arXiv:2601.20715v1 [math.GT] 28 Jan 2026

Khovanov 同调的函子性

Dorra Hamza 指导教师：
Emmanuel Wagner

摘要

我们概述 Blanchet 的 Khovanov 同调定向模型，该模型消除了函子性中的符号歧义。我们对这一构造作出详细且自成一体的阐述。我们证明了定向模型具有严格函子性，并简要介绍它向带奇点的余边界的扩展；Scott Carter、Benjamin Cooper、Mikhail Khovanov 和 Vyacheslav Krushkal 最近在 [Car+25] 中研究了这种扩展。

目录

1 引言 **2**

2 泡沫范畴 **2**

3 泡沫的求值 **5**

4 万有构造 **12**

5 图的求值 **13**

6 使用泡沫的 Khovanov 复形 16
6.1 泡沫范畴中的形式链复形.16 6.2 Khovanov 复形的定义：图示.17 6.3 不变性.19 6.4 三价拓扑量子场论.38 6.5 琼斯多项式的范畴化.39

7 恢复原始 Khovanov 同调 39
7.1 原始定义.39 7.2 着色.40 7.3 $\mathcal{T}(G)$ 的一组基.42 7.4 主要结果.43

8 Lee-Khovanov 同调 46
8.1 Lee 退化.46 8.1.1 Karoubi 包络.47 8.1.2 Lee 理论的应用.47

9 函子性 **49**
9.1 嵌入协边.49 9.2 函子性的证明.51

10 浸入协边 **57**

1 引言

在 [Kho00] Khovanov 定义了一种将琼斯多项式范畴化的同调理论。后来有人证明[Jac02] ，链环的 Khovanov 同调在符号歧义下具有函子性：链环之间的协边会在各自的 Khovanov 复形之间诱导映射，而这些映射仅在同伦和整体符号意义下确定。此后，人们曾多次尝试消除符号歧义（[Cap08], [CMW07]）。其中一种被广泛认为最自然的方法由 Blanchet [Bla10]提出。他定义了 Khovanov 同调的一个定向模型，用 三价图和泡沫替代原始定义中的圆和曲面。随后，Michael Ehrig、Daniel Tubbenhauer 和 Paul Wedrich 在 [ETW17] 中使用类似工具给出了关于 gl_n 同调的完整证明。

Khovanov 同调的函子性在低维拓扑中有着重要应用。具体而言，它被用于定义 Rasmussen 的 s 不变量 [Ras10], ，该不变量给出了纽结切片亏格的一个界，并被用于给出关于环面纽结切片亏格的 Milnor 猜想的组合证明。函子性还被用于发展 Skein–Lasagna 不变量，该不变量在四维拓扑中有着重要应用（[RW24], [MWW22]）。

最近，Khovanov 同调关于配边的构造被推广到带有双重点奇点的配边 [Car+25]。人们已经证明，与此类配边相关的映射在相差一个符号的意义下是良定义的。

然而，目前并没有多少易于理解的参考资料详细介绍 Blanchet 的构造并确立严格函子性。本文旨在提供这样一份参考资料，使具有不同背景的读者都能阅读，包括那些可能不熟悉原始文献的读者。在本文末尾，我们还将讨论如何将该构造推广到带有奇点的配边，并在这一情形下给出严格函子性的一个直接证明。另一个利用 Khovanov 同调函子性的证明见于 $\mathbb{S}^3$ ，参见 [Imo+25]。

本文的结构如下。第 2 节定义三价图和泡沫，它们构成泡沫范畴。在 [Bla10]Blanchet 定义了带装饰的闭泡沫的整数值求值，并用它构造了一个从泡沫范畴到分次模范畴的 TQFT函子。第 3 节给出一个更一般的公式，用整数系数的二元对称多项式环中的元素对泡沫进行求值。这是 [RW20] 中定义的更一般构造的特例，适用于具有任意 n 的 sln–泡沫。第 4 节介绍一种方法，按照 [Bla10] 中的做法，定义从泡沫范畴到分次模范畴的典范函子。事实证明，这一构造是第 5 节所定义的闭图求值的一种范畴化。

接着，我们在第 6 节使用泡沫定义缠结的 Khovanov 复形。我们采用与 [Bar05], 中相似的方法，从图示定义入手，在泡沫范畴中处理形式复形，然后通过显式映射证明其在同伦意义下的不变性。第 6.4 节将本文使用的泡沫求值与 Blanchet 定义的 TQFT函子联系起来。随后，我们在第 6.5 节将琼斯多项式还原为 Khovanov 同调的分次欧拉特征。

到目前为止，尚无明确理由表明由 Blanchet 定义的 Khovanov 复形与原始的 Khovanov 复形相一致。我们在第 7 节中基于[Bel+19]给出它们确实同构的证明。

函子性证明的最后一个要素是第8节所讨论的 Lee霍瓦诺夫同调。在本节中，我们采用 [BM06] 中的 Karoubi 包络方法，在泡沫设定下证明 Lee 退化。

第 9 节专门用于证明嵌入情形下 Khovanov 同调的函子性：首先如 [Bar05], 那样建立相差一个符号的函子性，然后利用 Lee/等变霍瓦诺夫同调来确定该符号。最后，在第 10 节中，我们如 [Car+25]那样将这一构造推广到浸入协边，并以证明浸入协边范畴中的严格函子性作为结束。

2 泡沫范畴

在前两节中，我们希望定义 sl_n–Foams 的求值公式，该公式由 [RW20], 引入，并在此处专门针对 sl_2 的情形。我们先从定义泡沫范畴开始。

定义 2.1 节。 闭三价图是嵌入在 $\mathbb{R}^2$ 中的有向三价图，满足：

- 边用红色或蓝色标记。

- 在每个三价顶点处，我们有两条蓝色边和一条红边。这些边的定向必须满足如图1所示的流条件。
- 如图1所示，在相交于一个三价顶点的两条蓝色边上固定一个次序。



图1：三价顶点。

我们还允许蓝色和红色的定向圆。
设 B 是 $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^2$中的一个点集。带边界 B 的三价图 Γ 是某个嵌入在 $\mathbb{R}^2$中的闭三价图的交集 $\Gamma' \pitchfork \mathbb{D}^2$，且满足 $\Gamma' \cap \mathbb{S}^1 = B$。为简便起见，我们规定边界邻域中的所有弧均为蓝色。

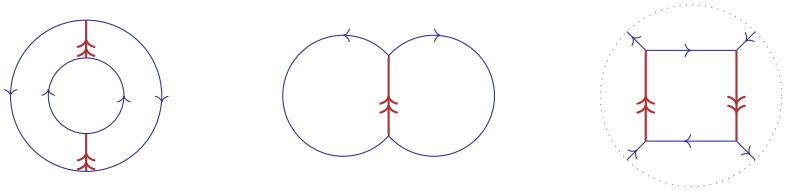


图2：三价图的一些例子。红边用两个箭头标记，以便在灰度图中区分。

定义2.2。 泡沫 是一个闭合的2-复形，其正则面（称为**面片**）标记为蓝色或红色，并满足：

- 奇异轨迹称为绑定。绑定的一个连通分支的邻域由两个蓝页和一个红页组成。
- 绑定带有定向。
- 我们选择红页的定向，使其与绑定的定向一致，并在两个蓝页上取相反定向。
- 根据绑定的定向，按照右手定则对蓝页进行排序（图5）。
- 我们可以在复形的面片上添加装饰：在蓝色面片上添加点，在红色面片上添加点和正方形。

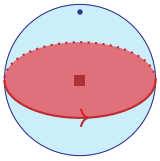


图3：一个（闭合）泡沫的示例。红色曲面在灰度图中应显示得更深。

设 Γ_1 和 Γ_2 是具有相同边界 B的两个三价图，该边界可以为空。从Γ_1到 Γ_2的**配边**，或一个 Γ_1-$foam$-Γ_2，是嵌入在 $\mathbb{R}^3$ 中的带装饰的泡沫 Σ与 $\mathbb{D}^2 \times [0,1]$的交集，且满足：

- 存在一个 $\epsilon_0 > 0$，使得 $\Sigma \cap \mathbb{D}^2 \times [0, \epsilon_0] = (\Gamma_1) \times [0, \epsilon_0]$。

- 存在一个 $\epsilon_1 < 1$，使得 $\Sigma \cap \mathbb{D}^2 \times [\epsilon_1, 1] = (-\Gamma_2) \times [\epsilon_1, 1]$。
- $\Sigma \cap (\mathbb{S}^1 \times [0,1])$ 是边界 B 乘以 $[0,1]$
- Σ 的边界是 $\Sigma \cap (\mathbb{S}^1 \times [0,1])$

$(-\Gamma)$ 是具有相反定向的图 Γ。
我们将协边视为在固定边界下环境同痕等价。图中将它们画成朝下。于是，协边的**垂直复合** 为:

设 Γ_0, Γ_1 和 Γ_2 是具有相同边界的三价图。设 Σ_0 是从 Γ_0 到 Γ_1 的配边， Σ_1 是从 Γ_1 到 Γ_2 的配边。从 Γ_0 到 Γ_2 的配边 $\Sigma_1 \circ \Sigma_0$ 是通过沿 Γ_1 粘合这两个配边，并重新缩放使其适配 $\mathbb{D}^2 \times [0,1]$ 而得到的。

闭合泡沫被视为从空集到空集的配边。

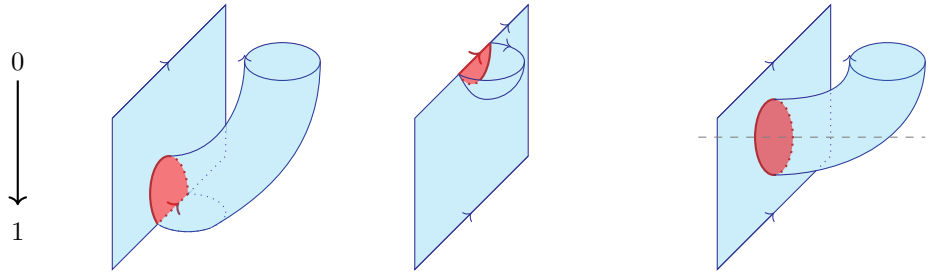


图4: 三价图之间的一些配边。右侧的配边是复合 另外两个的结果。

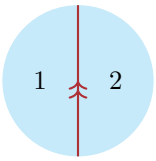


图5：绑定周围蓝页的顺序。

定义 2.3. 泡沫范畴 $\mathcal{F}(B)$ 的对象为边界为 B （可能为空）的三价图，而态射 $Hom_{\mathcal{F}}(\Gamma_0, \Gamma_1)$ 是由 Γ_0 与 Γ_1 之间的配边张成的自由 $\mathbb{Z}[X_1, X_2]$-模。图 Γ 的恒等态射是配边 $\Gamma \times [0,1]$。泡沫范畴中的复合是通过以自然的双线性方式扩展配边的垂直复合得到的。

当 B 为空时，泡沫范畴的幺半结构由三价图的不交并给出。

对于范畴 $\mathcal{F}(B)$ 中的配边 Σ，设 Σ_b 为蓝色子曲面，p 为点的数量， s 为 Σ 中正方形的数量。设 P 是 $\mathbb{Z}[X_1, X_2]$ 中次数为 d 的单项式。那么， $P\Sigma$ 的次数为 $deg(P\Sigma) = \chi(\Sigma_b) - 2(p + 2s + d) - \frac{1}{2}|B|$。这使得 $\mathcal{F}(B)$ 成为一个分次范畴。

定义 2.4. 分次范畴是一个预加性范畴$\mathcal{C}$，并具有以下两个额外性质:

- 对于 $\mathcal{C}$ 中任意两个对象 $O_{1,2}$，态射 $Mor(O_1, O_2)$ 构成一个分次阿贝尔群，复合映射与分次相容（即，只要复合有意义， $deg(f \circ g) = deg(f) + deg(g)$），并且所有恒等映射的次数均为零。

- 在 C 的对象上有一个 $\mathbb{Z}$–作用（m, O） $\to O\{m\}$，称为按 m 进行的分次平移。作为普通的阿贝尔群，态射在此作用下保持不变， $Mor(O_1\{m_1\}\ O_2\{m_2\}) = Mor(O_1, O_2)$，但分次会随此作用改变；因此，若 $f \in Mor(O_1, O_2)$ 且 $\deg(f) = d$，那么作为 $Mor(O_1\{m_1\}\ O_2\{m_2\})$ 中的元素， f的次数为 $d + m_2 - m_1$。

只满足第一条性质的预加性范畴，可以通过添加人工对象 $O\{m\}$ for $m \in \mathbb{Z}$ 将其视为分次范畴。

3 泡沫的求值

In t本节定义闭泡沫的不变量。我们先给出一些预备定义 s.

定义 3.1. 泡沫的**着色** Σ **取值于** {1,2} ，它为每个蓝色面片指定 1 或 2，并要求每个绑定周围都出现这两种颜色。每个红色面片都赋予完整集合 {1,2}。设 c 是泡沫 Σ的一种着色。我们用 Σ_1 表示 Σ 中由着色为 1 或{1,2}的面片组成的子曲面，用 Σ_b 表示 Σ 中由所有蓝色面片组成的子曲面。红色子曲面记作 Σ_r。
在绑定的一个连通分支的邻域内，两个蓝页的着色有两种可能：蓝色页的顺序与 1、2 的顺序一致，或者不一致。设 $n_{1\uparrow 2}$ 为相邻两个蓝页的着色顺序与其排列顺序一致的绑定数目（图5）。

断言。 闭合泡沫 Σ的子曲面 Σ_1 与 Σ_b 是闭合的。

证明。 在泡沫 Σ上固定一个着色。若 x 位于 Σ_1 的边界中，则它必须属于绑定 γ的某个连通分支；但在 γ 的一个邻域中，恰好有两个包含颜色1的页，一个为蓝色，一个为红色，从而给出 x 的一个与 $\mathbb{R}^2$同胚的邻域。因此 $\partial\Sigma_1$ 是空的。关于 Σ_b 的相应陈述可按同样方式证明。 □

定义 3.2。 设 F 为泡沫 Σ的一个面片。 F 的求值 P_F 是 $\mathbb{Z}[X_1, X_2]$中按如下方式定义的多项式:

- 若 F是由 $c \in \{1, 2\}$ 着色的蓝色面片，并用 p 个点 $P_F(X_1, X_2) = X_c^p$加以装饰。
- 若 F为红色，并用 p 个点与 s 个正方形 $P_F(X_1, X_2) = (X_1 + X_2)^p (X_1X_2)^s$加以装饰。

设 c 是泡沫 Σ 的一个着色，其求值为 $<\Sigma, c>$:

$$<\Sigma, c> = (-1)^{\frac{\chi(\Sigma_1)}{2}} (-1)^{n_{1\uparrow 2}} \frac{\prod_{F facet} P_F(X_c)}{(X_1 - X_2)^{\frac{\chi(\Sigma_b)}{2}}} \in \mathbb{Q}(X_1, X_2)$$

而闭合泡沫 Σ 的**求值** 记为 $<\Sigma>$，它是对 Σ 的所有可能着色求和所得的 $<\Sigma, c>$：

$$<\Sigma> = \sum_c <\Sigma, c> .$$

例 3.3。 一个简单的例子是计算单色球面的求值。红色球面 S_R 只有一种着色{1，2}，对于这种着色， Σ_b 为空， Σ_1 是球面本身，而 $n_{1\uparrow 2}$ 为零。因此 $<S_R> = <S_R, \{1, 2\}> = (-1)^{\frac{2}{2}} \times (-1)^0 {}^{1}(X_1 - X_2)_0 = -1$。

蓝色球面 S_B 有两种着色，分别为 1 和 2。两种情况下， Σ_b 都是该球面， $n_{1\uparrow 2}$ 都为零。对于着色 1，我们有 $\Sigma_1 = S_B$；对于着色 2， Σ_1 为空。
如果球面上没有装饰，我们得到 $<S_B, 1> = -<S_B, 2>$ 和 $<S_B> = 0$。最后，如果在 S_B 上有一个点，则： $<S_B, 1> = -\frac{X_1}{X_1 - X_2}$, $<S_B, 2> = \frac{X_2}{X_1 - X_2}$ 和~~$<S_B>$~~ $= <S_B, 1> + <S_B, 2> = -1$。

这对球面的任意定向选择都成立。

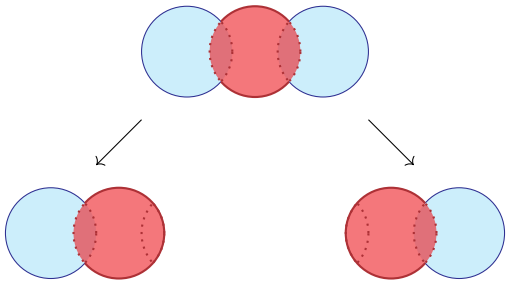
所有泡沫都至少有一种着色。事实上，我们可以从一个蓝色面片 F 开始，并将其着色为 1。显然，要使着色有效，相邻面片的颜色必须为 2，然后我们递归地继续。由此可以预期，这完全确定了 F 所属的 Σ_b 的连通分支C 的着色。我们只需检查，从 F 到 C 的一个面片 F' 的两条路径，是否会为 F'确定相同的颜色；这里的路径是由一系列绑定的连通分支组成，它们将 F连接到 $F\prime$。这是因为每次经过绑定的一个连通分支时，我们都会切换定向。因此，从 F 到 F' 的每条路径上，绑定的连通分支数量模 2 后都必须相同。所以， F' 的颜色是唯一确定的。

这个过程还表明，泡沫 Σ的每一种着色，都由对 Σ_b的每个连通分支中的一个面片进行着色的选择所确定。如果 Σ_b 有 k 个连通分支，那么 Σ的着色数恰好为 2^k。

命题 3.4. 泡沫 $<\Sigma>$ 的求值是一个系数属于 $\mathbb{Z}$.

证明。 如果我们在 Σ 的红色子曲面上添加 p 个点和 s 个正方形，就会将 $<\Sigma>$ 乘以 $(X_1+X_2)^p(X_1X_2)^s$。因此，只需证明红色子曲面上没有任何装饰的泡沫的情形即可。

固定一个着色 c。令 $\Sigma_{b,1},\ldots,\Sigma_{b,k}$ 为 Σ_b的连通分支。对于每个 $0\le\ell\le k$，我们可以通过移除 Σ_b 中除 $\Sigma_{b,\ell}$ 之外的所有分支，并在不接触 $\Sigma_{b,\ell}$ 的绑定分支上粘合圆盘，来定义一个新的泡沫 Σ_ℓ （见下图）。



令 P_ℓ 为 Σ_ℓ的求值，即对 Σ_ℓ 的所有着色对应的分式求和：

$$(-1)^{\frac{\chi(\Sigma_{1,\ell})}{2}}(-1)^{n_{1\uparrow 2,\ell}}\frac{\prod_{F\text{ facet of }\Sigma_{b,\ell}}P_F(X_c)}{(X_1-X_2)^{\frac{\chi(\Sigma_{b,\ell})}{2}}}$$

令 $c_{0,\ell},c_{1,\ell}$ 为每个分支 $\Sigma_{b,\ell}$的两种可能着色。于是， Σ 的着色完全由 $\{0,1\}^k$中的一个序列确定：对 Σ_b的每个分支选择 c_0或 c_1。对于 $c\in\{0,1\}^k$

$$<\Sigma,c>=(-1)^{\frac{1}{2}(\chi(\Sigma_1)-\sum_\ell(\chi(\Sigma_{1,\ell}))}\prod_{1\le\ell\le k}(-1)^{\frac{\chi(\Sigma_{1,\ell})}{2}}(-1)^{n_{1\uparrow 2,\ell}}\frac{\prod_{F\text{ facet of }\Sigma_{b,\ell}}P_F(X_c)}{(X_1-X_2)^{\frac{\chi(\Sigma_{b,\ell})}{2}}}$$

利用欧拉示性数的可加性，可以证明$\frac{1}{2}(\chi(\Sigma_1)-\sum_\ell(\chi(\Sigma_{1,\ell}))$与对 c 的选择无关，且等于 $r=\frac{1}{2}(k-1)\chi(\Sigma_r)$，其中（仅在此处） Σ_r是沿绑定的各个分支粘合圆盘而得到的 Σ的红色子曲面。这证明了：

$$<\Sigma>=(-1)^r\prod_{1\le\ell\le k}P_\ell.$$

只需证明 Σ_b 连通时结论成立。 [注意，曲面 Σ_b 不依赖于 Σ]的着色。

设 Σ 是一个泡沫，使得 Σ_b 连通，且红色子曲面上没有装饰。对于着色 c，定义 $s(\Sigma,c)=\frac{\chi(\Sigma_1)}{2}-n_{1\uparrow 2}$。由于 Σ_b 连通，恰有两种着色： c 和 c'。令 $s=s(\Sigma,c)$和 $s'=s(\Sigma,c')$。设 p 为着色 c时 Σ_1 中出现的点数， p'为着色 c'时 Σ_1 中的点数。假设 $p'\le p$。

$$\begin{aligned}<\Sigma>&=\frac{(-1)^sX_1^pX_2^{p'}+(-1)^{s'}X_2^pX_1^{p'}}{(X_1-X_2)^{\frac{\chi(\Sigma_b)}{2}}}\\&=(-1)^s(X_1X_2)^{p'}\frac{X_1^{(p-p')}+(-1)^{(s'-s)}X_2^{(p-p')}}{(X_1-X_2)^{\frac{\chi(\Sigma_b)}{2}}}\end{aligned}$$

首先，我们来证明 $s'-s\equiv\frac{\chi(\Sigma_b)}{2}$模 2。注意，对于第二种着色，包含颜色 1 的子曲面恰好是对于第一种着色包含颜色 2 的子曲面，因此 $n'_{1\uparrow 2}$ 是

绑定的连通分支数 b 减去 $n_{1\uparrow 2}$。

$$\begin{aligned} s' - s &= \frac{\chi(\Sigma_1)}{2} - \frac{\chi(\Sigma_2)}{2} + 2n_{1\uparrow 2} - b \\ &\equiv \frac{\chi(\Sigma_1) + \chi(\Sigma_2)}{2} - b \mod 2 \\ &\equiv \frac{\chi(\Sigma_b)}{2} - \chi(\Sigma_{red}) - b \mod 2 \\ &\equiv \frac{\chi(\Sigma_b)}{2} \mod 2 \end{aligned}$$

最后一个等式成立，是因为红色子曲面的欧拉示性数加上绑定的数量，等于“闭合起来”的红色子曲面的欧拉示性数，而后者是偶数。

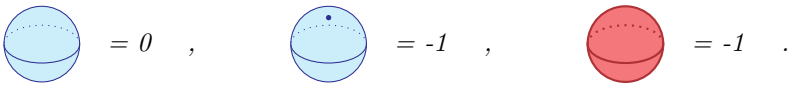
最后，让我们来看分数 $\frac{X_1^p + (-1)^{\chi(\Sigma_b)/2} X_2^p (X_1 = X_2)^{\chi(\Sigma_b)}}{\qquad}$，其中 p 为整数，且对 χ（Σ_b）的每个可能取值，

- $\chi_{(\Sigma_b)_2} = 1$: $\frac{X_1^p - X_2^p}{X_1 - X_2}$ 是一个系数属于 $\mathbb{Z}$ 的对称多项式。
- $\chi_{(\Sigma_b)_2} = n < 0$ 且为奇数：$(X_1 - X_2)^n (X_1^p - X_2^p)$ 是两个反对称多项式的乘积，因此是一个系数属于 $\mathbb{Z}$ 的对称多项式。
- $\chi_{(\Sigma_b)_2} = 2n \leq 0$，其中 n 为某个整数：$(X_1 - X_2)^{2n} (X_1^p + X_2^p)$ 是一个系数属于 $\mathbb{Z}$ 的对称多项式。

证明到此结束。 □

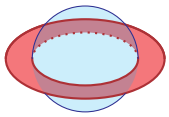
引理 3.5。 泡沫的求值 $< . >$ 满足以下局部关系（ℓ）

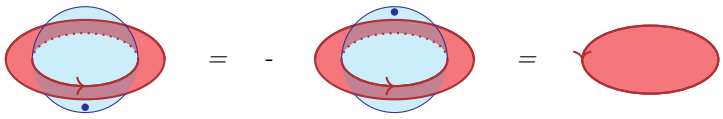
- 球面：



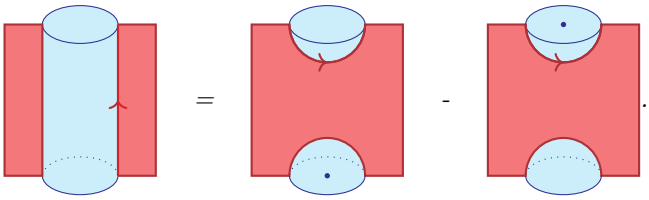
- 气泡关系：



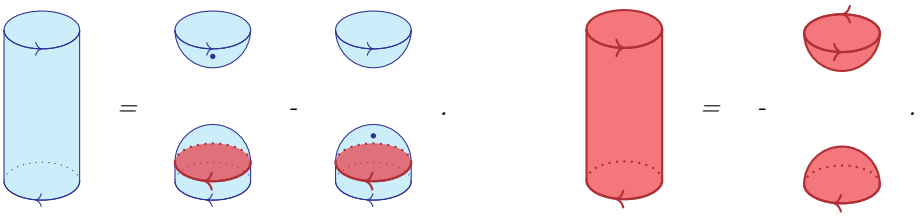




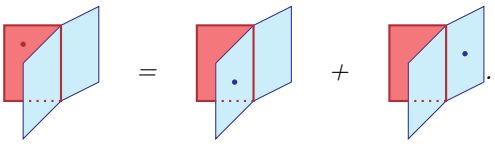
- 双边形关系：



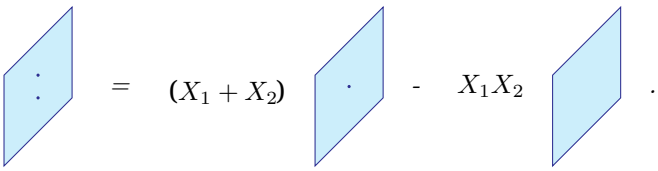
- 颈切割关系：

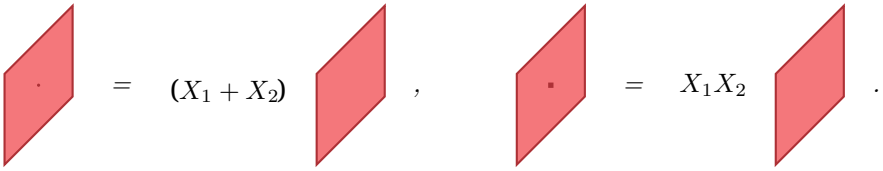


- 迁移关系：



- 装饰作用：





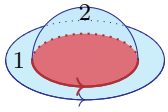
注意：如果忽略定向，这意味着该关系对定向的任意选择都成立。**事实：**上述关系（ℓ）来自双线性映射 $<,>$ 的核。

证明。 (引理 3.5)

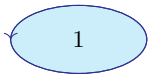
我们已经证明了球面关系。我们先从第一组气泡关系开始。设 Σ 为带有气泡的曲面， Σ' 为将气泡替换为圆盘后的曲面  。Σ 的着色与 Σ'的着色之间存在一一对应。对于每个着色类别 c，我们将比较 $<\Sigma, c>$ 和$<\Sigma', c'>$。

第一类是圆盘被标记为 1 的情况：

观察图形可知：



$$\longrightarrow$$



$$\Sigma_1 \longrightarrow \Sigma_1' = \Sigma_1$$

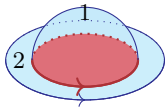
$$\Sigma_b \longrightarrow \Sigma_b' = \Sigma_b$$

$$n_{1\uparrow 2} \longrightarrow n'_{1\uparrow 2} = n_{1\uparrow 2}$$

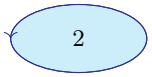
$$\prod_{F \text{ 的面片}} P_F \longrightarrow \prod_{F \text{ 的面片}} P_{F'} = \prod_{F \text{ 的面片}} P_F$$

因此 $< \Sigma,\ c >=< \Sigma',\ c >$。

对于第二类着色 c'，其中圆盘上标记为 2：



$$\longrightarrow$$



$$\Sigma_1 \longrightarrow \Sigma_1' = \Sigma_1 \sqcup$$



$$\Rightarrow \chi(\Sigma_1') = \chi(\Sigma_1) + 2$$

$$\Sigma_b \longrightarrow \Sigma_b' = \Sigma_b$$

$$n_{1\uparrow 2} \longrightarrow n'_{1\uparrow 2} = n_{1\uparrow 2} + 1$$

$$\prod_{F \text{ 的面片 } \Sigma} P_F \longrightarrow \prod_{F \text{ 的面片 } \Sigma} P_{F'} = \prod_{F \text{ 的面片 } \Sigma} P_F$$

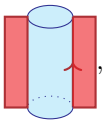
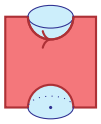
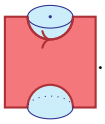
因此

$$\begin{aligned} < \Sigma', c' > &= \frac{(-1)^{\frac{\chi(\Sigma_1')}{2}} (-1)^{n'_{1\uparrow 2}} \prod_{F \text{ facet of } \Sigma'} P_{F'}}{(X_1 - X_2)^{\chi(\Sigma_b')}} \\ &= \frac{(-1)^{\frac{\chi(\Sigma_1)+2}{2}} (-1)^{n_{1\uparrow 2}+1} \prod_{F \text{ facet of } \Sigma} P_F}{(X_1 - X_2)^{\chi(\Sigma_b)}} \\ &= (-1)^2 < \Sigma, c' > \\ &=< \Sigma, c' > \end{aligned}$$

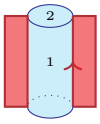
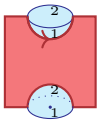
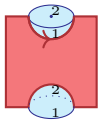
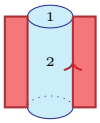
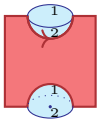
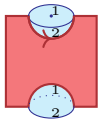
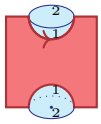
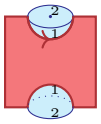
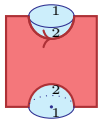
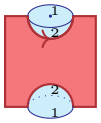
对 Σ 和 Σ' 的所有着色求和，得到 $< \Sigma >=< \Sigma' >$。

改变曲面的定向时，唯一发生变化的是每个着色类别中$n_{1\uparrow 2}$ 和 $n'_{1\uparrow 2}$ 之间的关系。因此，整体上会乘以 -1。由此得到前两个气泡关系。其余气泡关系的证明也类似。

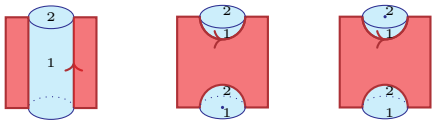
接下来讨论双边形关系。

令 $\Sigma =$  , $\Sigma_+ =$  and $\Sigma_- =$  .

该对应在 Σ 上可能的着色分为两类，在 Σ_+ 和 Σ_- 上则分为四类。这 re
是它们之间的对应关系：

- c_1:  ,  ,  .
- c_2:  ,  ,  .
- c_3:  ,  .
- c_4:  ,  .

我们将像之前一样，从 c_1开始：

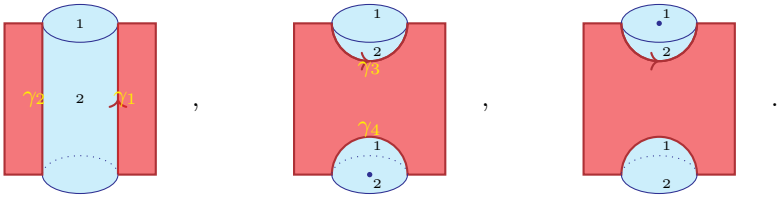


Σ_1	Σ_1	Σ_1
$\chi(\Sigma_b)$	$\chi(\Sigma_b)+2$	$\chi(\Sigma_b)+2$
$n_{1\uparrow 2}$	$n_{1\uparrow 2}$	$n_{1\uparrow 2}$
P	$P \times X_1$	$P \times X_2$

蓝色子曲面之间的关系是附加一个把手，这给出了欧拉示性数之间的关系。

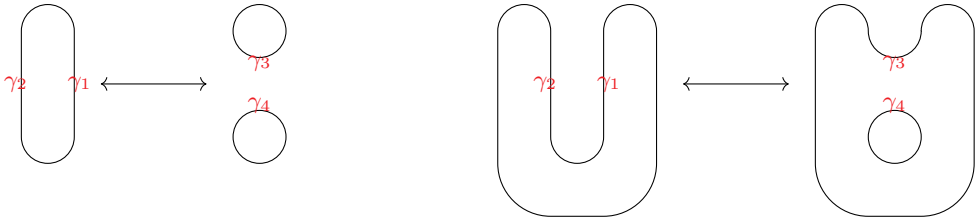
$< \Sigma_+,\ c_1 > - < \Sigma_-,\ c_1 > = \frac{X_1 - X_2}{X} - X < \Sigma,\ c_1 >$，这正是我们想要的。

对于 c_2 Σ_1，始终是相同的。蓝色子曲面再次通过附加一个把手彼此关联。与之前一样，$P_+ = X_2 P$ 和 $P_- = X_1 P$，但 $n_{1\uparrow 2}$ 会随绑定的连通分支数量而变化。



如果弧 γ_1 和 γ_2 属于同一个连通分支，那么 γ_3 和 γ_4 就属于不同的连通分支， $n_{1\uparrow 2}$ 在 Σ_+ 和 Σ_-中增加 1。

如果 γ_1 和 γ_2 位于不同的连通分支中，那么 γ_3 和 γ_4 位于同一个连通分支中， $n_{1\uparrow 2}$ 在 Σ_+ 和 Σ_-中减少 1。



无论哪种情况， $n_{1\uparrow 2}$ 都会改变 1，因此最终乘以 -1。

$$< \Sigma_+, c_2 > - < \Sigma_-, c_2 > = \frac{(-1)X_2}{X_1 - X_2} < \Sigma, c_2 > - \frac{(-1)X_1}{X_1 - X_2} < \Sigma, c_2 >$$
$$= < \Sigma, c_2 >$$

最后，我们证明 $< \Sigma_+, c_3 > = < \Sigma_-, c_3 >$ 和 $< \Sigma_+, c_4 > = < \Sigma_-, c_4 >$。
对于 c_3 和 c_4，显然 $\Sigma_{+,1} = \Sigma_{-,1}$， $\Sigma_{+,b} = \Sigma_{-,b}$ 和 $n^+_{1\uparrow 2} = n^-_{1\uparrow 2}$ 均成立。唯一可能发生变化的是多项式装饰。 Σ_+ 和 Σ_- 中的点都位于标签相同的子曲面上（ c_4 和 c_3 的标签均为 1 ）。因此，我们得到 $< \Sigma_+, c_3 > = < \Sigma_-, c_3 >$ 和 $< \Sigma_+, c_4 > = < \Sigma_-, c_4 >$，正如我们所希望的那样。对所有着色求和，我们得到 $< \Sigma > = < \Sigma_+ > - < \Sigma_- >$。

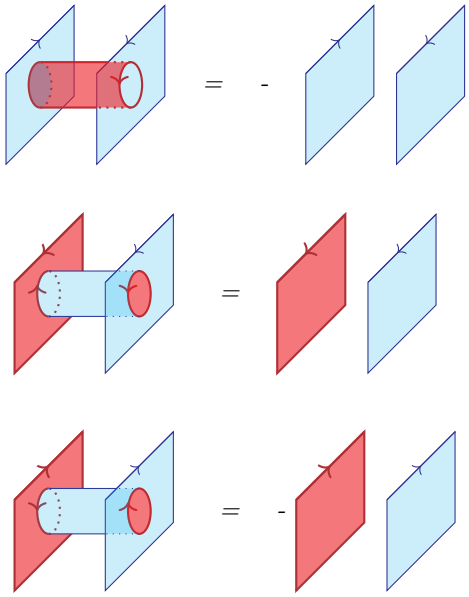
颈切割关系的证明类似。迁移关系以及装饰的作用留给读者。

□

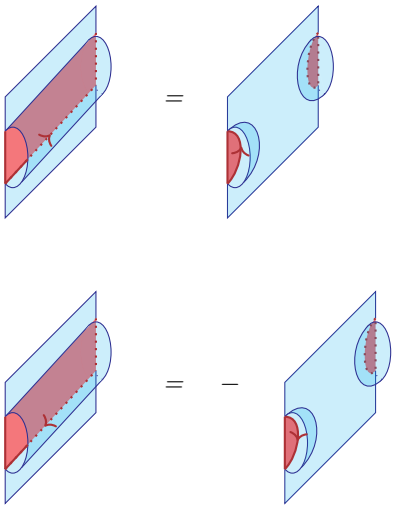
接下来还会得到更多关系，这些关系将在后续章节中发挥作用。

引理 3.6。 以下关系成立：

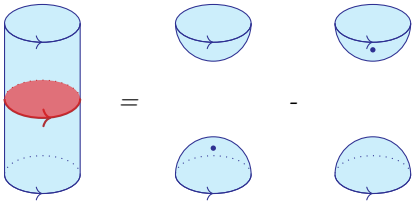
- 管关系：

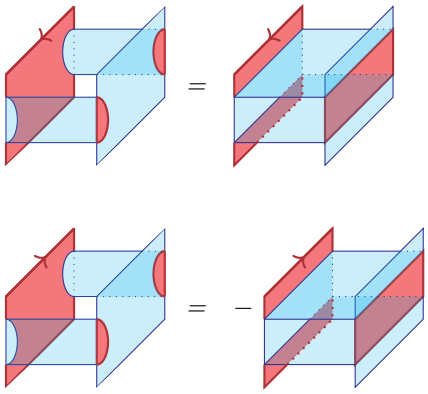


- 带关系：

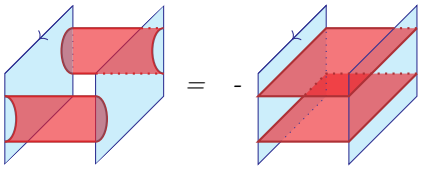


- $(I1)$ 关系：





- $(I2)$关系：



证明。 管关系显然可由颈切割关系和气泡关系推出。其余关系可按照前引引理中的方法证明。

□

4 泛构造

定义 4.1。 给定一个对象 $O \in \mathcal{F}(B)$，我们可以定义一个函子 $\mathcal{G}_{\mathcal{O}}$

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{\mathcal{O}} : & \mathcal{F}(B) \to \mathbb{Z}[X_1, X_2]Mod \\ & \Gamma \longmapsto Hom_{\mathcal{F}(B)}(O, \Gamma) \end{aligned}$$

态射被映射为由复合定义的映射。

在 $O = \emptyset$ 的情形下，我们还可以对每个 Γ 将 $Hom_{\mathcal{F}}(\emptyset, \Gamma)$ 再取商，模去双线性形式 b 的核：

$$\begin{aligned} b : & Hom(\emptyset, \Gamma) \times Hom(\Gamma, \emptyset) \to \mathbb{Z}[X_1, X_2] \\ & \Sigma_1, \Sigma_2 \longmapsto < \Sigma_2 \circ \Sigma_1 > \end{aligned}$$

从而得到一个函子

$$\begin{aligned}\mathcal{G}:&\mathcal{F}\to\mathbb{Z}[X_1,X_2]Mod\\ &\Gamma\longmapsto Hom_{\mathcal{F}}(\emptyset,\Gamma)_{/ker(b)}\end{aligned}$$

定义 4.2。 引理 3.5 中的关系（ℓ）属于双线性形式 b 的核。因此，函子 $\mathcal{G}$ 可通过范畴 $\mathcal{F}_\ell$，该范畴与 $\mathcal{F}$具有相同的对象，而其态射则是$\mathcal{F}$ 中态射关于（ℓ）的商。对于新的函子，我们仍采用相同的记号：

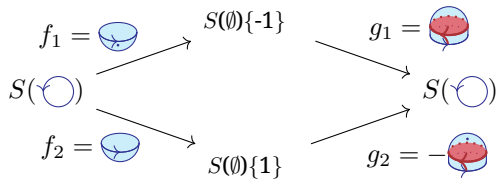
$$\begin{aligned}\mathcal{G}:&\mathcal{F}_{/\ell}\to\mathbb{Z}[X_1,X_2]Mod\\ &\Gamma\longmapsto Hom_{\mathcal{F}_{/\ell}}(\emptyset,\Gamma)\end{aligned}$$

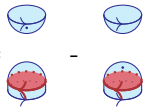
类似地，我们通过将$\mathcal{F}$（B）对态射上的局部关系（ℓ）取商来定义范畴$\mathcal{F}$（B）$/\ell$，并始终保持边界不变。

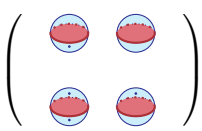
关系（ℓ）保持分次。范畴$\mathcal{F}$（B）$/\ell$ 仍然是分次的。

例 4.3。 计算一些图在$\mathcal{G}$ 下的像：设 Γ 为闭图。设 S（Γ） $=\mathcal{G}$（Γ）。

- $\Gamma=\emptyset$：设 $\Sigma\in S$（$\emptyset$）。设 Σ'为闭合泡沫。于是 $<\Sigma\circ\Sigma'>=<\Sigma><\Sigma'>=<\Sigma><\emptyset\circ\Sigma'>$。这对任意这样的 Σ' 都成立。因此，对于所有 $\Sigma\in S$（$\emptyset$），我们在 S（$\emptyset$）中有 $\Sigma=<\Sigma>\emptyset$，并且 S（$\emptyset$） $\simeq\mathbb{Z}[X_1,X_2]$ 由空泡沫生成。
- Γ 是一个红圆，那么 $S($$)$由红色圆盘生成。这是将颈切割关系应用于该圆的邻域所得的结果。
- Γ 是一个蓝色圆：考虑映射 $f=\begin{pmatrix}f_1\\f_2\end{pmatrix}$ 和 $g=\begin{pmatrix}g_1 & g_2\end{pmatrix}$：



那么： $g\circ f=$  - 是 S(上的恒等映射  ），根据颈切割关系，且

$f\circ g=$  $=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$.

因此 $S(\,)\simeq S(\emptyset)\{-1\}\oplus S(\emptyset)\{1\}\simeq\mathbb{Z}[X_1,X_2]\{-1\}\oplus\mathbb{Z}[X_1,X_2]\{1\}$。

5 图的求值

定义 5.1. 设 $\Gamma\in\mathcal{F}$ 为一个闭三价图。 Γ 中的蓝色边构成一组互不相交的圈 Γ_1。 Γ 的求值由公式 V (Γ) $=(q+q^{-1})^n$定义，其中 n 是 Γ_1的连通分支数。

定理 5.2. $S(\Gamma)$ 的分次维数等于其求值 $V(\Gamma)$。

为证明这一点，我们需要一些中间结果：

引理 5.3。 对于所有 Γ 是至少包含一条红边的闭三价图的情形，必定存在至少一个子图，它要么是二边形，要么是正方形（图 *6* 和图 *5.3*）。

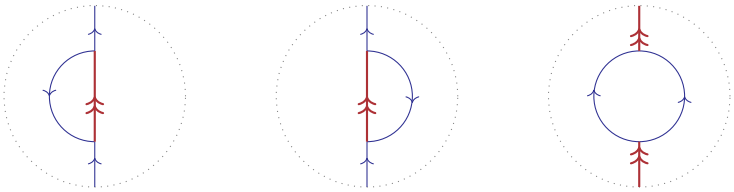


图 6：二边形

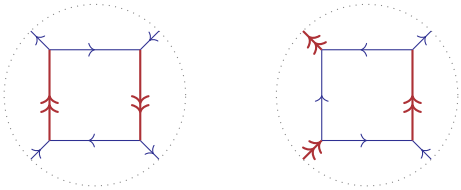


图 7：正方形

证明。 假设 Γ 是连通的。否则，我们对 Γ的一个连通分支作同样的处理。设 v、 e 和 f 分别是顶点数、边数和面数。我们知道 $\chi(\Gamma) = v - e + f = 2$。

对于每个面 F，定义 χ_F 如下：

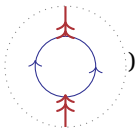
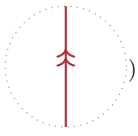
$$\chi_F := \begin{cases} \frac{1}{3} & F \text{ 中顶点的数量，} \\ -\frac{1}{3} & F \text{ 中顶点的数量，其中所有相邻边都属于 } F\text{；} \\ -\frac{1}{2} & F \text{ 仅属于 } \Gamma \text{ 中的顶点数量；} \\ +1 & F \text{ 中仅属于 } \Gamma \text{ 的边数。} \end{cases}$$

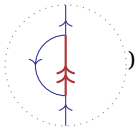
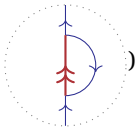
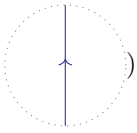
那么：

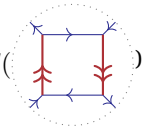
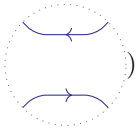
1. $\sum_{F \text{ 面的 } \Gamma} \chi_F = 2$。2. 若面 F是有界的，且 v_F是 F 的顶点数，则 $\chi_F = \frac{1}{3}v_F - \frac{1}{2}v_F + 1 = 1 - \frac{1}{6}v_F$。
3. 若无界面 $F\prime$ 不包含仅属于它的一条边，则 $\chi_{F'} \leq 1$

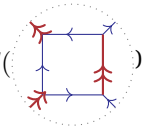
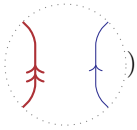
假设 $v_F \geq 6$ 对 Γ的所有有界面成立，则和$\sum_{F \text{ 有界面的 } \Gamma} \chi_F$ 至多为1。因此， Γ 必有一个至多含5个顶点的面。检查所有至多含5个顶点且满足流条件的可能面构型，我们恰好得到该引理陈述中的那些。

□

引理 5.4。 1. $S($  $) \simeq S($  $)\{-1\} \oplus S($  $)\{1\}$。

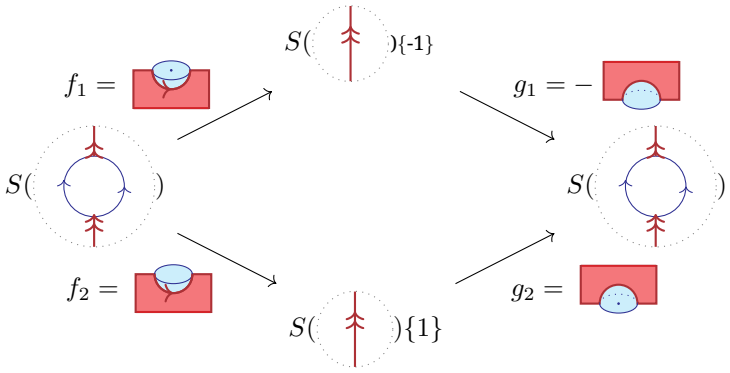
2. $S($  $) \simeq S($  $) \simeq S($  $)$.

3. $S($  $) \simeq S($  $)$.

4. $S($  $) \simeq S($  $)$.

证明。（引理 5.4）

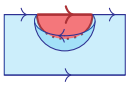
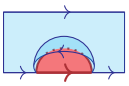
1.令 $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$，且 $g = (g_1 \quad g_2)$ 为映射：



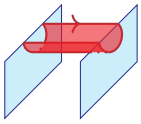
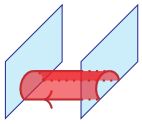
根据二边形关系，$g \circ f = Id$；根据气泡关系，$f \circ g = Id$。

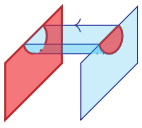
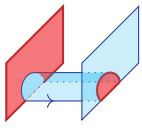
对于其余各点，我们给出映射。根据引理 3.5 和 3.6 中的关系，直接可知这些映射是同构。

2.对于右侧的恒等映射：

$f =$  ，$g = -$  （带关系和气泡关系）。

对于第一个图，这些同构互为对称，并伴有符号变化。

3. $f =$  ，$g = -$  （（$I1$）和管关系）。

4. $f =$  ，$g =$  （（$I2$）和管关系）。

□

证明。（定理 5.2）

令 r 为图 Γ中的红边数。我们知道$S(\ ) \simeq \mathbb{Z}[X_1, X_2]\{-1\} \oplus \mathbb{Z}[X_1, X_2]\{1\}$。因此 $deg(S(\ )) = (q + q^{-1})$。那么，设 $r = 0$，且 n 是 Γ中的蓝色圆圈数，由此可得 $deg(S(\Gamma)) = (q + q^{-1})^n$。我们用归纳法证明。设 Γ 是一个满足 r 为正的图。那么 Γ 中存在一个面 F，它要么是二边形，要么是正方形。令 n 为 Γ中的蓝色圆圈数：

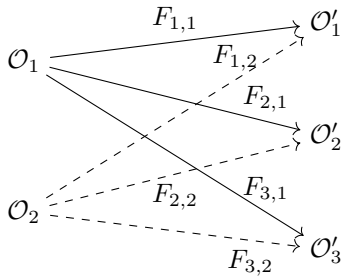


图8： $Mat(\mathcal{C})$ 中一个态射的表示。

- 如果 F 是, 那么根据前引引理，我们知道 $S(\Gamma) \simeq S(\Gamma')\{-1\} \oplus S(\Gamma')\{1\}$，其中 Γ' 是由 Γ 将 F 替换为一条简单红线得到的图，并且$deg(S(\Gamma)) = (q+q^{-1})deg(S(\Gamma'))$。$\Gamma'$中的圆数为 $n-1$。如果Γ'中的红边数严格少于 Γ 中的红边数，那么根据归纳法， $deg(S(\Gamma)) = (q+q^{-1})(q+q^{-1})^{n-1} = (q+q^{-1})^n$。除非 F 的连通分支呈这种形式，并在Γ'中被替换为一个红圆，否则情况皆如此；但 $S(\bigcirc) \simeq S(\emptyset)$。我们可以假设 Γ'的红边数确实少于 Γ。

- 对于面 F 的其他选项，即不同的二边形或正方形，显然，引理 5.4 中的同构将 Γ 送到一个红边严格更少、蓝色圆圈数量相同的图 $\Gamma\prime$ n。由归纳法， $deg(S(\Gamma)) = (q+q^{-1})^n$。定理的证明至此完成。

□

6 泡沫上的 Khovanov 复形

6.1 泡沫范畴中的形式链复形

类似地，对于 [Bar05], , 我们先给出一些定义，为本节后续内容奠定基础。 n.

定义 6.1. 设 R 是一个环。若范畴 $\mathcal{C}$ 中任意两个对象 O, O' 的态射集 $Hom_{\mathcal{C}}(O, O')$ 是一个 R-模，且态射复合是双线性的，则称范畴 $\mathcal{C}$ 是 R-线性的。

例如，范畴 $\mathcal{F}(B)$ 和 $\mathcal{F}(B)/_{\ell}$ 是 $\mathbb{Z}[X_1, X_2]$-线性的。

Defi定义 6.2. 给定一个 R-线性范畴 $\mathcal{C}$， $Mat(\mathcal{C})$ 是如下定义的 R-线性范畴 s:

- Mat($\mathcal{C}$) 的对象是形式直和（可以为空） $\oplus_{i=1}^{n}\mathcal{O}_i$ ，其中各项都是 $\mathcal{C}$ 中的对象 $\mathcal{O}_i$ 。
- 若 $\mathcal{O} = \oplus_{i=1}^{m}\mathcal{O}_i$ 且 $\mathcal{O}\prime = \oplus_{j=1}^{n}\mathcal{O}\prime_j$，则 Mat($\mathcal{C}$) 中的态射 F: $\mathcal{O}\prime \to \mathcal{O}$ 是一个由态射 F_{ij} : $\mathcal{O}\prime_j \to \mathcal{O}_i$ 构成的 $m \times n$ 矩阵$F = (F_{ij})$，其中这些态射属于 $\mathcal{C}$。
- Mat($\mathcal{C}$) 中态射的线性组合，就是相应矩阵的线性组合。

- Mat($\mathcal{C}$) 中态射的复合定义遵循矩阵乘法的规则，只是用$\mathcal{C}$ 中的复合代替乘法。

$$((F_{ij}) \circ (G_{jk}))_{ik} := \sum_j F_{ij} \circ G_{jk}.$$

$Mat(\mathcal{C})$ 中的对象可以表示为$\mathcal{C}$中对象组成的列，态射则可以表示为它们之间的箭头。空列 () 是零对象（图8）。

$Mat(\mathcal{C})$中的一个态射是次数为 d 的齐次态射，当且仅当它的所有分支的次数均为 d。

定义 6.3. 形式链复形
设 R 是一个环，$\mathcal{D}$ 是一个 R-线性范畴。 $Kom(\mathcal{D})$是$\mathcal{D}$中形式链复形的范畴，定义如下：

- 对象 $(O,d) \in Kom(\mathcal{D})$ 是由态射组成的链

$$\dots \xrightarrow{d_{i-2}} O_{i-1} \xrightarrow{d_{i-1}} O_i \xrightarrow{d_i} O_{i+1} \xrightarrow{d_{i+1}} \dots$$

  使得复合 $d_{i+1} \circ d_i = 0$ 对所有 i 都成立。

- 态射 $f: (O,d) \to (O\prime d\prime)$ 是由态射 $f_i: O_i \to O\prime_i$（属于 $\mathcal{D}$）构成的集合，使得对所有 i，$f_{i+1} \circ d_i = d\prime_i \circ f_i$ 都成立。
- 两个态射 f 和 g 的复合定义为 $(f \circ g)_i = f_i \circ g_i$。

定义 6.4. 形式复形中的同伦
设 R 是一个环。设 $\mathcal{D}$ 是一个 R-线性范畴。若存在态射 $h_i: O_i \to O_{i-1}$，使得对所有 i 都有 $F_i - G_i = h_{i+1}d_i + d_{i-1}h_i$，则称 $F, G: (O_i) \to (O'_i)$ 属于 $Kom(\mathcal{D})$ 的两个态射是同伦的（记作 $F \sim G$）。

与阿贝尔群链复形的情形一样，同伦是一种等价关系，并且在左复合和右复合下保持不变。因此，对于范畴 $\mathcal{D}$，我们可以将 $Kom(\mathcal{D})$ 的态射按同伦等价取商，从而得到范畴 $Kom_{/h}(\mathcal{D})$。

为便于阅读，我们将 $Kob(B)$ 记作 $Kom(Mat(\mathcal{F}/\ell(B)))$，将 $Kob_{/h}(B)$ 记作 $Kom_{/h}(Mat(\mathcal{F}/\ell(B)))$。当 B 为空时，我们就简写为 Kob 和 $Kob_{/h}$。

6.2 Khovanov 复形的定义：图示

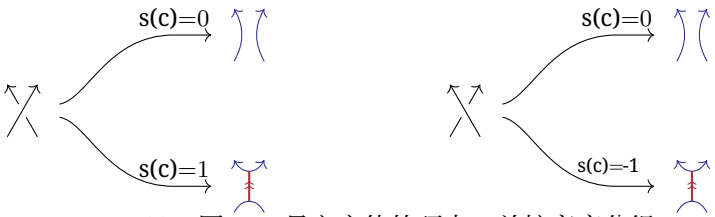
设 D 是一个具有 n 个交叉的链环图 L。设 n_- 为 D 的负交叉数，n_+ 为正交叉数。为这些交叉选定一个次序。

我们描述 D 的“分解立方体”的构造。它是一个立方体，其顶点是与图中交叉的不同分解方式相对应的三价图，边则是其间带符号的协边。可以将其看作对经典分解立方体（见第 7 节）的一种修改，以便保留定向信息。这是 Blanchet 的 Khovanov 同调定向模型 [Bla10] 的关键思想。

图10给出了三叶结的一个分解立方体示例。 

顶点
状态 s 为每个正交叉（分别为负交叉）赋予一个数 $s(c) \in \{0,1\}$（分别为 $s(c) \in \{0,-1\}$）。对于状态 s，我们构造一个三价图 D_s：将 D b 中的每个交叉 c替换为：

如果 c 是正交叉　　如果 c是负交叉



s 的高度是总和 $|s| = \sum_c s(c)$。图 D_s 是立方体的顶点，并按高度分组。

边
设 s 和 s' 分别是高度为 i 和 $i+1$的两个状态，且它们仅在位置 j处的一个交叉 c不同。那么 d_s^j 是由以下方式定义的 D_s-$Foam$-$D_{s'}$：

- 在c d_s^j 的邻域之外是恒等余边。

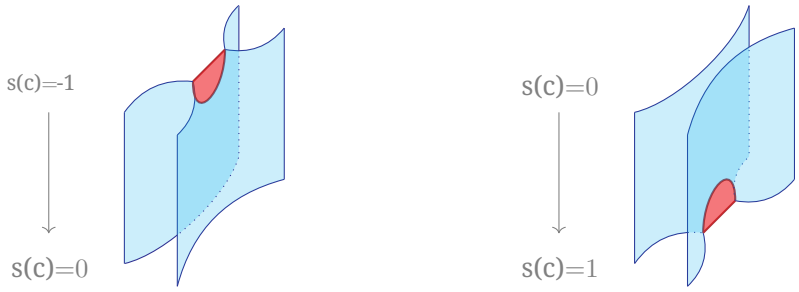


图 9：微分。

- 在 th 在 c 的邻域内，根据交叉符号的不同，我们有两种配边之一 s:

令 o_s 为整数集合 j，使得要么 j^{th} 交叉为正且 $s(j) = 0$，要么它为负且 $s(j) = -1$。立方体的边对应于映射 $\{d_s^j\}_{s,\ j\in o_s}$。

符号

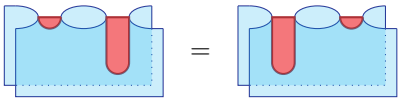
我们在范畴 Kob 中工作。

令 $[\![D]\!]_i = \bigoplus_{|s|=i} D_s$，且 $d_i = \sum_{\substack{|s|=i \\ j\in o_s}} \epsilon_s^j d_s^j$，其中 ϵ_s^j 是赋给对应边的符号。

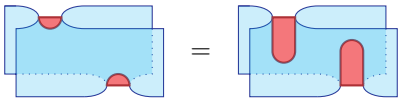
我们希望上文定义的括号 $[\![D]\!]$ 是一个链复形：

$$[\![D]\!]_{-n_-} \to [\![D]\!]_{-n_-+1} \to \ldots \to [\![D]\!]_{n_+}$$

首先注意，忽略符号后，立方体的各个面是可交换的。



and



只需恰当地选择符号 ϵ_s^j，使它们反交换即可。于是 $d \circ d = 0$ 和 $[\![D]\!]$ 是一个链复形。。

设 s 是一个状态，且 $n_s = \sum_c |s(c)|$。设 Δ_s 是由满足 $|s(c)| = 1$的交叉 c 张成的阿贝尔群。

设 j是这样的一个交叉。如果 j为正，令 ϵ_s^j为映射 $.\wedge j\colon \bigwedge^{n_s} \Delta_s \to \bigwedge^{n_s+1} \Delta_{s'}$。如果 c为负，令 ϵ_s^j为映射 $.\lrcorner j\colon \bigwedge^{n_s} \Delta_s \to \bigwedge^{n_s-1} \Delta_{s'}$，其中 $\lrcorner$是外积的反对称化。这些映射可以解释为符号。

设 j_1 和 j_2 是 o_s中的不同元素。外积和反对称化是反交换的。因此，如果 w是 $\bigwedge^{n_s} \Delta_s$的一个元素，那么 $w \wedge j_1 \wedge j_2 = w \wedge j_2 \wedge j_1$和 $w \lrcorner j_1 \lrcorner j_2 = w \lrcorner j_2 \lrcorner j_1$。根据定义，我们还有 $w \wedge j_1 \lrcorner j_2 = w \lrcorner j_2 \wedge j_1$。加上符号后，各个面确实反交换。

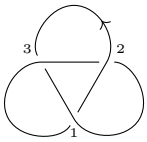
因此，图的分解立方体定义了一个形式链复形 $[\![D]\!] \in Kob$。

最后，**链环图的 Khovanov 复形** D, $CKh(D)$由括号 $[\![D]\!]$构造而成，方法是平移次数

$CKh^i(D) = [\![D]\!]_i\{i + n_+ - n_-\}$，也就是 $deg(CKh^i(D)) = q^{i+n_+-n_-} deg([\![D]\!]_i)$。

例 6.5.：**三叶结的分解立方体**

考虑下面这个带有交叉顺序标记的三叶结图 D：



所有交叉都是正的。我们画出分辨立方体的顶点，用 s 为它们标记，并标出符号。配边则较难绘制。交叉 s（c）状态的改变总是对应于图 9 中的一种配边；其他地方则是恒等余边。较小链复形的示例见第 6.3 节，其中微分都明确绘制出来了。

于是，我们得到的图像可视为范畴 $Mat(\mathcal{F})$ 中对象的形式链复形，如图8所示。

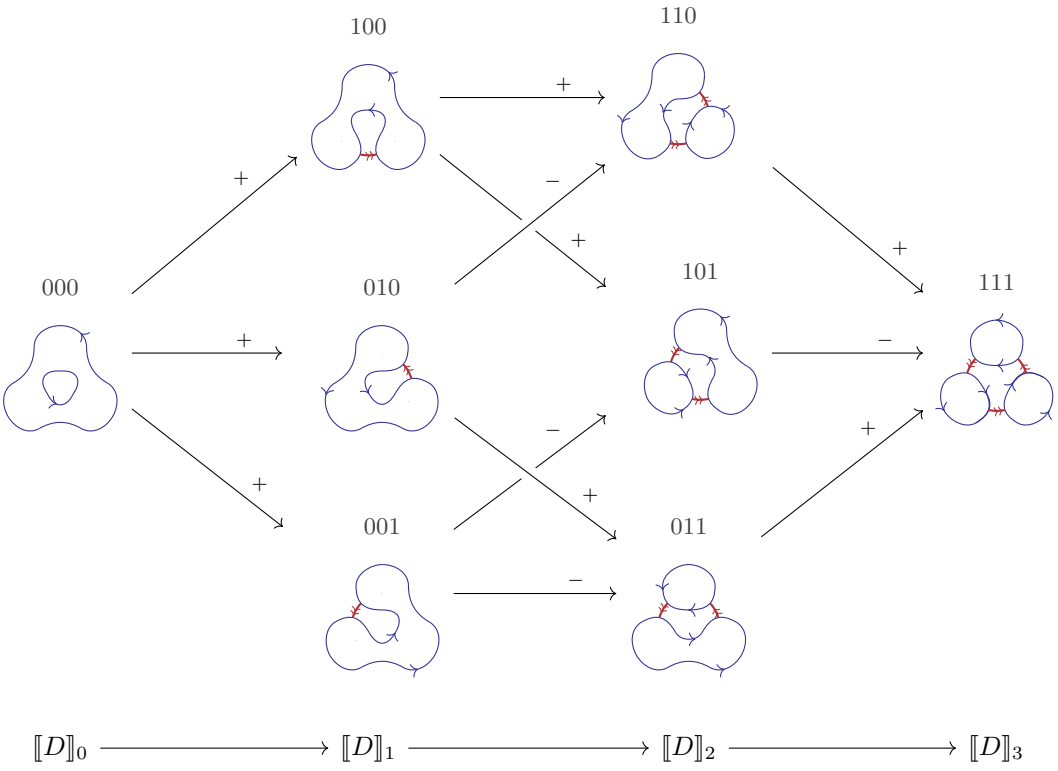


图10：三叶结的分解立方体。

6.3 不变性

设 D 是边界为 B 的辫结的平面图。则我们可以用与链环相同的方式定义 $CKh(D) \in Kob(B)$。

定理 6.6. 设 D 是辫结 T 的图。则：

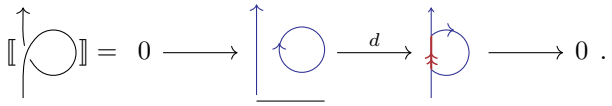
1. $CKh(D)$ 中的所有微分的次数均为0。*2.* 复形 $CKh(T)$ 是辫结 T 在次数 0 同伦等价意义下的不变量。也就是说，若 D_1 与 D_2 是相差若干 *Reidemeister* 变换和平面同痕的两张图表，则存在同伦等价 $F\colon CKh(D_1) \to CKh(D_2)$，且 $deg(F) = 0$。

证明。 上述配边 d_s^j 的次数为 -1，因此复形 $[\![D]\!]$中的微分 d_i 的次数均为 -1。但经过次数平移 $deg(CKh^i(D)) = q^{-i+n_- - n_+} deg([\![D]\!]_i)$ 后，这些微分的次数

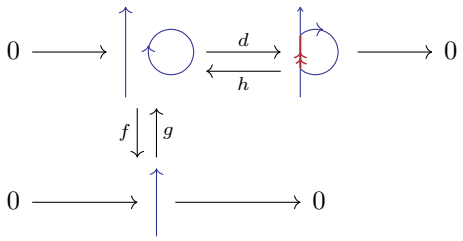
CKh 中的微分 d_i 按差值 $(i+1+n_- - n_+) - (i+n_- - n_+) = 1$向上平移。也就是说$deg(d) = 0$。

现在我们为每个 Reidemeister 变换定义同伦等价映射。

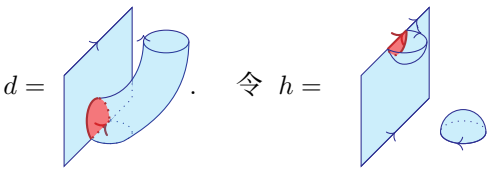
- $R1+$： $R1+$ 的链复形为：

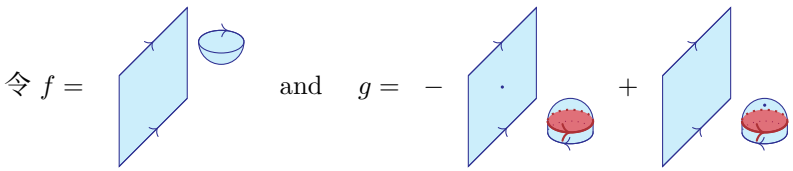


高度 0 处的图被加了下划线。我们要找出链映射 f 和 g



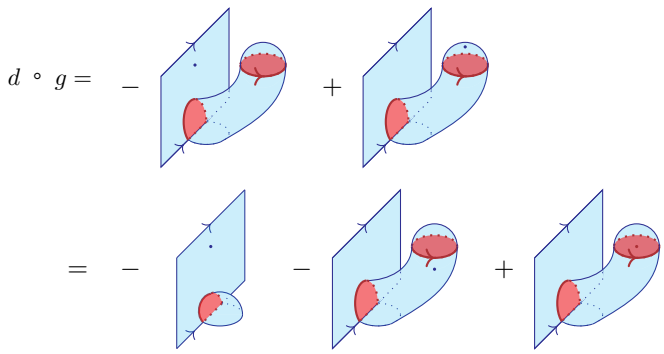
以及一个同伦映射 h。我们有：



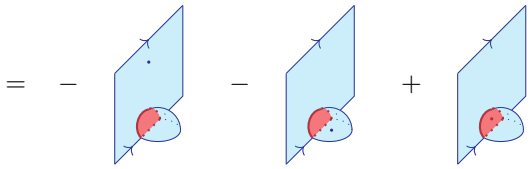


那么：

1. $d \circ g = 0$:



第一项上的气泡关系，第二项上的迁移

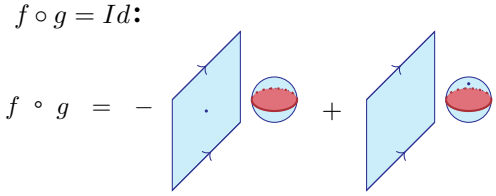


将红点放在不同的连通分支上不会改变态射，然后我们再次使用气泡关系

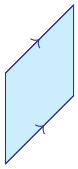
$= 0$

这又是迁移关系。

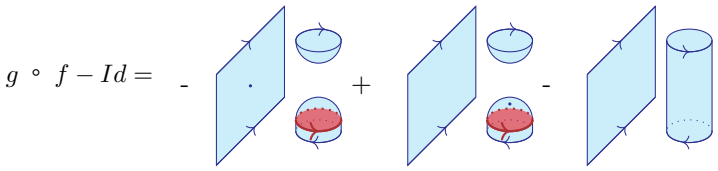
2. $f \circ g = Id$:

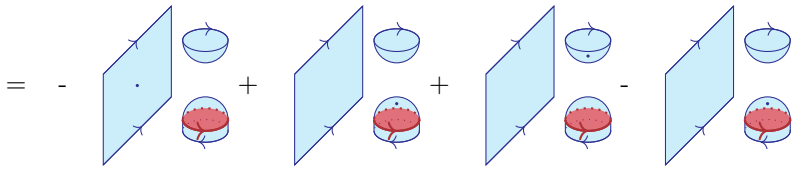


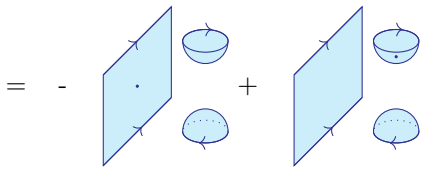
但没有点的球面就是 0，而  $= 1$.

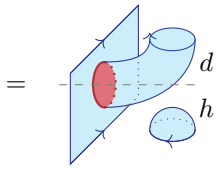
因此 $f \circ g =$  $= Id_{\circ}$

3. $g \circ f - Id = d \circ h$:



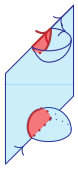




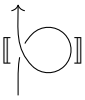
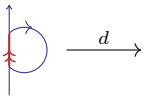
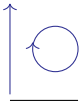


首先，我们使用颈切割关系，随后第二项与最后一项相互抵消。对其余部分应用气泡关系后，得到第三行；最后一行则再次由颈切割关系得出。

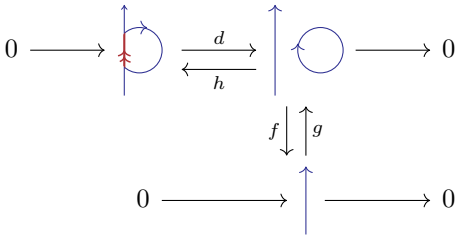
4. 最后 $-Id = h\circ d$，这就是管关系：

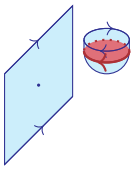
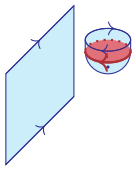
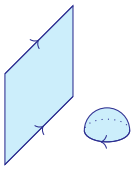
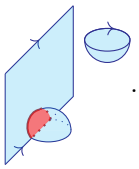
$h \circ d =$  $= -Id$

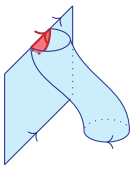
- $R1-$：

$[\![$  $]\!] =$ $0 \longrightarrow$  $\longrightarrow$  $\longrightarrow 0$.

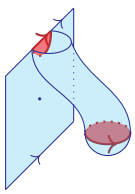
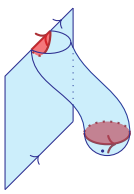
我们定义映射：

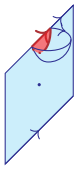
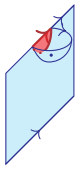
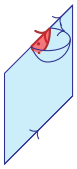


$f =$  $-$  , $g =$  and $h =$ -  .

我们有 $d =$  。因此：

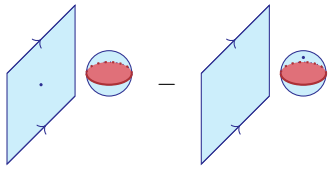
1. $f \circ d = 0$:

$f \circ d =$ $-$  $+$ 

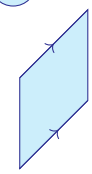
$=$ $-$  $-$  $+$  （迁移后气泡关系）

$= \quad 0.$ (迁移)

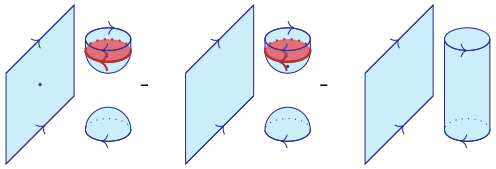
2. $f \circ g = Id$:

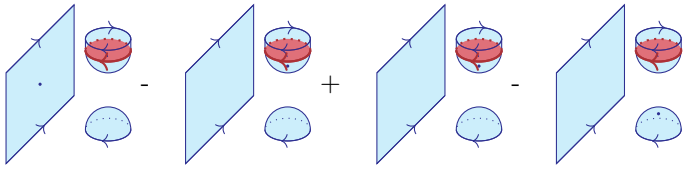
$f \circ g \; =$  $-$

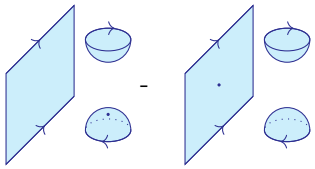
but  $=$  $= -1$

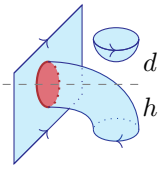
和 $f \circ g = -(-$  $) \; = Id_{\circ}$

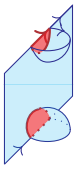
3. $g \circ f - Id = d \circ h$:

$g \circ f - Id =$ 

$=$ 

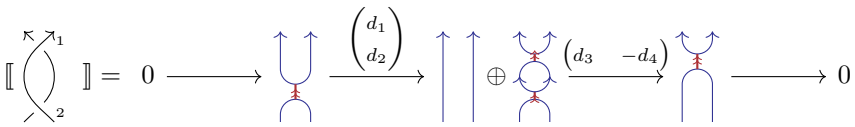
$=$ 

$=$ - 

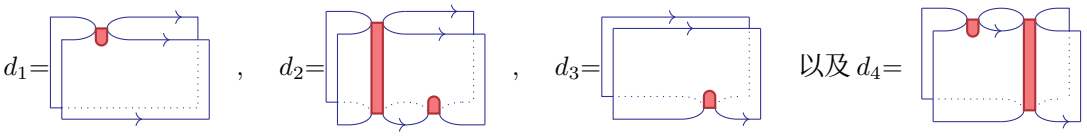
4. $h \circ d =$  $= -Id$

从现在起，只有在有助于阅读配边时，我们才填充蓝色曲面。

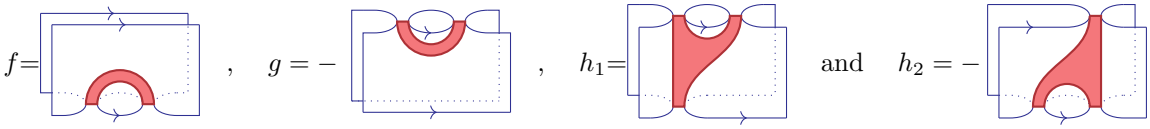
- $R2+$：链复形为：



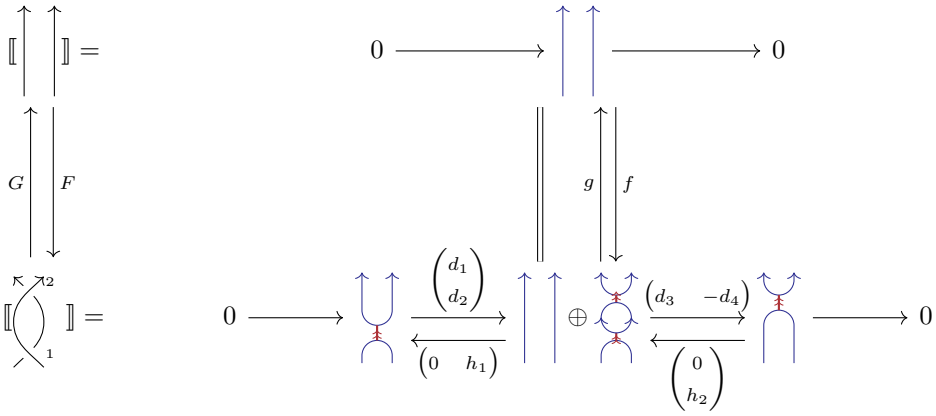
其中：



Let:

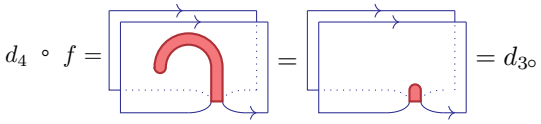


那么我们有一个同伦等价：

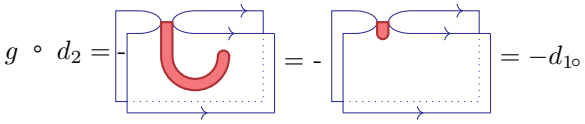


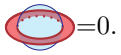
验证如下：

1. F 是一个链映射： $d_3 - d_4 \circ f = 0$。



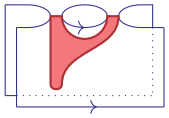
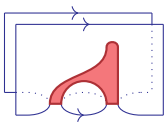
2. G 是一个链映射： $d_1 + g \circ d_2 = 0$



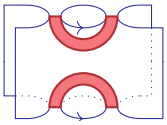
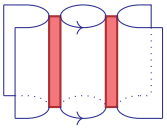
3. $G \circ F = Id$ 因为 $g \circ f = 0$。这由气泡关系得出  =0.

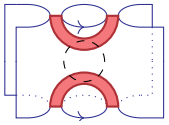
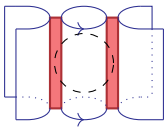
4. $F \circ G - I = h \circ d + d \circ h$.

$F \circ G = \begin{pmatrix} Id & f \circ g \\ g & f \circ g \end{pmatrix}$。

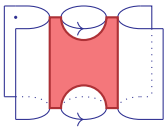
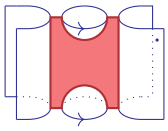
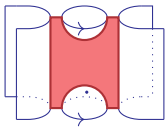
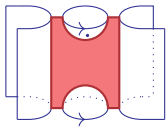
我们有 $d_1 \circ h_1 =$ -  $= g$ $h_2 \circ d_3 =$  $= f$。

因此 $F \circ G - I = \begin{pmatrix} 0 & h_2 \circ d_1 \\ h_1 & f \circ g - Id \end{pmatrix}$，我们只需要 $f \circ g - Id = -h_2 \circ d_4 + d_2 \circ h_1$。

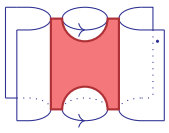
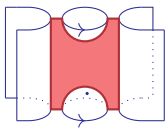
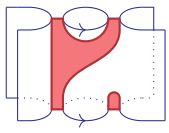
$f \circ g - Id =$ -  - 

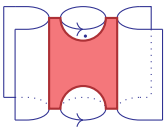
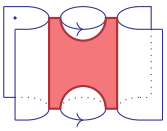
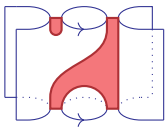
我们可以对两项应用双边形关系：此处  并且在这里 

并得到

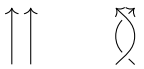
$f \circ g - Id =$ -  +  -  + 

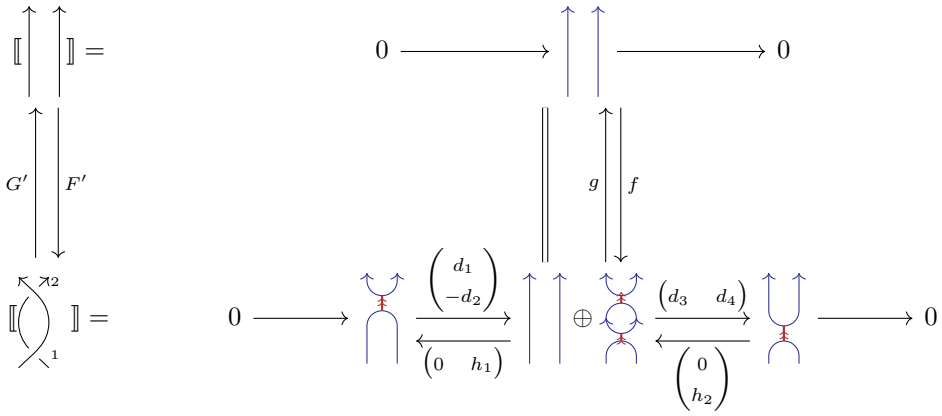
再次利用双边形关系，我们可以用不同的方式连接蓝点：

 -  =  $= d_2 \circ h_1$

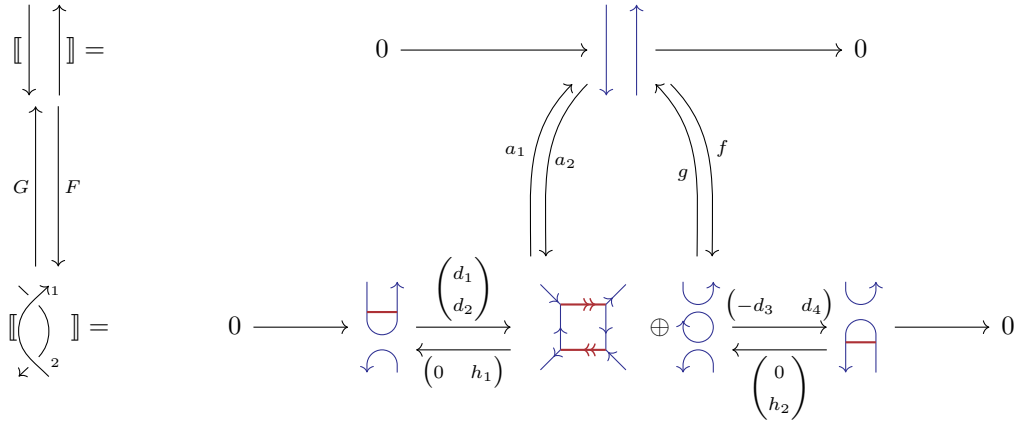
and  -  =  $= -h_2 \circ d_4$

因此，$f \circ g - Id = -h_2 \circ d_4 + d_2 \circ h_1$ 正如我们所期望的那样。最后，$-d_4 \circ h_2 = -Id$ 和 $h_1 \circ d_1 = -Id$ 通过同痕得到。

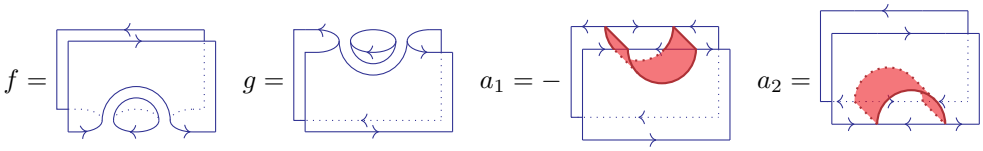
同样，复形与 $[\![\ ]\!]$ 之间存在一个同伦等价，由下式给出。 

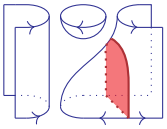
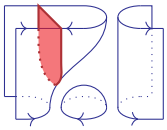


- $R2-$：令 F 和 G 为以下映射：

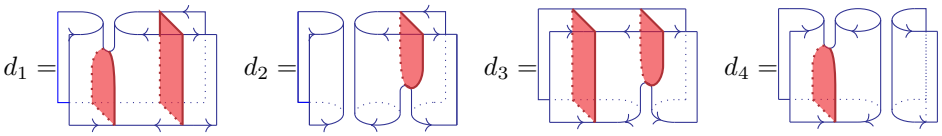


其中：



令 $h_1 = -$  $h_2 = -$ 

微分为：



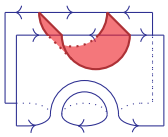
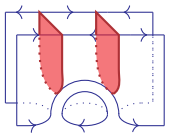
那么：

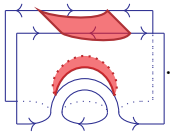
1. F和 G是链映射： $-d_3 \circ a_2 + d_4 \circ f = 0$和 $g \circ d_2 + a_1 \circ d_1 = 0$（根据同痕）
。2. $G\circ F = Id$：事实上 $g \circ f = 0$，因为$= 0$和 $a_1 \circ a_2 = Id$来自管关系。
3. $F \circ G - Id = d \circ h + h \circ d$:

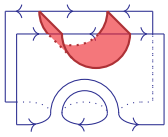
$$F \circ G = \begin{pmatrix} a_2 \circ a_1 & a_2 \circ g \\ f \circ a_1 & f \circ g \end{pmatrix}$$

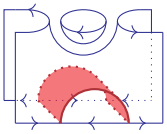
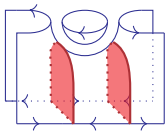
根据引理 3.6 中的（$I2$）关系，我们有 $a_2 \circ a_1 = Id$。

除此之外，我们还想证明$f \circ a_1 = -h_2 \circ d_3$, $a_2 \circ g = d_1 \circ h_1$ 以及 $f \circ g - Id = d_2 \circ h_1 + h_2 \circ d_4$。

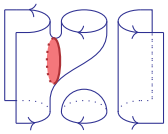
$f \circ a_1 =$  and $h_2 \circ d_3 = -$ 

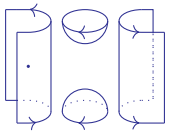
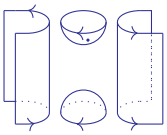
（$I2$）关系表明，$h_2 \circ d_3 =$  . 然后利用气泡关系

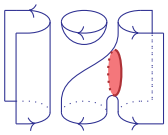
$h_2 \circ d_3 = -$  $= f \circ a_1$。

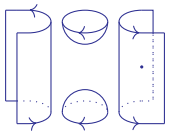
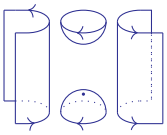
a_2 对 $g =$ 也同样成立。  $=$  $= d_1 \circ h_1$。

Now:

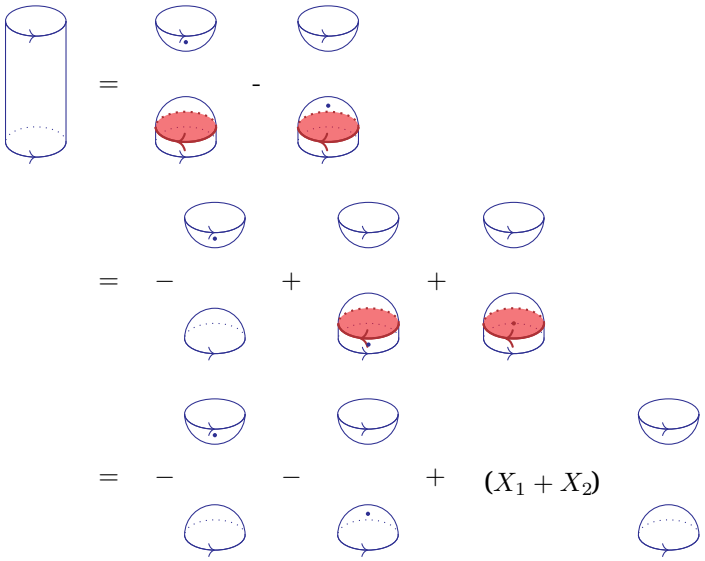
$h_2 \circ d_4 = -$ 

$=$  $-$ 

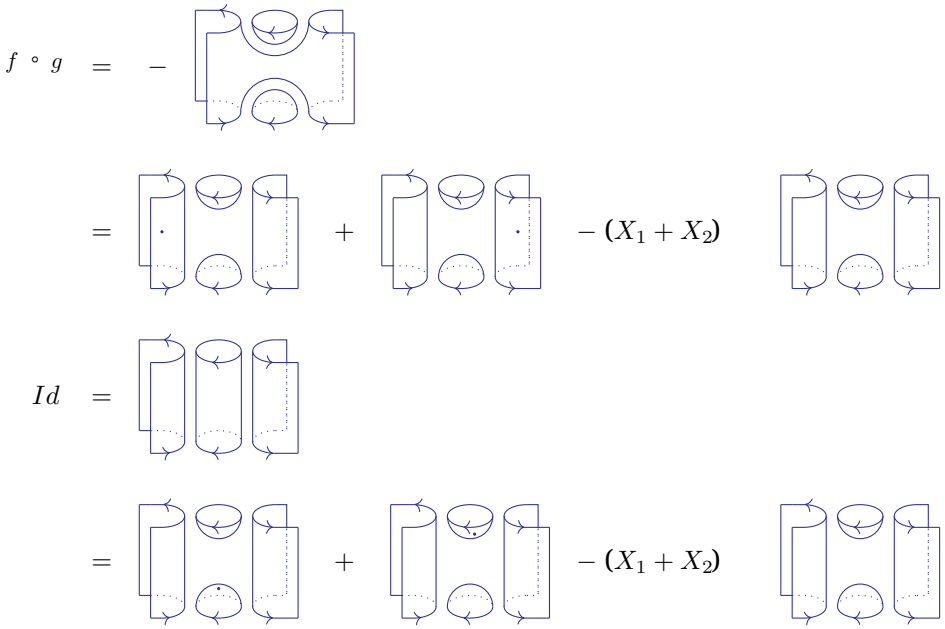
$d_2 \circ h_1 = -$ 

$=$  $-$ 

让我们回顾一下颈切割关系，并试着去掉其中的红色圆盘。

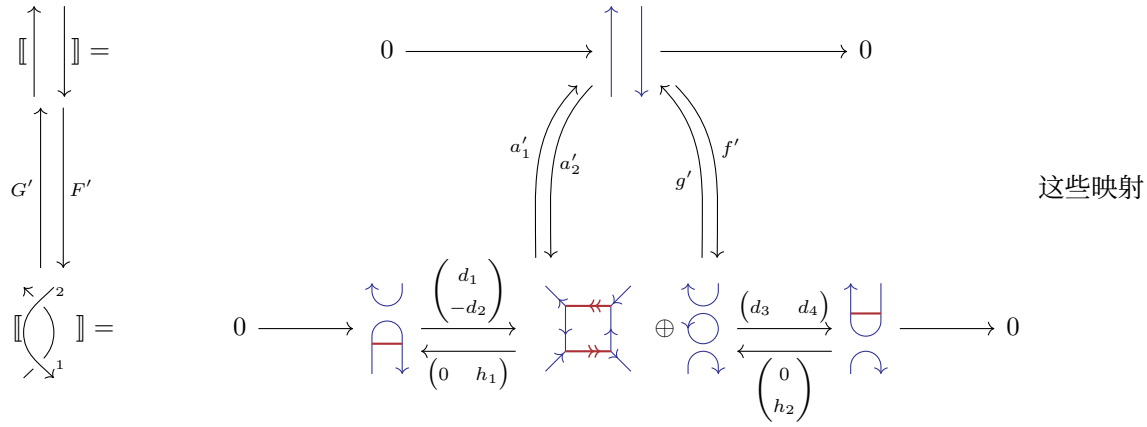


那么：



因此 $f \circ g - Id = h_2 \circ d_4 + d_2 \circ h_1$。最后我们需要 $d_4 \circ h_2 = -Id$ 以及 $h_1 \circ d_1 = -Id$。这类似于关系 $f \circ a_1 = h_2 \circ d_3$

对于 $R2-$ 的另一侧，我们有同伦等价：



这些映射

f'、 g'、 a_1'、 a_2'与 f、 g、 a_1和 a_2相同，只是定向相反。

- R3+：我们要寻找 ⟦ ⟧ 与 ⟦ ⟧之间的同伦等价。让我们按从下往上的顺序排列两侧的交叉，那么图 ⟦ ⟧ 和

⟦ ⟧ 分别如图 11 和 12 所示。

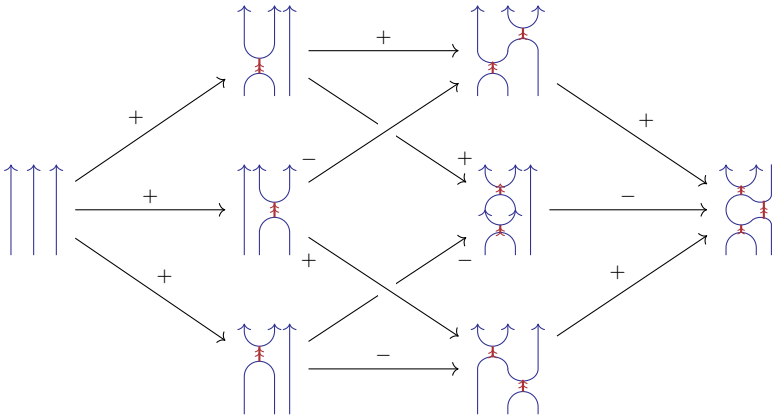
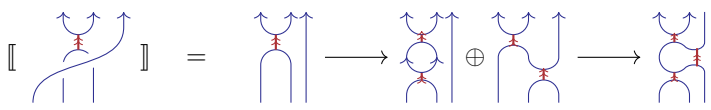


图 11：R3 左侧的分解立方体。

注意，两个复形的顶层相同，可解释为复形⟦ ⟧。

我们将证明两个底层也是同伦的。

如果我们取一个允许蓝色边之间出现交叉的三价平面图 Γ，那么就可以像对链环图那样定义一个复形 $[\![\Gamma]\!]$。接着，我们可以将第一个复形的底层写成一个三价图的括号复形：



引理 5.4 使我们能够简化这个复形。考虑以下映射

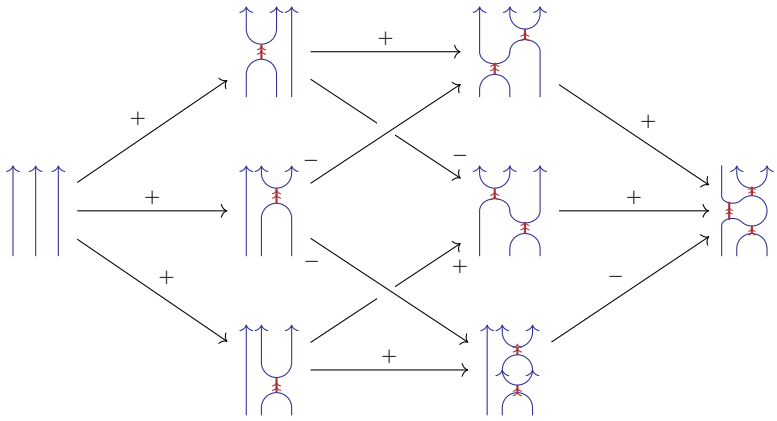
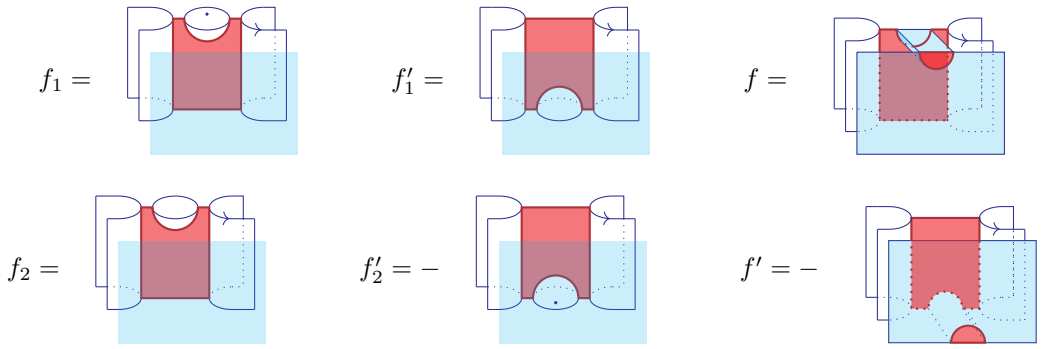
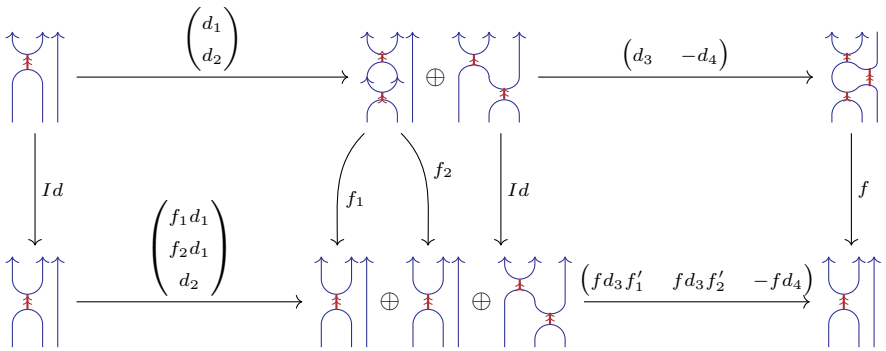


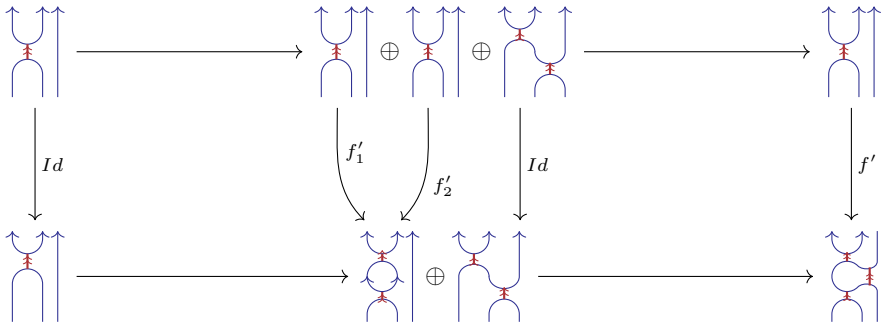
图 12：R3 的右侧的分解立方体。



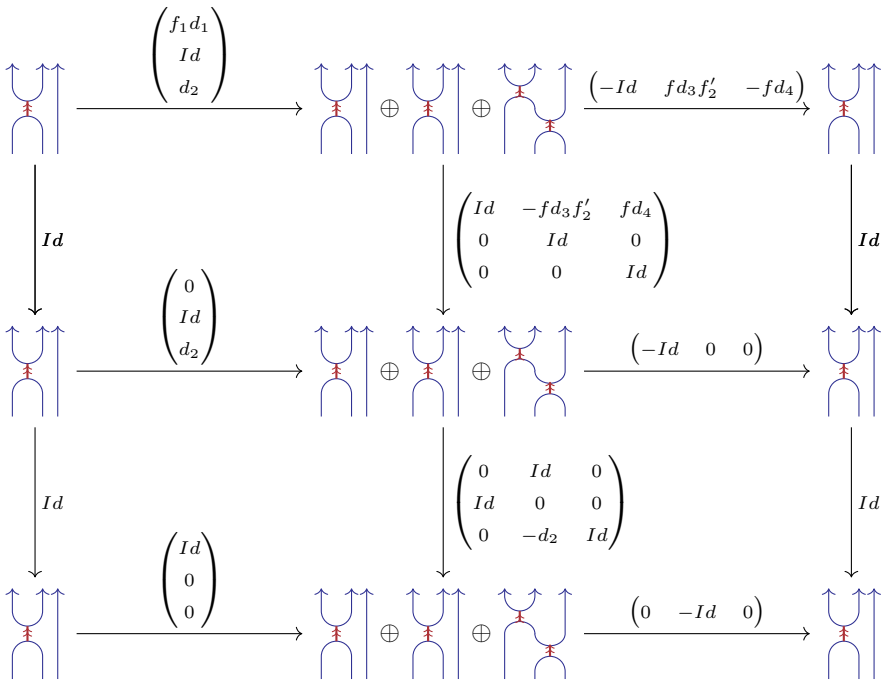
Where 彩色矩形应被视为位于其他组成部分旁边（前方）的一张蓝色薄片
nt。正如我们
ual，利用引理 3.5 和 3.6 中的关系，下面的映射是一个同构



与逆

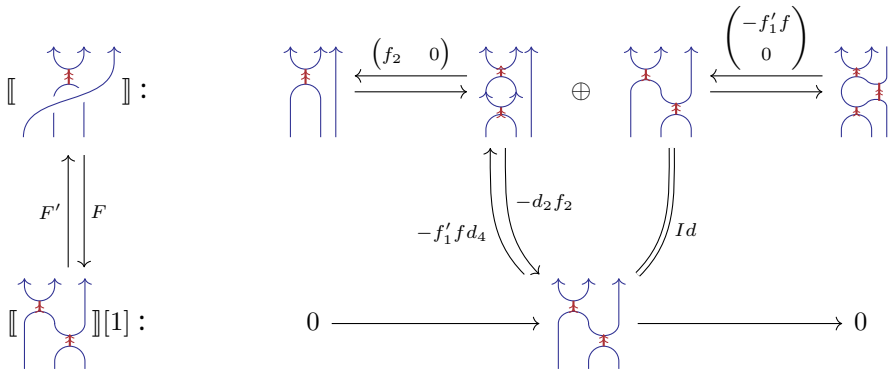


根据同痕 $f_2 d_1 = Id$，以及管关系 $f d_3 f_1' = -Id$。现在我们可以对新的复形使用高斯消去算法 [Bar 07]。

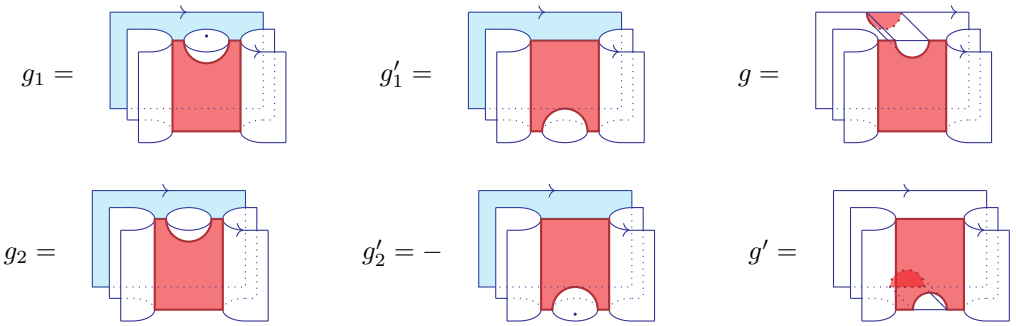


那么显然，所得复形与 0 0 之间存在同伦等价，$[\![$ $]\!]$ 与 0 0 之间也因此存在同伦等价，该等价由以下映射给出：F 和 F'。

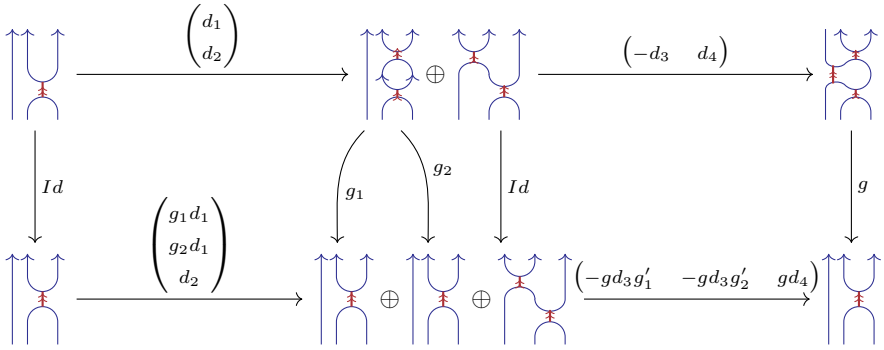




类似的过程给出了复形 ⟦ ⟧ 与 ⟦ ⟧[1]之间的同伦等价。为了准确说明这一点，我们来考察具体细节。设

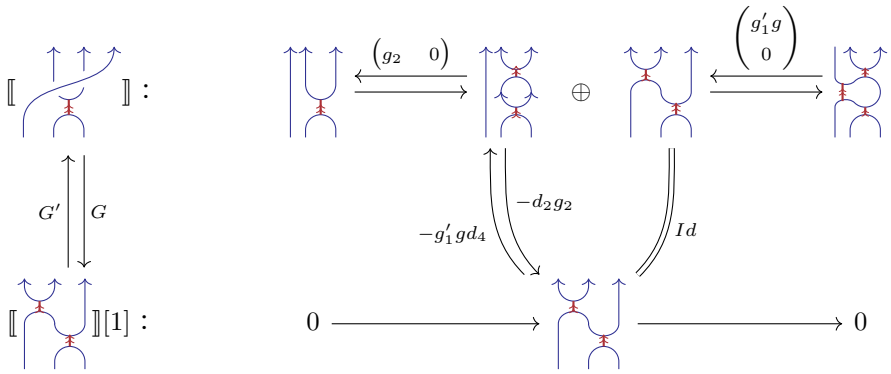


于是我们得到一个同构



注意，之前为了求出 ⟦ ⟧和 ⟦ ⟧之间的同伦等价，我们只需要关系 $f_2d_1 = Id$和 $fd_3f_1' = -Id$。映射 g_i也验证了 $g_2d_1 = Id$和 $-gd_3g_1' = -Id$

（微分 d_3 的符号发生了改变）。因此我们有一个同伦等价：



而两个复形 $\llbracket$ $\rrbracket$ 和 $\llbracket$ $\rrbracket$ 的底层是同伦的，因为它们各自都与同一个复形 $\llbracket$ $\rrbracket[1]$同伦。然而，这不足以证明 $\llbracket$ $\rrbracket$ 与$\llbracket$ $\rrbracket$同伦。我们还需要一些工具才能做到这一点。

定义 6.7。 设 $\Psi : (\mathcal{O}_0^r, d_0) \to (\mathcal{O}_1^r, d_1)$ 是一个复形态射。 Ψ 的**锥** $\Gamma(\Psi)$ 是一个复形，其链空间为 $\Gamma^r(\Psi) = \mathcal{O}_0^{r+1} \oplus \mathcal{O}_1^r$，微分为 $\tilde{d}^r = \begin{pmatrix} -d_0^{r+1} & 0 \\ \Psi^{r+1} & d_1^r \end{pmatrix}$。

引理 6.8。（略去证明）

$\llbracket$ $\rrbracket = \Gamma($ $d =$ $)[-1],$ $\llbracket$ $\rrbracket =$ $d =$.

该引理的一个结论是，我们可以写成 $\llbracket$ $\rrbracket = \Gamma($$\llbracket$ $\rrbracket \xrightarrow{d} \llbracket$ $\rrbracket[-1]$

and $\llbracket$ $\rrbracket = \Gamma($$\llbracket$ $\rrbracket \xrightarrow{d} \llbracket$ $\rrbracket)[-1]$.

定义 6.9. 若存在一个复形态射 $G : \Omega_b \to \Omega_a$ 以及从 Ω_a 到其自身的同伦映射 h，使得$FG = I$, $I - GF = dh + hd$且 $hG = 0$，则称复形态射 $F : \Omega_a \to \Omega_b$ 是强形变收缩。在这种情况下，我们称 G是强形变收缩中的包含。

强同伦收缩的用途在于，它们在锥构造下表现良好。

引理 6.10. 设 (O_0, d_0)、$(O\ d)$ 和 (O', d') 是三个链复形。假设存在一个形变收缩 $F : O \longrightarrow O'$，其包含为 $G : O' \longrightarrow O$。

1. 设 $\Psi : O_0 \longrightarrow O$ 是链复形的一个态射，则 $\Gamma(F \circ \Psi) \simeq \Gamma(\Psi)$。

2. 类似地，设 $\Psi' : O \longrightarrow O_0$ 是链复形的一个态射，则 $\Gamma(\Psi \circ G) \simeq \Gamma(\Psi)$。

证明。 令 $h : \mathcal{O}_* \to \mathcal{O}_{*-1}$ 是满足 $Id - GF = dh + hd$、 $FG = Id$ 和 $hG = 0$ 的同伦等价。我们描述每种情况下的同伦等价。

1.

$$\Gamma(F\Psi):\quad \begin{pmatrix}\mathcal{O}_{0,i+1}\\ \mathcal{O}'_i\end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{pmatrix}-d_0 & 0\\ F\Psi & d'\end{pmatrix}} \begin{pmatrix}\mathcal{O}_{0,i+2}\\ \mathcal{O}'_{i+1}\end{pmatrix}$$

$$\tilde{G}=\begin{pmatrix}Id & 0\\ -h\Psi & G\end{pmatrix}\quad \tilde{F}=\begin{pmatrix}Id & 0\\ Fh\Psi & F\end{pmatrix}\qquad \tilde{G}\quad \tilde{F}$$

$$\Gamma(\Psi):\quad \begin{pmatrix}\mathcal{O}_{0,i+1}\\ \mathcal{O}_i\end{pmatrix} \underset{\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & -h+GFh\end{pmatrix}}{\overset{\begin{pmatrix}-d_0 & 0\\ \Psi & d\end{pmatrix}}{\rightleftarrows}} \begin{pmatrix}\mathcal{O}_{0,i+2}\\ \mathcal{O}_{i+1}\end{pmatrix}$$

2.

$$\Gamma(\Psi' G):\quad \begin{pmatrix}\mathcal{O}'_{i+1}\\ \mathcal{O}_{0,i}\end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{pmatrix}-d' & 0\\ \Psi' G & d_0\end{pmatrix}} \begin{pmatrix}\mathcal{O}'_{i+2}\\ \mathcal{O}'_{0,i+1}\end{pmatrix}$$

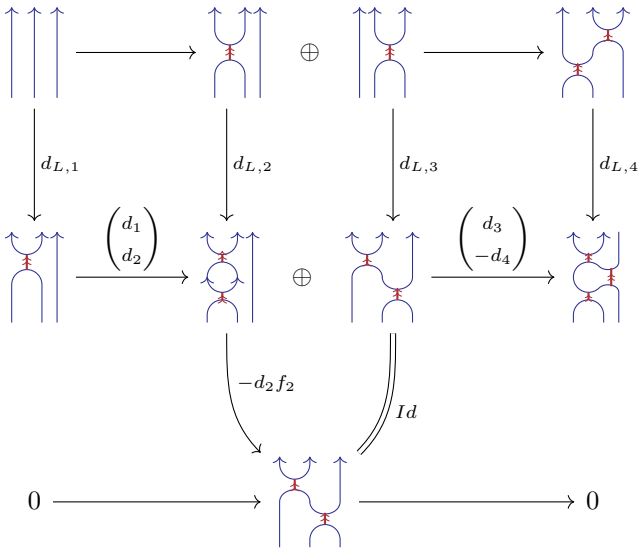
$$\tilde{G}=\begin{pmatrix}Id & 0\\ 0 & G\end{pmatrix}\quad \tilde{F}=\begin{pmatrix}Id & 0\\ \Psi' h & F\end{pmatrix}\qquad \tilde{G}\quad \tilde{F}$$

$$\Gamma(\Psi'):\quad \begin{pmatrix}\mathcal{O}_{i+1}\\ \mathcal{O}_{0,i}\end{pmatrix} \underset{\begin{pmatrix}-h & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}}{\overset{\begin{pmatrix}-d & 0\\ \Psi' & d_0\end{pmatrix}}{\rightleftarrows}} \begin{pmatrix}\mathcal{O}_{i+2}\\ \mathcal{O}_{0,i+1}\end{pmatrix}$$

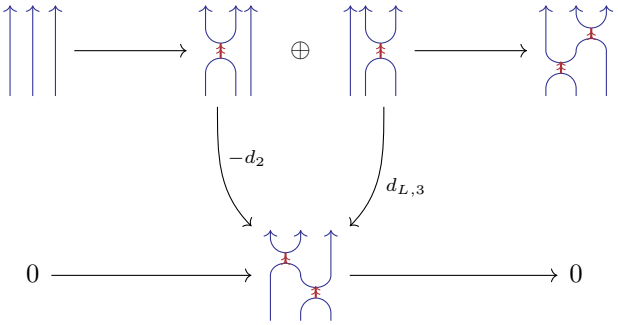
□

现在，我们知道 $[\![$  $]\!] = \Gamma([\![$  $]\!] \xrightarrow{d_L} [\![$  $]\!][-1]$ 和 $[\![$ $]\!] = \Gamma([\![$ $]\!] \xrightarrow{d_R} [\![$ $]\!][-1]$。我们有同伦等价 F : $[\![$  $]\!] \longrightarrow [\![$  $]\!][1]$ 以及 G : $[\![$ $]\!] \longrightarrow [\![$ $]\!][1]$。如果 F 和 G 是强形变收缩，那么我们可以期待映射  d_L 和 $G \circ d_R$ 是同伦的。  $\Gamma(d_L) \simeq \Gamma(F \circ d_L) \simeq \Gamma(G \circ d_L) \simeq \Gamma(d_L)$，于是我们得到第三 Reidemeister 变换下的不变性。

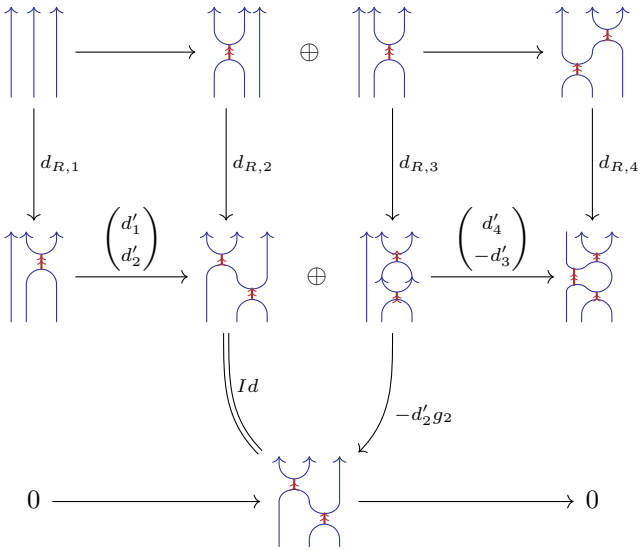
验证 F 和 G 是强形变收缩是直接的。映射 $F \circ d_L$ 是



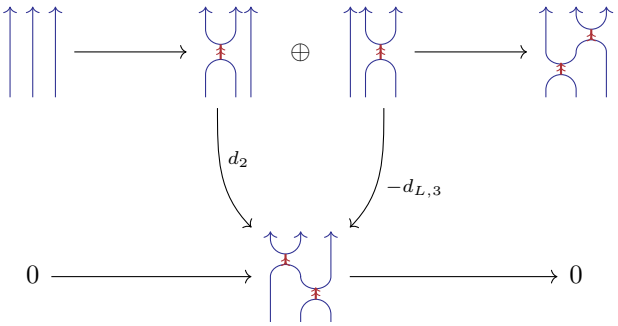
这里有 $d_{L,2} = d_1$，并且我们知道 $f_2 d_1 = Id$。因此 $F \circ d_L$ 是



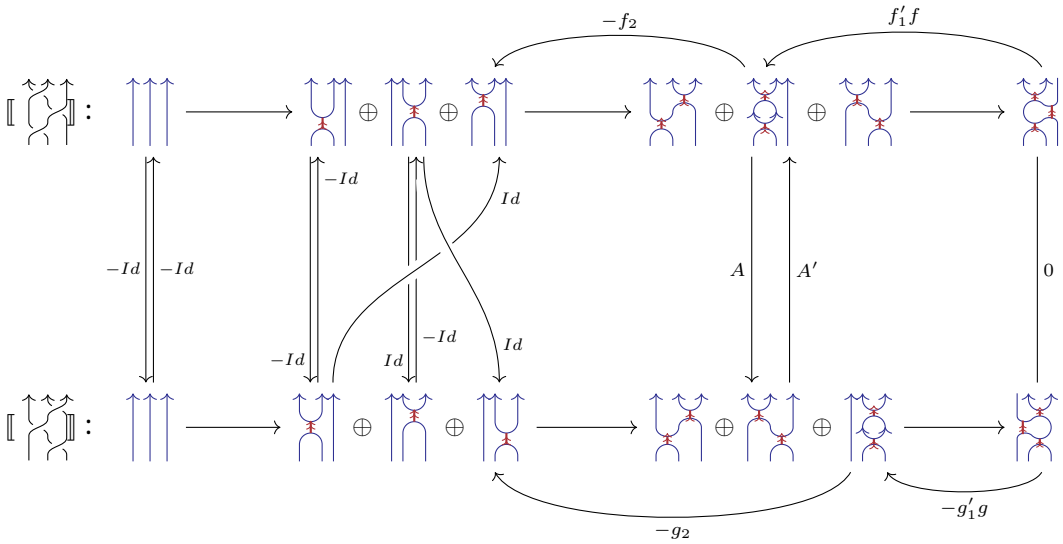
对于 $G \circ d_R$，我们有



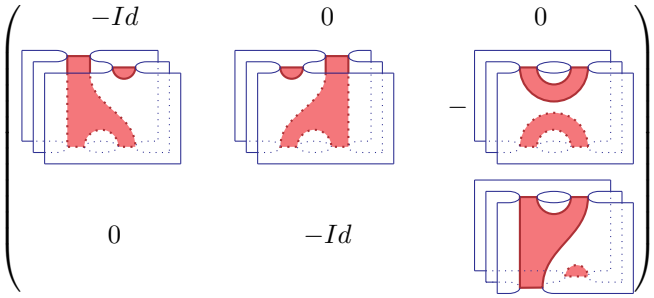
以及 $d_{R,3} = d'_1$, $g_2 d'_1 = Id_\circ$ 那么 $d_2 = d_{L,3}$ 以及 $d_{R,2} = d_2$

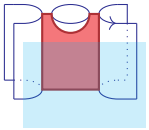
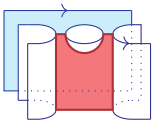
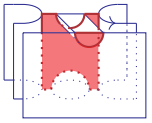
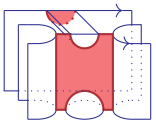


因此 $F \circ d_L = -G \circ d_R$，所以 $\Gamma(F \circ d_L) = \Gamma(-G \circ d_R)$。映射 F 和 $-G$ 是强形变收缩，这给出 $\Gamma(d_L) = \Gamma(d_R)$，即第三 Reidemeister 变换下的不变性。利用引理 6.10 证明中定义的映射，我们可以明确写出对应于 $R3$ 的同伦等价。微分的符号取自图 11 和图 12。



$$A = \begin{pmatrix} -Id & 0 & 0 \\ 0 & & -Id \\ - & - & \end{pmatrix}$$

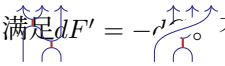
$A' =$ 

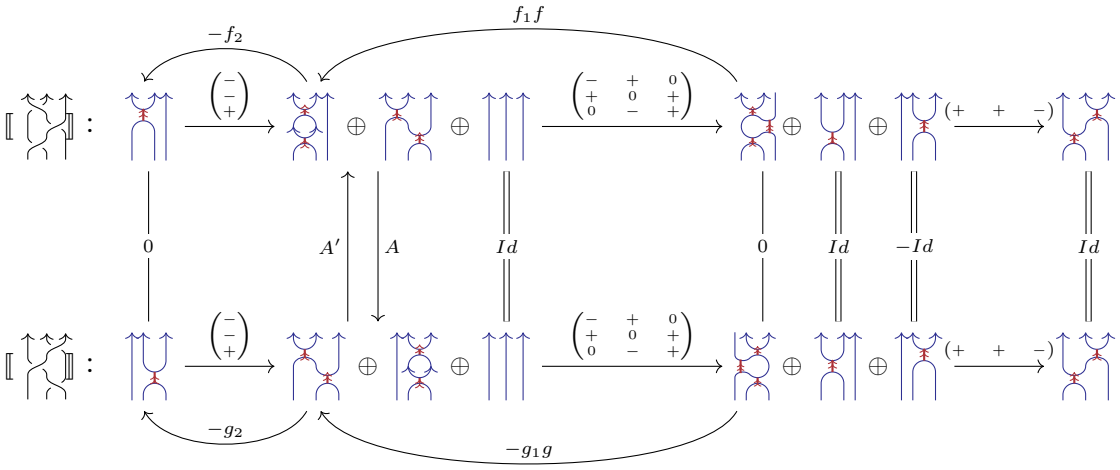
$f_2 =$  , $g_2 =$  , $f_1' f =$  and $g_1' g =$ 

- $R3-$：我们有：

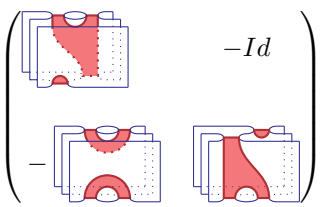
$[\![$  $]\!] \simeq \Gamma([\![$  $]\!] \xrightarrow{d} [\![$  $]\!])$

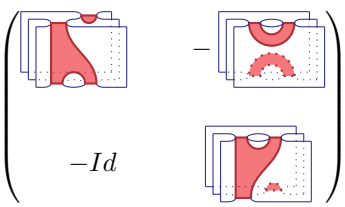
$[\![$  $]\!] \simeq \Gamma([\![$  $]\!] \xrightarrow{d} [\![$  $]\!])$.

变形收缩的包含 F'：$[\![$  $]\!] \longrightarrow [\![$ $]\!]$ 和 G'：$[\![$ $]\!] \to [\![$ $]\!]$ 满足 $dF' = -$  不变性由此如前所述可由引理 6.10 得出。$R3-$ 的同伦等价映射详见下图。



其中 A和 A' 是矩阵：

$A =$ 

$A' =$ 

这 5 种变换生成了所有定向 Reidemeister 变换 [Pol09]。这证明了括号复形（因此也包括 Khovanov 复形）在同伦意义下的不变性。剩下需要验证的是，所讨论的同伦等价是零次的。由于我们已经得到了与每种 Reidemeister 变换对应的映射的显式公式，因此只需验证这些映射都是零次的。

关于不变性的最后几点说明：

- CKh的定义中还有一些任意选择。特别是，我们需要验证，对交叉的排序，或对同一高度上状态的排序作出不同选择时，会得到同伦的链复形。

- 我们通过局部处理证明了在 Reidemeister 变换下的不变性。要理解为什么这已经足够，可以使用 canopolies 的语言（见 [Bar05]）。

□

6.4 三价 TQFT

定义 6.11。 范畴 Cob^3 的对象是平面中的闭曲线，态射是它们之间的配边（嵌入在 $\mathbb{R}^3$中）。

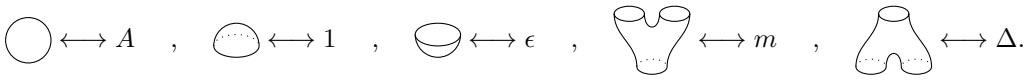
一个（1+1）拓扑量子场论（TQFT）$\mathcal{F}$ 是从范畴 Cob^3 到阿贝尔群范畴 $\mathcal{A}b$ 的幺半函子。这意味着，对于任意两条曲线 γ 和 γ'，有$\mathcal{F}(\gamma \sqcup \gamma') = \mathcal{F}(\gamma) \otimes \mathcal{F}(\gamma')$。因此，对于两个配边 C 和 C'，有$\mathcal{F}(C \sqcup C') = \mathcal{F}(C) \otimes \mathcal{F}(C')$。

定义 6.12. 设 R 是一个环。Frobenius 代数是一个集合 A，配备一个 R-模，并配备映射 $m\colon A \otimes A \to A$, $\Delta\colon A \to A \otimes A, 1\colon \mathbb{Z} \to A$，以及 $\varepsilon\colon A \to \mathbb{Z}$，满足：

1. $m(a \otimes b) = m(b \otimes a)$，且 $m(m(a \otimes b) \otimes c) = m(a \otimes m($
$b \otimes c))$ 2. $\iota\Delta = \Delta$. 和 $(1_A \otimes \Delta) \circ \Delta = (\Delta \otimes 1_A) \circ \Delta$3. $m(1 \otimes a)$
$= a$ 和 $(\varepsilon \otimes 1_A) \circ \Delta = 1_A$4. $\Delta \circ m = (m \otimes 1_A) \circ (1_A \otimes \Delta)$。

其中 $\iota\colon A \otimes A \to A \otimes A$ 是由 $\iota(a \otimes b) = b \otimes a$ 给出的对合。

令 $R = \mathbb{Z}$。由此可证明，Frobenius 代数 A 决定了一个 (1+1)-拓扑量子场论。反过来，一个 (1+1)-拓扑量子场论决定了一个 Frobenius 代数。两者之间的对应关系如下。



我们已经看到，$S(\bigcirc)$是一个秩为 2 的自由 $\mathbb{Z}[X_1, X_2]$-模。它由 和 生成。由关系 (X_1+X_2) X_1X_2，可得 $S(\bigcirc) = \mathbb{Z}[X_1, X_2][X]/(X-X_1)(X-X_2)$作为一个 Frobenius 代数。令 $X_1 = X_2 = 0$ 后，便得到三价拓扑量子场论。

定义 6.13。 三价拓扑量子场论 $\mathcal{T}\colon \mathcal{F} \to \mathcal{A}b$ 是如下函子：

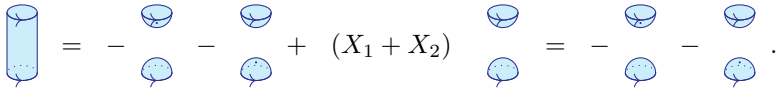
$$\mathcal{T} : \mathcal{F} \xrightarrow{\mathcal{G}} \mathbb{Z}[X_1, X_2]Mod \xrightarrow{X_1=X_2=0} \mathcal{A}b$$

$\mathcal{T}$是幺半的，并且$\mathcal{T}(\bigcirc)$ 是 Frobenius 代数 $\mathbb{Z}[X]/X^2$。关系 $X^2 = 0$ 是齐次的。$\mathcal{T}(\bigcirc)$ 仍然是次数为 $(q + q^{-1})$ 的分次的。

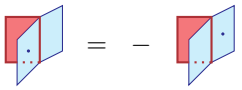
让我们仔细考察$\mathcal{T}(\bigcirc)$中的关系。

- 在红色曲面上添加装饰会使配边乘以 $X_1 + X_2$ 或 X_1X_2，即 0。

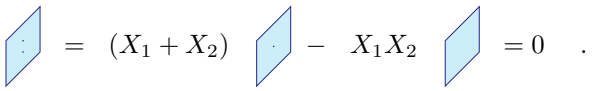
- 颈切割关系是



- 将一个蓝点移过绑定的一个连通分支，会使初始配边乘以 -1。



- 同一连通分支上的两个蓝点给出 0。



6.5 琼斯多项式的范畴化

定义 6.14. 设 D 是链环 L 的一个图。琼斯多项式 $V(L) \in \mathbb{Z}[t^{\pm\frac{1}{2}}]$ 由以下规则定义：

- $V(\bigcirc) = 1$
- $V(D \sqcup \bigcirc) = (-t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}})V(D)$
- $t^{-1}V($  $) - tV($  $) = (t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}})V($  $)$。

定理 6.15. 设 L 是一个链环，且 $\chi_q(L)$ 是链复形的分次欧拉特征 ex $CKh(L)$：

$$\chi_q(L) = \sum_{i\in\mathbb{Z}} (-1)^i V(CKh_i(L))$$

那么，除正规化外，$\chi_q(L)$ 等于 $V(L)$，其中变量替换为 $q = -t^{-\frac{1}{2}}$。

证明。 我们有以下等式：

$$CKh($  $) = CKh($  $)\{-1\} \oplus CKh($  $)[1]\{-2\}$$

and

$$CKh($ $) = CKh($ $)\{1\} \oplus CKh($ $)[-1]\{2\}$$

将第一个等式中的次数上移 2，在第二个等式中的次数下移 2，然后取分次欧拉特征之差，我们得到

$$q^2\chi(CKh($  $)) - q^{-2}\chi(CKh($ $)) = (q - q^{-1})\chi(CKh($  $)).$$

□

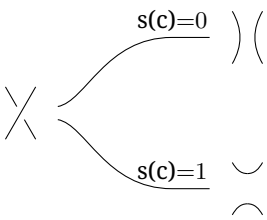
7 恢复原始 Khovanov 同调

7.1 原始定义

设 D 是有向链环 L 的一个图。设 n_+（分别为 n_-）是 D 中正（分别为负）交叉的数量。

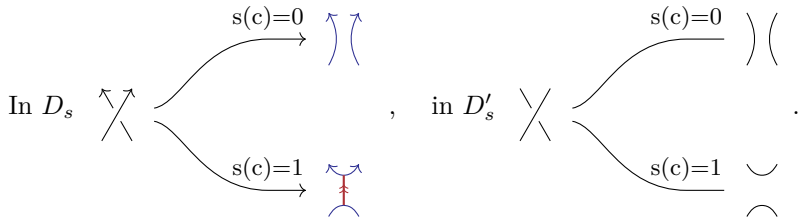
与第 6.2 节一样，我们首先构造一个分解立方体。 D 的一个状态 s 为每个交叉指定 0 或 1。

这一次，光滑化不依赖于交叉的符号，其形式如下：

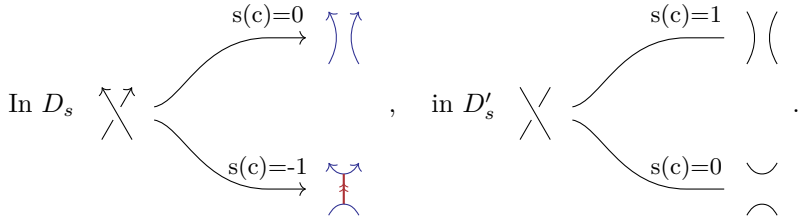


于是，分辨立方体的顶点是范畴 Cob^3 中的对象。光滑化D_s 的高度为 $\sum_c s(c) - n_-$。立方体的边是鞍点：在这些鞍点处， $s(c)$ 发生变化，而其他部分均为恒等映射（这些边是 Cob^3 中的态射）。符号的选取方式与第一个分辨立方体完全相同。结果是在 $Kob(Mat(Cob^3))$ 中得到的形式链复形，它是链环不变量([Bar05])。

取第 6.2 节中定义的分解立方体并遗忘红边后，我们得到完全相同的图。为说明这一点，设 D_s 是遗忘红边后的一个定向光滑化， D'_s 是相应的非定向光滑化。设 c 是一个正交叉。如果 $s(c) = 1$ 在 D_s 中，那么 $s'(c) = 1$ 在 D'_s 中；如果 $s(c) = 0$，那么 $s'(c) = 0$ 也同样成立：



如果 c 是一个负交叉，那么如果 $s(c) = -1$ 在 D_s $s'(c) = 0$ 中，且如果 $s(c) = 0$ 在 D_s $s'(c) = 1$ 中，则 D'_s。



设 i 为 D_s 的高度， i' 为 D'_s 的高度，则：

$$\begin{aligned} i &= \sum_{c\ s(c)=1} 1 - \sum_{c\ s(c)=-1} 1 \\ &= \sum_{c \text{ positive, } s'(c)=1} 1 - \sum_{c \text{ negative, } s'(c)=0} 1 \\ &= \sum_{c \text{ positive, } s'(c)=1} 1 - \sum_{c \text{ negative, }} 1 + \sum_{c \text{ negative, } s'(c)=1} 1 \\ &= (\sum_{s'(c)=1} 1) - n_- \\ &= i'. \end{aligned}$$

下一步是将拓扑量子场论 $\mathcal{T}' = \mathbb{Z}[X]/X^2$ 应用于新的分解立方体。设 C_2 为所得的链复形。设 n_s 为 D_s 中蓝色分支的数量， n'_s 为 D'_s 中分支的数量。那么 $n_s = n'_s$ 且 $\mathcal{T}(D_s) = (\mathbb{Z}[X]/X^2)^{\otimes n_s} = \mathcal{T}'(D'_s)$（定理 5.2）。令 $deg(1) = 1$，且 $deg(X) = -1$，以及 $Kh(D)_i = C_{2,\ i}\{i + n_+ - n-\}$。

复形 $Kh(D)$ 是原始的 Khovanov 复形（ [Bar05] 中的第 7 节）。上文的讨论表明， $Kh(D)$ 和 $CKh(D)$ 具有相同的链群。这意味着 CKh(D) 和 Kh(D) 可能同构，因此我们可以从 CKh中提取原始的 Khovanov 同调，这也说明了它的名称由来。不过，先验地说，它们的微分不一定相同。

本节的目标是证明 $Kh(D)$ 确实与 $\mathcal{T}(CKh(D))$ 同构。我们先定义所需的工具，这些工具改编自 [Bel+19]。

7.2 着色

定义 7.1。 流形 M^n 的着色由两个余维 1 子流形组成：一个有向的 U_r 和一个无向的 U_b。它们彼此以及与 ∂M^n 横截，并且还包括一个

M^n 的棋盘式着色，即为 $U_r \cup U_b$ 的补集的每个连通分支选择白色或黑色中的一种颜色。我们分别将 U_r 和 U_b 称为红色和蓝色。交集 $U_r \cap U_b$ 的分支称为粘合；它们将 U_r 和 U_b 都分解为面片。$U_r \cup U_b$ 在 M^n 中的补集的分支称为区域。

流形 M 上的棋盘式着色完全由其中一个区域的着色选择 [Bel+19] 决定。

嵌入在 M^n 中的三价流形是三价图和三价曲面的推广。它由红色和蓝色面片（即定向余维 1 子流形）构成，其边界分支横向附着于 M^n 的边界，或沿（粘合）粘合在一起，并满足某种流条件。我们关注 $n = 1$, 2 或 3 的情形。如果 $n = 1$，那么嵌入在 M^1 中的三价流形就是由红色点和蓝色点组成的离散集合，并且其补集带有棋盘式着色。如果 $n = 2$，我们得到三价图；如果 $n = 3$，我们得到三价曲面。

流形 M^n 上的着色与嵌入其中的三价流形之间存在对应关系。设 (U_r, U_b) 是 M^n 的一种着色，那么 $\Gamma(U_r, U_b)$ 就是按如下方式构造的三价流形：

- 每个蓝色面片都继承其所围白色区域所诱导的定向。
- 只有当红色面片的定向与其相邻白色区域所诱导的定向一致时，才予以保留。否则，该面片将被消去。

图13展示了这一构造的一个例子。

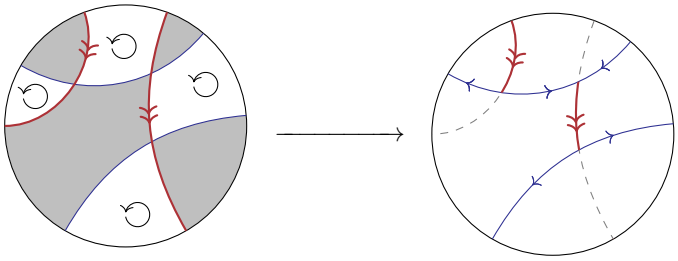


图13：由圆盘的着色构造三价图。

反过来，我们有以下引理。

引理7.2。 设 V 是嵌入在 M^n 中的三价流形，其中 $n = 2$ 或 3。假设 $\partial V = \sim \sim \sim \Gamma(U_r, U_b)$ 对某个 ∂M^n 的着色 (U_r, U_b) 成立，则存在 M^n 的一个着色 (U_r, U_b)，它在 ∂M^n 上限制为 $\tilde{} \tilde{}(U_r, U_b)$，并且满足 $\Gamma(U_r, U_b) = V$。

证明。 令 V 为引理中的三价流形。我们按如下方式构造 (U_r, U_b)。

- **步骤 1：** 我们为边界定向。∂M^n 中涂成白色的区域保留由 M 诱导的定向，而涂成黑色的区域则反转定向。
- **步骤 2：** 令 R 为 M^n 的一个区域。那么 R 的边界是 ∂M^n 的区域与 V 的面片之并。R 边界上两个定向相反的连通分支在两种情况下相交：若它们都位于边界上，则在 ∂V 处相交；若它们都是 V 的面片，则在一个三价顶点或绑定处相交。在区域 R 中，考虑 U 中定向与区域所诱导的定向相反的点集 ∂R。U 是 R 的余维一子流形。我们为 U 的每个连通分支取一份红色副本，并将其推入 R 内部。新形成的区域涂成黑色。我们对每个区域都这样处理，从而得到所需的着色。

这一构造的一个示例见图14

□

三价流形 $V \subset M^n$ 的补全是一个着色 (U_r, U_b)，使得 $\Gamma(U_r, U_b) = V$。引理7.2指出，补全通常存在。特别地，若 G, G' 是嵌入在 $\mathbb{D}^2$ 中的三价图，则：

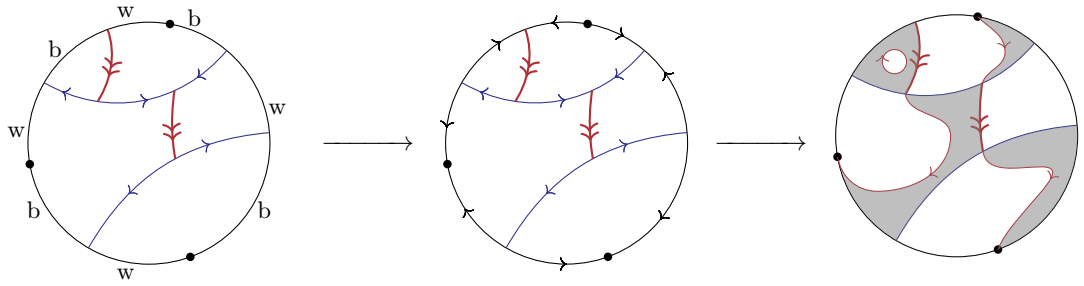


图14：由三价图构造 $\mathbb{D}^2$ 的着色。

- G 的边界是 $\partial\mathbb{D}^2$ 的一个着色，并且 G 允许补全。
- 一个 G-泡沫-G，以嵌入圆柱体$\mathbb{D}^2 \times [0,1]$边界中的三价图为边界。因此，三价图之间的任何配边都容许一个补全。

7.3 $\mathcal{T}(G)$的一个基

设 G 是嵌入圆盘 $\mathbb{D}^2$中的闭三价图。设(G_r, G_b)为其补全。我们将 $\mathbb{D}^2$ 的边界涂成白色，这完全确定了着色(G_r, G_b)的棋盘式着色。然后，我们可以通过去掉棋盘式着色来简化补全的图。为使 G 更加可见，应用 Γ 后不再保留的红边被画成虚线。我们还允许用任意数量的点标记 G_b 中的蓝色环。一个

sh着色 S可由（带点的）补全(G_r, G_b)按如下方式构造：

1. 我们为 G_r 中的每个红色环附加一个位于 $\mathbb{D}^2 \times [\frac{1}{2}, 1]$中的圆盘，使得圆盘族 D_r 投影到 $\mathbb{D}^2 \times \{1\}$ 上是单射的。2. 我们为 G_b 中的每个蓝色环附加一个位于 $\mathbb{D}^2 \times [0,1]$中的圆盘，使得圆盘族 D_b 投影到 $\mathbb{D}^2 \times \{1\}$ 上是单射的，并且使得 $D_b \cap (\mathbb{D}^2 \times [0, \frac{1}{2}]) = G_b \times [0, \frac{1}{2}]$。3. 蓝色圆盘上装饰有与其边界数量相同的蓝点，这些蓝点放置在小于$_1$ $_2$的高度处。 – –

–

由此得到的着色所对应的泡沫 $\Gamma(S)$ 称为杯泡沫。它由定义中使用的带点补全 (G_r, G_b) 唯一确定。

引理 7.3。 设 G 是一个闭三价图。令(G_r, G_b) 为 G 的一个补全。由(G_r, G_b)得到的所有带点补全组成的族（其中每个蓝色环至多包含一个点）给出了 $T(G)$ 的一个基，我们将其记为 $Foam(G)$。

证明概要： 设 $\Sigma \subset \mathbb{D}^2 \times [0,1]$ 是一个 $\emptyset$-泡沫-G。引理 3.5 中的关系允许我们将 Σ 写成配边的线性组合，其中所有面片的亏格均为 0。

现在假设 Σ 的面片亏格均为 0，并令 (Σ_r, Σ_b) 为 Σ 的一个补全，使得 (Σ_r, Σ_b) 在 $\mathbb{D}^2 \times \{1\}$ 中限制为 (G_r, G_b)。那么 Σ_r（分别地，Σ_b）是附着于 G_r（分别地，G_b）各连通分支上的圆盘族，并且除同痕外，着色 Σ_r，Σ_b 满足杯泡沫定义中的条件 (1) 和 (2)。

如果红色圆盘上带有装饰，那么我们通过将 Σ 乘以相应的多项式来移除这些装饰。对于蓝点，在同一连通分支中包含多于一个蓝点的配边在 $\mathcal{T}$ 中就是零（参见第 6.4 节）。如果某个连通分支中只有一个点，我们可以反复使用迁移关系将其推到所需的高度，从而验证条件 (3)。

这证明 $Foam$ (G) 生成 $\mathcal{T}$ (G).

–设 F 是 $Foam(G)$ 的一个元素，并设 $F \in Foam(G)$ 为杯泡沫，其中蓝色环 γ 被标记

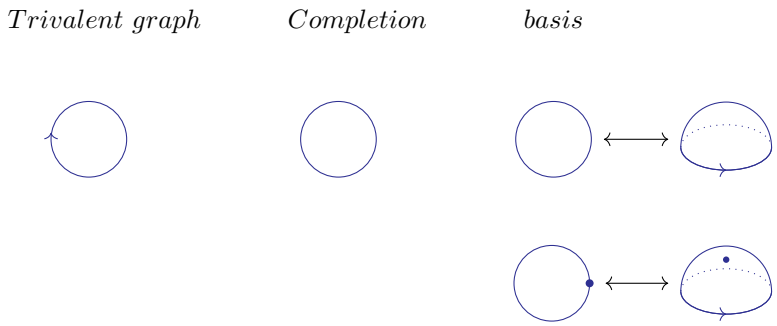
– –一个点，当且仅当它在 F 中没有点 F。那么，若我们沿着 G 将 F 粘到 F 上，所得闭曲面 FF 的求值 – 为 ± 1。这是因为气泡关系允许我们将所有红色

球面移出，从而得到一组互不相交的蓝色球面和红色球面，其中每个蓝色球面恰好带有一个点，该点来自 F 或 F。

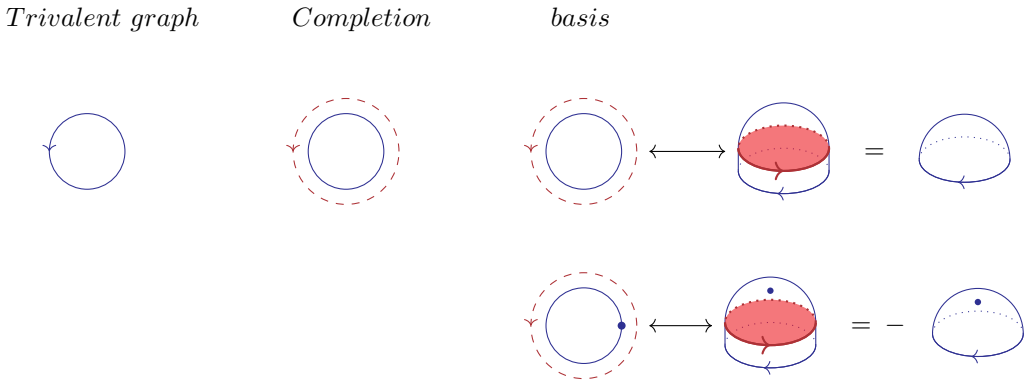
红色球面的求值为 -1，对于包含一个点的蓝色球面也一样，这证明了取决于点的数量， FF 的求值为 ± 1。

对于任意泡沫 $F\prime$，若其属于 $Foam(G)$ 且不同于 F，则闭曲面 $F\prime F$要么含有一个空的蓝色球面，要么含有一个带两个点的蓝色球面；两种情况下，其求值均为 0。
设 $\Sigma \in \mathcal{T}(G)$ 是任意配边，则它可以唯一地表示为 生成族 $Foam(G)$ $\Sigma = \sum_{F \in Foam(G)} < \Sigma F >< FF > F$的线性组合，这证明了 $Foam(G)$ 是$\mathcal{T}(G)$ 的基。□

例 7.4. 设 G 是一个顺时针定向的圆。那么， G的定向与最外区域的定向一致，而 G 的补全是一个蓝色圆。



设 G 是一个逆时针定向的圆。 G 的定向与最外区域所诱导的定向相反。因此，它的补全是一个蓝色圆，周围环绕着一个虚线红圆。



7.4 主要结果

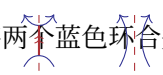
设 L 是一个有向链环， D 是 L 的一个图。设 D_{s_1} 是 D 的光滑化，使得 $|s_1(c)| = 1 \forall c$。

D_{s_1} 的一个补全为任意状态 s 确定了 D_s 的一个相容补全。只要 $s(c) = 0$，就足以将其替换为 。



设 $\{D_s^+\}_s$ 是这样一组补全，$\{Foam(D_s)\}_s$ 是相应的杯泡沫基。固定 D_s 的蓝色环的一个顺序。设 Ψ_s : $\mathcal{T}(D_s) \to (\mathbb{Z}[X]_{/X^2})^{\otimes n_s}$ 是一个映射，它将杯泡沫 $F \in Foam(D_s)$ 映射到张量积 $x_F = x_{F,\ 1} \otimes x_{F,\ 2} \otimes \ldots \otimes x_{F,\ n_s}$，其中若蓝色环 i 含有一个点，则 $x_{F,\ i} = X$；否则 $x_{F,\ i} = 1$ 。于是 Ψ_s 是一个同构，从现在起我们将其作为 $\mathcal{T}(D_s)$ 与 $(\mathbb{Z}[X]_{/X^2})^{\otimes n_s}$ 之间的识别。

断言。 设 c 是一个负交叉。如果映射 d_c : $\longrightarrow$ 将两个蓝色环合并，则有 $d_c = \pm m$。如果它将一个蓝色环分裂成两个，则有 $d_c = \pm \Delta$。



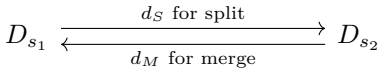
若 c是正交叉，结论同样成立，因此 d_c 改为从到。

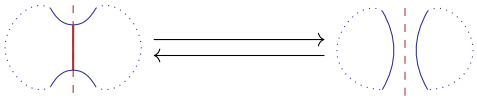


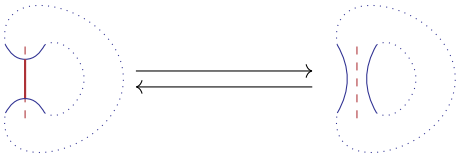
该断言中的符号仅取决于交叉 c的邻域，因此存在 $CKh(D)$的基变换，使我们可以忽略这些符号。这就证明了本节的主要结果：

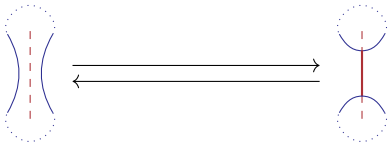
命题 7.5。 复形 $T(CKh(D))$ 与 $Kh(D)$ 同构。

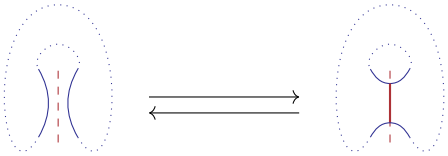
证明。 **上述断言：**
忽略定向，根据交叉附近弦的连接方式，需要考虑四种情况。



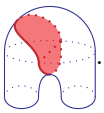
1. 

2. 

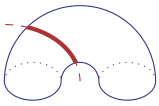
3. 

4. 

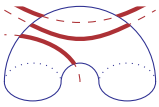
目标是在 D_{s_1} 和 D_{s_2}的泡沫基中计算 S 和 M。

第一种情况下，将 d_S 作用于 $1 \in Foam(D_{s,\ 1})$ 后，结果为  .

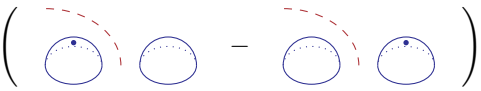
我们可以简化图示，并补充其背后着色的信息：



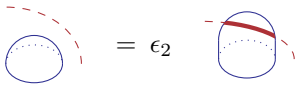
红色曲面可能还会更多，例如：



利用　　气泡关系，将这些曲面向上提升只会使泡沫乘以一个符号 ϵ_R。因此我们可以　　n 暂时忽略 m。
利用颈切割关系，根据定向

$$d_S(1) = \pm$$ 

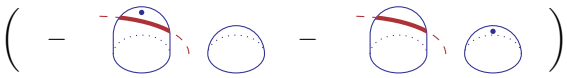
在杯泡沫中，红色圆盘位于蓝色圆盘下方。令 ϵ_1 表示上式中的符号，并令 ϵ_2表示该关系中的符号：



Then

$$d_S(1) = \epsilon_1\epsilon_2$$ 

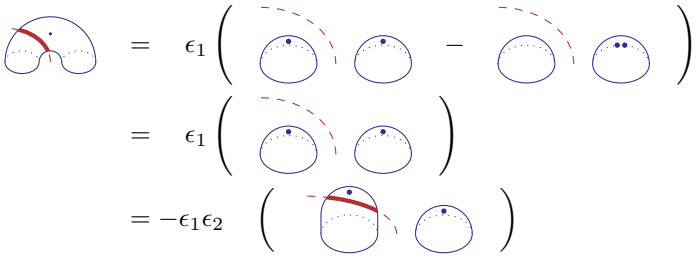
我们还需要利用迁移关系将这些点移到顶部

$$d_S(1) = \epsilon_1\epsilon_2$$ 

一开始向上提起的红色曲面也应回到蓝色圆盘下方，这会使等式中的两个泡沫都乘以相同的符号 ϵ'_R，于是我们得到了所需的结果：

$$d_S(1) = -\epsilon_1\epsilon_2\epsilon_R\epsilon'_R(X \otimes 1 + 1 \otimes X)$$

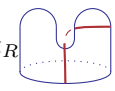
现在我们用同样的方法计算 $d_S(X)$。



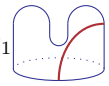
因此

$$d_S(X) = -\epsilon_1\epsilon_2\epsilon_R\epsilon'_R(X \otimes X)$$

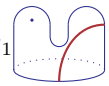
所需的映射 $d_S = \pm\Delta$。
　　同样，存在某个符号 ϵ_R，使得：

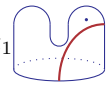
$$d_M(1 \otimes 1) = \epsilon_R$$ 

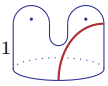
因此，将红色曲面向下推会乘以一个符号 ϵ_1

$$d_M(1 \otimes 1) = \epsilon_R\epsilon_1$$ 
$$= \epsilon_R\epsilon_1 1.$$

and

$$d_M(X \otimes 1) = \epsilon_R\epsilon_1$$ 
$$= \epsilon_R\epsilon_1 X.$$

$$d_M(1 \otimes X) = \epsilon_R\epsilon_1$$ 
$$= \epsilon_R\epsilon_1 X.$$

$$d_M(X \otimes X) = \epsilon_R\epsilon_1$$ 
$$= 0.$$

所以 $d_M = \pm m_0$。

其他情形也可以用同样的方法证明，只是每次使用不同的关系。关键是正确地调整红色圆盘和点的高度，以找回杯泡沫，并确保符号一致。

□

8 Lee-Khovanov 同调

定义 8.1。设 D 是辫结 T的一个图。Lee-Khovanov复形 $CKh'(D)$ 是复形 $CKh(D) \otimes \mathbb{Q}$ 对关系 $X_1 = -X_2 = 1$ 取商所得。
若 D 是链环 L的图，则链环的 Lee-Khovanov 同调 $\mathcal{L}Kh(L)$ 是复形 $\mathcal{G}(CKh'(D))$ 的同调。

复形 $CKh'(D)$不再是分次的： $deg(X^2) = -2 \neq 1 = deg(1)$。
这个不变量的一个有趣之处在于，它相当“弱”，仅凭链接矩阵就能完全确定。我们遵循 [BM06] 来证明这一事实。

8.1 Lee 退化

定义 8.2. 设 D 是一个辫结图， Γ 是 D 的一种平滑化。对 Γ 的一种着色，是为以下每项选择一个标签 a 或 b：

- 每个 0-平滑邻域中的两条线段。
- 每个 1-平滑中绑定两侧的四条线段里的两条，按下图所示选择

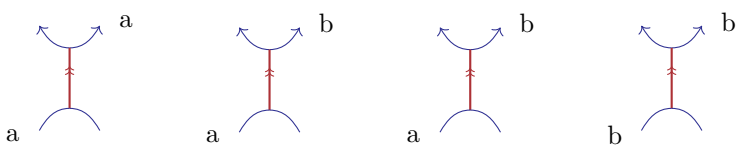


图15：1-平滑附近的四种可能着色。

定理 8.3. 设 D 是辫结 T的图， n 是其连通分支的数量。在适当的范畴中（稍后将予以定义）， $CKh'(D)$ 同伦等价于一个具有 2^n 个生成元且微分消失的复形。

8.1.1 Karoubi 包络

定义 8.4. 设 C 是一个范畴。对象O 的自同态 $p : O \to O$ 若满足 $p \circ p = p$，则称为投影。C 的 Karoubi 包络 Kar(C) 是一个范畴，其对象为有序对 (O, p)，其中 O 是 C 中的对象， p: $O \to O$ 是一个投影。若 (O_1, p_1) 和 (O_2, p_2) 是两个这样的有序对，则 Kar(C) 中从 (O_1, p_1) 到 (O_2, p_2) 的态射集合由 C 中所有满足 $f = f \circ p_1 = p_2 \circ f$ 的态射 f: $O_1 \to O_2$ 构成。Kar(C) 中的对象 (O, p) 也可记作 $im(p)$。$\mathcal{K}ar(\mathcal{C})$ 中态射的复合按显然的方式定义（即复合 $\mathcal{C}$ 中相应的态射）。对象 (O, p) 在 $\mathcal{K}ar(\mathcal{C})$ 中的恒等自同构就是 p 本身。

存在一个嵌入函子 $\mathcal{I}$ ，它将范畴 $\mathcal{C}$ 嵌入其 Karoubi 包络 $\mathcal{K}ar(\mathcal{C})$，其定义是将对象 $O \in \mathcal{C}$ 映射到对 $(O, Id) = O'$，并且有 $mor_{\mathcal{K}ar(\mathcal{C})}(O'_1, O'_2) = mor_{\mathcal{C}}(O_1, O_2)$。我们可以将 C 的对象与它们在 $\mathcal{I}$ 下的像等同起来。

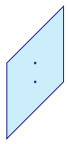
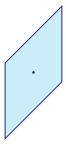
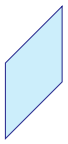
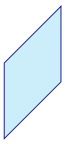
从现在起，假设范畴 $\mathcal{C}$ 是预加性的，并且对象的直和在 $\mathcal{C}$ 中有意义。

命题 8.5。 设 p: $O \to O$ 是 $\mathcal{C}$ 中的一个自同态。

- 如果 p 是一个投影，那么 $1 - p$ 也是。
- 在这种情况下， $O = im(p) \oplus im(1 - p)$ 属于 $\mathcal{K}ar(\mathcal{C})$。

8.1.2 对 Lee 理论的应用

设 Γ 是图 D 的一种光滑化。在 $\Gamma \times [0, 1]$ 的某个蓝色分支上任取一点。这给出一个自同构 P，它是幂等元 $P \circ P = Id$。

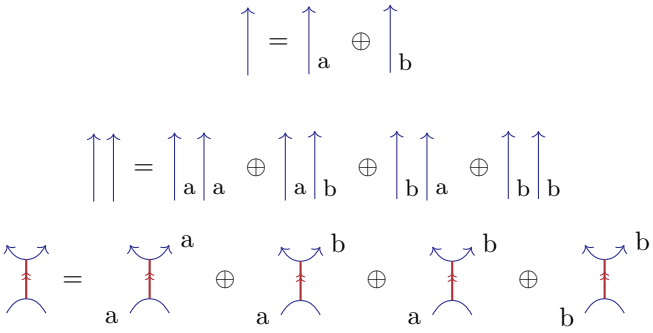
$P \circ P =$  $= (X_1 + X_2)$  $- X_1 X_2$  $=$  $= Id.$

设 $a = \frac{1}{2}(Id + P)$ 和 $b = \frac{1}{2}(Id - P)$。那么：

- a 和 b 是投影： $a \circ a = a$ 和 $b \circ b = b$;
- a 和 b 互补;
- a 和 b 是不相交的 $ab = ba = 0$;
- a 和 b 是 P的特征投影： $P \circ a = a$ 和 $P \circ b = -b$。

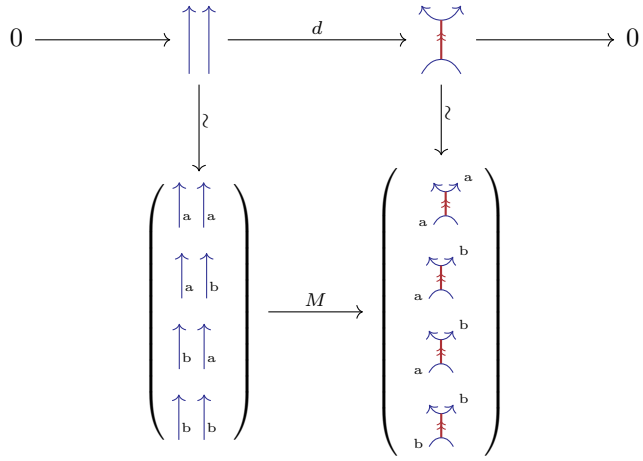
于是（Γ $, a$）和（Γ $, b$）是$\mathcal{K}ar(Kob)$的元素 , 且 Γ 同构于（Γ $, a) \oplus (\Gamma, b)$ 。给定 Γ 的一个着色，并在相应位置应用 a 和 b ，我们得到 Γ 的一个投影，因而得到 $\mathcal{K}ar(Kob)$ 的一个元素，以及 Γ 的一个分解。

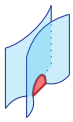
例8.6. 我们有以下分解：

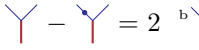


现在让我们来看简单交叉的 Lee-Khovanov复形。

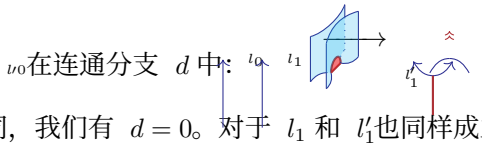
$CKh($  $):$

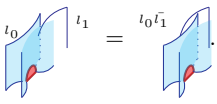


$d =$ 

注意，在这种情况下（$X_1 = -X_2 = 1$），我们再次得到关系 $= -$ 。因此 2  $= -$  $= 2$  .

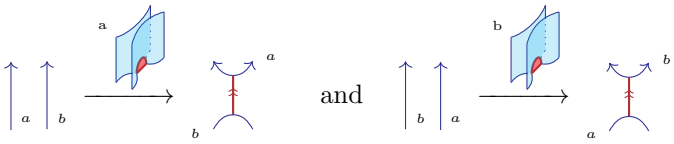
设 $(l_0,\ l_0',\ l_1,\ l_1') \in \{a,\ b\}^4$。设 $\bar{l} = Id - l$，使得 $l\bar{l} = 0$。

 在连通分支 d 中：l_0 和 l_0' 位于同一个连通分支中。因此，如果 l_0 与 l_0' 不同，我们有 $d = 0$。对于 l_1 和 l_1'也同样成立。

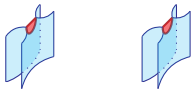
如果 $l_0 = l_0'$ 和 $l_1 = l_1'$，那么 $d =$  。因此，除非 l_0 与 l_1不同，否则 $d = 0$。我们有

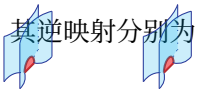
$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

因此，复形 $CKh($  $)$ 同构于 4 链复形的直和，其中唯一具有非零微分的链复形为



a b这两个复形是无环的。事实上，映射 和 是同构，其逆映射分别为 和 （颈切割和双边形关系）。a b



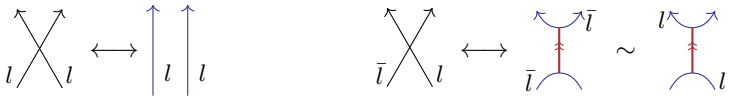


$$CKh(\times) \simeq \uparrow\uparrow_{a\,a} \oplus \uparrow\uparrow_{b\,b} \xrightarrow{0} \cap_{a\,a} \oplus \cap_{b\,b}$$

负交叉的情形也同样成立。将缠结图逐个交叉地拼接起来，我们便可看出，一般情形也成立。因此，$CKh'(D)$ 与一个微分消失的复形 C' 同伦等价。复形 C' 由 D 的光滑化生成，其中每个交叉周围的颜色都一致。

设 D_0 是 D 的一个着色光滑化，也就是$\mathcal{K}ar(Kob)$ 的一个元素。假设同一条蓝色边上同时有 a 和 b，且这条边属于 D_0。我们知道 $ab=0$，因此在$\mathcal{K}ar(Kob)$ 中有 $D_0=0$。
如果在一个三价顶点相接的两条蓝色边上，标签相同，均为 a 或 b，那么将其中一个移到另一侧会使其取逆，于是我们得到同一条边上的 a 和 b。同样，$D_0=0$。
如果这两种情形都不成立，那么 D_0 非零（这可以通过将相应的投影与一个精心选取的配边复合来证明，参见引理 7.3）。在最后这种情形下，我们称 D_0 的着色是相干的。我们证明了 $CKh'(D)$ 与一个复形 C' 同伦等价，该复形由相干着色的光滑化作为生成元，且没有微分。接下来只需计算这些生成元的数量。

设 L 是一个具有 n 个连通分支的链环，D 是 L 的图。
D 的相容着色光滑化与 $\{a,b\}^n$ 之间存在一一对应关系，具体如下。我们将 $\{a,b\}^n$ 中的元素视为对 L 每个连通分支选取标签 a 或 b。



这就完成了定理 8.3 的证明。

9 函子性

9.1 嵌入协边

定义 9.1。设 B 是 $\mathbb{S}^2$ 中的一个点集，可以为空。设 T 和 T' 是嵌入在 $\mathbb{D}^3$ 中、边界为 B 的两个缠结。从 T 到 T' 的配边是一个嵌入在 $\mathbb{D}^3\times[0,1]\subset\mathbb{R}^4$ 中的曲面 C，满足：

- 存在一个 $\epsilon_0>0$，使得 $C\cap\mathbb{D}^3\times[0,\epsilon_0]=T\times[0,\epsilon_0]$。
- 存在一个 $\epsilon_1<1$，使得 $C\cap\mathbb{D}^3\times[\epsilon_1,1]=(-T\prime)\times[\epsilon_1,1]$
- $C\cap(\mathbb{S}^2\times[0,1])$ 是边界 B 次 $[0,1]$
- C 的边界是 $C\cap(\mathbb{S}^2\times[0,1])$。

定义 9.2. 设 B 是 $\mathbb{S}^3$中的一个点集，可以为空。我们将 $Cob^4(B)$定义为这样一个范畴：其对象是 $\mathbb{D}^3$ 中边界为 B 的缠结，其态射是缠结之间在保持边界的同痕意义下的配边。

定义 9.3。电影是一个有限子集 $S=\{t_1,\ t_2,\ .....,\ t_n\}\subset(0,\ 1)$，并且对每个 $t\in[0,1]-S$ 都对应一个链环图 D_t，满足：对于 $t\in(t_i,\ t_{i+1})$，D_t 是平面图的同痕；而对于足够小的 ϵ，图 $D_{t_i-\epsilon}$，$D_{t_i+\epsilon}$ 之间由 Reidemeister 变换或下方表示的一种 Morse 变换关联。

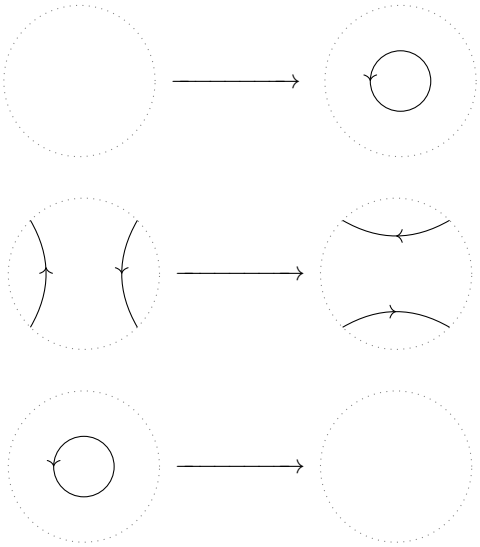


图16：Morse 变换

例 9.4。 设 C 是一个从 T 到 $T\prime$、位于 $\mathbb{D}^3 \times [0,1]$ 中的配边，那么经过微小同痕后，我们可以假设，对于除有限个 $S \subset (0,\ 1)$ 之外的所有 t， $C \cap (\mathbb{D}^3 \times t)$ 都是一个链环。在奇点附近，我们有图 17 中所示的一种初等配边。因此，任何配边都可以表示为一部电影。

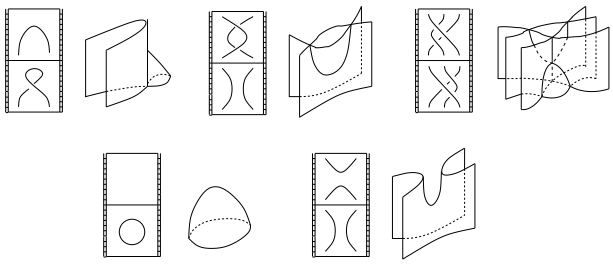


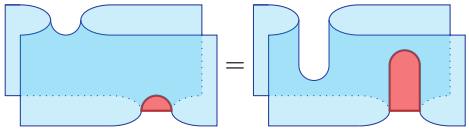
图17：取自 [CS97], 的初等配边，所有片段均可逆。

定理 9.5. 两个电影表示同一个配边（在保持边界的同痕意义下）当且仅当它们由有限序列的电影移动相关联，如图 *21* 所示。

我们已经为范畴 $Cob^4(B)$ 的对象定义了 $CKh(T)$，现在我们希望通过 CKh 定义态射的像，以期得到一个从范畴 $Cob^4(B)$ 到范畴 $Kob_{/h}(B)$ 的函子。自然地，我们从为 C 一个初等配边定义 $CKh(C)$ 开始。然后，任意配边是初等配边的电影序列 $C_1, \ldots C_n$。我们将 $CKh(C)$ 取为复合$CKh(C_1) \circ \ldots \circ CKh(C_n)$。

我们有两类初等配边 ：

- Morse 变换：杯、帽或鞍点。在这种情况下， T 的交叉与 $T\prime$ 的交叉可以自然地对应起来，因此它们的分解立方体的顶点也可以自然地对应起来。对于分解立方体的每个顶点 v ，Morse 变换都会产生一个自然的配边 $D_v \to D_{\prime v}$。因此，我们得到一个从 $CKh(D)$到 $CKh(D\prime)$的映射。这是一个链映射。例如，若 C 是一个鞍点，则有



- 如果 C 对应于一个Reidemeister 变换:

  – 如果定向Reidemeister变换是 R_1+、 R_1-、 R_2+、 R_2-、 R_3+ 或 $R3-$，那么就像定理 6.6 的证明中那样，我们将该证明中使用的同伦等价映射与之对应（除了 $R3+$，此处我们采用相反方向的映射）。

  – 所有其他定向 Reidemeister 变换均由上文所述的那些生成 [Pol09]。设R为一个 Reidemeister 变换，则我们选取用生成元 R_1+、 R_1-、 R_2+、 R_2-和 R_3表示的表达式 $R = R_{i_1} \circ R_{i_2} \circ \ldots \circ R_{i_r}$，并令 $CKh(R) = CKh(R_{i_1}) \circ CKh(R_{i_2}) \circ \ldots \circ CKh(R_{i_r})$。我们还选取 $R^{-1} = R_{i_r}^{-1} \circ R_{i_{r-1}}^{-1} \circ \ldots \circ R_{i_1}^{-1}$的逆的表示。图18和19给出了一个例子。

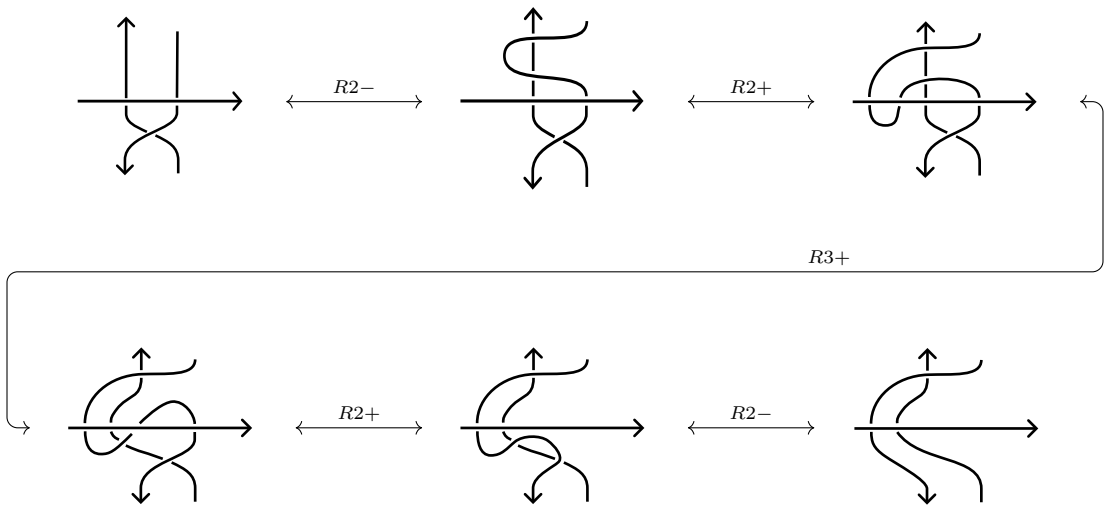


图18：用生成集中的变换表示 $R3c$ 变换的一个例子（R3c表示循环的）。

定理 9.6. 上文定义的映射 CKh 是从范畴 Cob^4 到 $Kob_{/h}$的一个函子。

9.2 函子性的证明

为了证明定理 9.6，我们检查 CKh 是否在电影变换下保持不变。理论上，我们可以计算与每个电影变换相关联的态射，并手动证明结果，但某些电影变换中交叉数量很高，而且还必须考虑所有定向，这会大幅增加需要检查的态射数量，因此这样做会很繁琐。于是，我们改为首先利用 Kh-简单性的论证，证明函子性在符号意义下成立，如 [Bar05] 中所示。

定义9.7. 我们称缠结图 D 为 Kh-简单的，如果从 $CKh(D)$ 到其自身的每个零次同伦等价都同伦于恒等映射的一个 ± 1 倍。

引理9.8. 没有闭分支且没有交叉的缠结图是 *Kh*-简单的。这类图称为配对（见图*20*）。

证明. 设 D 是一个配对。那么 $CKh(D)$ 就是一个单步复形，在高度 0 处有 D ，且没有微分。从 $Ckh(D)$ 到其自身的一个零次同伦等价 C ，是以 D 为顶端和底端的零次配边的形式 $\mathbb{Z}[X_1, X_2]$- 线性组合。

取这样一个配边，记作 Σ。令 Σ_b 为其蓝色子曲面， p 为点的数量，s为 Σ中的正方形数量。令 P为 $\mathbb{Z}[X_1, X_2]$ 中次数为 d的一个单项式。 $P\Sigma$ 的次数为$deg(P\Sigma) = \chi(\Sigma_b) - 2(p + 2s + d) - \frac{1}{2}|B| \leq \chi(\Sigma_b) - \frac{1}{2}|B|$。

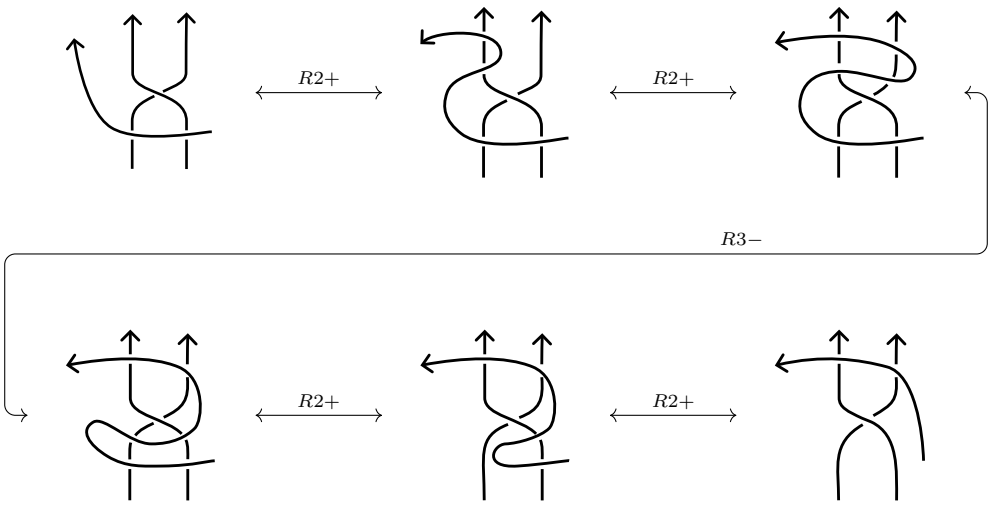


图19: 用生成集中的变换表示 $R3n$变换的示例（所有交叉都是负的）re 为负数）。

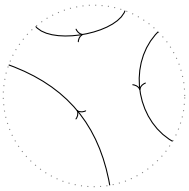


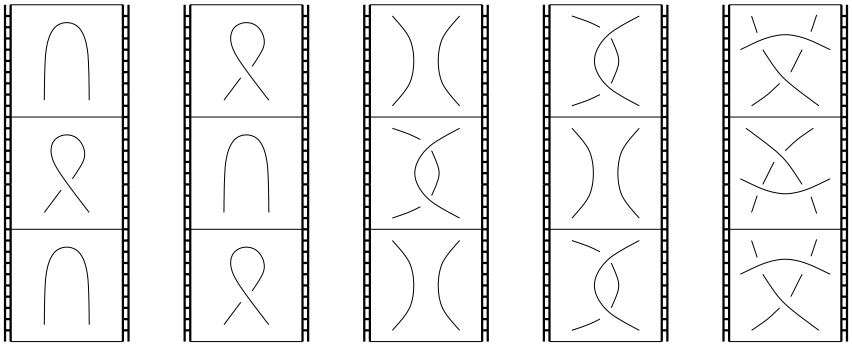
图20: 配对图的一个示例。

1. 如果 Σ 是恒等余边，并且 $P = 1$ 那么 $deg(P\Sigma) = 0$2. 如果我们添加不带点的闭分支（红色或蓝色），只需将初始配边乘以一个整数。这不会改变次数。我们可以忽略闭分支。3. 如果我们给 Σ_b添加把手， $\chi(\Sigma_b)$会使 $\chi(\Sigma_b) < \frac{1}{2}|B|$降低，并且 $deg(P\Sigma)$为负。 Σ_b必须是恒等映射。4. 添加点、正方形或进行 $deg(P) > 0$ 都会降低次数。因此 Σ 上没有任何装饰，而 P 是一个整数。5. 配边中可以有红色曲面，因为这不会改变次数。利用颈切割关系，我们可以将红色曲面分解为圆盘（不带装饰）。然后利用气泡关系移除这些圆盘。6. 最后，我们发现 Σ 必须是恒等映射的倍数。因此 C 同伦等价也如此。由于 C 必须可逆，它必须是恒等映射的 ± 1倍数。

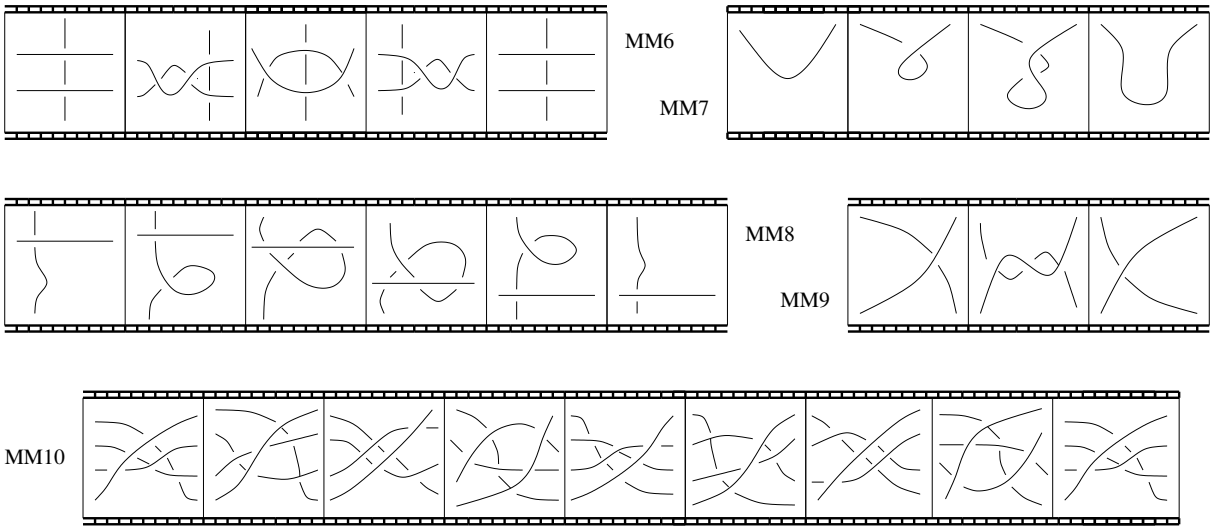
□

引理 9.9. 如果缠结图 D 是 Kh-简单的，而缠结图 D' 表示一个同痕缠结，那么 D' 也是 Kh-简单的。

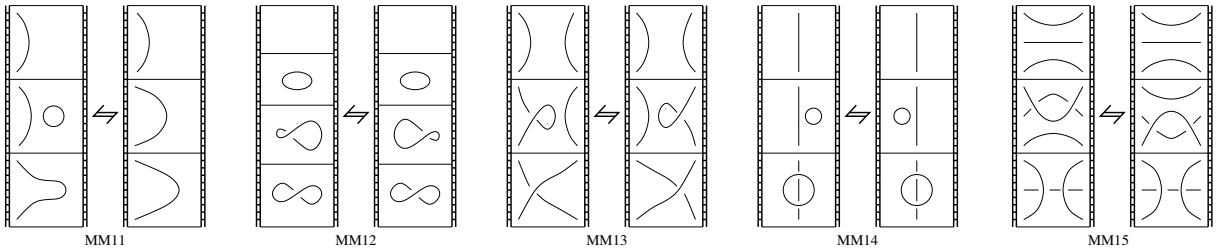
证明。根据 CKh 的不变性，复形 $CKh(D')$ 和 $CKh(D)$ 同伦等价。选取一个同伦等价 $F: KCKh(D') \to CKh(D)$，使其对应这两个复形（其同伦逆为



(a) 电影变换 1–5，相当于“什么也不做”的恒等片段。



(b) 电影变换 6–10，可逆的圆形片段（等价于恒等片段）。



(c) 电影变换 11–15，不可逆片段（可从上往下或从下往上读取）。

图 21：如 [CS97]中的电影变换。

G: $CKh(D) \to CKh(D')$)，并假设 α' 是 $CKh(D')$的零度自同构。由于 D 是 Kh-简单的，我们知道 $\alpha := F\alpha' G$ 同伦于 $\pm I$。因此 $\alpha' \sim GF\alpha' GF = G\alpha F \sim \pm GF \sim \pm I$，而且 D' 也同样是 Kh- 简单的。

□

设 D 是一个缠结图， DX 是通过在 D的边界某处添加一个额外交叉得到的缠结图，如图22所示。

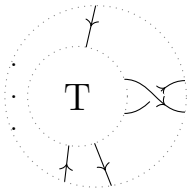


图22：由图 D得到的图 DX

我们可以 在 X旁边添加逆交叉 X^{-1}。那么 D 和 DXX^{-1} 由一个 R_2 mov e, 并表示 同痕缠结。我们稍后会用到这一事实。

引理9.10. 如果 DX 是 Kh-简单的，那么 D也是。

证明. 设 $\alpha : CKh(D) \to CKh(D)$ 是一个零度自同构。我们在右侧为 D 和 α 添加一个交叉 X，得到一个自同构 $\alpha I_X : CKh(DX) \to CKh(DX)$（其中 I_X 表示 $CKh(X)$ 的恒等自同构）。

由于 DX 是 Kh-简单的， αI_X 与 $\pm I$ 同伦等价。现在我们添加 X 的逆 X^{-1}，并发现 $\alpha I_{XX^{-1}}$: $CKh\left(DXX^{-1}\right) \to CKh\left(DXX^{-1}\right)$ 与 $\pm I$ 同伦等价。但 XX^{-1} 与 $\asymp$ 仅相差一个 Reidemeister 变换。设 F: $CKh(\asymp) \to CKh\left(XX^{-1}\right)$ 是 $CKh(\asymp)$与 $CKh\left(XX^{-1}\right)$ 之间的同伦等价，其同伦逆为 G: $CKh\left(XX^{-1}\right) \to CKh(\asymp)$。现在 $\alpha = \alpha I_{CKh(\asymp)} \sim \alpha(G \circ F) = \left(I_{CKh(D)}G\right) \circ (\alpha I_{XX^{-1}}) \circ \left(I_{CKh(D)}F\right) \sim \pm\left(I_{CKh(D)}G\right) \circ I \circ \left(I_{CKh(D)}F\right) = \pm I_{CKh(D)}(G \circ F) \sim \pm I$，且 D 是 $CKh-$-简单的。

□

引理 9.11. 若 D 是 Kh-简单的，则 DX 也是如此。

证明。 假设 D 是 Kh-简单的。根据引理 9.9， DXX^{-1}也是如此。根据引理9.10，我们可以去掉交叉 X^{-1}。由此可知， DX 是 Kh-简单的。 □

证明。 （定理 9.6 的）

同样，我们要检查 CKh 是否遵循图 21 中从 MM_1 到 $MM15$ 的电影变换。我们将其分为几个步骤。

步骤 1： $MM1$至 $MM5$。

对应于 $R1+$、 $R1-$、 $R2+$、 $R2-$、 $R3+$ 和 $R3-$ 的电影变换验证了 $MM1$ 至 $MM5$。这正是定理 6.6 的证明内容。我们为其他定向 Reidemeister 变换选择映射的方式确保该结果对它们同样成立。

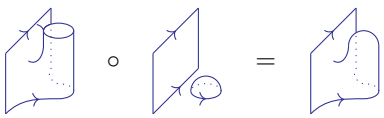
步骤 2： $MM6$到 $MM10$（相差一个符号）。

可逆的环形电影变换 $MM6$到 $MM10$表示具有相同起始帧和结束帧的零次同伦等价。这些电影中的图没有闭分支，因此，逐个剥去交叉并应用引理 9.11，我们证明它们是 Kh-简单的。因此，与这些电影变换中的每一个相对应的同伦等价都是 $\pm Id$。

步骤 3： $MM11$到 $MM15$。

由于这些电影中的交叉数量较少，我们可以显式计算这些映射并进行比较。

- MM11： </style}沿着 $MM11$左侧向下，我们得到复合



它与恒等映射同痕。向上走时，
MM11 的情况是对称的。

- **MM12:**
我们将需要与 Reidemeister 变换 $R1'+$ 相关的同伦映射。我们采用图23和图24中的表示。

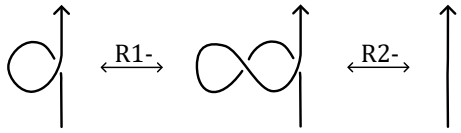


图23： $R1'+$作为 $R1-$和 $R2-$的序列。

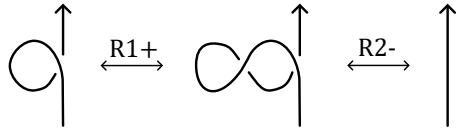
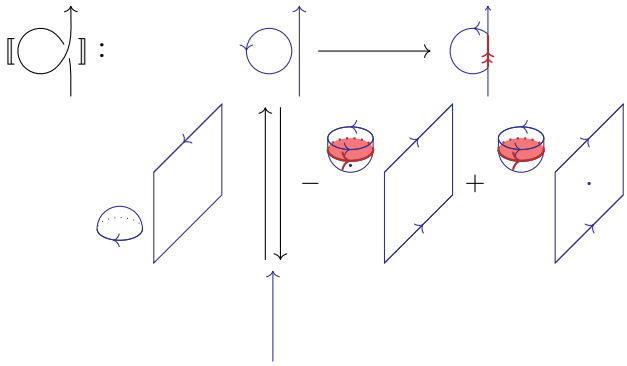


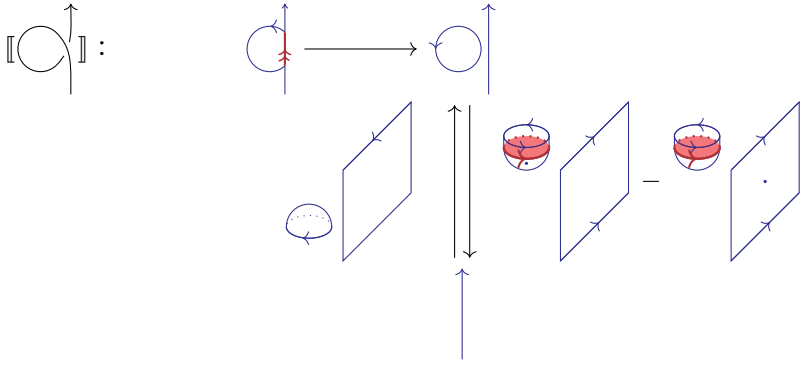
图24： $R1'-$作为 $R1+$和 $R2-$的序列。

请注意，在定义图的 Khovanov 复形时，对交叉顺序的选择会影响所得态射的符号。例如，考察与$R2+$相关的态射，交换两个交叉的顺序会在定向分解上给出负的恒等映射。

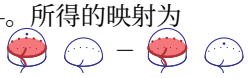
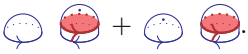
对一个图的交叉进行编号的两种选择 D 会产生两个复形 $CKh(D)_1$ 和$CKh(D)_2$，它们通过一个由 $\pm Id$构成的对角映射相关联。我们始终选择这个映射，使其在定向分解上是负的恒等映射。



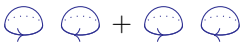
and

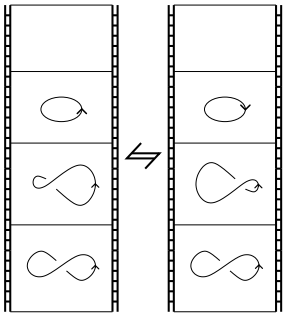


向下看， $MM12$ 的右侧是一个帽，后面跟着 $R1+$。左侧是一个帽，后面跟着 $R1'+$。所得的映射为

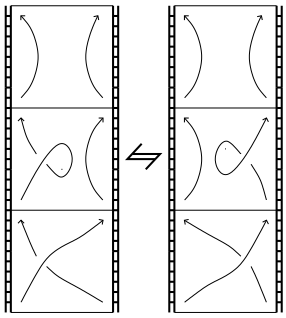
$F_L =$  以及 $F_R = -$  .

利用颈切割关系，我们得到 $F_R = F_L = -$  .

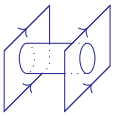
向上 $G_R = G_L =$ 



- **MM13:**



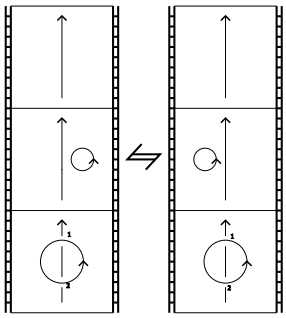
向下， $MM13$ 的右侧是 $R1+$ ，后接一个鞍点；左侧是 $R1-$ ，后接一个鞍点。利用颈切割关系 $F_L =$

$F_R =$ 

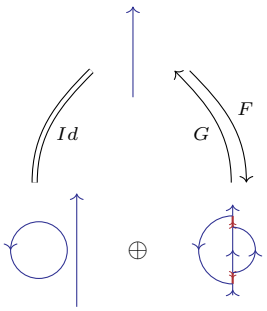
向上 $G_L = G_R = Id$。

- **MM14:**

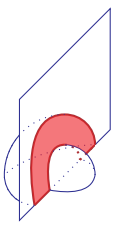
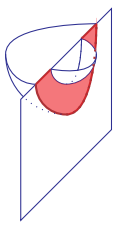
$MM14$有多种可能的定向，但处理方式几乎相同。



沿右侧向下，我们先遇到一个帽，接着是 $R2-$ ；左侧则先遇到一个帽，接着是 $R2-$。由此得到



其中

$F = -$  $G =$ 

电影变换 $MM15$可以用类似的方法验证。

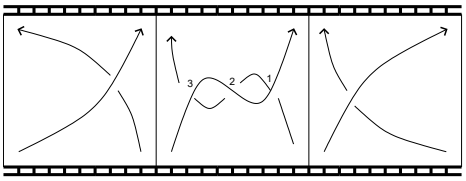
第4步： 检查 $MM6$到 $MM10$的符号。
例如，设 D为 $MM6$中第一帧里的缠结图， φ为相应的 $CKh(D)$ 的同伦等价。我们已经证明了 $\varphi = \pm Id$。为了简化计算，设φ_0 为 Lee-Khovanov复形 $CKh'(D)$ 上诱导的映射。

我们在第8节证明了， $CKh'(D)$ 在 $\mathcal{K}ar(Kob)$ 中等价于一个微分消失的复形 Ω。我们还描述了 Ω 的非零对象。特别是，所有弦都带有相同标签（例如“a”）的定向分解 D_0始终非零。

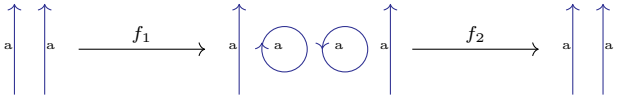
由于 $\varphi = \pm Id$， φ_0 也是如此，因此只需检查定向分解 D_0 处的态射，即可确定符号。

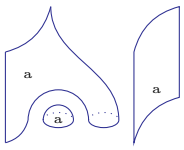
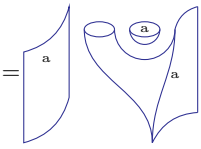
作为概念验证，我们从较简单的变换 $MM9+$开始。

MM9+:



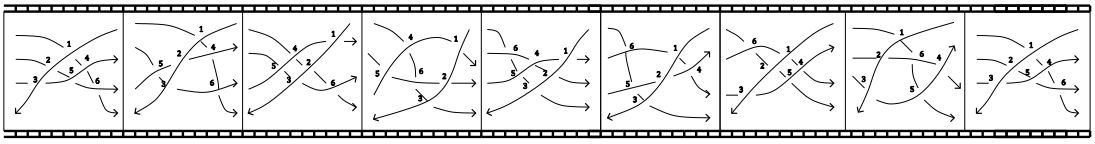
如上所述，我们只检查着色定向分解处的态射。这里得到：



其中 $f_1 =$  以及 $f_2 =$  。因此 $f_2 \circ f_1 = Id.$

最后我们来研究电影变换 $MM10$。这可能是最令人望而生畏的一个。

MM10:



$MM10$ 对应于序列 $R3-, R3-, R3-, R3n$ （来自图19）， $R3-, R3-, R3-, R3n$。与 $R3-$ 相关联的映射在定向分解上是恒等映射。使用图 19 $R3n$ 也在定向分解上是恒等映射。

其他电影变换也可以类似地验证。注意，通过 $MM6$到 $MM10$证明不变性，也证明了：将有向 Reidemeister 变换用生成集中的变换表示时，不同的表达方式会得到相同的同伦等价。

这就完成了 Khovanov 同调在范畴 Cob^4中的函子性证明。 □

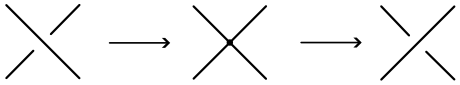
10 浸入协边

在 [Car+25] 中，Khovanov 同调的构造被扩展到具有双重点奇点的浸入协边。双重点奇点的局部模型是 $\mathbb{R}^4$ 中两个平面的横截相交：

$$X = \mathbb{C} \times \{0\} \cap \{0\} \times \mathbb{C} \subset \mathbb{C}^2.$$

嵌入协边范畴 $Cob^4(B)$ 被扩展为范畴 $Cob^4_\times(B)$，其对象相同，而态射则是模去保边界同痕的、具有双重点奇点的浸入协边。

X 在奇点附近的结构可以用如下形式的电影来描述：



于是， $Cob^4_\times(B)$中的配边可以用我们用来表示嵌入协边的一系列电影，连同这个表示双点奇异性的附加电影来表示。我们有如下定理：

定理 10.1. 两个电影表示同痕浸入曲面，当且仅当它们由如下各项的有限序列相关联：

- 电影变换 *MM1-MM15*（图 *21*），
- 对应于沿双点曲线的水平段滑动一个节点的变换（例如见图*26*和图*27*），
- 以及图*25*所示的电影变换 *MM16-MM18*。

该定理的证明可见 [Car+25]。

要将函子 Kh 扩展到奇异协边范畴 $Cob^4_\times$，上面的定理表明，只需定义 Kh 在表示双点奇异性的电影上的取值。然后我们只需检验 Kh 是否符合新的电影变换。

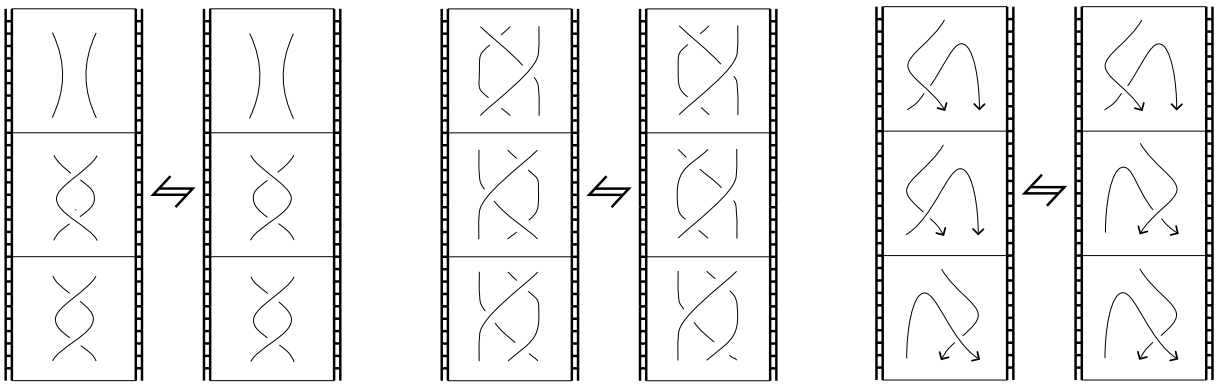
设 A 且 B 为图28和图29所示的映射。它们的次数分别为 -2 和 2。
于是我们有以下定理

定理 10.2. 映射 Kh 是从 $Cob^4_\times$ 到 $Kob_{/h}$的良定义函子。

证明。 扩展函子 Kh仍满足电影变换1至15。涉及远交换性的电影变换之所以交换，是因为平面同痕后，映射A和B作用于相同的图。剩下需要验证的是电影变换 $MM16$至 $MM18$。

MM16:

- MM16+:



(a) MM16 (b) MM17 (c) MM18

图25：具有双重点奇点的电影变换。

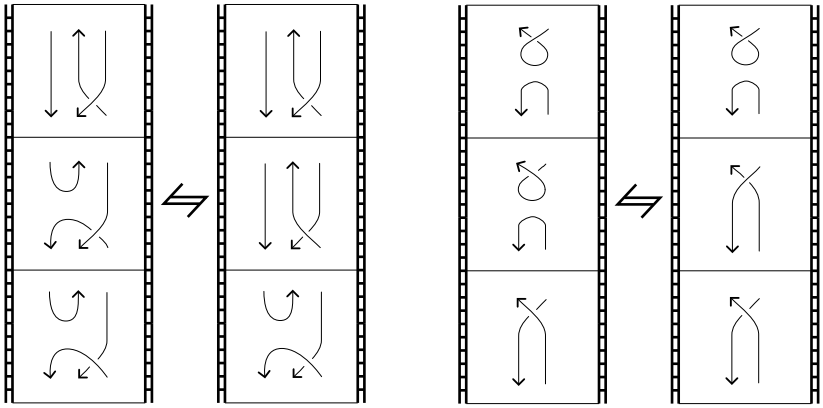


图26

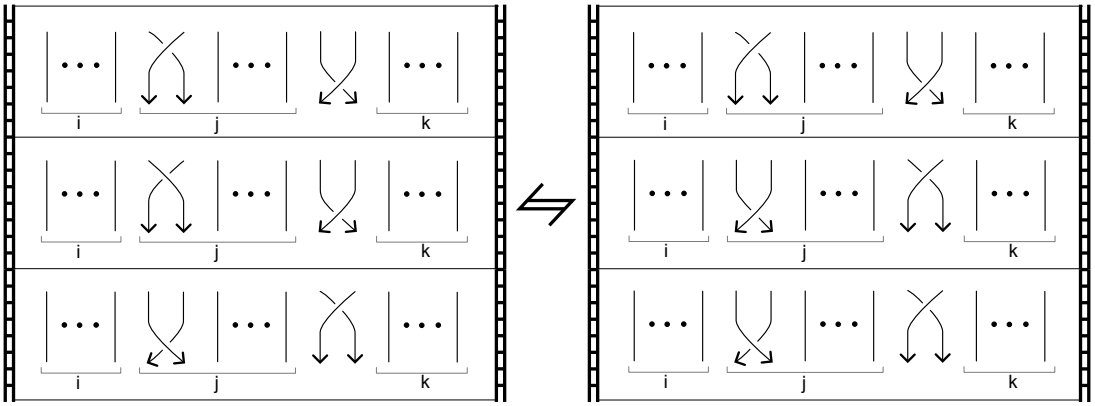


图27

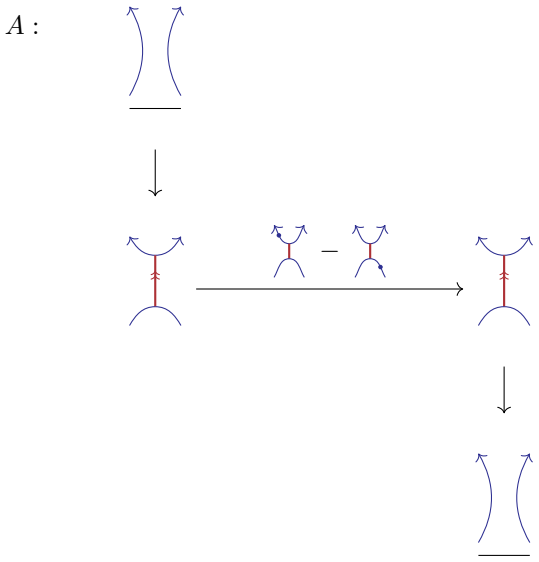


图28：对应于经过双点奇异性从正交叉变为负交叉的映射 A 。其次数为 -2。

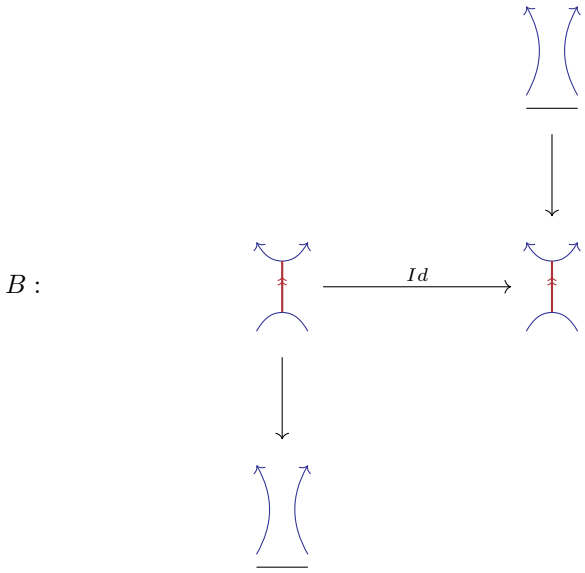
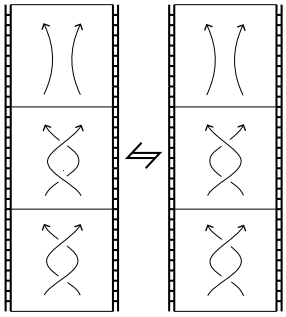
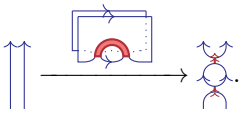


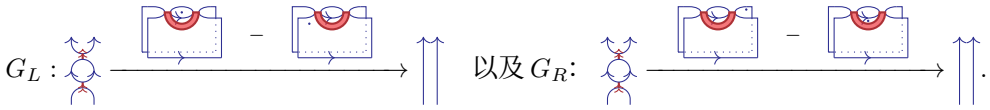
图29：从负交叉经过双点奇异性变为正交叉所对应的映射 B 。其次数为 2。



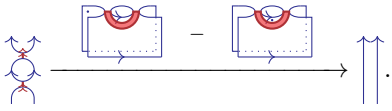
向下移动时，我们先应用 $R2+$ ，再在两侧应用映射 B 。这给出了次数为 2 的态射 F：$Kh(\,) \to Kh(\,)$，其定义如下：



向上移动时，我们先应用 A ，然后在两侧应用 $R2+$。所得态射 G_L和 G_R：$Kh(\,) \to Kh(\,)$的次数为 -2 ，除以下情况外处处为 0：

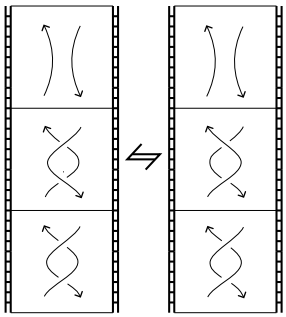


在 G_R 中移动点，我们得到 G_R:



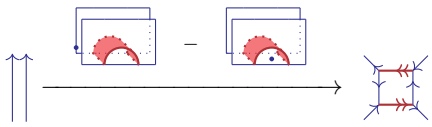
利用迁移关系，显然有 $G_L = G_R$。

- MM16-:

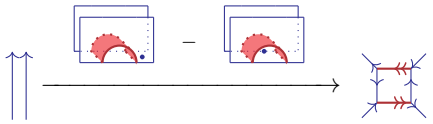


向上移动 $MM16-$，我们有 B，随后两边都有 $R2-$。
因此，和之前一样，我们得到相同的态射。向下可得映射：

G_L :



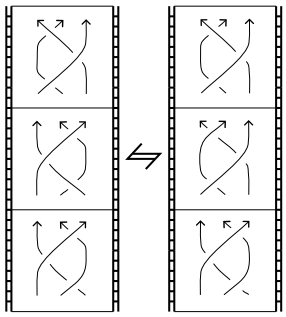
以及 G_R:



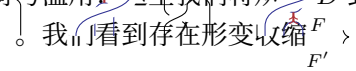
迁移关系再次表明 $G_L = G_R$。

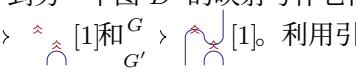
MM17:
需要考虑 $MM17$ 中图表的 4 种定向。我们先从涉及$R3+$ 和 $R3-$的移动开始。

- $MM17+$:

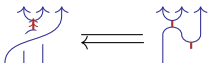


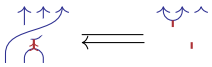
向下看，右侧是 $R3-$ ，后接 B；左侧是B ，后接 $R3+$。向上看，右侧是 A ，后接 $R3-$ ；左侧是 $R3+$ ，后接 A。我们通过考察 $R3+$ 和 $R3-$的映射构造之间的相似之处，绕过 $MM17+$，而不进行完整计算。

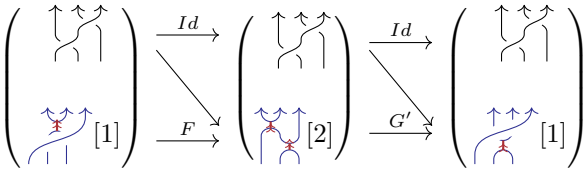
变换 $R3+$ 两侧的 Khovanov 同调可以看作映射$\xrightarrow{d}$  $\xrightarrow{d}$ 的锥（同调次数向下移位 1）（符号滥用：这里我们将从图 D 到另一个图 D' 的映射写作它们各自的 Khovanov 同调之间的映射）。我们看到存在形变收缩 

[1]和 

[1]。利用引理 6.10，我们定义了同伦等价：

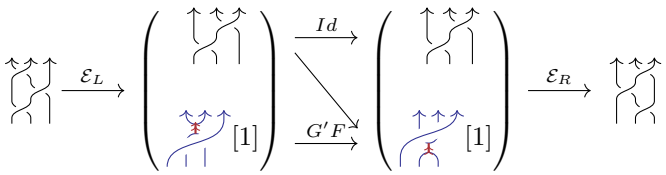




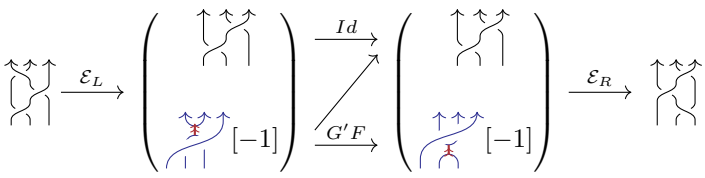


然后，我们在左侧和右侧分别与元素为 $\pm Id$ 的对角矩阵复合，从而恢复 和 的 Khovanov 同调：





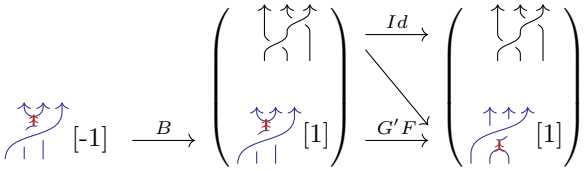
然后，对于 $R3-$，再次利用引理 6.10，我们得到如下同伦等价：



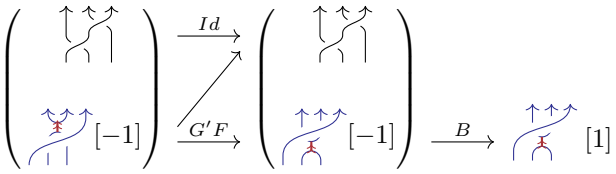
具有相同的映射 G'、 F、$\mathcal{E}_L$ 和 $\mathcal{E}_R$。
我们要验证，将第一个映射与 B 复合，以及将 B 与第二个映射复合，所得的态射是同伦的。我们可以忽略映射 $\mathcal{E}_{L,\ R}$，因为 B （以及之后的 A ）是对角的，所以它们与由 $\pm$ 恒等映射构成的对角映射可交换，尤其是与 $\mathcal{E}_{L,\ R}$可交换。
此外， B （以及 A）在 上为零。因此我们只需验证复合 $BG'F$和 $G'FB$ 是同伦的。这是因为 B 在 和 上是恒等映射（带次数移位）。这样一来， $MM17+$中“向下”的部分便得到了证明。



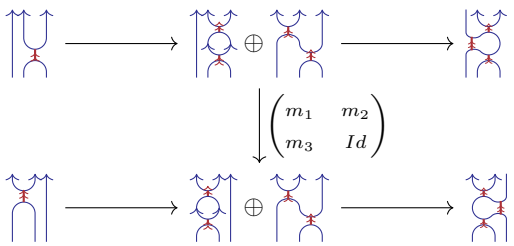
MM17+ 右：

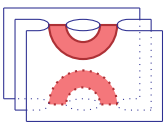
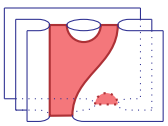
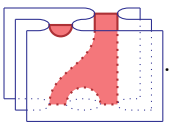


MM17+ 左

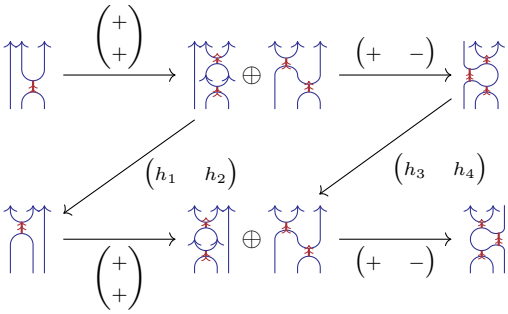


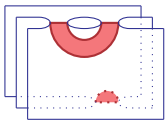
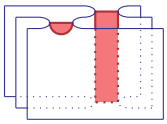
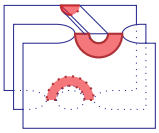
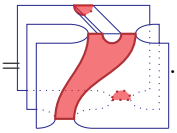
类似地，向上移动时，我们希望证明 $AF'G$和 $F\curlywedge GA$同伦。在这种情况下，我们需要 $F'G$的显式公式：



其中 $m_1 =$  $m_2 = -$  $m_3 = -$  .

令 h 为映射：



与 $h_1 = -$  ，$h_2 =$  ，$h_3 =$  以及 $h_4 =$  .

那么 $AF'G - FrGA = hd + dh$。

- **MM17 的其他定向：**
  这些关系由 $MM6$到 $MM10$、 $MM17+$以及远交换关系生成。快速查看 [Pol09] 可知，不同的 $R3$ 移动可以通过归纳方式彼此得到：每次将一个移动置于两个 $R2$ 移动之间，如图30所示。

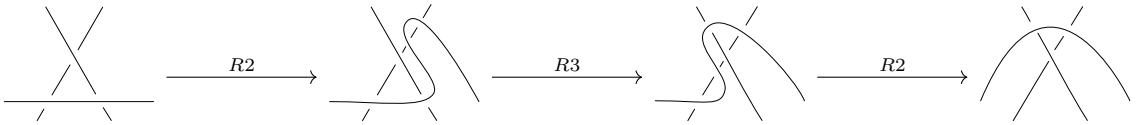


图30：从彼此生成 $R3$移动的一种标准方法。

现在，我们为图30中的图固定一个定向，使得中间的 $R3$ 移动（记作$R3_a$）已被证明保持 $MM17$。令 $R3_b$为由此得到的移动。我们希望比较以下序列：



and



在第一个关系中，根据远交换关系，我们可以交换移动 A/B 和 R_2。我们得到：



现在应用 $MM17$，我们可以交换 A/B和 $R3_a$，得到：



最后，利用远交换性，我们可以交换最后两个映射，从而得到我们想要的序列。由此完成了 $MM17$ 的证明。

MM18:
在 Khovanov 同调的语境下，平面同痕给出恒等映射，因此 $MM18$ 显然成立。 □

参考文献

[Bar02] Dror Bar-Natan。《关于琼斯多项式的霍瓦诺夫范畴化》。载于：《代数与几何拓扑》2.1（2002 年 5 月），第 337–370 页。issn：1472-2747。doi：10.2140/agt.2002.2.337。url：http://dx.doi.org/10.2140/agt.2002.2.337。[Bar05] Dror Bar-Natan。《缠结与配边的霍瓦诺夫同调》。载于：Geometry & Topology 9.3（2005 年 8 月），第 1443–1499 页。issn：1465-3060。doi：10.2140/gt.2005.9.1443。url：http://dx.doi.org/10.2140/gt.2005.9.1443。[Bar07] Dror Bar-Natan。《快速计算霍瓦诺夫同调》。载于：Journal of Knot Theory and Its Ramifications 16.03（2007 年 3 月），第 243–255 页。issn：1793-6527。doi：10.1142/s0218216507005294。url：http://dx.doi.org/10.1142/S0218216507005294。[Bel+19] Anna Beliakova 等。《关于 sl(2) 缠结同调的函子性》。载于：（2019）。doi：10.48550/ARXIV.1903.12194。url：https://arxiv.org/abs/1903.12194。[Bla10] Christian Blanchet。《霍瓦诺夫同调的定向模型》。载于：Journal of Knot Theory and Its Ramifications 19.02（2010 年 2 月），第 291–312 页。issn：1793-6527。doi：10.1142/s0218216510007863。url：http://dx.doi.org/10.1142/S0218216510007863。[BM06] Dror Bar-Natan 和 Scott Morrison。《Karoubi 包络与 Lee 退化对霍瓦诺夫同调的影响》。载于：《代数与几何拓扑》6.3（2006 年 10 月），第 1459–1469 页。issn：1472-2747。doi：10.2140/agt.2006.6.1459。url：http://dx.doi.org/10.2140/agt.2006.6.1459。[Cap08] Carmen Livia Caprau。《带参数的 sl(2) 缠结同调与奇异协边》。载于：Algebraic & Geometric Topology 8.2（2008 年 5 月），第 729–756 页。issn：1472-2747。doi：10.2140/agt.2008.8.729。url：http://dx.doi.org/10.2140/agt.2008.8.729。[Car+25] Scott Carter 等。《将霍瓦诺夫同调扩展至浸入曲面协边》。2025。doi：10.48550/ARXIV.2510.14760。url：https://arxiv.org/abs/2510.14760。[CMW07] David Clark、Scott Morrison 和 Kevin Walker。《修正霍瓦诺夫同调的函子性》。载于：（2007）。doi：10.48550/ARXIV.MATH/0701339。url：https://arxiv.org/abs/math/0701339。[CS97] J. Carter 和 Masahico Saito。《纽结曲面及其图示》。美国数学会，1997 年 12 月。isbn：9781470412838。doi：10.1090/surv/055。url：http://dx.doi.org/10.1090/SURV/055。[ETW17] Michael Ehrig、Daniel Tubbenhauer 和 Paul Wedrich。《带色链环同调的函子性》。载于：（2017）。doi：10.48550/ARXIV.1703.06691。url：https://arxiv.org/abs/1703.06691。[Imo+25] Hayato Imori 等。《霍瓦诺夫同调与奇异瞬子同调中的协边映射 II》。2025。doi：10.48550/ARXIV.2510.09399。url：https://arxiv.org/abs/2510.09399。

[Jac02] Magnus Jacobsson。《来自霍瓦诺夫同调的链上协边不变量》。载于：（2002）。doi：10.48550/ARXIV.MATH/0206303。url：https://arxiv.org/abs/math/0206303。[Kho00] Mikhail Khovanov。《琼斯多项式的范畴化》。载于：《杜克数学杂志》101.3（2000 年 2 月）。issn：0012-7094。doi：10.1215/s0012-7094-00-10131-7。url：http://dx.doi.org/10.1215/S0012-7094-00-10131-7。[Koc03] Joachim Kock。《Frobenius 代数与二维拓扑量子场论》。剑桥大学出版社，2003 年。isbn：9780511615443。doi：10.1017/cbo9780511615443。url：http://dx.doi.org/10.1017/CBO9780511615443。[Lee02] Eun Soo Lee。《霍瓦诺夫不变量的一个自同态》。2002。doi：10.48550/ARXIV.MATH/0210213。url：https://arxiv.org/abs/math/0210213。[MWW22] Scott Morrison、Kevin Walker 和 Paul Wedrich。《由霍瓦诺夫–罗兹链环同调得到的四维流形不变量》。载于：Geometry & Topology 26.8（2022 年 12 月），第 3367–3420 页。issn：1465-3060。doi：10.2140/gt.2022.26.3367。url：http://dx.doi.org/10.2140/gt.2022.26.3367。[Pol09] Michael Polyak。《Reide meister 变换的极小生成集》。载于：（2009）。doi：10.48550/ARXIV.0908.3127。url：https://arxiv.org/abs/0908.3127。[Ras10] Jacob Rasmussen。《霍瓦诺夫同调与切片亏格》。载于：《数学新进展》182.2（2010 年 9 月），第 419–447 页。issn：1432-1297。doi：10.1007/s00222-010-0275-6。url：http://dx.doi.org/10.1007/s00222-010-0275-6。[Ras21] Jacob Rasmussen。《纽结、多项式与范畴化》。2021 年 12 月。doi：10.1090/pcms/028/02。url：http://dx.doi.org/10.1090/pcms/028/02。[Ren+25] Qiuyu Ren 等。《具有一维输入的 Khovanov skein 千层面模》。2025。doi：10.48550/ARXIV.2510.05273。url：https://arxiv.org/abs/2510.05273。[RW20] Louis-Hadrien Robert 和 Emmanuel Wagner。《泡沫求值的闭式公式》。载于：《量子拓扑》11.3（2020 年 8 月），第 411–487 页。issn：1664-073X。doi：10.4171/qt/139。url：http://dx.doi.org/10.4171/QT/139。[RW24] Qiuyu Ren 和 Michael Willis。《霍瓦诺夫同调与奇异四维流形》。2024。doi：10.48550/ARXIV.2402.10452。url：https://arxiv.org/abs/2402.10452。