $a,\ b \in V$，语言 $L_{a,\ b}$ 都是正则语言，如图 1 中的确定有限自动机所识别的那样。由于正则语言在补集和有限交集运算下封闭，因此语言 L 是正则语言。□

推论 23。T 给定图 $G(V,E)$ 的所有排列式 1-11-表示构成的语言是正则语言 .

证明。令 P表示 V的所有排列构成的集合。由于 V是有限的，P是有限语言，因此是正则语言。由 V的所有有限拼接构成的语言 P^+也正则。

令 L' 表示 G的所有 1-11 表示构成的语言。当且仅当一个词同时属于 P^+ 和 L'时，它才是排列式 1-11 表示。由于正则语言对拼接和交集运算封闭，G 的所有排列式 1-11 表示构成的语言是正则语言。□

5 结论

本文研究了图的 1-11 表示中的重复模式，并证明在置换框架中总能得到无立方表示，而无平方表示则可能不可避免。我们还证明，对于给定的图，所有 1-11 表示构成的语言，以及

所有置换型 1-11 表示构成的语言，都是正则的，这凸显了图表示与形式语言理论之间的密切联系。

参考文献

[1] A. Brandst¨adt、V. B. Le 和 J. P. Spinrad，《图类：综述》，SIAM，费城，宾夕法尼亚州，美国，1999年。[2] G.-S. Cheon、J. Kim、M. Kim、S. Kitaev 和 A. Pyatkin，关于 k1-11表示图，《J. Combin.》，10(3)（2019年），491-513。[3] P. Damaschke，禁序子图，载于《组合学与图论专题：纪念 Gerhard Ringel 文集》，1990年，第219-229页。[4] B. Das 和 R. Hariharasubramanian，词可表示图的平方自由词表示，《图与组合》，42(1)（2026年），第12篇文章。[5] L. Feuilloley 和 M. Habib，图类与三顶点上的禁模式，《SIAM 离散数学杂志》，35(1)（2021年），55-90。[6] P. Fleischmann、L. Haschke、T. L¨ock 和 D. Nowotka，从词的视角看词可表示图，《信息学学报》61(4)（2024年），383-400。[7] M. Futorny、S. Kitaev 和 A. Pyatkin，研究图的 1-11 表示的新工具，《图与组合》，40(5)（2024年），第97篇文章。[8] A. L. L. Gao、S. Kitaev 和 P. B. Zhang，关于132可表示图，《澳大拉西亚组合学杂志》，69（2017年），105-118。[9] Z. Hefty、P. Horn 和 C. Muir，图的 k1-11表示：再探，《爱丁堡数学学会会刊》，2025年，第1-15页。[10] S. Kitaev、T. Mansour 和 P. S´e´ebold，生成皮亚诺曲线并计算若干模式的出现，《自动机、语言与组合学杂志》，9(4)（2004年），439-455。[11] S. Kitaev 和 A. Pyatkin，关于可表示图，《自动机、语言与组合学杂志》，13(1)（2008年），45-54。[12] S. Kitaev 和 S. Seif，通过有向无环图研究 Perkins 半群的字问题，《序》，25(3)（2008年），177-194。[13] S. Kitaev 和 V. Lozin，《词与图》，Springer，2015年。[14] Y. Mandelshtam，关于由避模式词表示的图，《数学讨论：图论》，39(2)（2019年），375-389。[15] A. Takaoka，由避模式词定义的12可表示图的禁模式刻画，《离散应用数学》，358（2024年），285-301。.[16] A. Thue，Uber unendliche Zeichenreihen，《挪威科学学会文集：数学与自然科学辑》（克里斯蒂安尼亚），7（1906年），1-22。