arXiv:2601.20574v1 [math.CO] 28 Jan 2026

关于着色伪线排列中的三角形

Yan Alves Radtke * Balázs Keszegh † Robert Lauff ‡

我们研究伪直线以两种颜色着色的伪直线排列中的面。Björner、Las Vergnas、Sturmfels、White 和 Ziegler 猜想，这类排列中存在一个双色三角形。我们研究这一问题的若干变体。我们证明，在伪直线排列的任意非平凡双着色中，都存在一个双色三角形或四边形。我们还探讨在着色具有某些结构的假设下，双色三角形是否存在。

此前，若干作者研究了这样一些超图的色数和独立数：其顶点对应于某个排列中的伪直线，超边则对应于该排列中的面。我们证明，这类超图的独立数的最大值为 $\lceil \frac{2}{3}n - 1 \rceil$。我们还证明，如果只考虑三角形面，那么这个最大值将变为 $n - \Theta(\log n)$。

1 引言

欧氏伪线排列 是欧氏平面中有限条双向无限的简单曲线的集合，这些曲线称为伪直线，它们两两恰好相交于一点，我们称该点为交点。

若没有三条伪直线交于同一点，则该排列是简单的。我们只考虑简单排列。

伪直线排列产生一组顶点、边 和面，见图 1。若一个有界面恰好由三条（相应地，四条）伪直线支撑，我们称其为三角形 （相应地，四边形）。有时我们考虑三条伪直线之间的区域，并称之为非空三角形。

伪直线排列中三角形数量的最小值和最大值已为人所知[7, 5]。关于三角形的其他问题仍未解决。我们将考虑这样的排列：其中伪直线

*数学研究所，柏林工业大学，德国。alves@math.tu-berlin.de

†HUN-REN Alfréd Rényi数学研究所及厄特沃什·罗兰大学，布达佩斯，匈牙利。keszegh@renyi.hu。本研究得到ERC高级资助“ERMiD”以及NRDI基金EXCELLENCE-24项目（编号151504，组合学与几何）的支持。本研究在匈牙利创新与技术部提供的支持下实施，资金来自国家研究、发展与创新基金，并依据ELTE TKP 2021-NKTA-62资助计划提供资助。

‡数学研究所，柏林工业大学，德国。lauff@math.tu-berlin.de

被染成蓝色或红色，且每种颜色至少有一条伪直线。我们称这类排列为双着色排列。1993年，Björner、Las Vergnas、Sturmfels、White 和 Ziegler 提出了关于双着色排列中是否存在双色三角形的问题。

猜想1 ([4,第 280])。 每个双着色排列都含有一个双色三角形 .

另一个看待这个问题的方式是考察三角形-伪直线关联图。将三角形和伪直线作为顶点；如果一条伪直线支撑某个三角形，就在它们之间连一条边。直观上，我们可以探讨这个图的连通性。

猜想2 ([4,第 278])。 伪直线排列的三角形-伪直线关联图是连通的。 [1]

注意，猜想1和猜想2是等价的。双着色直线排列中双色三角形的存在性有一个简单的证明：将蓝色子排列上下平移。考虑排列组合结构发生变化的第一个时刻。此时，一个蓝蓝交点越过了一条红线，或一个红红交点越过了一条蓝线。这个交点和这条线在原排列中构成一个双色三角形。

在 [8] 中给出了这一结果的一个推广：如果一个排列 $\mathcal{A} = \{\ell_1, \ldots, \ell_n\}$ 中的每条伪直线 ℓ_i 都是函数 f_i 的图像，且 $f_i - f_j$ 严格单调递增（$i < j$），那么该排列称为趋近排列。在 [8] 中，他们证明了可以移动这些伪直线，同时使曲线集合仍然构成一个伪直线排列，因此猜想1对所有趋近排列都成立。

趋近排列的数量具有与所有排列类别相似的渐近性质，但已知一些规模较小、不同构于趋近排列的排列实例。

尽管趋近排列情形下的证明非常优雅且直观，但迄今为止，针对一般情形还没有取得多少进展。我们将介绍这一问题若干较简单变体的相关结果。

为了进一步理解伪直线排列中的三角形，我们还考虑（伪）直线-三角形超图。这是一个3-均匀超图，其顶点对应于（伪）直线；若三条相应的（伪）直线构成一个三角形，则这三个顶点形成一条超边。于是，猜想1断言，该超图的每一种真2-着色都包含一条非单色超边。我们给出了关于该超图独立数的一个定理，也就是说，我们研究了在排列中不包含任何单色三角形时，两个色类的基数之差异最多可以有多大。

1.1 预备知识

我们将欧几里得排列视为标记排列，它们有一个固定的无界面，我们称之为北面。选定北面后，伪直线便有了规范的编号，见图 1。由此，每组三条直线都确定了一种定向：如果中间的伪直线从另外两条伪直线的交点上方经过，我们就称这组三条伪直线的定向为“-”；否则为 $+$，见图 1。

[1]原始的（较弱）猜想涉及射影排列。

定义 1 ([9])。 函数 $\sigma\colon \binom{[n]}{k} \to \{-,+\}$ 是定义在 n 个元素上的秩为 k 的符号拓，当所有

$$S \coloneqq \{x_1 < x_2 < \cdots < x_{k+1}\} \subseteq [n],$$

该序列

$$\sigma(S \setminus x_1), \sigma(S \setminus x_2), \ldots, \sigma(S \setminus x_{k+1})$$

至多有一次符号变化。

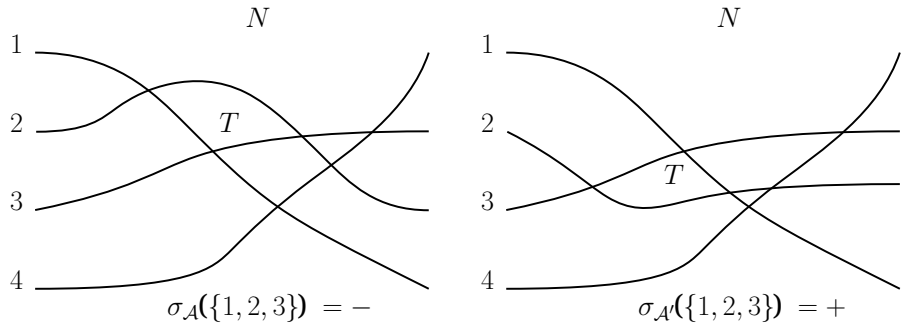


图 1：北面由 N 标记。面 T 是一个三角形。交点 (1,2) 和 (1,3) 是顶点，它们由一条边连接。左侧的排列对应于全为“–”的符号拓。右侧的排列是通过翻转 T 得到的。

$\mathcal{A}$ 中伪直线三元组的定向产生秩 3 符号拓 $\sigma_{\mathcal{A}}$。反过来，每个秩 3 符号拓都可以看作标记伪直线排列 [9] 的三角形定向。可以通过翻转一个三角形 T，对伪直线排列 $\mathcal{A}$ 进行局部变异，从而得到 $\mathcal{A}'$，也就是说，改变支撑 T 的伪直线的定向。这等价于 $\sigma_{\mathcal{A}}$ 和 $\sigma_{\mathcal{A}'}$ 只相差一个值，该值对应于 T。参见图 1。

定位三角形最基本的工具是所谓的伪直线扫掠引理。

引理 1 ([9])**.** 设 ℓ 是一个标记排列中的一条伪直线。如果ℓ上方有一个交点，那么 ℓ上方就有一个交点，它与 ℓ一起构成一个三角形。对于 ℓ下方的交点，结论也成立。

具有相同参数的符号拓集合上有两种先验上不同的序：包含序，其中 $\sigma_1 \le \sigma_2$，当 $\sigma_1^{-1}\{+\} \subseteq \sigma_2^{-1}\{+\}$ 时；以及单步包含序，其中 $\sigma_1 \le \sigma_2$，如果存在一系列 $-$ 到 $+$ 的翻转，将 σ_1 变为 σ_2。以下结论由 Felsner 和 Weil 证明。

定理 1 ([10])**.** 秩为三的符号拓上的单步包含序与包含序一致。

两种有趣的排列是所谓的循环排列。它们分别对应全为 $+$ 或全为 $-$ 的符号拓。见图 2。

1.2 我们关于双色面的结果

我们考察猜想1的多个较弱变体。首先假设排列的着色具有某些结构。为求完整起见，我们陈述如下结论，该结论已隐含在 [2]中。

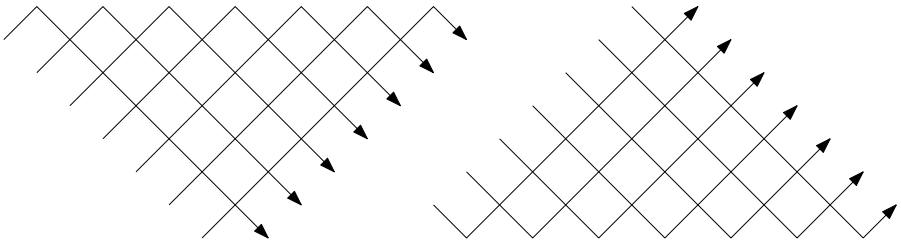


图 2：8 条伪直线上的两个循环排列。注意，这些排列可以由直线实现。

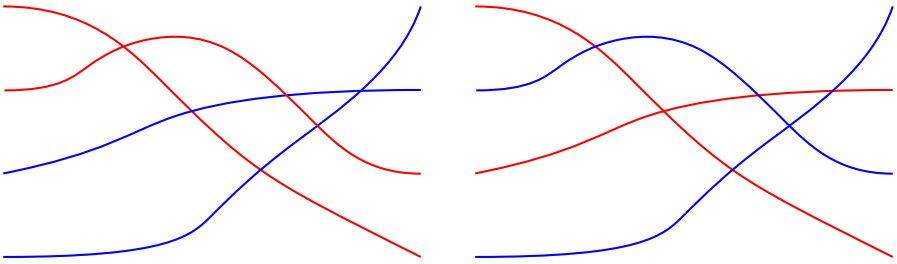


图 3：　　左侧的排列是块双着色的。右侧的排列则不是。　　.

定理 2. 至多含有 *5* 条红色伪直线的双着色排列中存在一个双色三角形。

这意味着，如果我们用 $n/5$ 种颜色给一个排列着色，并且用到了所有这些颜色，那么就存在一个非单色三角形。这也意味着，对于所有具有$n \leq 11$的排列，该猜想都成立。若能选取一个北方单元，使得由该北方单元所诱导的编号中，前几条伪直线为红色，其余为蓝色，我们就称一个（未标记的）双色伪直线排列为块双着色；见图 3。该结果最初由 Felsner[通过个人通信]证明。这里我们给出一个更简洁的证明。

定理 3. 如果一个伪直线排列是块双着色的，那么其中存在一个双色三角形。

随后，我们拓展了这个问题，并研究了低复杂度双色面的存在性。

定理 4. 每个双着色排列都包含一个双色三角形或一个双色四边形。

Re标记 1. 如果找到一个四边形，那么这个四边形的颜色顺序为红-红-蓝-蓝　　.

1.3 （伪）直线-面与（伪）直线-三角形超图

本节中，我们始终假设（伪）直线排列是简单的，并且其中的（伪）直线两两相交。

设 $H_{line-face}(\mathcal{A})$表示一组直线 $\mathcal{A}$的排列的直线-面超图，即其顶点对应于这些直线，且若相应直线在该排列中构成一个面（包括无界面），则该子集构成一条超边。$H_{psline-face}(\mathcal{A})$对一组伪直线的构形以同样方式定义。注意，每个直线排列都是伪直线排列。我们也考虑无界面。

这些超图的性质早先由Bose等人[6]研究，随后其初步结果由Ackerman等人 [1] 以及Balogh和Solymosi [3]加以改进。

令 α 表示一个超图的独立数，即独立集的最大规模。以下定理总结了关于线-面超图相关参数的已有认识：

定理5 ([6, 1, 3])。

- $\Omega(\sqrt{n\log n}) = \min\limits_{|\mathcal{A}|=n} \alpha(H_{psline-face}(\mathcal{A})) \le \min\limits_{|L|=n} \alpha(H_{line-face}(\mathcal{A})) \le n^{5/6+o(1)}$,
- $n^{1/6-o(1)} \le \max\limits_{|\mathcal{A}|=n} \chi(H_{line-face}(\mathcal{A})) \le \max\limits_{|\mathcal{A}|=n} \chi(H_{psline-face}(\mathcal{A})) = O(\sqrt{n/\log n})$,
- $n/2 \le \max\limits_{|\mathcal{A}|=n} \alpha(H_{line-face}(\mathcal{A})) \le \max\limits_{|\mathcal{A}|=n} \alpha(H_{psline-face}(\mathcal{A})) < \frac{2}{3}n$.

我们来回顾上述定理的发展历程。首先，在 [6] 中证明了 $\min_{|\mathcal{A}|=n} \alpha(H_{line-face}(\mathcal{A}))$ 的下界为 $\sqrt{n}+1-1$，随后在 [1] 中将其改进为 $\Omega(\sqrt{n}\log n)$。他们的证明对伪直线同样适用，甚至也适用于非简单构型。上界是在 [3] 中通过给出一种构造得到的，该构造改进了所谓 Erdős (3,4) 问题的最佳界，随后再将其对偶化（这两个问题之间的对偶关系早在 [1] 中就已提及）。这些结果直接推出了 $\max_{|\mathcal{A}|=n} \chi(H_{line-face}(\mathcal{A}))$ 和 $\max_{|\mathcal{A}|=n} \chi(H_{psline-face}(\mathcal{A}))$ 的界，尽管此前 [6] 中已有一个 $\Omega(\log n/\log\log n)$ 的下界。值得指出的是，迄今为止，即使我们只考虑与该排列中的有界三角形面相对应的那些超边，这些结果仍然成立。

$\max_{|\mathcal{A}|=n} \alpha(H_{line-face}(\mathcal{A}))$ 的上界同样来自 [6], ，他们的证明对伪直线也成立。下界也在 [6] 中得到了证明：他们指出，对于直线处于凸位置的直线排列，其直线-面超图是二可着色的，因此其中一个色类必定是大小至少为 $n/2$ 的独立集。注意，这也意味着 $\min_{|\mathcal{A}|=n} \chi(H_{face}(\mathcal{A})) = 2$。他们还证明，任何直线-面超图为二可着色的直线排列中，两个色类的大小都必须为$n/2 + O(\sqrt{n})$，因此仅利用这类直线排列，我们无法显著改善 $\max_{|\mathcal{A}|=n} \chi(H_{line-face}(\mathcal{A}))$ 的下界。

Our 关于这类超图的首个结果基本解决了最大化 α 的问题：

定理 6。

- $\max\limits_{|\mathcal{A}|=n} \alpha(H_{psline-face}(\mathcal{A})) = \lceil \frac{2}{3}n - 1 \rceil$,
- $\lfloor \frac{2}{3}(n-1) \rfloor \le \max\limits_{|\mathcal{A}|=n} \alpha(H_{line-face}(\mathcal{A})) \le \lceil \frac{2}{3}n - 1 \rceil$.

注意，对于 $n = 3k$ （分别对于 $n = 3k+1$），$\max_{|\mathcal{A}|=n} \alpha(H_{line-face}(\mathcal{A}))$ 的下界和上界均为 $2k-1$（分别为 $2k$）。然而，对于 $n = 3k-1$，这些界仍存在微小差距，因为它们只能得出 $2k-2 \le \max_{|\mathcal{A}|=n} \alpha(H_{line-face}(\mathcal{A})) \le 2k-1$。对于较小的值 $k = 1, 2, 3, 4$，上界给出的就是准确结果，后文将会看到。注意，对于伪直线，上界始终给出准确结果：对 $n = 3k-1$，$\max_{|\mathcal{A}|=n} \alpha(H_{psline-face}(\mathcal{A})) = 2k-1$。

我们可以不考虑（伪）直线-面超图，而考虑（伪）直线-三角形超图，记作 $H_{line-triangle}(\mathcal{A})$（分别记作 $H_{psline-triangle}(\mathcal{A})$）。我们也考虑

非有界三角面。下面的结论直接由定理5推出，因为（伪）直线-三角形超图是（伪）直线-面超图的子超图。我们还利用了这一点：在 [3] 中的构造里，只考虑有界三角形面就足以得到较小的独立数。

推论1。

- $\Omega(\sqrt{n \log n}) = \min_{|\mathcal{A}|=n} \alpha(H_{psline-triangle}(\mathcal{A})) \leq \min_{|\mathcal{A}|=n} \alpha(H_{line-triangle}(\mathcal{A})) \leq n^{5/6+o(1)}$,
- $n^{1/6-o(1)} \leq \max_{|\mathcal{A}|=n} \chi(H_{line-triangle}(\mathcal{A})) \leq \max_{|\mathcal{A}|=n} \chi(H_{psline-triangle}(\mathcal{A})) = O(\sqrt{n/\log n})$.

因此，对于上述参数，我们对直线-面超图和直线-三角形超图的认识相同。然而，我们关于这类超图的第二个结果表明，$\max \alpha$ 的行为变化显著：

定理7。 $\max_{|\mathcal{A}|=n} \alpha(H_{psline-triangle}(\mathcal{A})) = n - \Theta(\log\ n)$ 和 $\max_{|\mathcal{A}|=n} \alpha(H_{line-triangle}(\mathcal{A})) = n - \Theta(\log\ n)$。

2 证明

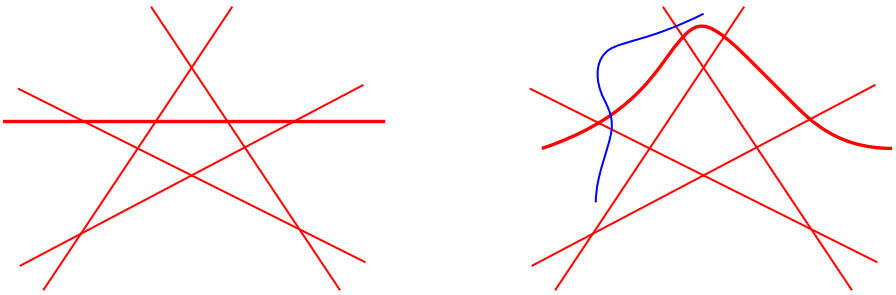


图 4：左侧是一个 5 星形。右侧展示了翻转第一个三角形并找到一个新三角形后的情形。

定理 2 的证明。 设 $\mathcal{A}$ 是一个双色伪直线排列，其中红色伪直线至多有 5 条，且至少有一条蓝色伪直线。我们对红色直线的数量进行（有限）归纳。若红色伪直线至多有两条，则两条直线都支撑着某些三角形， $\mathcal{A}$由引理 1 可知。由于 $\mathcal{A}$中的红色伪直线少于 3 条，这些三角形必为双色的，从而完成归纳起始步骤。

现在假设红色子排列具有一条极端伪直线 ℓ，也就是说，每个交点都位于它的某一侧。如果 ℓ 在 $\mathcal{A}$中也是极端的，我们就将其删除。根据归纳法，剩余排列包含一个双色三角形，由于 ℓ 被假设为极端伪直线，该三角形不可能被 ℓ相交。如果 ℓ 在 $\mathcal{A}$ 中不是极端的，那么它有一侧包含交叉点，但不包含两条红色伪直线的交叉点。我们应用引理 1，在这一侧找到一个由 ℓ 支撑的三角形。该三角形是双色的，因为它不可能只由红红交叉点组成。因此，我们可以假设红色子排列没有极端直线。由于任意包含 4 条伪直线的排列都包含一条极端伪直线，现在我们可以假设红线的数量

恰好为 5。很容易验证，唯一一个不包含极端伪直线的 5 条伪直线排列就是图 4 所示的 5 星形。

对于 5 星形，我们可以论证这五个三角形必须为空：假设其中一个不为空，并考虑将其与红色五边形分隔开的红线。由于该红线在 $\mathcal{A}$中不是极值的，因此其两侧都必须支撑一个三角形。于是，这个三角形必定是双色三角形，因为在其一侧唯一的单色三角形按假设并不为空。从现在起，我们假设红色子排列的五个三角形均为空。这意味着 5 星形的五边形面也是空的。我们还假设 $\mathcal{A}$ 中不止一条蓝色伪直线，否则引理 1 将给出一个双色三角形的存在性。

由于至少有两条蓝色伪直线，因此存在一个蓝蓝交点。由于没有蓝色伪直线与 5 星形的三角形相交，该蓝蓝交点位于 5 星形的一个无界面中。于是，存在一条红色伪直线将该蓝蓝交点与五边形分隔开来。我们将引理 1 应用于这条红色伪直线，即应用于包含蓝蓝交点的一侧。

在那里我们找到一个三角形。如果这个三角形不是 5 星形图中的三角形，问题便迎刃而解。否则，翻转这个三角形，并再次对同一条伪直线的同一侧应用引理 1。找到的第二个三角形必定是双色的。如果这个三角形也属于原排列，问题便迎刃而解。现在假设第二个三角形不属于原排列，也就是说，第一个翻转产生了第二个三角形。注意，新产生的三角形必定由参与第一次翻转的两条红色伪直线支撑，因此第三条伪直线是蓝色伪直线；根据我们先前的假设，它不可能穿过五边形。因此，第一个翻转产生新三角形的情形实际上是唯一的，如图 4 所示。于是，5 星形图中的五个三角形并非全都为空，这与我们先前的假设矛盾。

□

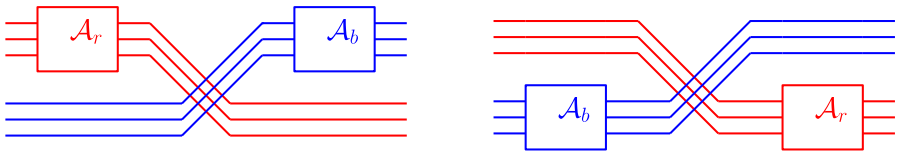


图 5：具有指定子排列的两个极值排列

*定理 3 的证明。*给定一个未标记的块双色排列 $\mathcal{A}$，我们将红色伪直线诱导的排列 $\mathcal{A}_r$ 和蓝色伪直线诱导的排列$\mathcal{A}_b$称为相应的排列。我们希望将 $\mathcal{A}$ 视为一个标记排列。为此，我们选择块双色排列定义中的北极。

考虑图 5 中所示的构形。将左侧的排列称为 $\mathcal{A}_{min}$，右侧的排列称为 $\mathcal{A}_{max}$。

在 $\mathcal{A}_{min}$ 中，对于任意一组三条直线，只要它们并非全为同一颜色，最大编号的伪直线就会从另外两条直线的交点下方经过。这意味着每个双色三元组都具有 $-$ 定向。

类似地，每个双色三元组 $\mathcal{A}_{max}$ 的定向为 $+$。$\mathcal{A}, \mathcal{A}_{max}$ 和 $\mathcal{A}_{min}$ 中其余的单色三元组具有相同的定向。由上述观察可知，$\mathcal{A}_{min} \leq \mathcal{A} \leq \mathcal{A}_{max}$ 在包含序中显然成立。根据定理 1，存在一系列（长度可能为零！）“$-$ 到 $+$”三角形翻转，将 $\mathcal{A}$ 变为 $\mathcal{A}_{max}$。由于这两个排列

在单色三元组上相同，因此这一系列只包含双色三角形翻转。对 $\mathcal{A}_{min}$也有类似的结论。

显然 $\mathcal{A}_{min} \neq \mathcal{A}_{max}$，因此 $\mathcal{A} = \mathcal{A}_{min}$ 和 $\mathcal{A} = \mathcal{A}_{max}$ 不可能同时成立，所以两个翻转序列不可能都为空。此类序列中第一个被翻转的三角形是 $\mathcal{A}$的一个三角形。根据上面的观察，这意味着 $\mathcal{A}$中至少有一个双色三角形。此外，如果 $\mathcal{A} \neq \mathcal{A}_{min}$ 和 $\mathcal{A} \neq \mathcal{A}_{max}$都成立，那么 $\mathcal{A}$ 中有两个定向相反的双色三角形。

□

请注意，这个证明给出了一个构形序列，看起来就像是我们将一个子构形向左移动，这与直线排列的证明类似。

接下来我们将使用透镜扫描引理，该引理在 [2]中陈述。

引理 2（透镜扫描引理）。设 Q 是由两条曲线 L 和 R围成的透镜。假设 Q内有一组曲线，其中任意两条曲线至多相交一次，且每条曲线都与 L 和 R 恰好相交一次。如果 Q内有一个交点，那么存在一个由 L支撑的三角形。

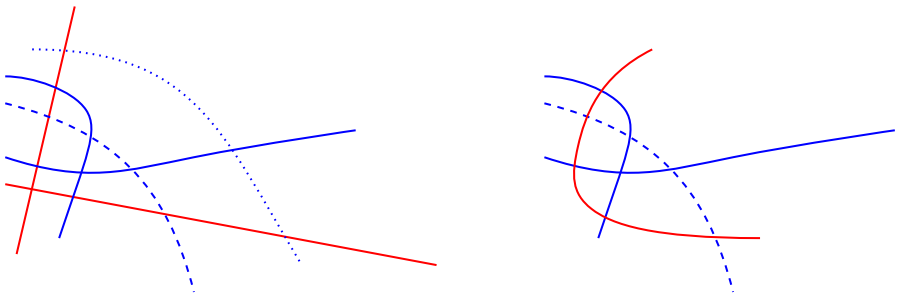


图 6：定理 4 证明的图示。虚线蓝色直线与两条红线形成一个透镜。

定理 4 的证明。 在一个双着色排列中，我们考虑由红色伪直线和一条蓝色伪直线诱导的子排列。根据扫掠引理，该子排列中存在一个以蓝色伪直线为一边的蓝红红三角形 T 。我们重新引入其余的蓝色伪直线，并考虑穿过 T的蓝色伪直线。如果其中有一条与两条红色边都相交，则我们得到一个更小的蓝红红三角形，从而使用归纳法。否则，所有蓝色伪直线都与蓝色边以及其中一条红色边相交。然后，仅取三角形内部的排列部分，并将所有直线沿两个方向延长至无穷，再把构成 T 两条红色边的两条红色半直线连接成一条曲线，我们便得到一个如引理 2 中那样仅含横截弧的透镜。如果没有弧穿过该透镜，则 ℓ_a，ℓ_b 与 ℓ_c 构成一个双色三角形。如果透镜内部没有交点，则我们在透镜内找到一个双色三角形，它由顶点（ℓ_a，ℓ_b）以及能看见该顶点的唯一的弧组成。

否则，我们可以通过三角形翻转将透镜的红线向蓝色方向扫过，从而找到一个由该红线和两条穿过透镜的蓝色伪直线所形成的三角形。于是，在该侧我们有一个红-蓝-蓝三角形；在合并两条红线之前，它要么是一个红-蓝-蓝三角形，要么是一个红-红-蓝-蓝四边形，证明完成。

□

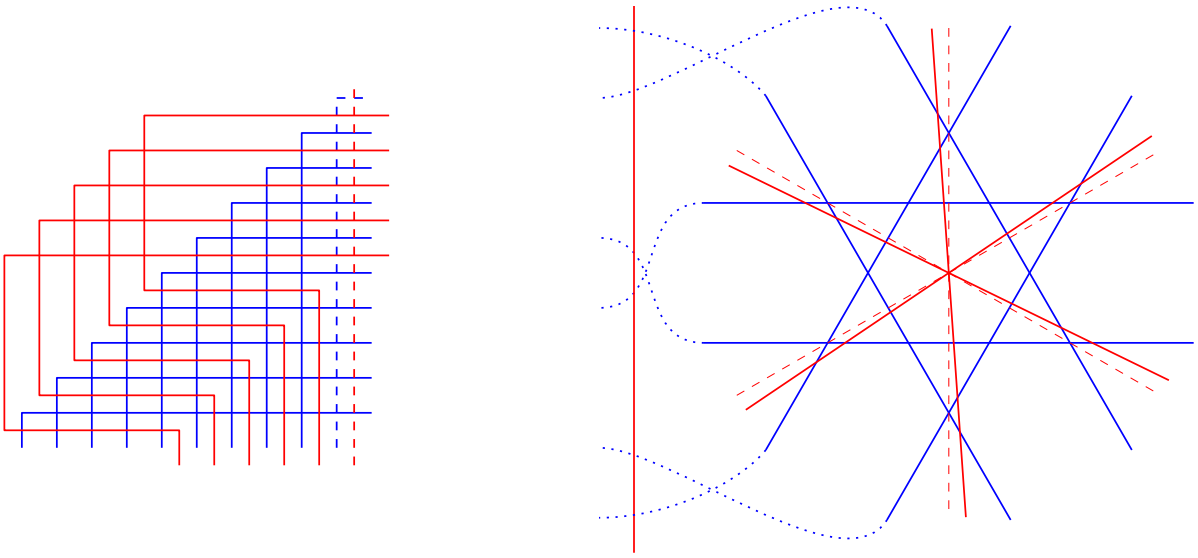


图7：左：10 条（去掉虚线后为 9 条）蓝色伪直线构成了由 16 条（去掉虚线后为 14 条）直线组成的伪直线-面超图中的一个独立集。右：6 条直线构成了由 10 条直线组成的直线-面超图中的一个独立集。

定理 *6* 的证明。 伪直线的上界由定理5推出。为完整起见，并且由于我们稍后会略微加强这一论证，首先回顾其证明。给定一个大小为 n 的伪直线排列 L，设 s 是伪直线-面超图中的一个大小为 I 的独立集。于是， I 中的伪直线形成 $s(s+1)/2+1$ 个单元。 $J=L\setminus I$ 中的每条伪直线都与 $s+1$ 个这样的单元相交。注意， $|J|=n-s$。由于 I 是一个独立集，每个单元都必须至少被相交一次。因此，由于 s 是一个整数，

$$(n-s)(s+1)\geq s(s+1)/2+1,$$

$$n\geq \frac{3}{2}s+1/(s+1),$$

$$s<\frac{2}{3}n,$$

$$s\leq \lceil \frac{2}{3}n-1\rceil .$$

引理 3. 如果在 n 条伪直线 L 的集合中， $2k-1$ 条（蓝色）伪直线组成一个独立集 I，那么蓝色伪直线的子排列 I 中必定存在一个面 C，使得 C 无界，每条（红色）伪直线都经过 C，并且对于 J 中的其他每个面， J 中恰有一条伪直线经过该面。

证明。 示例见图7左侧去掉虚线后的图，以及图8中的$k=3$，4。用直线也可以轻松画出 $k=1$，2 这两种情况。

首先，我们对上述关于 $n=3k-1$ 的计算稍作改进。假设我们有一个由 L 条直线组成的集合，大小为 $n=3k-1$，以及一个大小为 $s=2k-1$ 的（蓝色）直线独立子集 I。按任意顺序取出 $J=L\setminus I$ 中的（红色）直线，并注意到，除了第一条之外， J 中的每条直线都会在由 I 构成的排列的某些单元中（至少一个！）与之前的直线相交，因此在这些单元中，它实际上不会穿过新的单元。

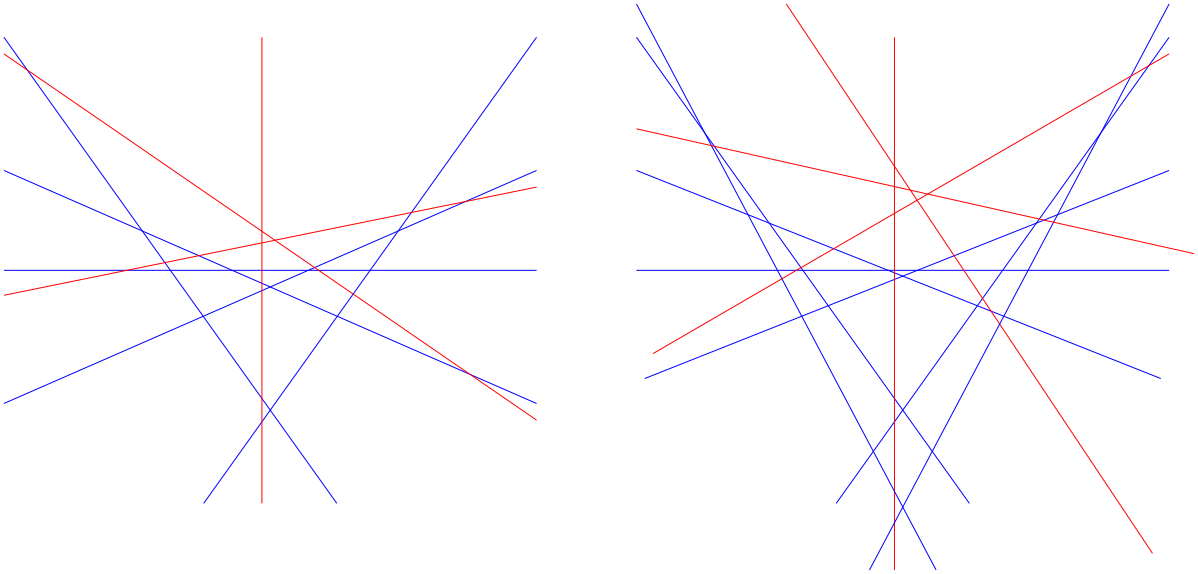


图 8：左：5 条蓝线在 8 条直线的直线-面超图中形成一个独立集。右：7 条蓝线在 11 条直线的直线-面超图中形成一个独立集。

因此，我们可以用下面这个更强的不等式替代上述不等式：

$$(s+1)+(n-s-1)s=(n-s)s+1\geq s(s+1)/2+1.$$

现在利用 $n=3k-1$ 和 $s=2k-1$，我们得到

$$k(2k-1)+1\geq(2k-1)(2k)/2+1.$$

由于上述实际上是一个等式，这意味着不可能再有损失；特别地，最后一条直线与之前所有直线的交点都位于 I 的同一个面中。对于直线的任何排列，这一点都成立；特别地，任何一条直线都可以作为最后一条直线。这意味着 J 中的每一对直线实际上都必须在 C 中的同一个面内相交，其中 C 是 I 的排列中的一个面。 C 必须是一个无界胞腔，否则它至多有 $2k-1$ 个边，而 J 中的每一条 k 直线都需要与其中两个不同的边相交（否则它们会在另一个面中相交，从而造成进一步的损失），这是不可能的。此外，由于不可能再有损失，其他每个面都恰好与 J 的一条直线相交。 □

现在我们给出下界构造。我们从伪直线的情形开始。也就是说，对于每个 n，我们需要一个伪直线集合 L，其中存在一个大小为 $\lceil\frac{2}{3}n-1\rceil$ 的直线子族 L'，它在伪直线-面超图中构成一个独立集。示意见图7（左）。设 $k\geq 1$ 为整数。首先，我们取 $2k$ 条（蓝色）伪直线，使其构成一个阶梯（它们的排列实际上与处于凸位置的直线排列相同）。然后，我们按照图 7（左）取 $k+1$ 条（红色）直线。注意，蓝色伪直线排列中的每个面都会被某条红色伪直线穿过。因此，在蓝色和红色伪直线的排列中，不存在仅由蓝色伪直线围成的面。这意味着，在这个包含 $3k+1$ 条伪直线的构造中， $2k$ 条蓝色伪直线在伪直线-面超图中构成一个独立集。注意， $2k=\lceil\frac{2}{3}(3k+1)-1\rceil$，正如所需。

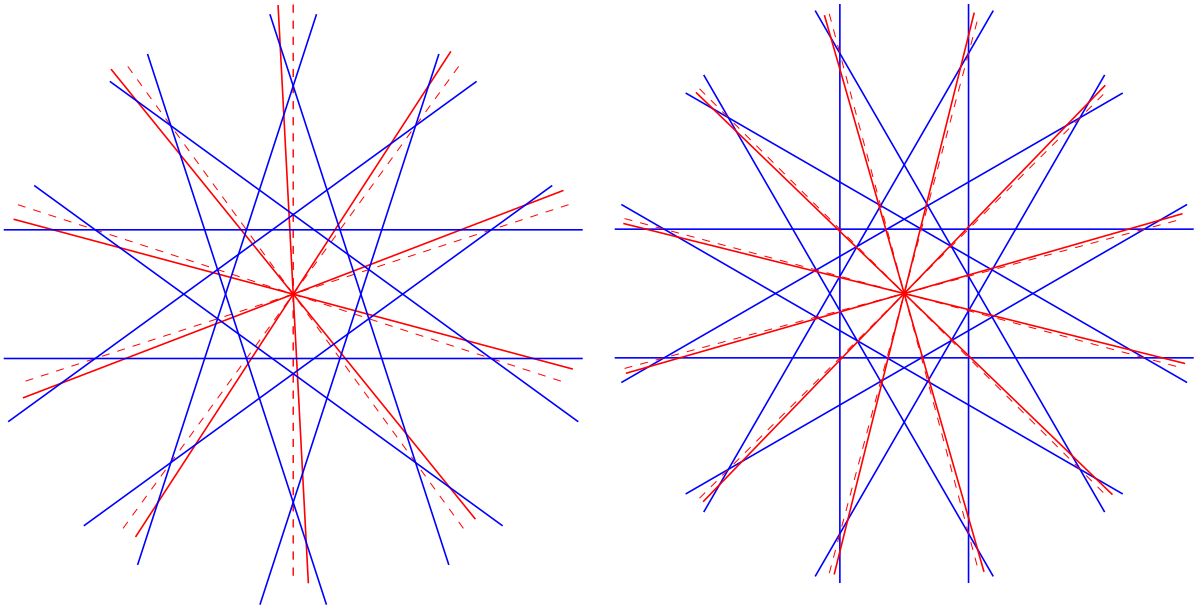


图9：左：10条蓝色直线在15条直线的直线-面超图中构成一个独立集，并含有蓝色直线的平行线对。右：12条直线在18条直线的直线-面超图中构成一个独立集，并含有蓝色直线的平行线对。

删除一条蓝线（例如图中的虚线）后，我们得到一个包含 $3k$ 条伪直线和 $2k-1$ 条蓝色伪直线的构造，并注意到 $2k-1=\lceil \frac{2}{3}(3k) - 1\rceil$。

最后，通过删除最右侧的蓝线和最右侧的红线（按其底部竖直部分穿过 x轴的顺序，即图中的虚线），我们得到一个含有 $3k-1$ 伪直线和 $2k-1$ 蓝色伪直线的构造，并注意到 $2k-1=\lceil \frac{2}{3}(3k-1) - 1\rceil$。还要注意，正如引理 3所保证的，每一个红线交点都发生在蓝色直线排列的同一个面中。总之，我们得到了 n每一个取值的构造。

现在我们给出使用直线的构造。考虑正 $2k$边形。将其所有边延长为直线后，我们得到一个由 $2k$ 直线组成的直线排列。注意，由该 $2k$边形对边产生的直线对相交于无穷远。除大小为 $2k$的中心面外，其他每个面的边界上至多有4条直线。

现在我们添加 k 条红线，它们经过由 $2k$ 条蓝色直线形成的星形图的相对顶点（当 k 为偶数时，这些线是 $2k$ 边形的 k 条对角线；当 k 为奇数时，这些线将 $2k$ 边形的边平分，见图9）。每个蓝色四边形都由两对直线构成，每对直线沿着 $2k$ 边形相邻。根据构造的对称性，这意味着每个由蓝色直线构成的四边形恰有两个顶点落在红线上。蓝色三角形也要么有两个顶点被红线经过，要么其内部被红线经过。此外，二边面都位于 $2k$ 星形图的一个顶点处，因此有一条红线在其内部与之相交。于是，稍微绕红线的交点旋转红线后，蓝色直线排列中的所有面内部都会有红线经过。我们还可以稍微平移红线，使得没有三条直线交于同一点。不过，还有一些尚未相交的蓝色平行线对。因此，对于每一对蓝色平行线，我们稍微旋转其中一条，使得由此产生的交点具有较小（即较大的负）x 坐标。现在添加一条竖直红线，使所有蓝蓝交叉点都位于它的右侧。见图7（右）。因此，这条新的红线会穿过因蓝色平行线相交而产生的每个面

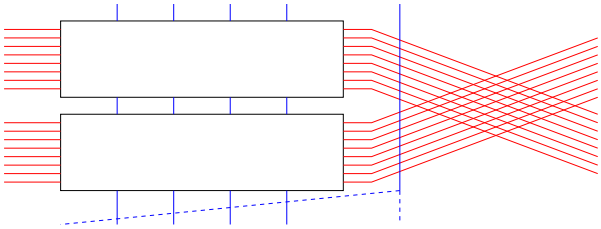


图 10：底部的块没有蓝色交叉点，而顶部的块要么包含所有蓝色交叉点，要么不包含任何蓝色交叉点。额外的蓝线要么在下方与所有其他蓝色直线相交，要么完全不与它们相交。

在使蓝色平行线相交后，产生了这些面。这个构造共有 $3k+1$ 条直线，其中 $2k$ 条构成一个独立集。删除一条或两条蓝色直线，分别得到 $3k$ 或 $3k-1$ 的构造，因此我们得到了适用于 n 的每个取值的构造。

如前所述，这只能得到 $2k-2$ 条独立直线（当 $n=3k-1$ 时），比上界少一条。对于较小的值 $k=1$、2、3、4，我们可以得到相匹配的构造，见图 8 中$k=3$、4。

□

定理7的证明。 我们先通过构造一个双色伪直线排列来给出一个下界：该排列包含 $\mathcal{A}$ 条蓝色直线和 2^n 条红线，且不含任何单色红三角形。于是，红线集合在 H_Δ 中是独立的。更确切地说，我们用归纳法证明以下结论：存在两个伪直线排列，一个是部分排列，另一个是适当排列，它们都包含 n 条蓝色直线和 2^n 条红线，且不含任何单色三角形；红线和蓝色直线横截相交。也就是说，沿着一条包围所有交叉点的简单闭曲线观察，交线的颜色只改变 4 次；并且其中一个排列有蓝色交叉点（从而使该排列成为适当排列），另一个排列则没有蓝色交叉点（从而使该排列成为部分排列）。对于 1 条蓝色直线和 1 条红线，显然满足这一条件，这构成了归纳的起始情形。在这种情况下，两个排列相同。假设对于某个 n，这些结论成立。

将有蓝色交叉点的构造放在上方，将没有蓝色交叉点的构造放在下方，分别作为一个块，并使蓝色直线对齐。按照图 10 所示，使两个块中的红线相交。形成的唯一单色三角形位于两个块之间以及新的红色交叉点之间，并且它们全部是红色的。添加一条新的蓝线，使其与所有这些三角形相交（从而将其破坏），然后使它在所有结构的下方与所有蓝色直线相交。显然，这不会引入任何蓝色三角形，因为底部的块不包含蓝色交叉点。对于没有蓝色交叉点的情形，构造方法相同，只是将该构造本身作为一个块使用两次，并且不在下方产生新的蓝色交叉点。构造完成。

现在，我们的目标是构造一个类似的直线排列，使其不含单色红三角形。我们将证明，不含蓝蓝交叉点的构造可以由直线排列实现。为此，假设根据归纳法，存在一个由直线实现的排列；不失一般性，所有蓝色直线都是竖直的。取一份红线排列的副本，沿着蓝线向下平移。我们将考察红红交叉点的 x坐标。令 A 为由一对红线形成、且这两条线不属于同一份红色子排列副本的交叉点集合。反过来，令 B 为两条线都属于同一份红色子排列副本的红红交叉点集合。注意， B 中各点的 x坐标与副本的平移无关。只要平移得足够远，我们就可以假设

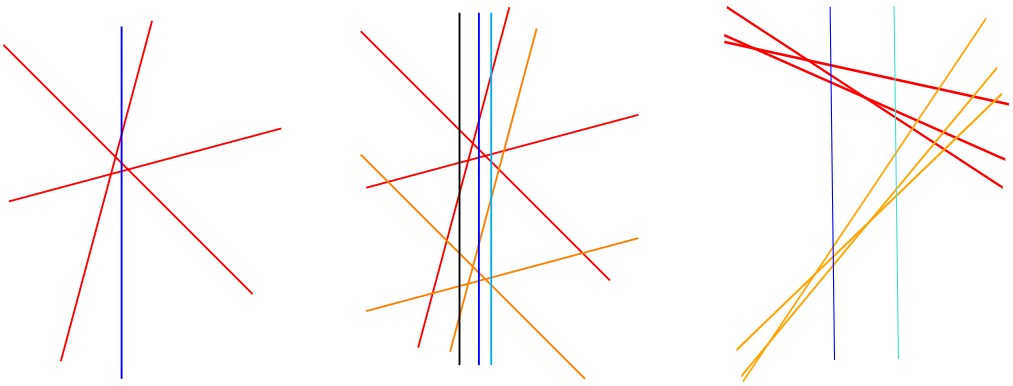


图 11：第一个排列是归纳基础。在第二个排列中，橙色直线是红线的一个平移副本，青色和黑色直线则与蓝线平行。将黑色直线移至无穷远处，即可得到右侧的排列。

对于任何 $(a_1,\ a_2)$，$(b_1,\ b_2) \in B$ 和 $(c_1,\ c_2) \in A$，都有 $a_1 < c_1 < b_1$。我们插入两条新的竖直直线，使得 B 位于它们之间，且 A 中没有点位于它们之间。在这两条直线中，我们将右边的一条涂成蓝色。我们通过射影变换将左边的一条送至无穷远处。注意，此时红线不再有平行线。这一直线排列现在与不含蓝蓝交叉点的构造的下一归纳步骤同构。示意图见图11。为了得到不含平行线的直线排列，我们对蓝线的斜率稍作扰动。由此可知，定理7对直线-三角形超图成立，因为我们构造了一个双色直线排列，其中不含红色单色三角形，并有2^n 条红线和 n 条蓝色直线。

我们通过证明每个含有 2^n 条红线且蓝线少于 $\binom{cn-2}{2}$ 条的伪直线排列都包含一个单色红色三角形，来建立上界。设 $\mathcal{A}$ 是一个含有 2^n 条红色伪直线的排列。那么，根据点线对偶的 Erdős-Szekeres 定理，$\mathcal{A}$ 包含一个由 cn 条红线组成的子集，这些红线构成循环排列。由于伪直线排列中的每个三角形都包含一个空三角形，这个循环排列的 $cn-2$ 个三角形中包含 $\mathcal{A}$ 个空红色三角形。注意，添加到循环排列中的任意一条伪直线至多与其中两个空三角形相交。因此，添加任意一组 $\binom{cn-2}{2} - 1$ 条蓝色伪直线到 $\mathcal{A}$ 后，所得排列中仍有一个先前找到的空红色三角形保持为空且为单色，从而完成证明。

□

3 讨论

当红色伪直线不超过 5 条时，关于双色三角形存在性的猜想已得到证明。图12展示了一个由 6 条红色伪直线构成的特殊情形；我们无法在一般情况下解决这个情形（也就是说，无论添加什么蓝色伪直线都无法解决），并且认为它特别有趣。请注意，在任何添加蓝色伪直线的扩展中，根据引理 1，每条红色伪直线两侧都必须有一个与其相邻的三角形，因此要么其中一个是双色三角形，从而问题得以解决；要么图中的灰色三角形都不能被蓝色伪直线穿过。

关于（伪）直线面超图和（伪）直线-三角形超图的界仍存在较大差距，唯一例外是 $\max \alpha$，它由定理 6 和定理7 处理。关于定理 6 中的微小差距，很可能对于直线而言，我们会得到与伪直线相同的答案

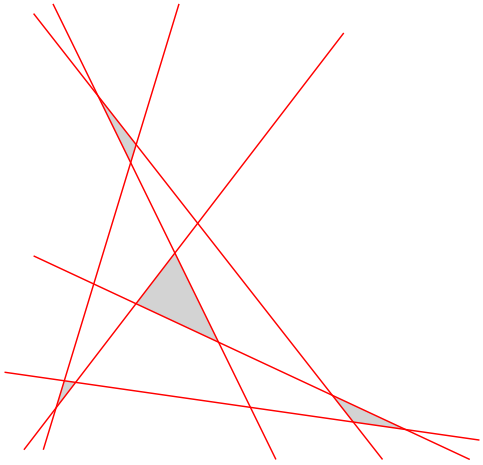


图12：六条红色伪直线，我们需要为其添加若干条蓝色伪直线。

，即 $\max^{\alpha}_{|\mathcal{A}|=n}(H_{line-face}(\mathcal{A})) = \lceil \frac{2}{3}n - 1 \rceil$? 我们猜想，只要再多花些功夫，就能将针对 $n = 8$、11 的构造（见图 8）推广到任意 $n = 3k - 1$，但我们仍将结果中这 1 的差距留作一个开放问题。

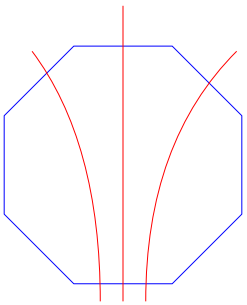


图 13：3 条伪直线将一个 8 边形分割成五边形。

为了证明定理 4，我们尝试证明以下命题，但未能成功。我们认为这个命题本身也很有趣，并猜想它成立。

猜想 3. 给定一个蓝色 k边形 P，至少有 $k-4$ 条红色伪直线穿过它，则其内部边界上存在一个双色三角形或四边形。

容易看出，$k-4$是紧的，因为可以取 $k-5$条红色伪直线，使它们在 k边形内没有交点，并将 k边形分割成五边形，因此根本不存在三角形或四边形，更不用说双色三角形或四边形了，见图 13。

致谢

我们感谢序与几何研讨会 2024的组织者以及 Stefan Felsner 进行的有益讨论。我们感谢 Gábor Tardos 的宝贵讨论，这些讨论最终促成了定理 6。

参考文献

[1] Eyal Ackerman、János Pach、Rom Pinchasi、Radoš Radoičić 和 Géza Tóth。关于直线排列着色的一则札记。《电子组合学杂志》，21(2)，2014年。[2] Yan Alves Radtke、Stefan Felsner、Johannes Obenaus、Sandro Roch、Manfred Scheucher 和 Birgit Vogtenhuber。伪直线与伪圆构形的翻转图连通性。*SODA 24* 论文集，2024年。[3] Jozsef Balogh 和 Jozsef Solymosi。关于平面上一般位置点的数量。《离散分析》，2018年。[4] Anders Björner、Michel Las Vergnas、Bernd Sturmfels、Neil White 和 Günter Ziegler。定向拟阵，《数学百科全书》第 46 卷。剑桥大学出版社，剑桥，1993年。[5] Jérémy Blanc。简单伪直线排列中三角形数量的最佳多项式界。《几何组合学》，21：5–17，2011年。[6] Prosenjit Bose、Jean Cardinal、Sébastien Collette、Ferran Hurtado、Matias Korman、Stefan Langerman 和 Perouz Taslakian。构形的着色与守卫。《离散数学理论与计算机科学》，15(3)：139–154，2013年。[7] Stefan Felsner 和 Klaus Kriegel。欧几里得构形中的三角形。《离散与计算几何》，22：429—-438，1999年。[8] Stefan Felsner、Alexander Pilz 和 Patrick Schnider。趋近伪直线的构形。《离散与计算几何》，67：380–402，2022年。[9] Stefan Felsner 和 H. Weil。扫掠、构形与符号拓。《离散应用数学》，109(1–2)：67–94，2001年。[10] Stefan Felsner 和 Helmut Weil。高阶布拉哈特序定理。《离散与计算几何》，23(1–2)：121–127，2000年。