arXiv:2601.20562v1 [math.QA] 28 Jan 2026

型 $A_1^{(1)}$ 新型量子仿射代数的 Drinfeld 同构

Rushu Zhuang、Ge Feng 和 Naihong Hu*

摘要。 本文首先回顾文献 $U_{\mathbf{q}}(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$ 中给出的型 $A_1^{(1)}$ 新型量子仿射代数 [5, 11]的定义。此外，通过引入 Ω-不变生成函数，我们构造了该代数的 Drinfeld 实现 $U_{\mathbf{q}}^D(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$， 并证明 $U_{\mathbf{q}}(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$ 与 $U_{\mathbf{q}}^D(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$ 代数同构，这一结果称为 Drinfeld 同构。

目录

1. 引言 1 2. 记号与预备知识 3 2.1. Hopf代数与Drinfeld双代数。 3 $\widehat{}$ 2.2. $U_{\mathbf{q}}(\mathfrak{sl}_2)$ 的自同构 2.3. 根向量的定义与交换规则 5 $\widehat{}$ 3. $U_{\mathbf{q}}(\mathfrak{sl}_2)$ 的 Drinfeld 实现 3.1. Drinfeld 同构 8 3.2. 定理 3.5 的证明 8 3.3. 定理 3.6 的证明 18 致谢 18 参考文献 18

1. 引言

2000年，Benkart 和 Witherspoon 重新推动了双参数量子群的研究。他们研究了此前由 Takeuchi [16], 获得的双参数量子群 $U_{r,\ s}(\mathfrak{g})$（ $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_n$或 $\mathfrak{sl}_n$ 在 [2] 中）以及有限维表示

2020 数学主题分类。主要分类 17B37, 81R50；次要分类 17B35。关键词。量子仿射代数；Drinfeld 实现；Drinfeld 同构。*通讯作者。

以及 [3]中 A型的 Schur-Weyl 对偶。后来，Bergeron、Gao 和 Hu [4] 给出了经典型 $\mathfrak{so}_{2n+1}$、 $\mathfrak{sp}_{2n}$ 和 $\mathfrak{so}_{2n}$的双参数量子群$U_{r,\ s}(\mathfrak{g})$的表示，进一步研究了 Lusztig 对称在（$U_{r,\ s}(\mathfrak{g})$、$\langle,\ \rangle$）与其关联对象（$U_{s^{-1},\ r^{-1}}(\mathfrak{g})$、$\langle|\rangle$）之间存在的环境条件。在 [15],, Pei-Hu-Rosso 研究了多参数量子群及其在范畴 $\mathcal{O}$ 中的表示。特别地，他们给出了两种明确的描述：作为 Hopf 2-余圈形变，以及作为正部分的多参数量子洗牌实现。Heckenberger [6],将其推广到多参数量子群，并为抽象概念“Weyl 群胚”提供了一个明确的实现模型；该概念在分类对角型 Nichols 代数（参见 [7]）以及以阿贝尔群代数为余根基的有限维尖点Hopf代数（ [1]）中发挥着关键作用。

另一方面，Hu-Rosso-Zhang 最先研究了与 $A_n^{(1)}$型仿射李代数相关的双参数量子仿射代数，并给出了$U_{r,\ s}(\mathfrak{sl}_n)$的结构$\widehat{}$和 Drinfeld 实现的描述，以及量子仿射 Lyndon 基（见 [**?**]）。关于其他非扭曲类型的仿射情形，以及所有非扭曲类型相应的顶点算子构造，已在 [10, 17]中完成讨论。在 [12], 中，Jing-Zhang 使用杨图的组合模型，给出了 $A_n^{(1)}$型双参数量子仿射代数的费米子实现；而 [13]则通过 McKay 对应，利用 $SL_2(\mathbb{C})$的有限子群，给出了双参数量子环面代数的一种群论实现。

对于可对称化广义 Cartan 矩阵 $A=(a_{ij})_{1\le i,\ j\le n}$ （即对于互素正整数 d_i， DA 关于 $D=\mathrm{diag}(d_1,\ \ldots\ldots,\ d_n)$对称），有 Kac-Moody代数 $\mathfrak{g}_A$ [15]的量子包络代数 $U_{\mathbf{q}}(\mathfrak{g}_A)$。这里，矩阵$\mathbf{q}=(q_{ij})$满足 Cartan条件 $q_{ij}q_{ji}=q_{ii}^{a_{ij}}$，称为 $U_{\mathbf{q}}(\mathfrak{g}_A)$的结构常数矩阵（或编织矩阵）。在 [11], 中，从多参数的角度来看，即其结构常数矩阵具有如下形式

$$\mathbf{q}=\begin{pmatrix}\epsilon_1 q^2 & tq^{-2}\\ t^{-1}q^{-2} & \epsilon_2 q^2\end{pmatrix},\qquad \epsilon_i\in\{\pm 1\},t\in\mathbb{Q}(q)^*,$$

并满足 Cartan条件，我们定义了一类符号变形量子仿射代数 $U^{(\varepsilon_1,\varepsilon_2,t)_q}(\widehat{\mathfrak{sl}_2})$。特别地，我们研究了 $\epsilon_1=\epsilon_2=-1$,$t=1$时它的结构；而在 [5], 中，我们考虑了 $\epsilon_1=\epsilon_2=1$, $t=-1$的情形。在这两种情形下，我们都明确描述了它们的 PBW基，并证明它们作为（Hopf）代数并不同构于 $A_1^{(1)}$ 型标准仿射量子群。

本文旨在建立上述量子仿射代数 $U_{\mathbf{q}}(\mathfrak{sl}_2)$ 在 $\epsilon_1=\epsilon_2=-1$, $t=1$这一特定情形下的 Drinfeld 实现，并证明 Drinfeld 同构$\widehat{}$。

$\widehat{}$在第 2 节中，我们回顾 $U_{\mathbf{q}}(\mathfrak{sl}_2)$的定义、其 Hopf 代数结构、由辫群作用诱导的自同构，以及实根向量和虚根向量的定义及其交换关系。第 3 节是本文的核心。

我们构造 Ω-不变生成函数，并用它们给出内禀的 Drinfeld 实现 $U_q^D(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$。然后，我们通过构造一对互为逆映射的代数同态（Drinfeld 同构），证明 $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$ 与 $U^D{}_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$ 同构。

2. 记号与预备知识

本节回顾新型 $A_1^{(1)}$ 型量子仿射代数$\backsim U_q(\mathfrak{sl}_2)$ 的定义，并概述前人工作中的相关结果。有关详细内容和证明，请读者参阅文献 [5] & [11]。

2.1. **Hopf 代数与 Drinfeld 双**。令

$$A = (a_{ij})_{i,j\in\{1,2\}} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \tag{2.1}$$

表示类型为 $A_1^{(1)}$ 的广义 Cartan 矩阵。我们首先以生成元与关系的形式给出新型量子仿射代数 $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ 的定义。

定义 2.1 ([11], 定义 3.1)。 **</style}新型 型量子仿射代数 ($\widehat{\mathfrak{sl}}_2$)** 是由以下元素生成的域 $\mathbb{C}(q)$ 上的含幺结合代数

$$e_i, f_i, k_i^{\pm 1}, \quad i = 1, 2, \tag{2.2}$$

满足以下定义关系 *(A1)–(A4)*:

(A1) 群状元 k_1 和 k_2 彼此交换。

(A2) k_i 与 e_j、f_j之间的交换关系:

$$\begin{aligned} &k_i e_i = -q^2 e_i k_i, \quad k_i f_i = -q^{-2} f_i k_i, \\ &k_i e_j = q^{-2} e_j k_i, \quad k_i f_j = q^2 f_j k_i, \qquad (i \neq j). \end{aligned}$$

(A3) e_i 与 f_j $(i, j \in \{1,2\})$之间的交叉关系:

$$[\, e_i, f_j \,] = \delta_{ij} \frac{k_i - k_i^{-1}}{q - q^{-1}}.$$

(A4) *q-Serre* 关系: 对于 $i \neq j$,

$$\begin{aligned} &(ad_l e_i)^{1-a_{ij}}(e_j) = e_i^3 e_j + (1 - q^2 - q^{-2}) e_i^2 e_j e_i + (1 - q^2 - q^{-2}) e_i e_j e_i^2 + e_j e_i^3 = 0, \\ &(ad_r f_i)^{1-a_{ij}}(f_j) = f_i^3 f_j + (1 - q^2 - q^{-2}) f_i^2 f_j f_i + (1 - q^2 - q^{-2}) f_i f_j f_i^2 + f_j f_i^3 = 0, \end{aligned}$$

其中，左伴随作用 $ad_l e_i$ 和右伴随作用 $ad_r f_i$ 的定义如下:

$$ad_l a(b) = \sum_{(a)} a_{(1)} b S(a_{(2)}), \qquad ad_r a(b) = \sum_{(a)} S(a_{(1)}) b a_{(2)}, \quad \forall\, a, b \in U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_2).$$

其中 $\Delta(a) = \sum_{(a)} a_{(1)} \otimes a_{(2)}$ 由下文命题 *2.2* 给出。

命题 2.2 ([11], 定义 3.1)。 代数 $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ 是一个 *Hopf* 代数，其余乘法为 Δ，余单位为 ε，反 *antipode* 为 S，并满足以下关系：

$$(B1)\ \Delta(e_i) = e_i \otimes 1 + k_i \otimes e_i, \qquad (B2)\ \Delta(f_i) = 1 \otimes f_i + f_i \otimes k_i^{-1},$$
$$(B3)\ \Delta(k_i^{\pm 1}) = k_i^{\pm 1} \otimes k_i^{\pm 1}, \qquad (B4)\ \varepsilon(e_i) = \varepsilon(f_i) = 0,$$
$$(B5)\ \varepsilon(k_i^{\pm 1}) = 1, \qquad (B6)\ S(k_i^{\pm 1}) = k_i^{\mp 1},$$
$$(B7)\ S(e_i) = -k_i^{-1} e_i, \qquad (B8)\ S(f_i) = -f_i k_i.$$

令 $\hat{\mathcal{B}}$ （分别地，“$\mathcal{B}$”）表示由 $e_i, k_i^{\pm 1}$（分别地，$f_i, k_i^{\pm 1}$）生成的 $U_q(\hat{\mathfrak{sl}}_2)$ 的霍普夫子代数，其中 $1 \le i \le 2$。

命题 2.3 ([11], 命题 2.3)。 霍普夫子代数 B 和 B' 上存在唯一的非退化斜对偶配对 $\langle , \rangle : B' \times B \to \mathbb{Q}(q)$，使得

- $\langle f_i, e_j \rangle = \dfrac{\delta_{ij}}{q^{-1} - q} \quad (i, j \in \{1, 2\})$;
- $\langle k_i^{\pm 1}, k_j^{\mp 1} \rangle = \langle k_i^{\pm 1}, k_j^{\pm 1} \rangle^{-1} = q_{ij}$, *for all* $i, j \in \{1, 2\}$;
- *All other pairs of generators take the value* 0.

此外，我们有

$$\langle S(a), S(b) \rangle = \langle a, b \rangle$$

对于 $a \in B'$ 和 $b \in B$，其中 S 表示 $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ 的反 *antipode*。

命题 2.4 ([11], 命题 2.4)。 量子仿射代数 $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ 与 *Drinfeld*量子双 $D(\hat{B}, \hat{B}')$同构。

2.2. () 的自同构。 新型量子仿射代数 $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ 具有自同构，它们在导出根向量以及理解代数结构方面发挥着关键作用。特别地，我们关注由辫群作用诱导的自同构。

命题 2.5 ([11], 定义 3.2)。 对于 $i, j \in \{1, 2\}$，由以下公式定义的映射 T_i 是代数 $U_q(\mathfrak{sl}_2)$的自同构：

$$\mathcal{T}_i(k_i) = k_i^{-1}, \qquad \mathcal{T}_i(k_j) = k_j k_i^{-a_{ij}},$$
$$\mathcal{T}_i(e_i) = -f_i k_i, \quad \mathcal{T}_i(f_i) = -k_i^{-1} e_i,$$
$$\mathcal{T}_i(e_j) = e_i^{(2)} e_j - q^{-2} e_j e_i^{(2)} + \frac{1 - q^{-2}}{[2]_q} e_i e_j e_i,$$
$$\mathcal{T}_i(f_j) = -q^2 f_i^{(2)} f_j + f_j f_i^{(2)} + \frac{1 - q^2}{[2]_q} f_i f_j f_i, \qquad i \neq j.$$

这里，我们使用标准的 q 变形记号：

$$e_i^{(n)} = \frac{e_i^n}{[n]_q!}, \qquad [n]_q = \frac{q^n - q^{-n}}{q - q^{-1}}, \qquad [n]_q! = [1]_q \cdots [n]_q, \quad n \in \mathbb{N}.$$

命题 2.6。 存在一个（*Hopf*）$\mathbb{C}[q]$-自同构 Φ*of* $U_q(\mathfrak{sl}_2)$，它交换指标 *1* 和 *2*：

$$\Phi(e_i)=e_j,\quad \Phi(f_i)=f_j,\quad \Phi(k_i)=k_j,\quad i\neq j,$$

并满足 $\Phi^2=id$，$T_1\Phi=\Phi T_2$.

命题 2.7. 存在一个$\mathbb{C}$-反自同构Ω，定义在 $U_q(\mathfrak{sl}_2)$上，满足

$$\Omega(e_i)=f_i,\quad \Omega(f_i)=e_i,\quad \Omega(k_i)=k_i^{-1},\quad \Omega(q)=q^{-1},\quad i=1,2.$$

此外，$\Omega^2=id$，$\Omega T_i=T_i\Omega$ 以及 $\Phi\Omega=\Omega\Phi$.

2.3. 根向量的定义与交换规则。 根向量对于理解量子仿射代数的结构至关重要，因为它们对应于底层仿射 Kac–Moody 代数的根，并生成量子仿射代数的根空间。 $A_1^{(1)}$ 的根系由实根（形式为 $n\delta+\alpha_i$，其中 $n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$ 且 $i=1,2$；其中 α_1，α_2是简单根，δ是零根）和虚根（形式为 $n\delta$，其中 $n\in\mathbb{Z}\backslash\{0\}$）组成。

我们首先利用命题 2.4 中引入的自同构$\mathcal{T}_i$定义实根向量；这些自同构推广了 Weyl 群在根系上的作用：

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_{n\delta+\alpha_1}&=\underbrace{\mathcal{T}_1\mathcal{T}_2\cdots\mathcal{T}_i}_{n}(e_j)=(\mathcal{T}_1\Phi)^n(e_1),\quad (i\neq j),\\
\mathcal{E}_{n\delta+\alpha_2}&=\underbrace{\mathcal{T}_2^{-1}\mathcal{T}_1^{-1}\cdots\mathcal{T}_i^{-1}}_{n}(e_j)=(\mathcal{T}_2^{-1}\Phi)^n(e_2),\quad (i\neq j),\\
\mathcal{F}_{n\delta+\alpha_1}&=\Omega(\mathcal{E}_{n\delta+\alpha_1}),\qquad \mathcal{F}_{n\delta+\alpha_2}=\Omega(\mathcal{E}_{n\delta+\alpha_2}).
\end{aligned}$$

接下来，我们按照 $\mathcal{E}_{n\delta}(n\in\mathbb{N})$ 中提出的方法，利用 e_1 对实根向量的伴随作用来定义虚根向量 [11]:

$$\mathcal{E}_{n\delta}=ad_l e_1(\mathcal{E}_{(n-1)\delta+\alpha_2})=e_1\mathcal{E}_{(n-1)\delta+\alpha_2}+(-1)^n q^{-2}\mathcal{E}_{(n-1)\delta+\alpha_2}e_1.$$

因此，我们有

$$\mathcal{F}_{n\delta}=ad_r f_1(\mathcal{F}_{(n-1)\delta+\alpha_2})=\mathcal{F}_{(n-1)\delta+\alpha_2}f_1+(-1)^n q^2 f_1\mathcal{F}_{(n-1)\delta+\alpha_2}.$$

定理 2.8 ([11], 定理 4.1)。 $T_1T_2(E_\delta)=E_\delta$ 且对任意 $n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$，我们有

$$\begin{aligned}
&\mathcal{E}_\delta\underbrace{\mathcal{T}_1\mathcal{T}_2\cdots\mathcal{T}_i}_{n}(\mathcal{E}_j)+\underbrace{\mathcal{T}_1T_2\cdots\mathcal{T}_i}_{n}(\mathcal{E}_j)\mathcal{E}_\delta=[2]_q\underbrace{\mathcal{T}_1\mathcal{T}_2\cdots\mathcal{T}_i}_{n+1}(\mathcal{E}_j),\\
&\mathcal{E}_\delta\underbrace{\mathcal{T}_2^{-1}\mathcal{T}_1^{-1}\cdots\mathcal{T}_i^{-1}}_{n}(\mathcal{E}_j)+\underbrace{\mathcal{T}_2^{-1}\mathcal{T}_1^{-1}\cdots\mathcal{T}_i^{-1}}_{n}(\mathcal{E}_j)\mathcal{E}_\delta=[2]_q\underbrace{\mathcal{T}_2^{-1}\mathcal{T}_1^{-1}\cdots\mathcal{T}_i^{-1}}_{n+1}(\mathcal{E}_j),
\end{aligned}$$

其中 $i\neq j$。

推论 2.9 ([11], 推论 4.10)。 对于任意 $n,m\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$，我们有

$$\mathcal{E}_{(n+m+1)\delta}=\mathcal{E}_{n\delta+\alpha_1}\mathcal{E}_{m\delta+\alpha_2}+(-1)^{n+m+1}q^{-2}\mathcal{E}_{m\delta+\alpha_2}\mathcal{E}_{n\delta+\alpha_1}.$$

Pro命题 2.10 ([11], 命题 4.3)。 以下陈述等价

(1) $[\mathrm{E}_\delta, \mathrm{E}_{n\delta}] = 0, \forall n \in \mathrm{Z}_+$. (2) $\mathrm{E}^{(n+m+1)\delta} = \mathrm{E}_{n\delta+\alpha_1}\mathrm{E}_{m\delta+\alpha_2} + (-1)^{n+m+1}q^{-2}$ $\mathrm{E}_{m\delta+\alpha_2}\mathrm{E}_{n\delta+\alpha_1}, \forall n, m \in \mathrm{Z}_+$. (3) $\mathrm{T}_1\mathrm{T}_2(\mathrm{E}_{n\delta}) = \mathrm{E}_{n\delta}, \forall n \in \mathrm{Z}_+$.

3. $U_q(\hat{\mathfrak{sl}}_2)$ 的 Drinfeld 实现

为了获得 $U_q(\hat{\mathfrak{sl}}_2)$ 的 Drinfeld 实现的内在定义，我们需要构造具有 Ω-不变性的生成函数 $g^{\pm}(z)$, 其定义如下。

我们将 $g^{\pm}(z) = \sum c_n^{\pm} z^n$ 设为 z 中的一个形式幂级数，它可以表示如下$_{n\in\mathbb{Z}_+}$[8, 10]

$$g^{\pm}(z) = \frac{q^{\pm 2}z - 1}{z - q^{\pm 2}}.$$

在给出 $U_q(\hat{\mathfrak{sl}}_2)$ 的 Drinfeld 实现定义之前，我们先介绍变量 z 中的其他生成函数如下（另见 [8, 10]）

$$\delta(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} z^n, \qquad x^{\pm}(z) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} x^{\pm}(k)z^{-k},$$

$$k^+(z) = \sum_{m=0}^{+\infty} k^+(m)z^{-m} = k_2 \exp\Big((q-q^{-1})\sum_{\ell=1}^{+\infty} a(\ell)z^{-\ell}\Big),$$

$$k^-(z) = \sum_{m=0}^{+\infty} k^-(-m)z^{m} = \exp\Big(-(q-q^{-1})\sum_{\ell=1}^{+\infty} a(-\ell)z^{\ell}\Big)k_2^{-1}.$$

命题 3.1。 设 $\Omega(q^{\pm 1}) = q^{\mp 1}$, $\Omega(z) = z^{-1}$, $\Omega(x^{\pm}(k)) = x^{\mp}(-k)$, $\Omega(k^{\pm}(m)) = k^{\mp}(\mp m)$, 其中 $m \in \mathrm{Z}_+$ 满足 $k^+(0) = k_2$, $k^-(0) = k_2^{-1}$, 则
(i) $\Omega(g^{\pm}(z)) = g^{\pm}(z)$, 以及 $g^{\pm}(z)^{-1} = g^{\mp}(z) = g^{\pm}(z^{-1})$。(ii)
$\Omega(\delta(z)) = \delta(z)$, $\Omega(x^{\pm}(z)) = x^{\mp}(z)$, $\Omega(k^{\pm}(z)) = k^{\mp}(z)$。

现在，我们通过具有 Ω-不变性的生成函数来表述量子仿射代数 $U_q(\hat{\mathfrak{sl}}_2)$的 Drinfeld 实现的内在定义。

定义 3.2. 与量子仿射代数$U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$ 相关联的 ***Drinfeld*** 实现 $U_q^D(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$ 是一个带单位元的结合代数，其单位元为 1 ，生成元为 $\left\{x^{\pm}(k)\ \ k^{\pm}(m)\ \ \gamma^{\pm 1}, k_2^{\pm 1}\middle|\ k \in \mathbb{Z}\ \ m \in \mathbb{Z}_+\right\}$ *s*，并满足如下关系

$(C1)$ $\gamma^{\pm 1}, k_2^{\pm 1}$彼此交换，其中 $\gamma^{\pm 2n}$ 是中心的，且 $k^{\pm 1}(0) = k_2^{\pm 1}$。

$(C2)$ 以下涉及 k_2 的关系成立

$$k_2 k^{\pm}(w) = k^{\pm}(-w)k_2, \qquad k_2 x^{\pm}(w) = -q^{\pm 2}x^{\pm}(-w)k_2.$$

$(C3)$ $k^{\pm}(z)$ 和 $k^{\pm}(w)$满足该关系

$$k^{\pm}(z)k^{\pm}(w) = k^{\pm}(-w)k^{\pm}(-z).$$

$(C4)$对于 $k^{+}(z)$ 和 $k^{-}(w)$，有

$$\frac{(z-q^2\gamma^{-1}w)(z-q^{-2}\gamma w)}{(z-q^{-2}\gamma^{-1}w)(z-q^2\gamma w)}k^{+}(z)k^{-}(w) = k^{-}(-w)k^{+}(-z).$$

$(C5)$ $k^{+}(z)$与 $x^{+}(w)$ 之间的关系为

$$(z-q^2\gamma^{-1}w)k^{+}(z)x^{+}(w) = (\gamma^{-1}w-q^2z)x^{+}(-w)k^{+}(z).$$

$(C6)$对于 $k^{+}(z)$ 和 $x^{-}(w)$，有

$$\frac{q^2z-w}{q^2w-z}k^{+}(z)x^{-}(w) = x^{-}(-w)k^{+}(-z).$$

$(C7)$ $x^{+}(z)$与 $x^{-}(w)$ 之间的关系由下式给出

$$\big[x^{+}(z),x^{-}(w)\big] = \frac{1}{q-q^{-1}}\Big(\delta\Big(\gamma\frac{w}{z}\Big)k^{+}(w) - \delta\Big(\frac{w}{z}\gamma^{-1}\Big)k^{-}(z)\Big).$$

$(C8)$ $x^{\pm}(z)$ 和 $x^{\pm}(w)$满足关系

$$x^{\pm}(z)x^{\pm}(w) = g^{\pm}\Big(\frac{z}{w}\Big)x^{\pm}(w)x^{\pm}(z).$$

定义3.3. $\big($**等价定义**.$\big)$ 含幺结合代数 $U_q^D(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$ 在$\mathbb{K}$ 上由元素 $x^{\pm}(k)$，$a(l)$，$k_2^{\pm1}$，$\gamma^{\pm1}(k\in\mathbb{Z},\ l\in\mathbb{Z}|\{0\})$生成，并满足以下定义关系

$(D1)$ 对于 $n\in\mathbb{Z}_+$, $k_2^{\pm1}$, $\gamma^{\pm1}$ 是中心的且彼此交换。

$(D2)$ 对于 $l\in\mathbb{Z}|\{0\}$，$k\in\mathbb{Z}$，我们有

$$\gamma a(l) = a(l)\gamma, \qquad \gamma x^{\pm}(k) = -x^{\pm}(k)\gamma,$$
$$k_2a(l) = (-1)^l a(l)k_2, \quad k_2x^{\pm}(k) = (-1)^{k+1}q^{\pm2}x^{\pm}(k)k_2.$$

$(D3)$ 对于 $l,l'\in\mathbb{Z}\mid\{0\}$, 我们有

$$[a(l),a(l')] = \delta_{l+l',0}\frac{[2l]_q}{|l|}\cdot\frac{\gamma^{|l|}-\gamma^{-|l|}}{q-q^{-1}}.$$

$(D4)$ 对于 $l\in\mathbb{Z}_+$, $k\in\mathbb{Z}$，我们有

$$\big[a(l),x^{\pm}(k)\big] = -\frac{[2l]_q}{l}x^{\pm}(l+k)\gamma^l.$$

$(D5)$ 对于 $k,k'\in\mathbb{Z}$，我们有

$$\begin{aligned}&x^{\pm}(k+1)x^{\pm}(k')-q^2x^{\pm}(k)x^{\pm}(k'+1)\\&\qquad=(-1)^{k+k'+1}\Big\{x^{\pm}(k'+1)x^{\pm}(k)-q^2x^{\pm}(k')x^{\pm}(k+1)\Big\}.\end{aligned}$$

$(D6)$ 对于 $l,l'\in\mathbb{Z}$，我们有

$$\left[x^{+}(l),x^{-}(l')\right]=\frac{1}{q-q^{-1}}\left(\gamma^{l}k^{+}(l+l')-\gamma^{-l}k^{-}(l+l')\right).$$

3.1. **Drinfeld 同构**。本节的核心目标是在新型量子仿射代数 $U_{\mathbf{q}}(\mathfrak{sl}_2)$（定义见第 2 节）与其 Drinfeld 实现 $U_{\mathbf{q}}^{D}(\widehat{\mathfrak{sl}_2})$（定义见第 3 节）之间建立一个代数同构。为此，我们首先陈述三个关键定理，其中定理 3.5（满同态）和定理 3.6（逆映射）蕴含同构定理3.4。下面给出定理 3.5 的详细证明，并省略定理 3.6 的证明。

定理 3.4。令 $U_{q}^{D}(\widehat{\mathfrak{sl}_2})$ 表示 $U_{q}(\widehat{\mathfrak{sl}_2})$ 的 ***Drinfeld*** 实现。则存在代数同构：

$$U_{q}(\widehat{\mathfrak{sl}_2})\cong U_{q}^{D}(\widehat{\mathfrak{sl}_2}).$$

定理 3.5. 存在一个满代数同态 $\Psi:\ U_{q}^{D}(\widehat{\mathfrak{sl}_2})\ \to U_{q}(\widehat{\mathfrak{sl}_2})$，定义如下

$$\begin{cases}\gamma\longmapsto k_1k_2,\quad k_2\longmapsto k_2,\\ x^{+}(n)\longmapsto(\mathcal{T}_1\Phi)^{n}(e_1),\quad x^{-}(n)\longmapsto(\mathcal{T}_1\Phi)^{-n}(f_1),\\ a(k)\longmapsto(k_1k_2)^{k}\mathcal{E}_{k\delta}-\dfrac{q-q^{-1}}{k}\sum\limits_{r=1}^{k-1}r(k_1k_2)^{k-r}\mathcal{E}_{(k-r)\delta}\Psi(a(r)),\\ a(-k)\longmapsto\mathcal{F}_{k\delta}(k_1k_2)^{-k}+\dfrac{q-q^{-1}}{k}\sum\limits_{r=1}^{k-1}r\Psi(a(-r))\mathcal{F}_{(k-r)\delta}(k_1k_2)^{-k+r},\end{cases}$$

对所有 $n\in\mathbb{Z}$ 和 $k\in\mathbb{Z}_{+}$。

定理 3.6. 存在一个满射 $\Xi:\ U_{q}(\widehat{\mathfrak{sl}_2})\ \to U_{q}^{D}(\widehat{\mathfrak{sl}_2})$，使得 $\Psi\Xi=\Xi\Psi=\mathrm{id}$。

3.2. **定理 3.5 的证明**。为证明定理 3.5，我们只需验证映射 Ψ 是一个满代数同态。首先，Ψ 的满射性显然，因为 Ψ 的像恰好构成了 $U_{\mathbf{q}}(\mathfrak{sl}_2)$ 的生成元集合。接下来，我们只需进一步验证 Ψ 是一个代数同态。

我们依靠根向量的交换关系来验证 Ψ 是一个代数同态。在开始证明之前，我们先陈述若干恒等式（均可通过归纳法得到）。

$$\begin{aligned}&(\mathcal{T}_1\Phi)^{n}(e_1)=\mathcal{E}_{n\delta+\alpha_1},\quad(\mathcal{T}_1\Phi)^{-n}(e_1)=-k_1^{-n+1}k_2^{-n}\mathcal{F}_{(n-1)\delta+\alpha_2},\\&(\mathcal{T}_1\Phi)^{n}(f_1)=\mathcal{F}_{n\delta+\alpha_1},\quad(\mathcal{T}_1\Phi)^{-n}(f_1)=-\mathcal{E}_{(n-1)\delta+\alpha_2}k_1^{n-1}k_2^{n},\quad\forall\,n\in\mathbb{Z}_{+}.\end{aligned}$$

引理 3.7。 对于 $n, m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $n \geq m$, $E^{n\delta+\alpha_1}$ 与 $E^{m\delta+\alpha_1}$ 之间的交换关系为

$$\begin{aligned}&\mathcal{E}_{n\delta+\alpha_1}\mathcal{E}_{m\delta+\alpha_1} + (-1)^{n+m}q^{-2}\mathcal{E}_{m\delta+\alpha_1}\mathcal{E}_{n\delta+\alpha_1}\\ &\quad = q^{-2}\mathcal{E}_{(n-1)\delta+\alpha_1}\mathcal{E}_{(m+1)\delta+\alpha_1} + (-1)^{n+m}\mathcal{E}_{(m+1)\delta+\alpha_1}\mathcal{E}_{(n-1)\delta+\alpha_1}.\end{aligned}$$

证明。我们通过双重归纳法证明指标为 n 和 m 的引理。首先，我们验证基例 $P(n,\ 0)$成立。其次，假设对于满足 $i < m$的所有正整数 i，引理 $P(n,\ i)$均成立，然后继续证明 $P(n,\ m)$成立。

(I) 当 $m = 0$时，考虑以下关系

$$\mathcal{E}_{n\delta+\alpha_1}e_1 + (-1)^n q^{-2}e_1\mathcal{E}_{n\delta+\alpha_1} = q^{-2}\mathcal{E}_{(n-1)\delta+\alpha_1}\mathcal{E}_{\delta+\alpha_1} + (-1)^n\mathcal{E}_{\delta+\alpha_1}\mathcal{E}_{(n-1)\delta+\alpha_1}. \tag{3.1}$$

我们首先考察 $n = 1$的情形，然后将结果推广到一般的 $n \geq 1$。

将 $n = 1$ 和 $m = 0$ 代入（3.1），我们需要证明 $\mathcal{E}_{\delta+\alpha_1}e_1 = q^{-2}e_1\mathcal{E}_{\delta+\alpha_1}$. 现在可以直接验证

$$\mathcal{E}_{\delta+\alpha_1}e_1 - q^{-2}e_1\mathcal{E}_{\delta+\alpha_1} = \mathcal{T}_1\Phi\left(-e_1k_2^{-1}f_2 + q^{-2}k_2^{-1}f_2e_1\right).$$

利用（$A2$）和（$A3$），我们得到 $\mathcal{E}_{\delta+\alpha_1}e_1 = q^{-2}e_1\mathcal{E}_{\delta+\alpha_1}$。

假设关系（3.1）对 $n = k$（$k > 1$）成立。为确认其对 $n = k+1$ 成立，我们需要使用以下恒等式

$$[2]_q\mathcal{E}_{(t+1)\delta+\alpha_1} = \mathcal{E}_\delta\mathcal{E}_{t\delta+\alpha_1} + \mathcal{E}_{t\delta+\alpha_1}\mathcal{E}_\delta, \quad \forall t \geq 0, \qquad (\text{by Theorem 2.10}) \tag{3.2}$$

并使用归纳假设得到

$$\mathcal{E}_{s\delta+\alpha_1}e_1 + (-1)^s q^{-2}e_1\mathcal{E}_{s\delta+\alpha_1} = q^{-2}\mathcal{E}_{(s-1)\delta+\alpha_1}\mathcal{E}_{\delta+\alpha_1} + (-1)^s\mathcal{E}_{\delta+\alpha_1}\mathcal{E}_{(s-1)\delta+\alpha_1}, \tag{3.3}$$

其中 $1 \leq s \leq k$。

应用（3.2）和（3.3），可以直接验证

$$\begin{aligned}[2]_q\mathcal{E}_{(k+1)\delta+\alpha_1}e_1 &= \Big\{\mathcal{E}_\delta\mathcal{E}_{k\delta+\alpha_1} + \mathcal{E}_{k\delta+\alpha_1}\mathcal{E}_\delta\Big\}e_1\\ &= \mathcal{E}_\delta\Big\{(-1)^{k-1}q^{-2}e_1\mathcal{E}_{k\delta+\alpha_1} + q^{-2}\mathcal{E}_{(k-1)\delta+\alpha_1}\mathcal{E}_{\delta+\alpha_1} + (-1)^k\mathcal{E}_{\delta+\alpha_1}\mathcal{E}_{(k-1)\delta+\alpha_1}\Big\}\\ &\quad + \mathcal{E}_{k\delta+\alpha_1}\Big\{[2]_q\mathcal{E}_{\delta+\alpha_1} - e_1\mathcal{E}_\delta\Big\}\\ &= (-1)^{k-1}q^{-2}\Big\{[2]_q\mathcal{E}_{\delta+\alpha_1} - e_1\mathcal{E}_\delta\Big\}\mathcal{E}_{k\delta+\alpha_1} + q^{-2}\Big\{[2]_q\mathcal{E}_{k\delta+\alpha_1} - \mathcal{E}_{(k-1)\delta+\alpha_1}\mathcal{E}_\delta\Big\}\mathcal{E}_{\delta+\alpha_1}\\ &\quad + (-1)^k\Big\{[2]_q\mathcal{E}_{2\delta+\alpha_1} - \mathcal{E}_{\delta+\alpha_1}\mathcal{E}_\delta\Big\}\mathcal{E}_{(k-1)\delta+\alpha_1} + [2]_q\mathcal{E}_{k\delta+\alpha_1}\mathcal{E}_{\delta+\alpha_1}\\ &\quad - \Big\{(-1)^{k-1}q^{-2}e_1\mathcal{E}_{k\delta+\alpha_1} + q^{-2}\mathcal{E}_{(k-1)\delta+\alpha_1}\mathcal{E}_{\delta+\alpha_1} + (-1)^k\mathcal{E}_{\delta+\alpha_1}\mathcal{E}_{(k-1)\delta+\alpha_1}\Big\}\mathcal{E}_\delta\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= [2]_q\Big\{(-1)^k q^{-2} e_1 \mathcal{E}_{(k+1)\delta+\alpha_1} + q^{-2}\mathcal{E}_{k\delta+\alpha_1}\mathcal{E}_{\delta+\alpha_1} + (-1)^{k+1}\mathcal{E}_{\delta+\alpha_1}\mathcal{E}_{k\delta+\alpha_1} \\
&\quad + \Big(\mathcal{E}_{k\delta+\alpha_1}\mathcal{E}_{\delta+\alpha_1} + (-1)^{k+1}q^{-2}\mathcal{E}_{\delta+\alpha_1}\mathcal{E}_{k\delta+\alpha_1} - q^{-2}\mathcal{E}_{(k-1)\delta+\alpha_1}\mathcal{E}_{2\delta+\alpha_1} \\
&\quad + (-1)^k \mathcal{E}_{2\delta+\alpha_1}\mathcal{E}_{(k-1)\delta+\alpha_1}\Big)\Big\} \\
&= [2]_q\Big\{(-1)^k q^{-2} e_1 \mathcal{E}_{(k+1)\delta+\alpha_1} + q^{-2}\mathcal{E}_{k\delta+\alpha_1}\mathcal{E}_{\delta+\alpha_1} + (-1)^{k+1}\mathcal{E}_{\delta+\alpha_1}\mathcal{E}_{k\delta+\alpha_1} \\
&\quad + (\mathcal{T}_1\Phi)\Big(\mathcal{E}_{(k-1)\delta+\alpha_1} e_1 + (-1)^{k+1}q^{-2} e_1 \mathcal{E}_{(k-1)\delta+\alpha_1} - q^{-2}\mathcal{E}_{(k-2)\delta+\alpha_1}\mathcal{E}_{\delta+\alpha_1} \\
&\quad + (-1)^k \mathcal{E}_{\delta+\alpha_1}\mathcal{E}_{(k-2)\delta+\alpha_1}\Big)\Big\}.
\end{aligned}
$$

最终得到

$$
\mathcal{E}_{(k+1)\delta+\alpha_1} e_1 + (-1)^{k+1} q^{-2} e_1 \mathcal{E}_{(k+1)\delta+\alpha_1} = q^{-2}\mathcal{E}_{k\delta+\alpha_1}\mathcal{E}_{\delta+\alpha_1} + (-1)^{k+1}\mathcal{E}_{\delta+\alpha_1}\mathcal{E}_{k\delta+\alpha_1}.
$$

因此，关系 (3.1) 对所有 $n > 0$ 都成立。

(II) 当 $m = t$、 $n > t > 0$ 时，我们假设引理对 $m = t$ 成立：

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{E}_{n\delta+\alpha_1}\mathcal{E}_{t\delta+\alpha_1} + (-1)^{n+t} q^{-2}\mathcal{E}_{t\delta+\alpha_1}\mathcal{E}_{n\delta+\alpha_1} \\
&\qquad = q^{-2}\mathcal{E}_{(n-1)\delta+\alpha_1}\mathcal{E}_{(t+1)\delta+\alpha_1} + (-1)^{n+t}\mathcal{E}_{(t+1)\delta+\alpha_1}\mathcal{E}_{(n-1)\delta+\alpha_1}.
\end{aligned} \tag{3.4}
$$

我们断言该关系对 $m = t + 1$ 成立。

为证明该断言，将自同构 $\mathcal{T}_1\Phi$作用于关系 (3.4)，我们得到 n

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{E}_{(n+1)\delta+\alpha_1}\mathcal{E}_{(t+1)\delta+\alpha_1} + (-1)^{n+t} q^{-2}\mathcal{E}_{(t+1)\delta+\alpha_1}\mathcal{E}_{(n+1)\delta+\alpha_1} \\
&\qquad = q^{-2}\mathcal{E}_{n\delta+\alpha_1}\mathcal{E}_{(t+2)\delta+\alpha_1} + (-1)^{n+t}\mathcal{E}_{(t+2)\delta+\alpha_1}\mathcal{E}_{n\delta+\alpha_1}.
\end{aligned} \tag{3.5}
$$

令 $n' = n + 1$ 和 $t' = t + 1$。由于 $n > t$ 意味着 $n' > t'$，关系 (3.5) 可简化为

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{E}_{n'\delta+\alpha_1}\mathcal{E}_{t'\delta+\alpha_1} + (-1)^{n'+t'-1} q^{-2}\mathcal{E}_{t'\delta+\alpha_1}\mathcal{E}_{n'\delta+\alpha_1} \\
&\qquad = q^{-2}\mathcal{E}_{(n'-1)\delta+\alpha_1}\mathcal{E}_{(t'+1)\delta+\alpha_1} + (-1)^{n'+t'-1}\mathcal{E}_{(t'+1)\delta+\alpha_1}\mathcal{E}_{(n'-1)\delta+\alpha_1},
\end{aligned}
$$

这 与引理中关于 $m = t' = t + 1$的关系一致，从而证实了该断言 .

(III) 根据基例 $m = 0$和归纳步骤，直到 $m = t+1$，引理成立。 □

引理 3.8. 对于 $n, m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $n \leq m$，$E_{n\delta+\alpha_2}$ 和 $E_{m\delta+\alpha_2}$ 之间的交换关系为

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{E}_{n\delta+\alpha_2}\mathcal{E}_{m\delta+\alpha_2} + (-1)^{n+m} q^{-2}\mathcal{E}_{m\delta+\alpha_2}\mathcal{E}_{n\delta+\alpha_2} \\
&\qquad = q^{-2}\mathcal{E}_{(n+1)\delta+\alpha_2}\mathcal{E}_{(m-1)\delta+\alpha_2} + (-1)^{n+m}\mathcal{E}_{(m-1)\delta+\alpha_2}\mathcal{E}_{(n+1)\delta+\alpha_2}.
\end{aligned}
$$

证明。证明与引理 3.7 的证明类似。 □

引理 3.9. $[\mathcal{E}_{m\delta}, \mathcal{E}_{n\delta}] = 0$, 对于任意 $n, m \in \mathbb{Z}+$.

证明。参见 [11] 中命题 2.1 的证明。 □

引理3.10。 对于 $n, m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $n > m$, $E^{n\delta+\alpha_i}$ 与 $F^{m\delta+\alpha_j}(i, j \in \{1, 2\})$ 之间的交换关系为

$$[\mathcal{E}_{m\delta+\alpha_1}, \mathcal{F}_{m\delta+\alpha_1}] = \frac{k_1^{m+1}k_2^m - k_1^{-m-1}k_2^{-m}}{q - q^{-1}}, \tag{3.6}$$

$$[\mathcal{E}_{m\delta+\alpha_2}, \mathcal{F}_{m\delta+\alpha_2}] = \frac{k_2^{m+1}k_1^m - k_2^{-m-1}k_1^{-m}}{q - q^{-1}}, \tag{3.7}$$

$$[\mathcal{E}_{n\delta+\alpha_1}, \mathcal{F}_{m\delta+\alpha_1}] = -\mathcal{E}_{(n-m)\delta}k_1^{-m-1}k_2^{-m}, \tag{3.8}$$

$$[\mathcal{E}_{n\delta+\alpha_2}, \mathcal{F}_{m\delta+\alpha_2}] = k_1^m k_2^{m+1}\mathcal{E}_{(n-m)\delta}. \tag{3.9}$$

证明。我们继续验证方程（3.6）—（3.9）。

（I）验证方程（3.6）。应用 $(\mathcal{T}_1\Phi)^n$ 于 $[e_1, f_1]$，得到

$$[\mathcal{E}_{n\delta+\alpha_1}, \mathcal{F}_{n\delta+\alpha_1}] = (\mathcal{T}_1\Phi)^n\Big([e_1, f_1]\Big) = (\mathcal{T}_1\Phi)^n\Big(\frac{k_1 - k_1^{-1}}{q - q^{-1}}\Big). \tag{3.10}$$

在自同构 $(\mathcal{T}_1\Phi)^n$下，生成元 k_1 变换为 $k_1 \mapsto k_1^n k_2$。因此，

$$(\mathcal{T}_1\Phi)^n(k_1) = k_1^{n+1}k_2^n, \qquad (\mathcal{T}_1\Phi)^n(k_1^{-1}) = k_1^{-n-1}k_2^{-n}. \tag{3.11}$$

将（3.11）代入（3.10），得到

$$[\mathcal{E}_{n\delta+\alpha_1}, \mathcal{F}_{n\delta+\alpha_1}] = \frac{k_1^{n+1}k_2^n - k_1^{-n-1}k_2^{-n}}{q - q^{-1}}.$$

（3.7）的证明与（3.6）的证明类似。

（II）验证方程（3.8）。对于 $n > m$，我们首先证明一个中间断言

$$[\mathcal{E}_{n\delta+\alpha_1}, f_1] = -\mathcal{E}_{n\delta}k_1^{-1}, \tag{3.12}$$

其中 $n \geq 1$。

当 $n =$ 1，利用 $\mathcal{E}_{\delta+\alpha_1} =(\mathcal{T}_1\Phi)(e_1)$ 和 $\mathcal{T}_1(e_1) = -f_1k_1$，直接计算可得

$$[\mathcal{E}_{\delta+\alpha_1}, f_1] = -[(\mathcal{T}_1\Phi)(e_1), \mathcal{T}_1(e_1k_1)] = -\mathcal{T}_1[e_2, e_1k_1] = -\mathcal{E}_\delta k_1^{-1},$$

这证实该断言对 $n = 1$ 成立。

假设该结论对 $n = k$ 成立。为了证明 (3.12) 对 $n = k + 1$ 成立，我们需要以下等式

$$\mathcal{E}_\delta f_1 = f_1\mathcal{E}_\delta - [2]_q e_2 k_1^{-1}, \tag{3.13}$$

$$[2]_q\mathcal{E}_{n\delta+\alpha_1} = \mathcal{E}_\delta\mathcal{E}_{(n-1)\delta+\alpha_1} + \mathcal{E}_{(n-1)\delta+\alpha_1}\mathcal{E}_\delta. \tag{3.14}$$

根据归纳假设，我们有

$$\mathcal{E}_{(n-1)\delta+\alpha_1}f_1 = f_1\mathcal{E}_{(n-1)\delta+\alpha_1} - \mathcal{E}_{(n-1)\delta}k_1^{-1}. \tag{3.15}$$

代入　　将方程（3.13）、（3.14）和（3.15）代入以下计算可得

$$\begin{aligned}
[2]_q\mathcal{E}_{n\delta+\alpha_1}f_1 &= \Big\{\mathcal{E}_\delta\mathcal{E}_{(n-1)\delta+\alpha_1}+\mathcal{E}_{(n-1)\delta+\alpha_1}\mathcal{E}_\delta\Big\}f_1\\
&= \mathcal{E}_\delta\Big(f_1\mathcal{E}_{(n-1)\delta+\alpha_1}-\mathcal{E}_{(n-1)\delta}k_1^{-1}\Big)+\mathcal{E}_{(n-1)\delta+\alpha_1}\Big(f_1\mathcal{E}_\delta-[2]_qe_2k_1^{-1}\Big)\\
&= \Big(f_1\mathcal{E}_\delta-[2]_qe_2k_1^{-1}\Big)\mathcal{E}_{(n-1)\delta+\alpha_1}-\mathcal{E}_\delta\mathcal{E}_{(n-1)\delta}k_1^{-1}\\
&\quad+\Big(f_1\mathcal{E}_{(n-1)\delta+\alpha_1}-\mathcal{E}_{(n-1)\delta}k_1^{-1}\Big)\mathcal{E}_\delta-[2]_q\mathcal{E}_{(n-1)\delta+\alpha_1}e_2k_1^{-1}\\
&= [2]_qf_1\mathcal{E}_{(n+1)\delta+\alpha_1}-[2]_q\Big\{(-1)^nq^{-2}e_2\mathcal{E}_{(n-1)\delta+\alpha_1}+\mathcal{E}_{(n-1)\delta+\alpha_1}e_2\Big\}k_1^{-1}.
\end{aligned}$$

根据$\mathcal{E}_{n\delta}$的定义，我们得到

$$\mathcal{E}_{n\delta+\alpha_1}f_1-f_1\mathcal{E}_{n\delta+\alpha_1}=-\mathcal{E}_{n\delta}k_1^{-1}.$$

因此，通过 $n\geq 1$ 归纳法，该断言对所有情形均成立。

为扩 展到情形 $n>m$，我们迭代中间断言 (3.12)。得到

$$[\mathcal{E}_{n\delta+\alpha_1},\mathcal{F}_{m\delta+\alpha_1}]=\Big(\mathcal{T}_1\Phi\Big)^m\Big([\mathcal{E}_{(n-m)\delta+\alpha_1},f_1]\Big)=-\mathcal{E}_{(n-m)\delta}k_1^{-m-1}k_2^{-m},$$

这就验证了等式 (3.16)。

等式 (3.9) 的证明同理。 □

引理 3.11. 对于 $n\in\mathbb{Z}_+$, $m\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$, $\Psi(a(n))$ 与 $E^{m\delta+\alpha_i}$ $(i\in\{1,2\})$ 之间的交换关系为

$$[\Psi(a(n)),e_1]=-\frac{[2n]_q}{n}\mathcal{E}_{n\delta+\alpha_1}(k_1k_2)^n, \tag{3.16}$$

$$[\Psi(a(n)),e_2]=(k_1k_2)^n\frac{[2n]_q}{n}\mathcal{E}_{n\delta+\alpha_2}. \tag{3.17}$$

证明。这里我们只证明等式 (3.16)，等式 (3.17) 的证明类似，因此省略。我们通过归纳法完成证明。首先验证基例 $n=1$，此时结论显然成立。接下来，假设等式对 $n-1$ 成立，即

$$[\Psi(a(l)),e_1]=-\frac{[2l]_q}{l}\mathcal{E}_{l\delta+\alpha_1}(k_1k_2)^l,\quad 0<l\leq n-1. \tag{3.18}$$

接下来，我们证明该等式对 n 也成立。

为此，我们需要回顾一下 [?] 中给出的一些等式。

$$\mathcal{E}_{n\delta}e_1=(-1)^ne_1\mathcal{E}_{n\delta}+\sum_{k=1}^{n-1}b_k^{(n)}\mathcal{E}_{k\delta+\alpha_1}\mathcal{E}_{(n-k)\delta}+b_n^{(n)}\mathcal{E}_{n\delta+\alpha_1}, \tag{3.19}$$

其中 $b_k^{(n)}$ 和 $b_n^{(n)}$ 是系数

$$b_k^{(n)} = (-1)^{n-1} q^{-2(k-1)} (q^2 - q^{-2}), \tag{3.20}$$

$$b_n^{(n)} = (-1)^{n-1} q^{-2(n-1)} [2]_q. \tag{3.21}$$

取两边之和 方程 (3.19)，我们直接得到以下等式 y

$$\begin{aligned} &\sum_{r=1}^{n-1} [2r]_q \mathcal{E}_{(n-r)\delta} e_1 \\ &= \sum_{r=1}^{n-1} [2r]_q \Big((-1)^{n-r} e_1 \mathcal{E}_{(n-r)\delta} + \sum_{k=1}^{n-r-1} b_k^{(n-r)} \mathcal{E}_{k\delta+\alpha_1} \mathcal{E}_{(n-r-k)\delta} + b_{n-r}^{(n-r)} \mathcal{E}_{(n-r)\delta+\alpha_1} \Big). \end{aligned} \tag{3.22}$$

将自同构（$\mathcal{T}_1\Phi$）^{r} 应用于方程 (3.22)，得到

$$\begin{aligned} &\sum_{r=1}^{n-1} [2r]_q \mathcal{E}_{(n-r)\delta} \mathcal{E}_{r\delta+\alpha_1} \\ &= \sum_{r=1}^{n-1} [2r]_q (\mathcal{T}_1\Phi)^r \Big((-1)^{n-r} e_1 \mathcal{E}_{(n-r)\delta} + \sum_{k=1}^{n-r-1} b_k^{(n-r)} \mathcal{E}_{k\delta+\alpha_1} \mathcal{E}_{(n-r-k)\delta} + b_{n-r}^{(n-r)} \mathcal{E}_{(n-r)\delta+\alpha_1} \Big) \\ &= \sum_{r=1}^{n-1} [2r]_q \Big((-1)^{n-r} \mathcal{E}_{r\delta+\alpha_1} \mathcal{E}_{(n-r)\delta} + \sum_{k=1}^{n-r-1} b_k^{(n-r)} \mathcal{E}_{(k+r)\delta+\alpha_1} \mathcal{E}_{(n-r-k)\delta} + b_{n-r}^{(n-r)} \mathcal{E}_{n\delta+\alpha_1} \Big). \end{aligned} \tag{3.23}$$

回忆 $\Psi(a(n))$ 的定义：

$$\Psi(a(n)) = (k_1 k_2)^n \mathcal{E}_{n\delta} - \frac{q - q^{-1}}{n} \sum_{r=1}^{n-1} r (k_1 k_2)^{n-r} \mathcal{E}_{(n-r)\delta} \Psi(a(r)).$$

代换 将方程（3.18）、（3.19）和（3.23）代入下列计算，可得

$$\begin{aligned} \Psi(a(n)) e_1 &= \Big((k_1 k_2)^n \mathcal{E}_{n\delta} - \frac{q - q^{-1}}{n} \sum_{r=1}^{n-1} r (k_1 k_2)^{n-r} \mathcal{E}_{(n-r)\delta} \Psi(a(r)) \Big) e_1 \\ &= (k_1 k_2)^n \Big\{ (-1)^n e_1 \mathcal{E}_{n\delta} + \sum_{r=1}^{n-1} b_r^{(n)} \mathcal{E}_{r\delta+\alpha_1} \mathcal{E}_{(n-r)\delta} + b_n^{(n)} \mathcal{E}_{n\delta+\alpha_1} \Big\} \\ &\quad - \frac{q - q^{-1}}{n} \sum_{r=1}^{n-1} r (k_1 k_2)^{n-r} \mathcal{E}_{(n-r)\delta} \Big(e_1 \Psi(a(r)) - \frac{[2r]_q}{r} \mathcal{E}_{r\delta+\alpha_1} (k_1 k_2)^r \Big) \\ &= (k_1 k_2)^n \Big\{ (-1)^n e_1 \mathcal{E}_{n\delta} + \sum_{r=1}^{n-1} b_r^{(n)} \mathcal{E}_{r\delta+\alpha_1} \mathcal{E}_{(n-r)\delta} + b_n^{(n)} \mathcal{E}_{n\delta+\alpha_1} \Big\} \\ &\quad - \frac{q - q^{-1}}{n} \sum_{r=1}^{n-1} r (k_1 k_2)^{n-r} \Big\{ (-1)^{n-r} e_1 \mathcal{E}_{(n-r)\delta} + \sum_{k=1}^{n-r-1} b_k^{(n-r)} \mathcal{E}_{k\delta+\alpha_1} \mathcal{E}_{(n-r-k)\delta} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+ b_{n-r}^{(n-r)}\mathcal{E}_{(n-r)\delta+\alpha_1}\Big\}\Psi(a(r)) - \frac{q-q^{-1}}{n}\sum_{r=1}^{n-1}(-1)^{r+1}[2r]_q(k_1k_2)^n\\
&\cdot\Big\{(-1)^{n-r}\mathcal{E}_{r\delta+\alpha_1}\mathcal{E}_{(n-r)\delta} + \sum_{k=1}^{n-r-1} b_k^{(n-r)}\mathcal{E}_{(k+r)\delta+\alpha_1}\mathcal{E}_{(n-r-k)\delta}+b_{n-r}^{(n-r)}\mathcal{E}_{n\delta+\alpha_1}\Big\}\\
=\ & e_1\Psi(a(n)) + (k_1k_2)^n\Big(b_n^{(n)} + \frac{q-q^{-1}}{n}\sum_{r=1}^{n-1}(-1)^r[2r]_q b_{n-r}^{(n-r)}\Big)\mathcal{E}_{n\delta+\alpha_1}\\
&+\text{其余各项。}
\end{aligned}
$$

接下来我们证明其余项恰好为零。我们先固定变量r，然后考察其余项中包含$\mathcal{E}_{r\delta+\alpha_1}$ 的相关项:

$$
\begin{aligned}
&b_r^{(n)}(k_1k_2)^r(-1)^{n-s}\mathcal{E}_{r\delta+\alpha_1}(k_1k_2)^{n-r}\mathcal{E}_{(n-r)\delta} - \frac{q-q^{-1}}{n}(k_1k_2)^r\mathcal{E}_{r\delta+\alpha_1}\Big\{(n-r)b_r^{(r)}\Psi(a(n-r))\\
&+\sum_{s=1}^{n-1-r} s(k_1k_2)^{n-r-s}(-1)^{n-r-s}b_r^{(n-s)}\mathcal{E}_{(n-r-s)\delta}\Psi(a(s)) + (-1)^{r+1}[2r](k_1k_2)^{n-r}\mathcal{E}_{(n-r)\delta}\\
&+\sum_{s=1}^{r-1}(-1)^{n-s+r+1}[2s](k_1k_2)^{n-r}b_{r-s}^{(n-s)}\mathcal{E}_{(n-r)\delta}\Big\}\\
=&\Big\{b_r^{(n)} + \frac{q-q^{-1}}{n}(-1)^n[2r] + \frac{q-q^{-1}}{n}\sum_{s=1}^{r-1}(-1)^s[2s]b_{r-s}^{(n-s)}\Big\}(-1)^{n-r}(k_1k_2)^r\mathcal{E}_{r\delta+\alpha_1}(k_1k_2)^{n-r}\mathcal{E}_{(n-r)\delta}\\
&+\frac{q-q^{-1}}{n}(k_1k_2)^r\mathcal{E}_{r\delta+\alpha_1}\sum_{s=1}^{n-r-1} s(-1)^{n-r-s+1}(k_1k_2)^{n-r-s}b_r^{(n-s)}\mathcal{E}_{(n-r-s)\delta}\Psi(a(s))\\
&-\frac{q-q^{-1}}{n}(n-r)b_r^{(r)}(k_1k_2)^r\mathcal{E}_{r\delta+\alpha_1}\Psi(a(n-r))\\
=&\Big\{b_r^{(n)} + \frac{q-q^{-1}}{n}(-1)^n[2r] + \frac{q-q^{-1}}{n}\sum_{s=1}^{r-1}(-1)^s[2s]b_{r-s}^{(n-s)}\Big\}(-1)^{n-r}(k_1k_2)^r\mathcal{E}_{r\delta+\alpha_1}(k_1k_2)^{n-r}\mathcal{E}_{(n-r)\delta}\\
&+\frac{q-q^{-1}}{n}(k_1k_2)^r\mathcal{E}_{r\delta+\alpha_1}(-1)^r q^{-2(r-1)}(q^2-q^{-2})\frac{n-r}{q-q^{-1}}\Big\{(k_1k_2)^{n-r}\mathcal{E}_{(n-r)\delta} - \Psi(a(n-r))\Big\}\\
&-\frac{q-q^{-1}}{n}(n-r)b_r^{(r)}(k_1k_2)^r\mathcal{E}_{r\delta+\alpha_1}\Psi(a(n-r))\\
=&0.
\end{aligned}
$$

总而言之，我们已经完成了对等式 (3.16) 成立的证明。 □

注 3.12. 交换关系可以推广到任意实根向量 $E^{m\delta+\alpha_i}$ 和负根生成元 f_i。对于 $n\in\mathbb{Z}_+$ 和 $m\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$，以下结论成立

$$
[\Psi(a(n)),\mathcal{E}_{m\delta+\alpha_1}] = -\frac{[2n]_q}{n}\mathcal{E}_{(m+n)\delta+\alpha_1}(k_1k_2)^n, \tag{3.24}
$$

$$
[\Psi(a(n)),\mathcal{E}_{m\delta+\alpha_2}] = (k_1k_2)^n\frac{[2n]_q}{n}\mathcal{E}_{(m+n)\delta+\alpha_2}, \tag{3.25}
$$

$$\Psi(a(n))f_2+(-1)^{n-1}f_2\Psi(a(n))=-\frac{[2n]_q}{n}q^{-2}\mathcal{E}_{(n-1)\delta+\alpha_1}k_1^nk_2^{n+1}, \tag{3.26}$$

$$\Psi(a(n))f_1+(-1)^{n-1}f_1\Psi(a(n))=(-1)^n\frac{[2n]_q}{n}q^{-2}k_1^{n-1}k_2^n\mathcal{E}_{(n-1)\delta+\alpha_2}. \tag{3.27}$$

为了证明 $\Psi(a(n))$ 与 $\Psi(a(-m))$ $(n,m\in\mathbb{Z}_+)$ 之间的交换关系，我们必须找出$\mathcal{E}_{n\delta}{}'s$和$\mathcal{F}_{m\delta}{}'s$之间的交换关系。我们省略以下结果的证明。

推论 3.13. 对于 $n,m\in\mathbb{Z}_+$ 且满足 $n<m$，有

$$\begin{aligned}[\Psi(a(n)),\mathcal{F}_{m\delta}]=&-[2]_q\mathcal{F}_{(m-n)\delta}k_1^nk_2^n(k_1k_2-k_1^{-1}k_2^{-1})\frac{[n]_{1,q}[n]_{K,1}}{n}\\ =&-\mathcal{F}_{(m-n)\delta}k_1^nk_2^n\frac{[2n]_q}{n}\cdot(k_1^nk_2^n-k_1^{-n}k_2^{-n}),\end{aligned} \tag{3.28}$$

将 Ω作用于 *(3.28)*，可得一个类似的公式。

证明. 为了推导上述关系，我们从 $\mathcal{F}_{m\delta}$ 的定义出发，并逐步代入相关的交换关系 (3.26) 和 (3.27)。

By 根据负虚根向量的定义，$\mathcal{F}_{m\delta}$ 可以表示为　　s

$$\mathcal{F}_{m\delta}=\mathcal{F}_{(m-1)\delta+\alpha_2}f_1+(-1)^mq^2f_1\mathcal{F}_{(m-1)\delta+\alpha_2}. \tag{3.29}$$

对方程 (3.26) 应用自同构 $(\mathcal{T}_2^{-1}\Phi)^{m-1}$，得到

(3.30)

$$\Psi(a(n))\mathcal{F}_{(m-1)\delta+\alpha_2}=(-1)^n\mathcal{F}_{(m-1)\delta+\alpha_2}\Psi(a(n))-\frac{[2n]_q}{n}q^{-2}(\mathcal{T}_2^{-1}\Phi)^{m-n}(e_1)k_1^{n+m-1}k_2^{n+m}.$$

将方程 (3.27)、(3.29) 和 (3.30) 直接代入后续计算，可得

$$\begin{aligned}\Psi(a(n))\mathcal{F}_{m\delta}&=\Psi(a(n))\Big\{\mathcal{F}_{(m-1)\delta+\alpha_2}f_1+(-1)^mq^2f_1\mathcal{F}_{(m-1)\delta+\alpha_2}\Big\}\\ &=\Big\{(-1)^n\mathcal{F}_{(m-1)\delta+\alpha_2}\Psi(a(n))-\frac{[2n]_q}{n}q^{-2}(\mathcal{T}_2^{-1}\Phi)^{m-n}(e_1)k_1^{n+m-1}k_2^{n+m}\Big\}f_1\\ &+(-1)^mq^2\Big\{(-1)^nf_1\Psi(a(n))+(-1)^n\frac{[2n]_q}{n}q^{-2}k_1^{n-1}k_2^n\mathcal{E}_{(n-1)\delta+\alpha_2}\Big\}\mathcal{F}_{(m-1)\delta+\alpha_2}\\ &=\mathcal{F}_{(m-1)\delta+\alpha_2}f_1\Psi(a(n))+(-1)^{m+n-1}\frac{[2n]_q}{n}\Big\{k_1^{n-1}k_2^n\mathcal{F}_{(m-1)\delta+\alpha_2}\mathcal{E}_{(n-1)\delta+\alpha_2}\\ &-(\mathcal{T}_2^{-1}\Phi)^{m-n}(e_1)f_1k_1^{n+m-1}k_2^{n+m}\Big\}+(-1)^{m+n}\frac{[2n]_q}{n}k_1^{n-1}k_2^n\mathcal{E}_{(n-1)\delta+\alpha_2}\mathcal{F}_{(m-1)\delta+\alpha_2}\\ &+(-1)^{m+n}q^2f_1\Big\{(-1)^n\mathcal{F}_{(m-1)\delta+\alpha_2}\Psi(a(n))-\frac{[2n]_q}{n}q^{-2}(\mathcal{T}_2^{-1}\Phi)^{m-n}(e_1)k_1^{n+m-1}k_2^{n+m}\Big\}.\end{aligned}$$

重新排列各项并消去中间项后，可得

$$\Psi(a(n))\mathcal{F}_{m\delta} = \mathcal{F}_{m\delta}\Psi(a(n)) + (-1)^{m+n}\frac{[2n]_q}{n}\Big\{k_1^{n-1}k_2^n\big[\mathcal{E}_{(n-1)\delta+\alpha_2}, \mathcal{F}_{(m-1)\delta+\alpha_2}\big] + \big[(\mathcal{T}_2^{-1}\Phi)^{m-n}(e_1), f_1\big]k_1^{n+m-1}k_2^{n+m}\Big\}.$$

通过简单的归纳推理可得以下等式

$$(\mathcal{T}_2^{-1}\Phi)^{m-n}(e_1) = -k_1^{n-m+1}k_2^{n-m}\mathcal{F}_{(m-n-1)\delta+\alpha_2}. \tag{3.31}$$

结合这些结果，表达式最终化简为

$$\Psi(a(n))\mathcal{F}_{m\delta} = \mathcal{F}_{m\delta}\Psi(a(n)) - \mathcal{F}_{(m-n)\delta}k_1^nk_2^n\cdot\frac{[2n]_q}{n}\cdot\left(k_1^nk_2^n - k_1^{-n}k_2^{-n}\right).$$

证明至此完成。 □

推论 3.14。对于 $n \in \mathbb{Z}_+$，成立

$$[\Psi(a(n)), \mathcal{F}_{n\delta}] = k_1^nk_2^n\frac{[2n]_q}{n}\cdot\frac{(k_1k_2)^n - (k_1k_2)^{-n}}{q-q^{-1}}. \tag{3.32}$$

证明。回顾负虚根向量的定义

$$\mathcal{F}_{n\delta} = \mathcal{F}_{(n-1)\delta+\alpha_2}f_1 + (-1)^nq^2f_1\mathcal{F}_{(n-1)\delta+\alpha_2}. \tag{3.33}$$

对方程 (3.26) 应用自同构 $(\mathcal{T}_2^{-1}\Phi)^{n-1}$ ，得到

$$\Psi(a(n))\mathcal{F}_{(n-1)\delta+\alpha_2} = (-1)^n\mathcal{F}_{(n-1)\delta+\alpha_2}\Psi(a(n)) - \frac{[2n]_q}{n}q^{-2}e_1k_1^{2n-1}k_2^{2n}. \tag{3.34}$$

将方程 (3.27)、(3.33) 和 (3.34) 直接代入后续计算，可得

$$\begin{aligned}
\Psi(a(n))\mathcal{F}_{n\delta} &= \Psi(a(n))\Big\{\mathcal{F}_{(n-1)\delta+\alpha_2}f_1 + (-1)^nq^2f_1\mathcal{F}_{(n-1)\delta+\alpha_2}\Big\}\\
&= \Big\{(-1)^n\mathcal{F}_{(n-1)\delta+\alpha_2}\Psi(a(n)) - \frac{[2n]_q}{n}q^{-2}e_1k_1^{2n-1}k_2^{2n}\Big\}f_1\\
&\quad + (-1)^nq^2\Big\{(-1)^{n-1}f_1\Psi(a(n)) - \frac{[2n]_q}{n}q^{-2}k_1^{n-1}k_2^n\mathcal{E}_{(n-1)\delta+\alpha_2}\Big\}\mathcal{F}_{(n-1)\delta+\alpha_2}\\
&= \mathcal{F}_{(n-1)\delta+\alpha_2}f_1\Psi(a(n)) - \frac{[2n]_q}{n}\Big\{k_1^{n-1}k_2^n\mathcal{F}_{(n-1)\delta+\alpha_2}\mathcal{E}_{(n-1)\delta+\alpha_2}\\
&\quad - e_1f_1k_1^{2n-1}k_2^{2n}\Big\} + \frac{[2n]_q}{n}k_1^{n-1}k_2^n\mathcal{E}_{(n-1)\delta+\alpha_2}\mathcal{F}_{(n-1)\delta+\alpha_2}\\
&\quad + q^2f_1\Big\{(-1)^n\mathcal{F}_{(n-1)\delta+\alpha_2}\Psi(a(n)) - \frac{[2n]_q}{n}q^{-2}e_1k_1^{2n-1}k_2^{2n}\Big\}.
\end{aligned}$$

重新排列各项并消去中间项后，可得

$$\Psi(a(n))\mathcal{F}_{n\delta} = \mathcal{F}_{n\delta}\Psi(a(n)) + \frac{[2n]_q}{n}\Big\{k_1^{n-1}k_2^n\big[\mathcal{E}_{(n-1)\delta+\alpha_2}, \mathcal{F}_{(n-1)\delta+\alpha_2}\big] + \big[e_1, f_1\big]k_1^{2n-1}k_2^{2n}\Big\}. \tag{3.35}$$

结合这些结果，该表达式最终化简为

$$\Psi(a(n))\mathcal{F}_{n\delta} = \mathcal{F}_{n\delta}\Psi(a(n)) + k_1^n k_2^n \cdot \frac{[2n]_q}{n} \cdot \left(k_1^n k_2^n - k_1^{-n}k_2^{-n}\right).$$

证明至此完成。 □

推论 3.15. 对于 $n, m \in \mathbb{Z}_+$ 且满足 $n > m$，有

$$[\Psi(a(n)), \mathcal{F}_{m\delta}] = 0, \tag{3.36}$$

将 Ω 应用于 *(3.36)*，可得一个类似的公式。

证明。与推论 3.14 的证明类似。 □

引理 3.16. 对于 $n, m \in \mathbb{Z}_+$，$\Psi(a(n))$ 与 $\Psi(a(-m))$之间的交换关系满足

$$[\Psi(a(n)), \Psi(a(-m))] = \delta_{n-m,0}\frac{[2n]_q}{n} \cdot \frac{(k_1k_2)^n - (k_1k_2)^{-n}}{q - q^{-1}}. \tag{3.37}$$

证明。根据 n 与 m 之间的关系，我们分两种情况进行分析 .

(I) 当 $n > m$ 时。根据定理 3.5 中 Ψ(*a*(−*m*)) 的定义，我们有

$$\Psi(a(-m)) = \mathcal{F}_{m\delta}(k_1k_2)^{-m} + \frac{q - q^{-1}}{m}\sum_{r=1}^{m-1} r\Psi(a(-r))\mathcal{F}_{(m-r)\delta}(k_1k_2)^{-m+r}. \tag{3.38}$$

对 r 使用归纳法可得，Ψ(*a*(*n*)) 与 Ψ(*a*(−*r*)) 交换。由于 $n > m$, Ψ(*a*(*n*)) 与方程 (3.38) 右端的所有项交换。因此

$$[\Psi(a(n)), \Psi(a(-m))] = 0, \quad n > m. \tag{3.39}$$

(II) 当 $n = m$ 时。将方程 (3.32)、(3.36) 和 (3.39) 代入下式并进行计算，我们得到

$$\begin{aligned}\Psi(a(n))\Psi(a(-n)) &= \Psi(a(n))\Big(\mathcal{F}_{n\delta}(k_1k_2)^{-n} + \frac{q - q^{-1}}{n}\sum_{r=1}^{n-1} r\Psi(a(-r))\mathcal{F}_{(n-r)\delta}(k_1k_2)^{-n+r}\Big) \\ &= \mathcal{F}_{n\delta}(k_1k_2)^{-n}\Psi(a(n)) + \frac{[2n]_q}{n} \cdot \frac{(k_1k_2)^n - (k_1k_2)^{-n}}{q - q^{-1}} \\ &\quad + \frac{q - q^{-1}}{n}\sum_{r=1}^{n-1} r\Psi(a(-r))\mathcal{F}_{(n-r)\delta}(k_1k_2)^{-n+r}\Psi(a(n))\end{aligned}$$

$$= \Psi(a(-n))\Psi(a(n)) + \frac{[2n]_q}{n} \cdot \frac{(k_1k_2)^n - (k_1k_2)^{-n}}{q - q^{-1}}.$$

根据 (I) 和 (II) 的结论，我们证明了该引理的有效性。 □

引理 3.17. Ψ 是一个代数同态。

证明。我们验证 Ψ保持 $U_{\mathbf{q}}^D(\widehat{\mathfrak{sl}_2})$ 的定义关系 (D1)—(D6)。显然， Ψ 保持 (D1) 和 (D2)，因此只需验证 (D3)—(D6)。

对于 (D3)，由引理 3.16 可得。

对于 (D4)，由于 $\Psi(x^+(k)) = (\mathcal{T}_1\Phi)^k(e_1)$ 且 $\Psi(x^-(k)) = (\mathcal{T}_1\Phi)^{-k}(f_1)$，分别将 $(\mathcal{T}_1\Phi)^k$ 和 $(\mathcal{T}_1\Phi)^{-k}$ 应用于等式 (3.16) 和 (3.27) 两边，可得 Ψ保持 (D4)。

对于 (D5)，由引理 3.7 和 3.8 可得 Ψ保持 (D5)。

(D6）通过诸如 $[\mathcal{E}_{n\delta+\alpha_i}, \mathcal{F}_{m\delta+\alpha_j}]$ 这样的对易关系得以保持 .

至此，我们完成了定理 3.5 的证明。 □

3.3. **定理 3.6 的证明**。**定理 3.6.** 存在一个满射 $\Xi: U_{\mathbf{q}}(\mathfrak{sl}_2) \to U_{\mathbf{q}}^D(\widehat{\mathfrak{sl}_2})$ 使得 $\Psi\Xi = \Xi\Psi = \mathrm{id}$.

证明。我们在生成元上定义 Ξ 如下

$$k_1 \longmapsto \gamma k_2^{-1}, \quad e_1 \longmapsto x^+(0), \quad f_2 \longmapsto -k_2 x^+(-1),$$
$$k_2 \longmapsto k_2, \qquad f_1 \longmapsto x^-(0), \quad e_2 \longmapsto -x^-(1)k_2^{-1}.$$

因此，不难看出 $\Xi\Psi = \Psi\Xi = \mathrm{id}$。 □

至此，我们已经证明了新型量子仿射代数 $U_{\mathbf{q}}(\mathfrak{sl}_2)$ 的 Drinfeld 同构定理。

致谢

R.S. Zhuang 获得中国地质大学（武汉）科研基金资助（项目编号：2025017）。G. FENG 获得国家自然科学基金委员会项目（编号：12526586）资助。N.H. HU 获得国家自然科学基金委员会项目（编号：12171155）资助，并部分获得上海市科学技术委员会资助（项目编号：22DZ2229014）。

参考文献

[1] N. Andruskiewitsch 和 H.-J. Schneider，《有限维尖点Hopf代数的分类》，Ann. of Math. (2)**171**(1) (2010), 375–417.[2] G. Benkart 和 S. Witherspoon，《双参数量子群与 Drinfel'd 双》，Algebr. Represent.Theory **7** (2004), 261–286。

[3] G. Benkart 和 S. Witherspoon, 《双参数量子群的表示与 Schur-Weyl 对偶》, 载于: Hopf 代数, Lecture Notes in Pure and Appl. Math. 237, Dekker, 纽约, 2004, 第 65–92 页。[4] N. Bergeron、Y. Gao 和 N. Hu, 《Drinfel'd 双与双参数量子群的 Lusztig 对称》, J. Algebra 301 (2006), 378–405。[5] G. Feng、N. Hu 和 R. Zhuang, 《另一种具有量子 Weyl 群的 $A_1^{(1)}$ 型容许量子仿射代数》, Journal of Geometry and Physics, 165 (2021), 104218。[6] I. Heckenberger, 《对对角型 Nichols 代数玻色化的 Drinfeld 双的 Lusztig 同构》, J. Algebra 323 (2010), 2130–2182。[7] I. Heckenberger, 《对角型 Nichols 代数的 Weyl 群胚》, Invent. Math. 164 (2006), 175–188。[8] N. Hu、M. Rosso 和 H. Zhang, 《双参数量子仿射代数 $U_{r,s}(\mathfrak{sl}_n)$、Drinfeld 实现与量子仿射 Lyndon 基》, Comm. Math. Phys. 278 (2008), 453–486。[9] N. Hu 和 Q. Shi, 《例外型 G_2 的双参数量子群与 Lusztig 对称》, Pacific J. Math. 230 (2007), 327–345。[10] N. Hu 和 H. Zhang, 《双参数量子仿射代数 $U_{r,s}(\widehat{\mathfrak{g}})$ 的顶点表示: 单边情形》, arXiv:1401.4925。[11] N. Hu 和 R. Zhuang, 《一种新型 $A_1^{(1)}$ 型量子仿射代数及其 PBW 基》, Contemporary Mathematics. Providence, RI: American Mathematical Society, 771 (2021)。[12] N. Jing 和 H. Zhang, 《双参数量子仿射代数$U_{r,s}(\mathfrak{sl}_n)$ 的费米子实现》, Lett. Math. Phys. 89 (2009), 159–170。[13] N. Jing 和 H. Zhang, 《通过有限群与 McKay 对应构造的双参数量子顶点表示》, Trans. Amer. Math. Soc. 363 (7) (2011), 3769–3797。[14] N. Jing 和 H. Zhang, 《〈扭量子仿射代数的 Drinfeld 实现〉补遗》, Comm. Algebra 38 (2011), 3484–3488。[15] Y. Pei、N. Hu 和 M. Rosso, 《多参数量子群与量子 shuffle, (I)》, Contemp. Math. 506 (2010), 145–171。[16] M. Takeuchi, 《GL(n) 的双参数量子化》, Proc. Japan Acad., Ser. A 66 (1990), 112–114。[17] H. Zhang, 《Drinfeld 实现、量子仿射 Lyndon 基与双参数量子仿射代数的顶点表示》, 博士学位论文, 华东师范大学 (2007)。

(R.S.Zhuang) 中国地质大学数学与物理学院, 中国武汉 430074电子邮箱: zhuangrushu@cug.edu.cn (G. Feng) 上海理工大学理学院, 中国上海 200093电子邮箱: fengge@usst.edu.cn(N.H. Hu) 华东师范大学数学科学学院、数学与工程应用教育部重点实验室及上海市PMMP重点实验室, 中国上海 200241电子邮箱: nhhu@math.ecnu.edu.cn