arXiv:2601.20744v1 [math.RT] 28 Jan 2026

# 几何纯性与 smashing 理想框架

JUAN OMAR G ´OMEZ、MAURICIO MEDINA-BARCENAS、GREG STEVENSON、
BERNARDO VILLARREAL 和 ANGEL ZALDIVAR

Abstract. 我们通过考察在每个 tt-茎上都纯的正合三角，在刚性紧生成三角张量范畴中引入几何纯性的概念。我们对这一概念进行了系统研究，包括给出实例及其应用。特别地，我们证明，几何纯性通常严格强于普通纯性，并且它自然导出了几何纯内射对象的概念。我们证明，这类对象可由适当 tt-茎中的纯内射对象经推前得到。此外，我们详细分析了射影直线的导出范畴中的不可分解几何纯内射对象。在附加的温和假设下，我们将齐格勒谱的几何部分识别为一个闭子集。

作为一项应用，我们展示了这一纯性新概念如何借助几何 Ziegler 谱，用于解决 smashing 理想框架的空间性问题。具体而言，我们证明，我们的方法排除了 Balchin 和 Stevenson 针对现有方法提出的反例。

## Contents

1. 引言 1
2. 预备知识 4
3. tt-范畴中的几何纯性 9
4. 闭点处的纯性与开覆盖 14
5. 约化到茎 17
6. 射影直线导出范畴中的几何纯性 20
7. 关于 smashing 理想框架空间性的从局部到整体 22
8. 示例：借助几何 Ziegler 谱得到的空间 tt-范畴 25
参考文献 28

## 1. Introduction

自 [Bal05], 张量三角（tt）几何领域兴起以来，它便在数学的多个分支中引起了广泛关注。一方面，它为解决通常被视为野性的 tt-范畴中的分类问题提供了一个连贯的框架；另一方面，它使工具和

*Date*：2026年1月29日。2020 *Mathematics Subject Classification.* 18G80；18E35、18E45、18F99、55U35、03C60。*Key words and phrases.* 纯性、Ziegler 谱、Balmer 谱、smashing 理想、可定义 tt-理想。

技术得以在这些不同领域间迁移并整合。关于这一主题的综述，请参阅 [Bal10], [Ste 18], 和 [Bal20a] 。
在实际中，人们经常遇到刚性紧生成 tt-范畴，而一个自然的问题是理解其局部化张量理想的类。其中，粉碎局部化发挥着特殊作用：它们不仅在张量三角几何中居于核心地位，在凝聚数学[Sch17] 以及紧生成三角范畴理论 [Kra00]中也是如此。

我们聚焦于刚性紧生成 tt-范畴。在这一背景下，粉碎张量理想的类构成一个框架，如 [BKS20]所示。回想一下，若一个框架同构于某个拓扑空间的开子集框架，则称其为空间的。一个自然的问题如下。

问题1.1。设 $\mathcal{T}$ 为一个刚性紧生成 tt-范畴。其粉碎张量理想的框架是否 $\mathcal{T}$ 空间的?

尽管要利用这个框架并不一定需要对这一问题给出肯定回答，但肯定回答会显著简化 tt-几何中的若干方面；参见 [BS21]。事实上，同上的早期版本声称这个框架总是空间的，而 [Wag23]中则给出了另一种论证。然而，后来证明这两种方法都是错误的，详见 [BS21，附录 A]。因此，这个问题仍未解决。已知若不要求刚性，粉碎理想框架未必是空间的。 [Aok23]，也从 $\infty$-范畴的视角发展了粉碎框架的一般理论。

值得强调的是， [Wag23] 中的方法受到模型论技术的启发；具体而言，它提出了一个拓扑空间，其开子集框架可能与 smashing 理想框架同构。这类技术最近在 tt-几何中又有了进一步应用；例如，参见 [BW23]和 [PW24]，，以及 [Kra00] ，后者是紧生成三角范畴背景下的一项重要先驱工作。

本研究受到公式 (1.1)的启发，并以 [BS21] 和 [Wag23]为出发点。非正式地说，Wagstaffe 的论证之所以困难，是因为齐格勒谱上的点太多。解决这一问题的一种方法是将幺半结构纳入考量。为此，我们在刚性紧生成 tt-范畴中引入几何纯性的概念，从而能够从齐格勒谱中排除某些有问题的点。这个概念受到 Prest 和 Sl´avik [PS21]的思想启发。

我们对这一新概念进行了详细研究，给出例子，并最终用它发展出一种方法，用以处理方程 (1.1)。我们现在更精确地描述我们的主要贡献。

**主要结果**。 设 $\mathcal{T}$ 为刚性紧生成 tt-范畴，并设 $\mathcal{P}$ 为 $\mathrm{Spc}(\mathcal{T}^\omega)$ 的一个点。将*tt*-茎 $\mathcal{T}$ 在 $\mathcal{P}$ 处定义为

$$\mathcal{T}_{\mathcal{P}} \coloneqq \mathcal{T}/\mathrm{loc}(\mathcal{P})$$

它是一个刚性紧生成的tt-范畴，其中$\mathrm{loc}(\mathcal{P})$表示由 $\mathcal{P}$生成的 $\mathcal{T}$ 的最小局部化子范畴。我们用$\iota_{\mathcal{P}}^*$ 表示相应的商函子 $\mathcal{T} \to \mathcal{T}_{\mathcal{P}}$。

我们现在可以引入本文的核心定义。

定义 1.2。 $x \to y \to z$ 中的正合三角称为几何纯 （简称*g*-纯），如果所诱导的正合三角

$$\iota_{\mathcal{P}}^{*}(x) \to \iota_{\mathcal{P}}^{*}(y) \to \iota_{\mathcal{P}}^{*}(z)$$

对于每个 $\mathcal{P} \in \operatorname{Spc}(\mathcal{T}^{\omega})$，在 $\mathcal{T}_{\mathcal{P}}$ 中都是纯正合的。若对象 $x \in \mathcal{T}$ 满足每个 g-纯正合三角 $x \to y \to z$ 都分裂，则称其为*g*-纯内射。

本文的主要贡献之一，是系统地发展这一背景下的几何纯性。从定义立即可知，每个纯正合三角都是 g-纯的。然而，g-纯性是否确实强于紧生成三角范畴中通常的纯性概念，事先并不明确。我们在第 6 节给出了一个例子，表明事实确实如此。我们还讨论了两种概念相一致的情形；例如，在交换环的导出范畴中（见方程（3.26））。

转向不可分解的 g-纯内射对象，我们证明所有此类对象都可以实现为来自 tt-茎的纯内射对象的推前。更准确地说，这记录在下面的结果中，该结果随后以方程（5.1）的形式出现。

**定理 1.3**。 设 $\mathcal{T}$ 是一个刚性紧生成 *tt*-范畴，并设 $x$ 是 $\mathcal{T}$ 中的不可分解的 *g*-纯内射对象。那么存在一个素理想 $\mathcal{P} \in \operatorname{Spc}(\mathcal{T}^{\omega})$以及一个纯内射对象 $y \in \mathcal{T}_{\mathcal{P}}$，使得

$$x \simeq \iota_{\mathcal{P},*} y$$

其中 $\iota_{\mathcal{P},\,*}$ 表示 $\iota_{\mathcal{P}}^{*}$ 的右伴随。

对于由拟紧开子集构成的 $\operatorname{Spc}(\mathcal{T}^{\omega})$ 的给定覆盖 $\{U_i \mid i \in I\}$，我们分析 $\mathcal{T}$ 中的纯性与每个 $\mathcal{T}(U_i)$ 中纯性之间的关系。特别是，通过考察 的齐格勒谱中由不可分解的 g-纯内射对象的同构类所确定的子空间 $\operatorname{GZg}(\mathcal{T})$，我们得到以下结果，它是对公式 (5.7)的重新表述。

**定理 1.4**。 设 $\mathcal{T}$ 是一个刚性紧生成 *tt*-范畴，并设 $\{U_i \mid i \in I\}$ 是 $\operatorname{Spc}(\mathcal{T}^{\omega})$ 由拟紧开子集构成的一个覆盖。那么齐格勒谱上的诱导映射

$$\coprod_{i \in I} \operatorname{GZg}(\mathcal{T}(U_i)) \to \operatorname{GZg}(\mathcal{T})$$

是一个拓扑商。此外，每个分量映射 $\operatorname{GZg}(\mathcal{T}(U_i)) \to \operatorname{GZg}(\mathcal{T})$ 都是一个拓扑嵌入。

结合一些额外假设，前一个结果表明，齐格勒谱的几何部分实际上是一个闭子集（见 方程（5.8））。特别地，这适用于拟紧拟分离概形的导出范畴（见 方程（5.9））。鉴于这些例子，自然会提出以下问题：

问题 1.5. 是否存在由拟紧开子集构成的 $\operatorname{Spc}(\mathcal{T}^{\omega})$ 覆盖 $\{U_i \mid i \in I\}$，使得对于每个 $i$，$\operatorname{Zg}(\mathcal{T}(U_i))$ 都与其几何部分 $\operatorname{GZg}(\mathcal{T}(U_i))$ 重合?

我们不知道这个问题的答案，但如果答案是肯定的，就意味着齐格勒谱的几何部分总是一个闭子集。
现在让我们转向本文所发展理论的一项应用。记$\mathbb{S}^{\otimes}(\mathcal{T})$ 为 $\mathcal{T}$ 的 smashing张量理想框架。如前所述，Wagstaffe 针对方程 (1.1)在 [Wag23] 中的处理方法，在于研究与 smashing 理想框架反等价的可定义张量理想框架，并利用它们在 $\mathcal{T}$ 的齐格勒谱上定义一个拓扑。这是一个自然的想法，因为根据 Krause [Kra00] 的工作，可定义范畴完全由其包含的纯内射对象所决定。然而，前述反例表明，齐格勒谱包含的点过多，致使该方法无法成功。

这一困难是我们寻求更强纯性概念的最初动机，这一概念将使我们能够忽略某些纯内射对象。为陈述我们在此方向上的主要结果，现在引入若干术语。

定义 1.6. 令 gpinj($\mathcal{T}$) 表示 $\mathcal{T}$ 中不可分解 g-纯内射对象的同构类集合。若子集 $U \subset$gpinj($\mathcal{T}$) 具有如下形式，则称其为 *tt*-闭

$$U = \mathcal{D} \cap \mathrm{gpinj}(\mathcal{T})$$

对于某个 $\mathcal{T}$ 的可定义 tt-理想 $\mathcal{D}$ 。

我们强调，tt-闭子集并不能在不可分解纯内射对象的全部同构类集合 pinj($\mathcal{T}$) 上定义一个拓扑。不过，我们希望它们确实能在齐格勒谱的几何部分上诱导出一个拓扑。在这种情况下，可以得到 smashing 理想框架同构于由此得到的空间的开子集框架，从而验证其空间性。特别是，这一定义使我们能够为 smashing 理想框架的空间性建立一个局部到整体原理的部分形式。

**定理 1.7.** 设 $\mathcal{T}$ 是一个刚性紧生成 *tt*-范畴。假设对于每个 $\mathcal{P} \in \mathrm{Spc}(\mathcal{T}^{\omega})$，*tt*-闭子集确定了$\mathrm{gpinj}(\mathcal{T}_{\mathcal{P}})$ =pinj($\mathcal{T}_{\mathcal{P}}$)上的某个拓扑的闭子集。那么，*tt*-闭子集确定了 $\mathrm{gpinj}(\mathcal{T})$ 上的一个拓扑。特别地，*smashing* 理想框架 $\mathbb{S}^{\otimes}(\mathcal{T})$ 是空间的。

不难证明，对于任意素理想 $\mathbb{S}^{\otimes}(\mathcal{T})$，$\mathbb{S}^{\otimes}(\mathcal{T}_{\mathcal{P}})$ 的空间性蕴含 $\mathcal{P} \in \mathrm{Spc}(\mathcal{T}^{\omega})$ 的空间性（见 方程（7.3））。此外，前述结果也可类似地推广到拟紧开覆盖。

最后，我们在 第8节 证明，Balchin-Stevenson 在 [BS21] 中的例子无法通过这种方法排除。

**致谢**。我们感谢 Mike Prest 对本项目的关注。JOG 获得德国研究联合会的支持（项目编号 491392403 – TRR 358）。GS 获得丹麦独立研究基金的支持（资助编号：10.46540/4283-00116B）。本项目还获得了 SECIHTI 项目 CBF2023-2024-2630 的部分资助。

## 2. Preliminaries

本节回顾 tt-几何中的基本术语与结果，以及紧生成三角范畴中纯性的基础知识。本节的主要参考文献为 [Bal05], [BKS19], [BS21] 和 [Kra00]。

2.1. **Balmer 谱。** 设 $\mathcal{K}$ 是一个本质小 tt-范畴。若三角子范畴 $\mathcal{I}$ of $\mathcal{K}$ 对收缩封闭，则称其为厚 子范畴；若其对张量积封闭，则称其为 $\otimes$-理想；若它是一个真厚 $\otimes$- 理想，并且满足：若 $x \otimes y \in \mathcal{K}$，则 $x \in \mathcal{K}$ 或 $y \in \mathcal{K}$，则称其为素理想。

回顾 2.1。 *Balmer* 谱 of $\mathcal{K}$ 定义为

$$\operatorname{Spc}(\mathcal{K}) \coloneqq \{\mathcal{P} \mid \mathcal{P} \text{ is prime } \}$$

赋予由闭子集基生成的拓扑

$$\operatorname{supp}(x) \coloneqq \{\mathcal{P} \in \operatorname{Spc}(\mathcal{K}) \mid x \notin \mathcal{P}\}$$

其中 $x$遍历 $\mathcal{K}$的对象。将 supp($x$) 称为 $x$的支撑。空间 Spc($\mathcal{K}$) 确实是一个谱空间。

回顾 2.2。 设 $F\colon \mathcal{K} \to \mathcal{L}$ 是一个 tt-函子。于是我们得到一个诱导的谱映射

$$\operatorname{Spc}(\mathcal{L}) \to \operatorname{Spc}(\mathcal{K}), \quad \mathcal{P} \mapsto F^{-1}\mathcal{P}.$$

换言之，Balmer 谱是从 tt-范畴与 tt-函子的反范畴到谱空间范畴的一个函子。

回顾 2.3. Balmer 的一个重要结果表明，Spc($\mathcal{K}$) 与 supp(–) 一起为 $\mathcal{K}$的根 tt-理想提供了参数化；也就是说，这些 tt-理想$\mathcal{I}$ 满足：若 $x^{\otimes n} \in \mathcal{I}$，则 $x \in \mathcal{I}$。更确切地说，我们有一个保序双射

$$\operatorname{Rad}(\mathcal{K}) \underset{\mathcal{K}_-}{\overset{\operatorname{supp}}{\rightleftarrows}} \operatorname{Thom}(\operatorname{Spc}(\mathcal{K}))$$

其中，Thom(Spc($\mathcal{K}$)) 表示谱 Spc($\mathcal{K}$) 的 Thomason 子集所构成的偏序集；也就是说，这些集合是闭子集的并，且这些闭子集的补集是拟紧的。映射 $\mathcal{K}_Y$ 是由那些支撑包含于 $Y$ 的元素$x \in \mathcal{K}$ 构成的根理想。另一方面，supp($\mathcal{I}$) 就是$\bigcup_{x\in\mathcal{I}}$ supp($x$)。

注 2.4. 如果范畴 $\mathcal{K}$也是刚性的，那么所有 tt-理想自动都是根理想。因此，在这种情况下，上述双射给出了 tt-理想的完整分类。

注2.5。 我们指出，Spc($\mathcal{K}$) 的 Thomason子集实际上是霍赫斯特对偶 Spc($\mathcal{K}$)$^\vee$ （即 Spc($\mathcal{K}$) 的霍赫斯特对偶）的开子集。空间 Spc($\mathcal{K}$)$^\vee$ 与 Spc($\mathcal{K}$) 具有相同的点，并且它也是一个谱空间。

2.2. **大范畴与几何函子。** 我们关注具有小余积的 tt-范畴。我们将讨论范围限制在通常所称的大*tt*-范畴。下面我们对此作精确说明。

回顾 2.6。 具有小余积的 tt-范畴 $\mathcal{T}$ 是 刚性紧生成的 ，如果紧对象的（本质上小的）集合与可对偶对象的集合一致，并且 $\mathcal{T}$ 中包含 $\mathcal{T}^\omega$ 的最小局部化子范畴是$\mathcal{T}$，其中 $\mathcal{T}^\omega$ 是紧对象的全子范畴。进一步细节请参阅 [BF11，第1]节。

例 2.7. 以下是刚性紧生成 tt-范畴的例子。

(a) 设 $X$ 是一个拟紧拟分离概形。那么，具有拟凝聚上同调的 $\mathcal{O}_X$-模复形的导出范畴 $\mathbf{D}_{\mathrm{qc}}(X)$，配备导出张量积 $\otimes^L_{\mathcal{O}_X}$ 后，是一个刚性紧生成 tt-范畴。(b) 设 $G$ 是一个有限群， $k$ 是一个特征整除 $|G|$ 的正特征域。那么，稳定模范畴配备由 $\otimes_k$ 与对角 $G$-作用所诱导的幺半结构后，是一个刚性紧生成 tt-范畴。

术语 2.8. 保持余积的 tt-函子 $f^*\colon \mathcal{T} \to \mathcal{S}$，定义在刚性且由紧对象生成的范畴之间，称为几何函子。

注 2.9. 请注意，几何函子尤其保持紧对象（因为任何幺半群函子都保持可对偶对象）。这尤其为我们免费 提供了一对伴随，我们将在下面的回顾中详细说明。

回顾 2.10. 设 $f^*\colon \mathcal{T} \to \mathcal{S}$ 是一个几何函子。那么 $f^*$ 有一个右伴随 $f_*$，而它自身又有一个右伴随 $f^!$。换言之，存在一串伴随 $f^* \dashv f_* \dashv f^!$。此外，伴随 $(f^*, f_*)$ 满足投影公式。也就是说，对于 $x \in \mathcal{T}$ 和 $y \in \mathcal{S}$，我们有

$$f_*(f^*x \otimes y) \simeq x \otimes f_*y$$

更多详情请参阅 [BDS16] 。

2.3. **粉碎局部化**。 本小节简要回顾 [BF11]中的一些结果。设 $\mathcal{T}$ 为一个刚性紧生成 tt-范畴。对于 $\mathcal{E}$ 中的一类对象 $\mathcal{T}$，我们用 $\mathcal{E}^\perp$ 表示其在 $\mathcal{T}$中的右正交补。

定义 2.11。 $\mathcal{T}$ 的一个粉碎理想 是 $\mathcal{S}$ $\mathcal{T}$ 的一个局部化张量理想，它满足 Verdier 商范畴 $q^*\colon \mathcal{T} \to \mathcal{T}/\mathcal{S}$ 存在，且具有一个与小余积交换的右伴随 $q_*$。

回顾 2.12。 设 $\mathcal{S}$ 是 $\mathcal{T}$的一个粉碎理想。则存在一个局部化函子 $(L_{\mathcal{S}}, \lambda)\colon \mathcal{T} \to \mathcal{T}$ 以及一个余局部化函子 $(\Gamma_{\mathcal{S}}, \gamma)\colon \mathcal{T} \to \mathcal{T}$，使得$\mathcal{S} = \mathrm{Ker}(L_{\mathcal{S}}) = \mathrm{Im}(\Gamma_{\mathcal{S}})$ 且 $\mathcal{S}^\perp = \mathrm{Im}(L_{\mathcal{S}}) = \mathrm{Ker}(\Gamma_{\mathcal{S}})$。此外，以下性质成立。

(a) 存在一个幂等函子三角

$$\Gamma_{\mathcal{S}} \xrightarrow{\gamma} \mathrm{Id} \xrightarrow{\lambda} L_{\mathcal{S}}.$$

(b) 局部化函子 $L_{\mathcal{S}}$ 可识别为函子 $L_{\mathcal{S}}(\mathbb{1}) \otimes -$，而余局部化函子 $\Gamma_{\mathcal{S}}$ 可识别为 $\Gamma_{\mathcal{S}}(\mathbb{1}) \otimes -$。(c) $\mathcal{S}^\perp$ 也是一个张量理想。

注 2.13。 在实际应用中，人们常将范畴 $\mathcal{T}/\mathcal{S}$ 与子范畴$\mathcal{S}^\perp$ 相识别，后者是 $\mathcal{T}$的子范畴；但也将其与 $L_{\mathcal{S}}(\mathbb{1}) \otimes \mathcal{T}$ 通过 方程 (2.12)相识别。

现在我们描述一类由有限局部化产生的粉碎理想。这些粉碎理想将在本文后续部分发挥重要作用。我们首先需要设定一些记号。

记号 2.14. 对于对象类 $\mathcal{E}$，我们用 $\mathrm{loc}(\mathcal{E})$ 和 $\mathrm{loc}_\otimes(\mathcal{E})$ 分别表示包含 $\mathcal{E}$ 的 $\mathcal{T}$ 的最小局部化子范畴和包含 $\mathcal{E}$ 的 $\mathcal{T}$ 的最小局部化理想。

注 2.15. 注意，如果对象类 $\mathcal{E}$ 已经对 $\otimes$ 稳定，那么 loc$\otimes(\mathcal{E})$ =loc$(\mathcal{E})$。事实上，根据我们对 $\mathcal{T}$ 的假设，只要 $\mathcal{E}\otimes\mathcal{T}^\omega\subseteq\mathcal{E}$，同样的结论就成立。

回顾 2.16. 设 $\mathcal{T}$ 为一个大三角张量范畴，且令 $Y\subset$Spc$(\mathcal{T}^\omega)$ 为一个 Thomason 子集。考虑 tt-理想

$$\mathcal{T}^\omega_Y := \{x\in\mathcal{T}^\omega \mid \operatorname{supp}(x)\subseteq Y\}$$

属于 $\mathcal{T}^\omega$。注意，这确实是通过 Balmer 分类与 $Y$ 对应的唯一 tt-理想；参见 公式 (2.3)。因此，我们得到一个粉碎理想 $\mathcal{T}_Y := \operatorname{loc}(\mathcal{T}^\omega_Y)$，它属于 $\mathcal{T}$。由此，我们得到一个局部化

$$\iota_Y^*:\mathcal{T}\to\mathcal{T}(Y^c)$$

其中 $\mathcal{T}(Y^c)$ 是 $\mathcal{T}/\mathcal{T}_Y$ 的简称。事实上，这是一个 有限局部化的例子。因此，由 [Nee92，定理 2.1] 应用于上述有限局部化可知，$\mathcal{T}(Y^c)$ 是一个刚性紧生成 tt-范畴，其刚性紧对象部分可描述为 Verdier 商范畴 $\mathcal{T}^\omega/\mathcal{T}^\omega_Y$ 的幂等完备化。注意，在此情形下，局部化函子 $\iota_Y^*$ 是一个几何函子。此外，我们得到一个正合三角

$$\mathbb{e}_Y\to\mathbb{1}\to\mathbb{f}_Y$$

其中 $\mathbb{f}_Y\in\mathcal{T}(Y^c)$ 和 $\mathbb{e}_Y\in\mathcal{T}_Y$。与之前一样，我们可以将 $\mathcal{T}(Y^c)$ 识别为范畴 $(\mathcal{T}_Y)^\perp=\mathbb{f}_Y\otimes\mathcal{T}$；见公式（2.13）。对象 $\mathbb{e}_Y$ 和 $\mathbb{f}_Y$ 分别称为与 $Y$ 关联的左幂等元和右幂等元。它们满足 $\mathbb{e}_Y\otimes\mathbb{e}_Y\simeq\mathbb{e}_Y$、$\mathbb{f}_Y\otimes\mathbb{f}_Y\simeq\mathbb{f}_Y$ 以及 $\mathbb{e}_Y\otimes\mathbb{f}_Y\simeq 0$。

我们以以下性质结束本小节，这些性质由与不同 Thomason 子集关联的右幂等元和左幂等元满足。

回顾 2.17. 设 $Y_1,Y_2\subseteq$ Spc$(\mathcal{T}^\omega)$ 是 Thomason 子集。回顾以下性质。

(a) $\mathbb{e}_{Y_1}\otimes\mathbb{f}_{Y_2}\simeq 0$ 当且仅当 $Y_1\subseteq Y_2$。(b) $\mathbb{e}_{Y_1}\otimes\mathbb{e}_{Y_2}\simeq\mathbb{e}_{Y_1\cap Y_2}$。(c) $\mathbb{f}_{Y_1}\otimes\mathbb{f}_{Y_2}\simeq\mathbb{f}_{Y_1\cup Y_2}$。

**2.4. 三角范畴中的纯性。** 在本小节中，我们令 $\mathcal{T}$ 表示一个紧生成三角范畴。

回顾 2.18。 令 Mod-$\mathcal{T}^\omega$ 表示 $\mathcal{T}^\omega$ 上的（右）模范畴。这是一个 Grothendieck 范畴。Mod-$\mathcal{T}^\omega$ 的有限表示对象记为 mod-$\mathcal{T}^\omega$。考虑受限 Yoneda 函子

$$\mathcal{T}\to\text{Mod-}\mathcal{T}^\omega,\quad x\mapsto\operatorname{Hom}_{\mathcal{T}}(-,x)|_{\mathcal{T}^\omega}.$$

ˆ 当上下文清楚时，我们将简单地用 $\hat{}x$ 和 $f$ 分别表示对象 $x$ 和映射 $f$ 在 $\mathcal{T}$ 下经受限 Yoneda 函子得到的像。

警告 2.19。 请回忆，一般而言，受限 Yoneda 函子既不是满的，也不是忠实的

现在我们可以回顾一下后续章节所需的纯性相关概念。

定义 2.20。 设 $\mathcal{T}$ 是一个紧生成三角范畴。若态射 $f$ 在 $\mathcal{T}$ 中诱导的映射 $f$ 是 Mod-$\mathcal{T}^{\omega}$中的单态射，则称其为纯单态射 。若对象 $x$ 在 $\mathcal{T}$ 中具有性质：任意纯单态射 $x \to y$ 在 $\mathcal{T}$ 中都分裂，则称该对象为纯内射 。

以下引理给出了紧生成三角范畴中纯内射对象的一个有用刻画；参见 [Kra00，第 1]节。

**引理 2.21**。 对于对象 $x$ *in* $\mathcal{T}$，以下性质等价。

（a） $x$ 是纯内射的。（b）$\hat{}x$ 在 Mod-$\mathcal{T}^{\omega}$ 中是单射的。
（c）$\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(y, x) \to \mathrm{Hom}(\hat{}y, \hat{}x)$ 对所有 $y$ *in* $\mathcal{T}$ 都是双射。（d）对于任意集合 $I$，我们有一个交换三角形

$$\begin{array}{ccc} \coprod_I x & \hookrightarrow & \prod_I x \\ \downarrow & \swarrow & \\ x & & \end{array}$$

其中竖直映射是求和映射。

注 2.22。 由最后一个性质可推出，纯内射对象在紧生成三角范畴之间的双连续函子作用下保持不变。例如，如果 $f^*\colon \mathcal{T} \to \mathcal{S}$ 是一个几何函子，那么 $f_*$ 保持纯内射对象。

注 2.23。 请注意，前一个引理特别说明， $\mathcal{T}$ 中由纯内射对象构成的全子范畴等价于 Mod-$\mathcal{T}^{\omega}$ 中由单射模构成的全子范畴。

$\hat{}$定义 2.24。 若态射 $f\colon x \to y$ 在 $\mathcal{T}$ 中满足 $f = 0$ 属于 Mod-$\mathcal{T}^{\omega}$，则称其为幻影 。

以下结果通过幻影映射刻画纯内射对象，更多细节见 [Kra00，引理 1。4]。

**引理 2.25**。 设 $x$ 是 $\mathcal{T}$中的一个对象。那么， $x$ 是纯内射的，当且仅当每个幻影映射 $f\colon y \to x$ 都是平凡的。

我们通过回顾紧生成三角范畴 $\mathcal{T}$ 的可定义子范畴这一概念来结束本小节。

回顾2.26。若 $\mathcal{D}$ 是 $\mathcal{T}$ 的一个全子范畴，且存在一族凝聚函子 $\{F_i\colon \mathcal{T} \to \text{阿贝尔群范畴}\}_{i\in I}$，使得 $x$ 属于 $\mathcal{D}$ 当且仅当对所有 $i \in I$ 都有 $F_i(x) = 0$，则称 $\mathcal{D}$ 为可定义的。回顾一下，函子 $F\colon \mathcal{T} \to$ 阿贝尔群范畴若是加性的，且存在如下形式的表示，则称其为凝聚函子：

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(x, -) \xrightarrow{\mathrm{Hom}(f,-)} \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(y, -) \to F \to 0$$

其中 $f\colon x \to y$ 是 $\mathcal{T}^{\omega}$ 中的一个映射。 $\mathcal{T}$ 上的凝聚函子范畴记作 Coh($\mathcal{T}$)。

注 2.27. 注意， $\mathcal{T}$ 的可定义子范畴并不一定是三角的。

## 3. Geometric purity in tt-categories

设 $\mathcal{T}$ 是一个刚性紧生成 tt-范畴。本节中，我们研究纯性相对于某类有限局部化的行为，这些有限局部化由 $\mathcal{T}^\omega$的三角素理想产生。为使这一点精确化，我们需要做一些准备。

记号 3.1。 对于拓扑空间 $X$，我们用 $\mathcal{QO}(X)$ 表示 $X$ 的拟紧开子集的集合。对于刚性紧生成 tt-范畴$\mathcal{T}$，我们令 $\mathcal{QO}(\mathcal{T}) := \mathcal{QO}(\mathrm{Spc}(\mathcal{T}^\omega))$。

记号 3.2。 对于 $\mathrm{Spc}(\mathcal{T}^\omega)$ 中的点 $\mathcal{P}$，我们用 $\mathrm{gen}(\mathcal{P})$ 表示 $\mathcal{P}$ 的推广闭包。也就是说，

$$\mathrm{gen}(\mathcal{P}) \coloneqq \{\mathcal{Q} \in \mathrm{Spc}(\mathcal{T}^\omega) \mid \mathcal{P} \subseteq \mathcal{Q}\}.$$

特别地，注意 $\mathrm{gen}(\mathcal{P})^c = \mathrm{supp}(\mathcal{P})$，它是 $\mathcal{T}$ 的 Thomason 子集。

注 3.3。 由于 $\mathrm{Spc}(\mathcal{T}^\omega)$ 是谱空间，$\mathrm{Spc}(\mathcal{T}^\omega)$ 中点$\mathcal{P}$的推广闭包为

$$\bigcap_{\mathcal{P} \in U \in \mathcal{QO}(\mathcal{T})} U.$$

定义 3.4。 设 $\mathcal{P}$ 是 $\mathrm{Spc}(\mathcal{T}^\omega)$ 的一个点。我们将 *tt-茎* 定义为 $\mathcal{T}$ 在 $\mathcal{P}$ 处对应的刚性紧生成范畴 $\mathcal{T}_{\mathcal{P}} : = \mathcal{T}(\mathrm{gen}(\mathcal{P}))$，它关联于 Thomason 子集 $\mathrm{supp}(\mathcal{P})$；见公式 (2.16)。

注 3.5。 注意，范畴 $\mathcal{T}_{\mathrm{supp}(\mathcal{P})}$ 恰好是 $\mathrm{loc}(\mathcal{P})$，因此我们可以将 $\mathcal{T}_{\mathcal{P}}$ 与局部化识别

$$\iota_{\mathcal{P}}^* \coloneqq \iota_{\mathrm{supp}(\mathcal{P})}^* \colon \mathcal{T} \to \mathcal{T}/\operatorname{loc}(\mathcal{P}).$$

特别地，我们可以将 $\iota_{\mathcal{P},\,*} \circ \iota_{\mathcal{P}}^*$ 与 $\mathsf{f}_{\mathrm{supp}(\mathcal{P})} \otimes -$识别。

记号 3.6。 我们用 $\mathsf{f}_{\mathcal{P}}$ 表示 $\mathsf{f}^{\mathrm{supp}(\mathcal{P})}$，用 $\mathsf{e}_{\mathcal{P}}$ 表示 $\mathsf{e}^{\mathrm{supp}(\mathcal{P})}$。

我们回顾一下局部刚性紧生成 tt-范畴的定义。

定义 3.7。 设 $\mathcal{T}$ 是一个刚性紧生成 tt-范畴。若其刚性紧对象部分 $\mathcal{T}^\omega$ 是局部的，也就是说，若零 tt-理想 (0) 在 $\mathcal{T}^\omega$ 中是素理想，则称 $\mathcal{T}$为**局部** 。

例 3.8。 对于 $\mathrm{Spc}(\mathcal{T}^\omega)$ 中的任意点 $\mathcal{P}$，tt-茎 $\mathcal{T}_{\mathcal{P}}$ 都是局部的。

定义 3.9。 设 $\mathcal{T}$ 是一个刚性相容生成的 tt-范畴。回忆局部化函子 $\iota_{\mathcal{P}}^*\colon \mathcal{T} \to \mathcal{T}_{\mathcal{P}}$。称 $\mathcal{T}$ 中的映射 $f$ 为:

(a) 若对于 $\mathrm{Spc}(\mathcal{T}^\omega)$ 中的每个点 $\mathcal{P}$，$\iota_{\mathcal{P}}^*(f)$ 都是 $\mathcal{T}_{\mathcal{P}}$ 中的幻影映射，则称其为几何幻影；(b) 若对于 $\mathrm{Spc}(\mathcal{T}^\omega)$ 中的每个点 $\mathcal{P}$，$\iota_{\mathcal{P}}^*(f)$ 都是$\mathcal{T}_{\mathcal{P}}$中的纯单态射，则称其为几何纯单态射；(c) 若对于 $\mathrm{Spc}(\mathcal{T}^\omega)$ 中的每个点 $\mathcal{P}$，$\iota_{\mathcal{P}}^*(f)$ 都是 $\mathcal{T}_{\mathcal{P}}$ 中的纯满态射，则称其为几何纯满态射 。

此外，若对象 $x$ 属于 $\mathcal{T}$，且任意几何纯单态射 $x \to y$ 在 $\mathcal{T}$ 中都分裂，则称其为几何纯内射 。

约定 3.10。 为简化术语，我们将几何-某物 简称为几何-某物。

警告 3.11。 虽然函子 $\iota^*_{\mathcal{P}}$ 保纯三角[1], 正如我们将看到的，没有理由认为它也反映纯三角。本文后面将给出一个确实如此的反例，从而说明前述定义的意义。

注 3.12. 注意，若范畴 $\mathcal{T}$ 是局部的，则 g-纯性与纯性一致。然而，反过来一般并不成立，正如我们将在方程（3.26）中看到的那样。

**引理 3.13.** 设 $x \xrightarrow{f} x' \xrightarrow{f'} x'' \xrightarrow{f''} \Sigma x$ 是 $\mathcal{T}$ 中的一个正合三角。那么，以下性质等价：

(a) $f$ 是一个 *g*-幻影。(b) $f'$ 是一个 *g*-纯单态射。(c) $f''$ 是一个 *g*-纯满态射。

证明。 对于幻影态射、纯单态射和纯满态射也同样成立；考察由正合三角诱导的长正合列即可（例如，参见[Kra00，引理 1。3]）。因此，结论由局部化$\iota^*_{\mathcal{P}}$的正合性 $\mathcal{T} \to \mathcal{T}_{\mathcal{P}}$得出。 □

前一个引理给出了 g-纯内射对象与 g-幻影态射之间的关系：

**推论 3.14.** 设 $x$是 $\mathcal{T}$中的一个对象。那么， $x$ 是 *g*-纯内射，当且仅当每个 *g*-幻影态射 $y \to x$ 都是平凡的。

证明. 这由 等式 (3.13) 以及如下事实得出：一个正合三角形分裂，当且仅当其中一个映射是平凡的。 □

**命题 3.15.** 设 $\iota^*\colon \mathcal{T} \to \mathcal{U}$ 是刚性紧生成 *tt*-范畴之间的一个几何函子。若 $f$ 是 $\mathcal{T}$ 中的一个幻影映射，那么 $\iota^*(f)$ 是 $\mathcal{U}$中的一个幻影映射。

证明. 由于 $\iota^*$ 是一个几何函子，它保持紧对象。因此，我们得到一个函子 Mod-$\mathcal{T}^\omega \to$ Mod-$\mathcal{U}^\omega$ ，使得下图交换

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{T} & \longrightarrow & \text{Mod-}\mathcal{T}^\omega \\ {\scriptstyle \iota^*}\downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{U} & \longrightarrow & \text{模-}\mathcal{U}^\omega \end{array}$$

其中水平映射是受限 Yoneda 函子。因此，若 $f$ 是幻影态射，则由前一个交换图的交换性可知， $\iota^*(f)$是幻影态射。□

**推论 3.16.** 设 $\mathcal{T}$ 是一个大三角张量范畴。那么，$\mathcal{T}$ 中的任意幻影映射 $f\colon x \to y$ 都是 *g*-幻影。

证明. 这是将前一个命题应用于 $\mathcal{U} = \mathcal{T}_{\mathcal{P}}$ 和局部化函子 $\iota^*_{\mathcal{P}}$所得的一个特例。□

换言之，g-幽灵态射比幻影态射更多。这表明 g-纯性比纯性更强。让我们将此记录在以下推论中。

[1]其中一个映射是纯单态射的正合三角。

**推论 3.17.** 如果 $x$ 在 $\mathcal{T}$ 中为 $g$-纯内射的，则它是纯内射的。

证明。 设 $f\colon y \to x$ 是 $\mathcal{T}$ 中的一个幻影态射。由 式 (3.16)，可得态射 $f$ 是 g-幻影的。因此 $f$ 是平凡的。由式 (2.25)即可得出结论。 □

**命题 3.18**。 设 $\mathcal{P} \in \mathrm{Spc}(\mathcal{T}^\omega)$ 且 $x$ 是 $\mathcal{T}_\mathcal{P}$中的一个纯内射对象。那么$\iota_{\mathcal{P},*}(x)$是 $\mathcal{T}$中的 $g$-纯内射对象。

证明。 设 $f\colon y \to \iota_{\mathcal{P},*}(x)$ 是 $\mathcal{T}$中的一个 g-幻影态射。利用伴随 $\iota_\mathcal{P}^* \dashv \iota_{\mathcal{P},*}$，我们得到一个态射

$$\iota_\mathcal{P}^*(y) \xrightarrow{\iota_\mathcal{P}^*(f)} \iota_\mathcal{P}^*(\iota_{\mathcal{P},*}(x)) \xrightarrow{\epsilon_x} x \tag{3.19}$$

其中 $\epsilon$表示该伴随的余单位。换言之， $\epsilon \circ \iota_\mathcal{P}^*(f)$ 是与 $f$ 经由该伴随对应的唯一态射。现在，由于 $f$ 是 g-幻影的， $\iota_\mathcal{P}^*(f)$ 是幻影态射。由式 (3.19)可知，对应的态射也是幻影态射。由于 $x$是纯内射的，该态射必为平凡。因此 $f$ 也必为平凡。由式 (3.14)得出结论。 □

3.1. **g-纯性的一种替代定义**。 在继续之前，我们需要以下辅助结果，它告诉我们， $\mathcal{T}$ 的粉碎局部化的右伴随函子 保持 纯性。事实上，这相当于说，这样的函子是 [BW23]中对这一类函子已有广泛研究；他们的工作也涵盖了我们感兴趣的情形。不过，我们的证明相当初等，因此决定将其列出。关于可定义函子的介绍，以及考虑这类函子的动机的精彩讨论，请参阅同上。

**命题 3.20**。 设 $\mathcal{S}$ 是 $\mathcal{T}$ 的一个粉碎理想，并设 $\iota_\mathcal{S}^*\colon \mathcal{T} \to \mathcal{T}/\mathcal{S}$ 表示相应的局部化函子。则以下性质成立。

(a)$\iota_{\mathcal{S},\ *}$ 保持幻影态射、纯单态射、纯满态射和纯内射对象。(b) $\iota_{\mathcal{S},\ *}$ 反映纯内射对象；也就是说，若 $x$ 是 $\iota_{\mathcal{S},\ *}$ 的本质像中的一个纯内射对象，则 $\iota_\mathcal{S}^*(x)$ 在 $\mathcal{T}_\mathcal{S}$ 中是纯内射对象。(c) $\iota_{\mathcal{S},\ *}$ 保持并反映可定义子范畴。

证明。 对于部分 (a)，设 $f\colon x \to y$ 是 $\mathcal{T}/\mathcal{S}$中的一个纯单态射。我们断言，映射 $\iota_{\mathcal{S},*}(f)$ 是 $\mathcal{T}$ 中的一个纯单态射。事实上，利用伴随的自然性，对于任意 $z \in \mathcal{T}^\omega$，我们得到一个交换正方形

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_\mathcal{T}(z, \iota_{\mathcal{S},*}(x)) & \xrightarrow{\simeq} & \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}/\mathcal{S}}(\iota_\mathcal{P}^*(z), x) \\ \downarrow{\scriptstyle \widehat{\iota_{\mathcal{S},*}(f)}(z)} & & \downarrow{\scriptstyle \hat{f}(z)} \\ \mathrm{Hom}_\mathcal{T}(z, \iota_{\mathcal{S},*}(y)) & \xrightarrow{\simeq} & \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}/\mathcal{S}}(\iota_\mathcal{P}^*(z), y) \end{array}$$

$\hat{}$ 回顾一下，由于 $\iota_\mathcal{S}^*$ 是几何函子，它保持紧对象。由于 $f\hat{}$ 是 $(\mathcal{T}/\mathcal{S})^\omega$-模范畴中的单态射，因此 $f(\iota_\mathcal{P}^*(z))$ 是$\widehat{\quad}$单射。由该方块的交换性，我们推出 $\iota_{\mathcal{S},*}(f)(z)$ 同样是单射。因此 $\iota_{\mathcal{S},*}(f)$ 是 $\mathcal{T}$ 中的纯单态射。此外，函子

$\iota_{\mathcal{S},*}$ 保持纯内射对象，依据等式 (3.18)。其余部分由等式 (3.13) 以及$\iota_{\mathcal{S},*}$的正合性得出。

现在，对于部分（$b$），设 $x$ 是 $\mathcal{T}/\mathcal{S}$ 中的一个对象，使得$\iota_{\mathcal{S},\ *}(x)$ 是纯内射对象。考虑 $y \to x$ 在 $\mathcal{T}/\mathcal{S}$中的一个纯单态射。根据第一部分，我们有$\iota_{\mathcal{S},\ *}(y) \to \iota_{\mathcal{S},\ *}(x)$ 是 $\mathcal{T}$中的纯单态射。由于$\iota_{\mathcal{S},\ *}(x)$ 是纯内射对象，这样的纯单态射必定分裂。最后，由于$\iota_{\mathcal{S},\ *}$ 是全忠实的，这样的分裂在 $\mathcal{T}/\mathcal{S}$ 中也成立。因此， $x$ 是 $\mathcal{T}/\mathcal{S}$中的纯内射对象。

部分（$c$）是部分（$a$）和（$b$）的直接推论，因为可定义范畴完全由其中包含的纯内射对象决定；参见 [Kra00，定理 4。4]。 □

回忆一下，与 $\mathbb{f}_Y$ Thomason 子集 $Y \subseteq \operatorname{Spc}(\mathcal{T}^\omega)$ 相关联的右幂等元；参见公式（2.16）。

定义 3.21（另一种定义）。 设 $\mathcal{T}$ 是一个刚性紧生成 tt-范畴。称态射 $f$ 属于 $\mathcal{T}$ 为：

(a) *g*-幻影，若对 $\operatorname{Spc}(\mathcal{T}^\omega)$ 中的每个点 $\mathcal{P}$， $f \otimes \mathbb{f}_{\mathcal{P}}$ 都是 $\mathcal{T}$ 中的幻影映射；
(b) *g*-纯单态射，若对 $\operatorname{Spc}(\mathcal{T}^\omega)$ 中的每个点 $\mathcal{P}$， $f \otimes \mathbb{f}_{\mathcal{P}}$ 都是 $\mathcal{T}$ 中的纯单态射；(c) 几何纯满态，若对 $\operatorname{Spc}(\mathcal{T}^\omega)$ 中的每个点 $\mathcal{P}$， $f \otimes \mathbb{f}_{\mathcal{P}}$ 都是 $\mathcal{T}_{\mathcal{P}}$ 中的纯满态射。

警告 3.22。 根据 [BKS19，命题 2。10]，我们知道，对于任意 $x \in \mathcal{T}$，函子 $x \otimes -$ 都保持纯单态射、纯满态射和幻影映射。然而， $x \otimes -$ 不一定反映纯性。

以下命题表明公式 (3.21)等价于 公式 (3.9)。因此，在本文余下部分中，我们将交替使用这两个公式。

**命题 3.23**。 设 $\mathcal{T}$ 是一个刚性紧生成 *tt*-范畴，且 $\mathcal{P}$ 是$\operatorname{Spc}(\mathcal{T}^\omega)$中的一个点。设 $f$ 是 $\mathcal{T}$ 中的一个态射。那么 $\iota_{\mathcal{P}}^*(f)$ 在 $\mathcal{T}_{\mathcal{P}}$ 中是幻影态射，当且仅当 $f \otimes \mathbb{f}_{\mathcal{P}}$ 是幻影态射。

证明。 回顾一下，$\mathbb{f}_{\mathcal{P}} \otimes -$ 与 $\iota_{\mathcal{P},\ *} \circ \iota_{\mathcal{P}}^*$一致。于是结论直接由公式 (3.20)得出。 □

3.2. **g-纯内射对象的例子**。 我们以几个 g-纯内射对象的例子结束本节。我们需要[BKS20]和 [Bal20c]中的一些术语。

回顾 3.24。 设 $\mathcal{T}$ 是一个刚性紧生成 tt-范畴。 $\mathcal{T}^\omega$ 的一个同调素理想是一个极大真 Serre $\otimes$-理想 $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}^{\mathrm{fp}}$，其中 $\mathcal{A} \coloneqq \text{Mod-}\mathcal{T}^\omega$。 $\mathcal{T}^\omega$ 的同调谱是集合

$$\operatorname{Spc}^h(\mathcal{T}^\omega) = \{\mathcal{P} \subseteq \mathcal{A} \mid \mathcal{P} \text{ homological prime of } \mathcal{T}^\omega\}$$

并且它配备了由以下闭集基生成的拓扑

$$\operatorname{supp}^h(x) = \{\mathcal{P} \in \operatorname{Spc}^h(\mathcal{T}^\omega) \mid \hat{x} \notin \mathcal{P}\}$$

$x$在 $\mathcal{T}^\omega$中。该构造对于 tt-函子而言是函子性的。也就是说，设$f\colon \mathcal{T}^\omega \to \mathcal{S}^\omega$ 是一个 tt-函子，则我们得到一个连续映射

$$\varphi(f)\colon \operatorname{Spc}^h(\mathcal{S}^\omega) \to \operatorname{Spc}^h(\mathcal{T}^\omega).$$

给定 $\mathcal{T}^\omega$的一个同调素理想 $\mathcal{B}$，我们可以将其扩张为一个局部化子范畴 $\overrightarrow{\mathcal{B}}$，并考虑商 $\mathcal{A}/\overrightarrow{\mathcal{B}}$。此商是对称幺半的，在该商中取幺半单位的内射包，将确定 $\mathcal{T}$中的一个纯内射对象 $E_{\mathcal{B}}$，使得 $\overrightarrow{\mathcal{B}} = \mathsf{Ker}(\hat{}E_{\mathcal{B}} \otimes -)$。一般而言，存在一个连续映射

$$\phi\colon \operatorname{Spc}^h(\mathcal{T}^\omega) \to \operatorname{Spc}(\mathcal{T}^\omega), \quad \mathcal{P} \mapsto \mathrm{h}^{-1}(\mathcal{P}).$$

这个映射总是满射的。

**命题 3.25.** 设 $\mathcal{T}$ 为一个大三角张量范畴，且 $\mathcal{B}$ 为 $\mathcal{T}^\omega$的同调素理想。则纯内射对象 $E_{\mathcal{B}}$ 是$g$-纯内射的。

证明。 首先，考虑一个位于三角素理想 $\mathcal{P}$之上的同调素理想 $\mathcal{B}$。局部化函子 $\iota_{\mathcal{P}}^*$: $\mathcal{T} \to \mathcal{T}_{\mathcal{P}}$ 诱导一个映射

$$\varphi\colon \operatorname{Spc}^h(\mathcal{T}^\omega_{\mathcal{P}}) \to \operatorname{Spc}^h(\mathcal{T}^\omega).$$

设 $\mathcal{B}' \in \varphi^{-1}\mathcal{B}$。则由 [Bal20b，引理 5.6] 我们得到 $E_{\mathcal{B}}$ 是一个直和项，属于 $\iota_{\mathcal{P},\,*}(E_{\mathcal{B}'})$。因此，由等式 (3.18) 以及 $\mathsf{Im}(\iota_{\mathcal{P},\,*}) = \mathsf{loc}(\mathcal{P})^\perp$ 是 $\mathcal{T}$ 的厚子范畴这一事实，结论成立。□

在 第 6 节中，我们将给出一个纯性与几何纯性并不一致的例子。在此之前，让我们以一个二者一致的实例来结束本节。

**命题 3.26.** 设 $R$ 为一个交换环。则导出范畴 $\mathbf{D}(R)$中的纯内射对象与几何纯内射对象一致。

证明. 设 $f\colon x \to y$ 为 $\mathbf{D}(R)$ 中的一个 g-纯单态射。我们断言 $f$ 是纯单态射。注意，这一断言表明 $\mathbf{D}(R)$ 中的两种纯性概念一致。为证明该断言，我们需要验证

$$\operatorname{Hom}_{\mathbf{D}(R)}(z, x) \xrightarrow{\hat{f}_z} \operatorname{Hom}_{\mathbf{D}(R)}(z, y)$$

$\hat{}$ 对所有 $z \in \mathbf{D}(R)^\omega$ 都是单射。回忆 $f_z$ 表示 $\mathsf{Hom}(z, f)$。设 $\mathfrak{p}$ 为 $R$的一个素理想。则在 $\mathfrak{p}$ 处的局部化给出一个映射

$$\operatorname{Hom}_{\mathbf{D}(R)}(z, x) \otimes_R R_{\mathfrak{p}} \xrightarrow{\hat{f}_z \otimes_R R_{\mathfrak{p}}} \operatorname{Hom}_{\mathbf{D}(R)}(z, y) \otimes_R R_{\mathfrak{p}}$$

但由于 $z$ 在 $\mathbf{D}(R)$ 中是紧的，我们有同构：

(a) $\mathsf{Hom}^{\mathbf{D}(R)}(z, x) \otimes_R R_{\mathfrak{p}} \cong \mathsf{Hom}_{\mathbf{D}(R_{\mathfrak{p}})}(z_{\mathfrak{p}}, x_{\mathfrak{p}})$，以及 (b) $\mathsf{Hom}^{\mathbf{D}(R)}(z, y) \otimes_R R_{\mathfrak{p}} \cong \mathsf{Hom}_{\mathbf{D}(R_{\mathfrak{p}})}(z_{\mathfrak{p}}, y_{\mathfrak{p}})$。

现在，我们可以利用 $f$ 是 g-纯单态射这一点，得到 $f \otimes_R R_{\mathfrak{p}}$ 是$\mathbf{D}(R_{\mathfrak{p}})$中的纯$\hat{}$单态射。因此，对于$\hat{}\hat{}R$的每个素理想 $\mathfrak{p}$，$f_z \otimes_R R_{\mathfrak{p}}$ 都是单射。由此，$f_z$ 也为单射。对象 $z \in \mathbf{D}(R)^\omega$ 是任意的，因此 $f$是单态射。□

注 3.27。 请注意，上述例子表明，即使在非局部的刚性紧生成 tt-范畴中，纯性与 g-纯性的概念也可能一致。

## 4. Purity at closed points and open covers

人们或许会想知道，能否通过较小一类局部化来检验几何纯性。本节针对由三角张量谱的闭点所产生的粉碎理想，探讨这一问题。我们还将 $\mathcal{T}$ 中的几何纯性理论与范畴 $\mathcal{T}(U)$ 中的相关理论联系起来，其中 $U$ 遍历 $\mathcal{T}$ 的 Balmer 谱的拟紧开子集。

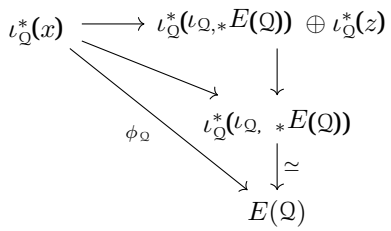
但首先，让我们从以下辅助结果开始，它告诉我们局部化 $\iota_{\mathcal{P}}^*$ 能够检测一个g-纯内射对象是否平凡。原则上， $\mathcal{T}$ 中的非平凡对象在 $\iota_{\mathcal{P}}^*$下可能是平凡的，对所有 $\mathcal{P}\in$Spc($\mathcal{T}^\omega$)而言。

**引理 4.1.** 设 $x$ 是 $\mathcal{T}$中的一个对象。则存在一个$g$-纯内射对象 $y$以及一个$g$-纯单态射 $x \to y$。事实上，可以将 $y$ 取为不可分解 $g$-纯内射对象的积。

证明。 对 $\mathcal{T}^\omega$中的每个素理想 $\mathcal{P}$ ，考虑一个纯单态射 $\iota_{\mathcal{P}}^*(x) \xrightarrow{\phi_{\mathcal{P}}} E(\mathcal{P})$，其中 $E(\mathcal{P})$是局部范畴$\mathcal{T}_{\mathcal{P}}$中不可分解纯内射对象的积。我们断言该自然映射

$$x \to \prod_{\mathcal{P}\in \mathrm{Spc}(\mathcal{T}^\omega)} \iota_{\mathcal{P},*}(E(\mathcal{P})) \tag{4.2}$$

满足所需性质。回顾$\iota_{\mathcal{P},\ *}$保持积和不可分解对象。因此，等式 (3.18) 表明，每个$\iota_{\mathcal{P},\ *}(E(\mathcal{P}))$都是不可分解 g-纯内射对象的积。因此，我们只需验证上述映射是一个 g- 纯单态射。现在，对 $\mathcal{T}^\omega$ 中的一个素理想 $\mathcal{Q}$ ，考虑以下交换图




其中，水平映射是通过将 $\iota_{\mathcal{Q}}^*$ 应用于等式 (4.2)中的映射得到的，顶部的垂直映射是投影映射，并且

$$z = \prod_{\mathcal{P}\in \mathrm{Spc}(\mathcal{T}^\omega),\mathcal{P}\neq\mathcal{Q}} \iota_{\mathcal{P},*}(E(\mathcal{P}))).$$

由于 $\phi_{\mathcal{Q}}$ 是一个纯单态射，我们推得水平态射也是纯单态射。至此，结果得证。□

**推论 4.3**。 令 $x$ 为 $\mathcal{T}$ 中的一个 $g$-纯内射对象。则 $x \simeq 0$ 当且仅当 $\iota_{\mathcal{P}}^*(x) \simeq 0$ 对所有 $\mathcal{P}\in$Spc($\mathcal{T}^\omega$) 都成立。

证明。 若 $\iota_{\mathcal{P}}^*(x) \simeq 0$，则在 $E(\mathcal{P}) = 0$ 的证明中，我们可以取 等式 (4.1)。特别地，若 $\iota_{\mathcal{P}}^*(x) \simeq 0$ 对所有 $\mathcal{P} \in \mathrm{Spc}(\mathcal{T}^\omega)$ $x \to 0$ 成立，那么零态射是一个 g-纯单态射。但由于 $x$是 g-纯内射的，这个态射必定分裂。因此 $x$必为平凡对象。 □

4.1. **闭点**。 对于 Thomason 子集 $Y \subseteq \mathrm{Spc}(\mathcal{T}^\omega)$，回顾与之关联的粉碎局部化 $\iota_Y^*\colon \mathcal{T} \to \mathcal{T}(Y^c)$。如有需要，请参见 等式 (2.16) 。

注 4.4。 设 $U$ 和 $V$ 是 $\mathrm{Spc}(\mathcal{T}^\omega)$ 中 Thomason 子集的补集。若$U \subseteq V$，则有如下交换图

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{T} & \\ {\scriptstyle \iota_{V^c}^*}\swarrow & & \searrow{\scriptstyle \iota_{U^c}^*} \\ \mathcal{T}(V) & \xrightarrow{\mathrm{res}_U^{V,*}} & \mathcal{T}(U) \end{array}$$

其中 $\mathrm{res}^{V}{}_{,U}{}^{*}$ 是函子 $-\otimes \mathbb{1}_{U^c}$。 参见 [BF11] 或 第 2.3 节。

注 4.5。 对于拟紧开子集 $U$ （位于 $\mathrm{Spc}(\mathcal{T}^\omega)$ 中），注意 $\mathcal{T}(U)$ 是将 方程（2.16）应用于 Thomason 子集 $U^c$的一个特例。

**引理 4.6**。 设 $U$ 是$\mathrm{Spc}(\mathcal{T}^\omega)$的一个拟紧开子集，且 $\mathcal{P}$是 $\mathcal{T}^\omega$ 中位于 $U$的一个素理想。则局部化函子 $\iota_{\mathcal{P}}^*\colon \mathcal{T} \to \mathcal{T}_{\mathcal{P}}$ 可经由 $\mathcal{T}(U)$分解。也就是说，我们得到如下交换图

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{T} & \xrightarrow{\iota_U^*} & \mathcal{T}(U) \\ & {\scriptstyle \iota_{\mathcal{P}}^*}\searrow & \downarrow \\ & & \mathcal{T}_{\mathcal{P}} \end{array}$$

其中垂直映射是与$\mathbb{1}_{\mathrm{gen}(\mathcal{P})^c}$作张量。

证明。 这是 等式 (4.4)的一个特例，而 $\mathcal{T}_{\mathcal{P}}$ 的另一种描述可通过注意到 $\mathrm{gen}(\mathcal{P})$ 必须包含于 $U$得到；参见 等式 (3.3)。 □

我们现在可以证明， $\mathcal{T}$中的几何纯性仅取决于 $\mathcal{T}$ 的 Balmer 谱在闭点处的局部化。更具体地说：

**命题 4.7**。 设 $\mathcal{T}$ 是一个大三角张量范畴。那么，态射 $f\colon x \to y$ 在 $\mathcal{T}$ 中是$g$-幻影态射，当且仅当对于每个闭点 $\mathcal{M}$ $\mathrm{Spc}(\mathcal{T}^\omega)$， $\iota_{\mathcal{M}}^*(f)$ 在 $\mathcal{T}_{\mathcal{M}}$中是幻影态射。

证明。 假设 $f$ 满足 $\iota_{\mathcal{M}}^*(f)$ 对所有闭点 $\mathcal{T}_{\mathcal{M}}$ 均为幻影态射$\mathcal{M}$ $\mathrm{Spc}(\mathcal{T}^\omega$。取 $\mathcal{P} \in \mathrm{Spc}(\mathcal{T}^\omega$ 中的一个点。我们需要验证 $\iota_{\mathcal{P}}^*(f$是幻影态射。为此，回想一下， $\mathcal{P}$ 必定包含一个闭点，记作 $\mathcal{M}$。于是有关系 $\mathrm{gen}(\mathcal{P}) \subseteq \mathrm{gen}(\mathcal{M}$。根据 等式 (4.4)，我们得到一个交换图

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{T} & \\ {\scriptstyle \iota_{\mathrm{gen}(\mathcal{M})^c}^*}\swarrow & & \searrow{\scriptstyle \iota_{\mathrm{gen}(\mathcal{P})^c}^*} \\ \mathcal{T}(\mathrm{gen}(\mathcal{M})) & \xrightarrow{\mathrm{res}_{\mathrm{gen}(\mathcal{P})}^{\mathrm{gen}(\mathcal{M}),*}} & \mathcal{T}(\mathrm{gen}(\mathcal{P})). \end{array}$$

换句话说，函子 $\iota_{\mathrm{gen}(\mathcal{P})}^* = \iota_{\mathcal{P}}^*$ 可经由 $\mathcal{T}(\mathrm{gen}(\mathcal{M}))$ $= \mathcal{T}_{\mathcal{M}}$分解。由方程 (3.15)，可知 $\mathrm{res}^{\mathrm{gen}(\mathcal{M})}{}_{,*\ \mathrm{gen}(\mathcal{P})}$ 保持幻影态射。因此，我们得到$\iota_{\mathcal{P}}^*(f)$ 是幻影态射，正如所需。 □

4.2. **由拟紧开集构成的覆盖。** 现在我们转而讨论 $\mathcal{T}$ 中的几何纯性与 $\mathcal{T}(U)$ 中的几何纯性之间的关系，其中 $U$ 是 $\mathcal{T}^\omega$ 的 Balmer 谱的一个拟紧开子集。

**命题 4.8。** 设 $U$ 是 $\mathrm{Spc}(\mathcal{T}^\omega)$ 的拟紧开子集。设 $f$ 是 $\mathcal{T}$ 中的一个 $g$-幻影。则 $\iota_{U^c}^*(f)$ 是 $\mathcal{T}(U)$ 中的 $g$-幻影。

证明。 这可由 等式 (4.6) 以及 $\mathrm{Spc}(\mathcal{T}(U)^\omega) \cong U$ 通过诱导映射这一事实得到。 □

**命题 4.9。** 设 $U$ 是 $\mathrm{Spc}(\mathcal{T}^\omega)$ 的一个拟紧开子集。那么函子$\iota_{U^c,*}$ 保 $g$-纯内射对象。

证明。 设 $x$ 是 $\mathcal{T}(U)$ 中的一个 g-纯内射对象。考虑一个 g-幻影态射$f\colon y \to \iota_{U^c,*}(x)$ 中。我们将证明 $f$ 是平凡的，因此结论可由 等式 (3.14) 得出。由伴随关系，我们得到唯一的一个映射

$$\bar{f}\colon \iota_{U^c}^*(y) \to \iota_{U^c}^*(\iota_{U^c,*}(x)) \cong x$$

其中，该同构是余单位，因为 $\iota_{U^c,*}$ 是全忠实的。现在我们断言$_f$ 是 $g$-幻影态射，在 $\mathcal{T}(U)$ 中。但这就是 等式 (4.8)。 □

我们以以下引理结束本节，它将在本文余下部分发挥关键作用。

**引理 4.10。** 设 $\{U_i\}_{i\in I}$ 是$\mathrm{Spc}(\mathcal{T}^\omega)$的一个由拟紧开集构成的有限覆盖。设 $x$ 是 $\mathcal{T}$ 中的一个对象。记 $\iota_i^*$ 和 $\mathbb{f}_i$ 分别表示 $\iota_{U_i^c}^*$ 和 $\mathbb{f}^{U_i^c}$。则以下性质成立。

(a) 自然映射

$$\psi\colon x \to \bigoplus_{i\in I} \mathbb{f}_i \otimes x$$

是一个$g$-纯单态射。(b) 若 $x$ 是 $\mathcal{T}$中的不可分解$g$-纯内射对象，则存在一个同构态射 $x \simeq \mathbb{f}_i \otimes x$ ，其中 $i \in I$。

证明。 对于第一个断言，设 $\mathcal{P}$ 是 $\mathrm{Spc}(\mathcal{T}^\omega$中的一个点，并假设它属于 $U_k$，其中 $k \in I$。由 等式 (4.6)，可得

$$\iota_{\mathcal{P}}^*(x) \simeq \iota_{\mathcal{P}}^*(\mathbb{f}_k \otimes x). \tag{4.11}$$

因此，我们得到映射

$$\iota_{\mathcal{P}}^*(\psi)\colon \iota_{\mathcal{P}}^*(x) \to \iota_{\mathcal{P}}^*(\mathbb{f}_k \otimes x) \oplus \bigoplus_{i\in I\setminus\{k\}} \iota_{\mathcal{P}}^*(\mathbb{f}_i \otimes x)$$

是纯单态射。事实上，利用 $k$ 对应分量上的投影进行复合，根据 等式 (4.11)可知该复合是纯单态射。由此我们推得$\psi$ 是 $\mathcal{T}$ 中的g-纯单态射，正如所需。

现在，假设 $x$ 是 $\mathcal{T}$中的不可分解g-纯内射对象。那么，自然映射 $\psi$ 必然分裂，因为 $x$ 是g-纯内射的。由于纯内射对象满足 Krull-Schmidt 性质（参见 [Pre09]中的定理 E.1.23 和 E.1.24），我们推得 $x$ 必然是$\mathbb{f}_i \otimes x$的一个直和项，其中 $i \in I$。这意味着 $x \in \mathcal{T}(U_i)$。回忆一下，我们可以将 $\mathcal{T}(U_i)$ 识别为$\mathbb{f}_i \otimes \mathcal{T}$；参见公式 (2.16)。因此 $x \simeq \mathbb{f}_i \otimes x$，正如我们所要证明的。□

## 5. Reduction to stalks

在本节中，我们证明， $\mathcal{T}$ 的任意不可分解g-纯内射对象都可表示为某个三角素理想 $\mathcal{P}$所对应的 tt-茎 $\mathcal{T}_{\mathcal{P}}$ 中的纯内射对象的推前。我们的证明依赖于一些高阶范畴论结果；因此，从现在起，我们将假设 $\mathcal{T}$ 是一个刚性紧生成的稳定 $\infty$-范畴。我们将保留这一术语，并简单地将 $\mathcal{T}$ 称为刚性紧生成 tt-范畴。

本节的主要结果如下。

**定理5.1**。 设 $\mathcal{T}$ 是一个刚性紧生成 *tt*-范畴，且 $x$ 是 $\mathcal{T}$中的一个不可分解*g*-纯内射对象。那么存在一个素理想 $\mathcal{P}$ 属于 $\mathcal{T}^{\omega}$ ，以及一个纯内射对象 $y$ 属于 $\mathcal{T}_{\mathcal{P}}$ ，使得$\iota_{\mathcal{P},} *(y) \simeq x$。

我们需要做一些准备。特别地，以下是一个直接的观察，但它将在我们证明方程（5.1）时发挥重要作用。

**引理5.2**。 设 $X$ 是一个谱空间。设 $I$ 是一个集合，并考虑 $X$ 的拟紧开子集的任意族 $\{U_i\}_{i\in I}$ ，且该族具有有限交性质；也就是说， $\{U_i\}_{i\in I}$ 的任意有限子族的交集都非空。那么$\bigcap_{i\in I} U_i \neq \varnothing$。

证明。 回想一下， $X^{\vee}$ 的霍赫斯特对偶是一个谱空间，其底集与 $X$相同，并且其开子集是 $X$的 Thomason 子集。特别要注意，我们的拟紧开子集族 $\{U_i\}_{i\in I}$ 在 $X^{\vee}$ 中成为具有有限交性质的闭子集族。由紧致性关于满足有限交性质的闭子集族的众所周知的等价表述，结论即得。□

我们记录下幂等元$\mathbb{f}_{\mathcal{P}}$的以下相关描述，它是对 [Ste13，引理6。6] 和 [Ste11，引理2.3。6]的重新表述。该重新表述也见于 [BBB24，推论3。10]。回想一下， $\mathcal{QO}(\mathcal{T})$ 表示Spc($\mathcal{T}^{\omega}$)的拟紧开子集集合；参见公式(3.1)。

**引理5.3**。 设 $\mathcal{T}$ 是一个刚性紧生成 *tt*-范畴，且 $\mathcal{P} \in \mathrm{Spc}(\mathcal{T}^{\omega})$。那么自然映射

$$\operatorname*{colim}_{\mathcal{P}\in U\in \mathcal{QO}(\mathcal{T})} \mathbb{f}_{U^c} \to \mathbb{f}_{\mathcal{P}}$$

是一个等价关系。

必要的预备知识已经具备，现在我们可以证明前面陈述的定理。

方程（5.1）的证明。设 $\{U_i\}_{i\in I}$ 是由拟紧开子集构成的三角谱 Spc($\mathcal{T}^{\omega}$) 的有限覆盖。由方程（4.10），可得存在$i \in I$，使得 $x \simeq \mathbf{f}_{U_i^c} \otimes x$。现在回想一下，Spc($\mathcal{T}$($U_i$))$\cong U_i$。因此，将 $x$替换为$\iota^*_{U_i^c} x$，并将 $\mathcal{T}$ 替换为 $\mathcal{T}$($U_i$)后，我们可以重复同样的论证；也就是说，可以用 $\{U_{i,j}\}_{j\in I_i}$ 这一组 $U_i$的拟紧开子集覆盖$U_i$ ，并应用方程（4.10）得到 $j \in I_i$ ，使得

$$\mathbb{f}_{U^c_{i,j}} \otimes \iota^*_{U_i^c} x \simeq \iota^*_{U_i^c} x.$$

重复相同的过程，我们得到一个嵌套的集合 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{I}}$，其中包含 $\mathsf{Spc}(\mathcal{T}^\omega)$ 的非空拟紧开集。由等式（5.2），存在 $\mathcal{P}\in\bigcap_{\alpha\in\mathcal{I}}U_\alpha$。我们断言 $x\simeq\mathbb{f}_{\mathcal{P}}\otimes x$。事实上，注意到

$$\mathbb{f}_{\mathcal{P}}\simeq\operatorname*{colim}_{\mathcal{P}\in U\in\mathcal{QO}(\mathcal{T})}\mathbb{f}_{U^c}\simeq\operatorname*{colim}_{\alpha\in\mathcal{I}}\mathbb{f}_{U_\alpha^c}$$

其中第一个等价关系是 等式（5.3），第二个则由以下事实得出：集合 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{I}}$ 在由 $\{U\in\mathcal{QO}(\mathcal{T})\ \mathcal{P}\in U\}$得到的图表中是终对象。因此

$$\mathbb{f}_{\mathrm{gen}(\mathcal{P})}\otimes x\simeq\mathrm{colim}_{\alpha\in\mathcal{I}}(\mathbb{f}_{U_\alpha^c})\otimes x\simeq\mathrm{colim}_{\alpha\in\mathcal{I}}(\mathbb{f}_{U_\alpha^c}\otimes x).$$

剩下要证明典范映射

$$\mathrm{colim}_{\alpha\in\mathcal{I}}(\mathbb{f}_{U_\alpha^c}\otimes x)\to x$$

是一个等价关系。这由 $U_\alpha$ 的构造得出，它表明图表 $\alpha\mapsto(\mathbf{f}^{U_\alpha^c})\otimes x$ 是常值图表，其值为 $x$。因此，余极限必定等价于 $x$。□

现在我们给出前一个结果的一系列直接推论。但首先，让我们回顾一些术语并约定一些记号。

回顾 5.4. 回忆 $\mathsf{pinj}(\mathcal{T})$ 表示 $\mathcal{T}$中不可分解纯内射对象的同构类集合。$\mathcal{T}$ 的齐格勒谱是底集为 $\mathsf{pinj}(\mathcal{T})$、闭子集形如 $\mathcal{D}\cap\mathsf{pinj}(\mathcal{T})$ 的拓扑空间，其中 $\mathcal{D}$ 是 $\mathcal{T}$ 的可定义子范畴。该空间记为 $\mathsf{Zg}(\mathcal{T})$。进一步细节参见 [Kra00] 。

定义 5.5. 令 $\mathsf{gpinj}(\mathcal{T})$ 表示 $\mathcal{T}$ 中不可分解 g-纯内射对象的同构类集合。$\mathsf{Zg}(\mathcal{T})$ 的几何子空间 $\mathsf{GZg}(\mathcal{T})$ 按定义是带有子空间拓扑的 $\mathsf{gpinj}(\mathcal{T})$。

**引理 5.6.** 设 $\mathcal{S}$ 为 $\mathcal{T}$ 的粉碎理想。则函子 $\iota_{\mathcal{S},*}\colon\mathcal{T}/\mathcal{S}\to\mathcal{T}$诱导一个闭嵌入

$$\mathsf{Zg}(\mathcal{T}/\mathcal{S})\to\mathsf{Zg}(\mathcal{T})$$

齐格勒谱之间。

证明。 这可由等式 (3.20)直接得出。 □

**推论 5.7**。 设 $\mathcal{T}$ 为一个刚性紧生成 *tt*-范畴。则下列性质成立。

(a) *g*-纯内射对象类与纯对象类重合，当且仅当诱导映射

$$\coprod\mathsf{Zg}(\iota_{\mathcal{P},*})\colon\coprod_{\mathcal{P}\in\mathrm{Spc}(\mathcal{T}^\omega)}\mathsf{Zg}(\mathcal{T}_{\mathcal{P}})\to\mathsf{Zg}(\mathcal{T})$$

是满射。

(b) 该映射

$$\coprod\mathsf{Zg}(\iota_{\mathcal{P},*})\colon\coprod_{\mathcal{P}\in\mathrm{Spc}(\mathcal{T}^\omega)}\mathsf{Zg}(\mathcal{T}_{\mathcal{P}})\to\mathsf{GZg}(\mathcal{T})$$

是一个商。

（c）设 $\{U_i\}_{i\in I}$ 是由拟紧开子集构成的$\mathrm{Spc}(\mathcal{T}^\omega)$ 的有限覆盖。那么诱导映射

$$\coprod \mathrm{GZg}(\iota_{U_i^c,*})\colon \coprod_{i\in I}\mathrm{GZg}(U_i)\to \mathrm{GZg}(\mathcal{T})$$

是一个商。

这里的余积取自拓扑空间范畴。

证明。 注意，$\mathrm{Zg}(\iota_{\mathcal{P},*})$ 的像实际上落在几何子空间 $\mathrm{GZg}(\mathcal{T})$ 中，这由等式 (3.18)可知。因此，部分（$a$）由方程（5.1）得证。
对于部分（$b$），同样由 方程（5.1）可知，该映射是满射。其余部分由以下事实可得：根据方程（5.6），每个分量都是闭映射。
对于部分（$c$），注意到映射 $\mathrm{GZg}(\iota_{U_i^c,*})$ 由 方程（4.9）定义良好，并且由 方程（5.6）可知是闭映射。因此，只需证明 $\coprod\mathrm{GZg}(\iota_{U_i,*})$ 是满射。我们有如下图表。

$$\begin{tikzcd}
\coprod_{i\in I}\coprod_{\mathcal{P}\in U_i}\mathrm{Zg}(\mathcal{T}_{\mathcal{P}}) \arrow[r] \arrow[rr, bend left, "\coprod\coprod \mathrm{Zg}(\iota_{\mathcal{P},*})"] & \coprod_{i\in I}\mathrm{GZg}(U_i) \arrow[r] & \mathrm{GZg}(\mathcal{T}).
\end{tikzcd}$$

注意，顶部箭头是满射，因为它至少包含来自部分（$a$）的映射。因此该结果成立。□

作为直接推论，我们得到如下结果。

**推论 5.8.** 设 $\{U_i\}_{i\in I}$ 是$\mathrm{Spc}(\mathcal{T}^\omega)$的一个由拟紧开子集构成的有限覆盖。假设每个 $\mathrm{GZg}(\mathcal{T}(U_i))$ 都是齐格勒谱$\mathrm{Zg}(\mathcal{T}(U_i))$的闭子集。则$\mathrm{GZg}(\mathcal{T})$ 是$\mathrm{Zg}(\mathcal{T})$的闭子集。

证明. 由方程 (5.7)($c$)，我们推出

$$\mathrm{GZg}(\mathcal{T})=\bigcup_{i\in I}\mathrm{Im}(\mathrm{GZg}(\iota_{U_i,*})).$$

由于每个映射 $\mathrm{Zg}(\iota_{U_i,*}):\mathrm{Zg}(\mathcal{T}(U_i))\to\mathrm{Zg}(\mathcal{T})$ 都是闭映射，我们得到该结果。 □

特别地，前述结果适用于qcqs概形：

**推论 5.9**。 设 $X$ 是一个拟紧拟分离概形。那么集合$\mathrm{GZg}(\mathbf{D}^{qc}(X))$ 是$\mathrm{Zg}(\mathbf{D}^{qc}(X))$的一个闭子集。

证明。 考虑一个仿射开覆盖 $\{U_i\}_{i\in I}$ of $X$。由 方程（3.26），我们有

$$\mathrm{gpinj}(\mathbf{D}_{\mathrm{qc}}(U_i))=\mathrm{pinj}(\mathbf{D}_{\mathrm{qc}}(U_i)).$$

因此结论由方程（5.8）得出。 □

## 6. Geometric purity in the derived category of the projective line

在本节中，我们证明：在刚性紧生成的 tt-范畴中，几何纯性可以不同于纯性。为此，我们比较拟紧拟分离概形 $X$ 的导出范畴$\mathbf{D}_{\mathrm{qc}}(X)$中的几何纯性，与 Prest 和 Slavík 所定义的拟凝聚层范畴 $\mathrm{QCoh}(X)$中的几何纯性概念。本节所涵盖的主要情形是当$X = \mathbf{P}^1 := \mathbf{P}^1_k$时，其中 $k$ 表示任意域。

为方便起见，我们回顾相关的概念与术语，它们来自 [PS21]。

定义 6.1. 设 $X$ 是一个拟紧拟分离概形，其结构层为 $\mathcal{O}_X$。一个 $\mathcal{O}_X$–模的短正合列

$$0 \to F \to G \to H \to 0$$

若对任意 $\mathcal{O}_X$–模 $L$ 张量后仍为正合列，则称其为几何纯 （或简称*g*-纯）。等价地，若正合列

$$0 \to F_x \to G_x \to H_x \to 0$$

对所有 $x \in X$ 都是 $\mathcal{O}_{X,\,x}$–模的纯正合列。有了这一概念，我们现在可以定义*g*-纯单态射、*g*-满态射和*g*-幻映射，以及*g*-纯内射对象，其方式类似于局部有限表示范畴中的相应概念。

令 $\mathrm{QCoh}(X)$ 表示 $X$ 上拟凝聚层的范畴。回顾一下，$\mathrm{QCoh}(X)$ 是 $\mathcal{O}_X$-模的一个全子范畴。范畴 $\mathrm{QCoh}(X)$ 中的几何纯性概念是通过 $\mathcal{O}_X$-模中的几何纯性定义的：

定义 6.2. 若拟凝聚层 $F$ 使 $\mathrm{Hom}^{\mathrm{QCoh}(X)}(-, F)$ 保持拟凝聚层的 g-纯正合列，则称其为 *g*-纯内射 。

从现在起，我们聚焦于任意域上的射影直线 $\mathbf{P}^1$ ，以说明几何纯性与$\mathbf{D}(\mathbf{P}^1) := \mathbf{D}(\mathrm{QCoh}(\mathbf{P}^1))$中的纯性不同。

例 6.3。 设 $a$， $b$， $c$， $d \in \mathbb{Z}$ 使得 $a < b < d$， $a < c < d$ 且 $a + d = b + c$。由[PS21，例 5。1], 我们知道存在一个拟凝聚层的短正合列

$$0 \to \mathcal{O}(a) \to \mathcal{O}(b) \oplus \mathcal{O}(c) \to \mathcal{O}(d) \to 0 \tag{6.4}$$

该正合列不是分裂的。此外，由于 $\mathcal{O}(d)$ 是有限表示的，该正合列不可能是纯正合的。尽管如此，该正合列是 g-纯正合的，因为取任意茎后都会得到一个自由模的短正合列。

现在，将短正合列 公式 (6.4) 视为$\mathbf{D}(\mathbb{P}^1)$中的一个正合三角。我们断言这个三角并非纯正合。假设它是一个纯正合三角。由 [GP05，引理 2。4] 我们知道

$$0 \to H^n(\mathcal{O}(a)) \to H^n(\mathcal{O}(b) \oplus \mathcal{O}(c)) \to H^n(\mathcal{O}(d)) \to 0$$

对于所有 $n \in \mathbf{Z}$，这都是一个纯正合列。但我们已经注意到，对于 $n = 0$ ，这个列并非纯正合。这就证明了这一断言。另一方面，在点 $x \in \mathbf{P}^1$, 处进行局部化后，这个正合三角给出了由短正合列所诱导的正合三角

$$0 \to \mathcal{O}(a)_x \to \mathcal{O}(b)_x \oplus \mathcal{O}(c)_x \to \mathcal{O}(d)_x \to 0$$

自由 $\mathcal{O}_{X,x}$模。由此我们推得，公式 (6.4)在$\mathbf{D}(\mathbb{P}^1$中诱导出一个 g-纯正合三角，但它并非纯正合。

我们还可以更进一步：$\mathbf{D}(\mathbf{P}^1)$ 中所有不可分解 g-纯内射对象都可以明确描述。首先，回顾一下 $\mathbf{QCoh}(\mathbf{P}^1)$ 中纯内射对象的描述。

回顾 6.5. 对于 $\mathbf{P}^1$, 中的一个闭点 $x$ ，令

$$\iota_{x,*}\colon \mathrm{Mod}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1,x}) \to \mathrm{QCoh}(\mathbb{P}^1)$$

表示沿概形包含映射 $\mathbf{Spec}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1,x}) \to \mathbf{P}^1$ 的推前。令$\mathfrak{m}_x$ 表示 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1,x}$ 的极大理想，并令 $k(x)$ 表示剩余域 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1,x}/\mathfrak{m}_x$。那么定义这些层

$$\mathcal{E}(x) \coloneqq \iota_{x,*}(E(x)), \quad \text{and} \quad \mathcal{A}(x) \coloneqq \iota_{x,*}(A(x))$$

其中， $E(x)$ 表示剩余域 $k(x)$ 的内射包，而 $A(x)$ 表示 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1,x}$ 的$\mathfrak{m}_x$-进完备化。最后，回顾一下，有理函数层$k(\eta)$ 是 $\mathbf{P}^1$ 的泛点 $\eta$ 的剩余域。

*QCoh*($\mathbb{P}^1$) 中的不可分解纯内射层在 [KS19，命题 4.4 中1]：回顾 6.6. 以下列表对此作了描述

(a) 不可分解相干层。(b) 对于 $x \in \mathbf{P}^1$ 闭合的情形，Pr¨ufer 层 $\mathcal{E}(x)$。(c) 对于 $x \in \mathbf{P}^1$ 闭合的情形，adic 层 $\mathcal{A}(x)$。(d) 有理函数层 $k(\eta)$。

回顾 6.7。 设 $A$是一个遗传环。根据 [GP05，定理 8。1], $\mathbf{DD}(A)$ 中不可分解纯内射对象的同构类集合，与可数个 $A$-模的不可分解纯内射右 的同构类集合副本的不交并一一对应

$$\mathrm{pinj}(\mathbf{D}(A)) = \coprod_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{pinj}(\text{Mod-}A),$$

其中，对应关系由以下方式给出： $x_n[n] \leftarrow\!\shortmid\ x_n$，对于 $n$个 $\mathbf{pinj}(\text{Mod-}A)$ 副本中的 $x_n$ 。

注 6.8。 回顾一下，存在一个导出等价

$$\mathbf{D}(R) \simeq \mathbf{D}(\mathbb{P}^1)$$

其中 $R$ 是 Kronecker 箭图（$\cdot \rightrightarrows \cdot$）的路径代数。由于 $R$ 是遗传的，我们可以如上所述描述 $\mathbf{D}(\mathbf{P}^1)$ 中的所有纯内射对象。

注 6.9。 注意，层 $\mathcal{O}(n)$ 是 $\mathbf{QCoh}(\mathbb{P}^1)$ 中的纯内射对象，对任意 $n \in \mathbb{Z}$ 都如此，但不能通过公式 (6.4)中的正合列成为 g-纯内射。

**命题 6.10**。 复形 $\mathcal{O}(n)[n]$ 在$\mathbf{D}(\mathbb{P}^1)$中是纯内射的，但不是 *g*-纯内射的。

证明。 由公式 (6.4)给出的 g-纯正合三角不是分裂的，因此$\mathcal{O}(n)$ 不可能是 g-纯内射的。□

回顾 6.11。 根据 [PS21，定理5。5], 我们知道，$\mathbf{QCoh}(\mathbb{P}^1)$ 中任意不可分解纯内射层都属于以下互不相交的列表。

(a) 线丛，即 $\mathcal{O}(n)$，其中 $n \in \mathbb{Z}$。(b) g-纯内射层：它们对应于不可分解挠层、Pr¨ufer 层、adic 层以及有理函数层。

记号 6.12. 我们用 $\mathrm{pinj}(\mathbf{P}^1)$ 和 $\mathrm{gpinj}(\mathbf{P}^1)$ 分别表示 $\mathrm{pinj}(\mathrm{QCoh}(\mathbf{P}^1))$ 和 $\mathrm{gpinj}(\mathrm{QCoh}(\mathbf{P}^1))$。

**命题 6.13.** 设 $z$ 是 $\mathbf{D}(\mathbb{P}^1)$ 中的一个复形。那么，$z$ 是 *g*-纯内射的，当且仅当它具有 $\coprod_{n\in\mathbb{Z}} x_n[n]$ 的形式，其中 $x_n$ 是 $\mathbb{P}^1$ 上的 *g*-纯内射拟凝聚层。特别地，我们有一个集合双射

$$\mathrm{gpinj}(\mathbf{D}(\mathbb{P}^1)) = \coprod_{\mathbb{Z}} \mathrm{gpinj}(\mathbb{P}^1), \quad x_n[n] \leftarrow\!\shortmid x_n.$$

证明。首先，根据 [GP05 定理 8.1]，我们已经知道 $\mathbf{D}(\mathbf{P}^1)$ 中任意纯内射对象 $z$ 都具有 $\coprod_{n\in\mathbb{Z}} x_n[n]$ 的形式，其中每个 $x_n$ 都是 $\mathbf{P}^1$ 上的纯内射拟凝聚层。显然，g-纯内射复形的任意移位仍是 g-纯内射的。此外，正如 [GP04 引理 3.9], 中所述，形如 $\coprod_{n\in\mathbb{Z}} x_n[n]$ 的余积同构于积 $\prod_{n\in\mathbb{Z}} x_n[n]$。由此可知，如果每个 $x_n[n]$ 都是 g-纯内射的，那么 $\coprod_{n\in\mathbb{Z}} x_n[n]$ 也如此。因此，我们可以假设 $z$ 是不可分解的，此时它必定具有 $x[n]$ 的形式，其中某个不可分解的纯内射拟凝聚层为 $x$。

注意，$x$ 根据等式 (6.10)不可能是线丛。因此，接下来只需验证 $z$ 在 $x$ 是 g-纯内射层时为 g-纯内射。但由[PS21], 可知，这类层恰好是某个$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1,x}$模的纯内射 $x \in \mathbb{P}^1$的推前。由此，结论可由等式 (3.18)推出。□

## 7. Local to global for spatiality of the frame of smashing ideals

本节利用方程（5.1）证明，在某些条件下，刚性紧生成 tt-范畴 $\mathcal{T}$ 的 smashing 局部化框架的空间性是 $\mathrm{Spc}(\mathcal{T}^\omega$上的一个局部性质。我们先固定一些术语。

记号 7.1。令 $\mathcal{T}$ 为刚性紧生成 tt-范畴。我们用 $\mathsf{S}^{\otimes}(\mathcal{T})$ 表示 $\mathcal{T}$ 的 smashing 理想框架。

术语 7.2。我们称刚性紧生成 tt-范畴 $\mathcal{T}$ 为空间的，若其 smashing 理想框架 $\mathsf{S}^{\otimes}(\mathcal{T})$ 具有空间性。

首先，空间性可以较为容易地传递到局部范畴。

**命题 7.3**。设 $\mathcal{T}$ 是一个刚性紧生成 *tt*-范畴。若 $\mathcal{T}$ 具有空间性，则对于 $\mathrm{Spc}(\mathcal{T}^\omega)$ 中的每个点 $\mathcal{P}$，其 *tt*-茎 $\mathcal{T}_{\mathcal{P}}$ 都具有空间性。

证明。固定 $\mathcal{P} \in \mathrm{Spc}(\mathcal{T}^\omega)$。注意到区间

$$[\mathcal{P}, \mathcal{T}] \coloneqq \{\mathcal{S} \in \mathbb{S}^{\otimes}(\mathcal{T}) \mid \mathcal{P} \subseteq \mathcal{S}\}$$

是一个框架。事实上，这是因为它是由核给出的商

$$\_ \vee \mathcal{P} \colon \mathbb{S}^{\otimes}(\mathcal{T}) \to [\mathcal{P}, \mathcal{T}].$$

此外，我们得到一个等价关系

$$[\mathcal{P}, \mathcal{T}] \simeq \mathbb{S}^{\otimes}(\mathcal{T}_{\mathcal{P}}), \quad \mathcal{S} \mapsto \mathcal{S}/\operatorname{loc}(\mathcal{P})$$

由取商给出。此外，核 $-\vee\mathcal{P}$ 在 $\mathbb{S}^{\otimes}(\mathcal{T})$ 上所有核的框架中是有补的。因此，其关联子场所是有补的，因为它是闭的。现在，假设 $\mathcal{T}$ 是空间的。于是，根据 [PP11，命题 3.3]，（该命题指出，空间场所的有补子场所是空间的），我们得出 $\mathcal{T}_{\mathcal{P}}$ 是空间的。□

我们将证明前一命题的一个部分逆命题。一些预备 y
结果是需要的。

回顾 7.4。回想，紧生成三角范畴 $\mathcal{T}$ 的可定义子范畴 $\mathcal{D}$ 是一个全子范畴 $\mathcal{D}$，使得存在一族凝聚函子 $\{F_i\colon \mathcal{T} \to \text{阿贝尔群范畴}\}_{i\in I}$，使得 $x$ 属于 $\mathcal{D}$ 当且仅当对所有$i \in I$都有 $F_i(x) = 0$；见等式 (2.26)。刚性紧生成 tt-范畴 $\mathcal{T}$ 中的可定义tt-理想 $\mathcal{D}$ 是一个可定义子范畴 $\mathcal{D}$，它同时也是一个厚张量理想，也就是说，它是 $\mathcal{T}$ 的一个三角子范畴，且满足 $\mathcal{T}\otimes\mathcal{D} \subseteq \mathcal{D}$。

注 7.5。由于可定义子范畴 $\mathcal{D}$ of $\mathcal{T}$ 在同伦滤过余极限下封闭，因此性质 $\mathcal{T}\otimes\mathcal{D} \subseteq \mathcal{D}$ 等价于 $\mathcal{T}^{\omega}\otimes\mathcal{D} \subseteq \mathcal{D}$。

记号 7.6。设 $\mathcal{T}$ 是一个刚性紧生成 tt-范畴。令 $(\mathbb{D}^{\otimes}(\mathcal{T}) \subseteq)$ 表示 $\mathcal{T}$ 中所有可定义张量理想构成的格，其序关系为包含关系。

以下结果对应于 [Wag23，命题 5.2。13]。

**命题 7.7。** 存在一个格同态

$$\mathbb{S}^{\otimes}(\mathcal{T}) \to \mathbb{D}^{\otimes}(\mathcal{T})^{\mathrm{op}}$$
$$\mathcal{S} \mapsto \mathcal{S}^{\perp}$$

其逆由 $\mathcal{D} \mapsto {}^{\perp}\mathcal{D}$ 给出。这里，${}^{\perp}\mathcal{C}$（分别为 $\mathcal{C}^{\perp}$）表示 $\mathcal{C}$ 的左（分别为右）正交补。

7.1。**几何 Ziegler 谱。** 回忆一下，gpinj($\mathcal{T}$) 表示 $\mathcal{T}$ 中不可分解 g-纯内射对象的同构类的集合。注意，这是一个集合，因为根据 公式 (3.17)，每个 g-纯内射对象都是纯内射对象，而纯内射对象的同构类集合已被证明构成一个集合；参见 [Kra00]。

定义 7.8。如果 $X$ of gpinj($\mathcal{T}$) 的子集是*tt*-齐格勒闭（或简称*tt*-闭），则称其为 tt-齐格勒闭集；也就是说，对于某个可定义 tt-理想 $\mathcal{D}$ of $\mathcal{T}$，有 $X = \mathcal{D} \cap$ gpinj($\mathcal{T}$)。

注 7.9。我们特别强调，这并不意味着 gpinj($\mathcal{T}$) 的这些 tt-闭子集必然定义了 gpinj($\mathcal{T}$) 上某个拓扑的闭子集。

约定 7.10。每当这些 tt-闭子集定义了 gpinj($\mathcal{T}$) 上的一个拓扑时，我们将所得空间记为

$$\mathrm{tt}\mathrm{Zg}(\mathcal{T})$$

并称其为 $\mathcal{T}$ 的几何 *tt-Ziegler* 谱。

注 7.11. 请注意，当 $\mathcal{T}$ 是局部的，且 tt-闭子集在 gpinj($\mathcal{T}$) 上定义了一种拓扑时，空间 ttZg($\mathcal{T}$) 与 Zg($\mathcal{T}$) 具有相同的底点集。不过，这两种拓扑通常不同。

注 7.12. 假设 tt-闭子集在 gpinj(𝒯) 上定义了一种拓扑。在这种情况下，映射

$$\begin{aligned}\mathbb{D}^{\otimes}(\mathcal{T}) &\to \mathrm{Closed}(\mathrm{ttZg}(\mathcal{T}))\\ \mathcal{D} &\mapsto \mathcal{D}\cap \mathrm{gpinj}(\mathcal{T})\end{aligned}$$

是一个保序双射。事实上，请注意，该映射是 [Kra00], 中基本对应所涉及映射的限制；该对应表明，任意可定义子范畴都完全由其中包含的纯内射对象决定。特别地，该映射是一个格同构。

术语 7.13。如果 tt-闭子集在 gpinj(𝒯) 上定义了一个拓扑，我们就简单地说，几何 tt-Ziegler 谱 ttZg(𝒯) 实现了可定义理想格 D$^{\otimes}$(𝒯)。

我们要强调的是，证明 tt-闭子集在几何 Ziegler 谱上确定一个拓扑的困难，在于证明两个 tt-闭子集的并仍然是 tt-闭的。事实上，tt-闭子集总是对交封闭的，正如我们将看到的那样。

**引理 7.14**。设 $\mathcal{T}$ 是一个刚性紧生成 *tt*-范畴。设 $(X_i)_{i\in I}$ 是 $\mathrm{gpinj}(\mathcal{T})$ 的 *tt*-闭子集族。那么 $\cap_{i\in I}X_i$ 是 *tt*-闭的。

证明。 首先注意，D$^{\otimes}$(𝒯) 中元素的交属于 D$^{\otimes}$(𝒯)，因为可定义子范畴（相应地，tt-理想）的交仍然是可定义的（相应地，仍为 tt-理想）。然后，由于 $X_i = \mathcal{D}_i \cap$ gpinj(𝒯)，对某个 $\mathcal{D}_i \in$ D$^{\otimes}$(𝒯)，我们得到

$$\bigcap_{i\in I} X_i = \mathrm{gpinj}(\mathcal{T}) \cap \bigcap_{i\in I} \mathcal{D}_i.$$

我们得出，tt-闭子集的集合对于交运算是封闭的。 □

**命题 7.15**。 设 $\mathcal{T}$ 是一个刚性紧生成的 *tt*-范畴。假设 $\mathcal{T}_{\mathcal{P}}$ 的几何 *tt-Ziegler* 谱实现了可定义张量理想的格$\mathbb{D}^{\otimes}(\mathcal{T}_{\mathcal{P}})$，对于每个 $\mathcal{P}\in \mathrm{Spc}(\mathcal{T}^{\omega})$ （见 方程 (7.13)）。那么 $\mathrm{gpinj}(\mathcal{T})$ 的 *tt*-闭子集定义了一个拓扑，也就是说，几何 *tt-Ziegler* 谱 $\mathrm{ttZg}(\mathcal{T})$ 实现了$\mathbb{D}^{\otimes}(\mathcal{T})$。

证明。 我们需要验证，gpinj(𝒯) 的 tt-闭子集类对于任意交和有限并是封闭的。前者正是 方程（7.14）的内容。

另一方面，令 $X_i = \mathcal{D}_i \cap$ gpinj(𝒯)，其中 $\mathcal{D}_i \in$ D$^{\otimes}$(𝒯)，对 $i = 1,\ 2$。考虑

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \vee \mathcal{D}_2,$$

其中 $\vee$表示 $\mathbb{D}^{\otimes}(\mathcal{T})$ 中的并。为了证明我们的断言，只需验证 $X_1 \cup X_2 = \mathcal{D}\cap$gpinj(𝒯)。显然， $X_1 \cup X_2 \subseteq \mathcal{D}\cap$gpinj(𝒯)。令$x \in \mathcal{D}\cap$gpinj(𝒯)。根据 方程（7.7），我们有

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2, x) = 0, \quad \text{where} \quad \mathcal{S}_i = {}^{\perp}\mathcal{D}_i,\ i = 1, 2.$$

此外，根据 方程（5.1），存在一个素理想 $\mathcal{P}$ 属于 $\mathcal{T}^{\omega}$，以及一个纯内射对象 $y$ 属于 $\mathcal{T}_{\mathcal{P}}$，使得 $\iota_{\mathcal{P}}^{*}(y) \simeq x$。特别地，我们有

$$0 = \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2, x) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}_{\mathcal{P}}}(\iota_{\mathcal{P}}^{*}\mathcal{S}_1 \cap \iota_{\mathcal{P}}^{*}\mathcal{S}_2, y).$$

根据假设，$\mathbb{D}^{\otimes}(\mathcal{T}_{\mathcal{P}})$ 决定了 ttZg($\mathcal{T}_{\mathcal{P}}$) 的闭子集（参见 Equation (7.10)），因此我们推得

$$y \in \left((\iota_{\mathcal{P}}^{*}\mathcal{S}_1)^{\perp} \vee (\iota_{\mathcal{P}}^{*}\mathcal{S}_1)^{\perp}\right) \cap \mathrm{Zg}^{\otimes}(\mathcal{T}_{\mathcal{P}}).$$

因此

$$0 = \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}_{\mathcal{P}}}(\iota_{\mathcal{P}}^{*}\mathcal{S}_i, y) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(\mathcal{S}_i, x) \text{ for } i = 1 \text{ or } i = 2.$$

由此可得 $y$ 属于 $X_1 \cup X_2$，正如我们所希望的。 □

前一个命题给出了一种局部到整体约化，涉及刚性紧生成 tt-范畴的空间性。更具体地说：

**推论 7.16.** 设 $\mathcal{T}$ 是一个刚性紧生成 *tt-*范畴。若 $\mathcal{T}_{\mathcal{P}}$ 的几何 *tt-Ziegler* 谱对每个 $\mathcal{P} \in \mathrm{Spc}(\mathcal{T}^{\omega})$ 都实现 $\mathbb{D}^{\otimes}(\mathcal{T}_{\mathcal{P}})$，则 $\mathcal{T}$ 具有空间性。在此情形下，$\mathbb{S}^{\otimes}(\mathcal{T})$ 同胚于 $\mathrm{ttZg}(\mathcal{T})$ 的开子集框架。

证明。 这由 方程（7.7） 结合 方程（7.15） 得出。 □

与方程（7.15）中的情形类似，我们有一个关于开放覆盖的从局部到整体陈述。

**命题 7.17**。 设 $\mathcal{T}$ 为一个刚性紧生成 *tt-*范畴，且令 $\{U_i \mid i \in I\}$ 为 $\mathrm{Spc}(\mathcal{T}^{\omega})$ 的一个由拟紧开集构成的有限覆盖。假设几何 *tt-Ziegler* $\mathrm{ttZg}(\mathcal{T}(U_i))$ 对每个 $i \in I$实现了 $\mathbb{D}^{\otimes}(\mathcal{T}(U))$ 。那么 $\mathbb{D}^{\otimes}(\mathcal{T})$ 确定了 $\mathrm{gpinj}(\mathcal{T})$ 上某个拓扑的闭子集。

证明。 这与以下证明的模式类似：方程（7.15） 使用 方程(5.7)($c$) 而非方程(5.1)。 □

**推论 7.18**。 在与 等式 (7.17)相同的假设下，我们得到$\mathcal{T}$ 是空间的。特别地，$\mathbb{S}^{\otimes}(\mathcal{T})$ 同构于 $\mathrm{ttZg}(\mathcal{T})$ 的开子集框架。

## 8. Examples: spatial tt-categories via the geometric Ziegler spectrum

本节给出若干例子，其中刚性紧生成 tt-范畴的几何 tt-Ziegler 谱实现了 smashing 理想框架。

回顾 8.1. 设 $A$是一个遗传环或 von Neumann正则环。Garkusha 和 Prest [GP05，定理 8.1 和定理 8.5] 给出了 $\mathbf{D}(A)$ 中纯单射不可分解复形的完整描述，即

$$\mathrm{pinj}(\mathbf{D}(A)) = \coprod_{n \in \mathbb{Z}} \mathrm{pinj}(\text{Mod-}A)_n \,,$$

其中 pinj(Mod-$A$)$_n$ 表示不可分解纯单射 $A$-模的同构类集合，下标用于区分该集合的第 $n$ 个副本。

注 8.2。 在 方程（8.1）的背景下，若进一步假设 $A$ 是交换的，根据 方程（3.26） 我们有

$$\mathrm{gpinj}(\mathbf{D}(A)) = \mathrm{pinj}(\mathbf{D}(A)).$$

我们从半单情形开始：

例 8.3。 设 $R$ 是一个半单交换环。那么， $R$ 的导出范畴等价于 (Mod-$R$)$^{\mathbb{Z}}$。由此可知，$\mathbf{D}(R)$中的不可分解纯内射对象完全由不可分解纯内射右$R$-模决定。

我们断言，在这些假设下，几何 tt-闭子集在 gpinj($\mathbf{D}(R)$) 上定义了一种拓扑。由于 $R$ 将 $\mathbf{D}(R)$ 生成为局部化子范畴，因此 $\mathbf{D}(R)$ 的任何厚子范畴都会自动对与紧对象的张量积封闭。此外，由于 $R$ 是半单的，$\mathbf{D}(R)$ 中的锥都是直和，因此厚子范畴就是对悬移、直和及收缩封闭的子范畴。由此可知，可定义的 $\otimes$-理想就是对悬移封闭的可定义子范畴。

现在，Wagstaffe 在 [Wag23，命题 6.1 中5] 证明了集合 $\mathcal{D} \cap \mathrm{pinj}(\mathcal{T})$ 在 pinj($\mathcal{T}$) 上定义了一种拓扑，其中 $\mathcal{T}$ 是一个刚性紧生成 tt-范畴，而 $\mathcal{D}$ 是一个对悬移封闭的可定义子范畴；另见 公式 (8.8)。这就证明了我们的断言。

现在我们分别讨论冯·诺伊曼正则环和 Dedekind 整环。

例 8.4. 设 $R$ 是交换冯·诺伊曼正则环。那么，对于每个素理想 $\mathfrak{p} \subset R$，局部化环 $R_{\mathfrak{p}}$ 都是域。在同胚 Spec($R$) $\cong$ Spc(D($R$)$^{\omega}$) 下，我们可以将 $\mathfrak{p}$ 与其在 Balmer 谱 Spc(D($R$)$^{c}$) 中的像 $\mathcal{P}$ 等同，于是有等价关系 D($R$)$_{\mathcal{P}}$ $\cong$D($R_{\mathfrak{p}}$)。由方程（8.3）和方程（7.15）可知，ttZg(D($R$)) 实现了 D($R$) 的可定义张量理想格，因此 D($R$) 的 smashing 理想框架同构于 ttZg(D($R$)) 的开集框架。注意，在此情形下，望远镜猜想已知成立 [BˇS17]。

例 8.5. 设 $R$ 是交换 Dedekind 整环。在此情形下，D($R$) 满足望远镜猜想。因此，由 [Tho97 定理 3.15] ，D($R$) 的可定义厚子范畴与 Spec($R$) 的 Thomason 子集之间存在一一对应。将此双射特化到局部环 $R_{\mathfrak{p}}$，对于每个$\mathfrak{p} \in$ Spec($R$)，我们得到 D($R_{\mathfrak{p}}$) 中只有两个非平凡的可定义厚子范畴，因为 Spec($R_{\mathfrak{p}}$) 是 Sierpi´nski 空间。但我们知道，至少有 D($R_{\mathfrak{p}}$) 和全子范畴 D($Q(R)$)，其中 $Q(R)$ 是 $R$的分式环。因此这就是完整列表。接下来

$$\mathbf{D}(R_{\mathfrak{p}}) \cap \mathrm{pinj}(\mathbf{D}(R_{\mathfrak{p}})) = \mathrm{pinj}(\mathbf{D}(R_{\mathfrak{p}})), \quad \text{and}$$
$$\mathbf{D}(Q(R)) \cap \mathrm{pinj}(\mathbf{D}(R_{\mathfrak{p}})) = \coprod_{n\in\mathbb{Z}} Q(R)[-n]$$

显然是一种拓扑，从而得到 ttZg($\mathbf{D}(R_{\mathfrak{p}})$)。此外，这些闭集（以及空集）与 Sierpi´nski 拓扑中的闭集之间存在格双射，因此它实现了可定义厚子范畴的框架。由方程（7.15）可得，ttZg($\mathbf{D}(R)$) 实现了$\mathbf{D}(R)$ 的 smashing 理想框架。

**命题 8.6**。 设 $k$ 是一个域，$\mathbb{P}^1$ 是 $k$上的射影直线。那么$\mathrm{gpinj}(\mathbb{P}^1)$ 的几何闭子集定义了一种拓扑。特别地，可定义 $\otimes$-理想的框架由几何 *tt-Ziegler* 谱$\mathrm{ttZg}(\mathbf{D}(\mathbb{P}^1))$实现。

证明。 首先注意，ttZg(**D**($k[x]$)) 由 公式 (8.5)定义良好。然后，将公式 (7.17) 应用于 $\mathbb{P}^1$ 的标准仿射覆盖，即可得到所需结果。 □

为了推广前面的例子，我们回顾以下结果。

回顾 8.7。 令 $R$ 为交换相干环。令 inj$^{\text{zig}}$($R$) 表示带有齐格勒拓扑的不可分解内射 $R$– 模的同构类集合。那么映射

$$\operatorname{Spec}(R)^{\vee} \to \operatorname{inj}_{\text{zig}}(R),\ \mathfrak{p} \mapsto E(R/\mathfrak{p})$$

是单射，其中 $E(-)$ 表示内射包，而 Spec($R$)$^{\vee}$ 表示 $R$的扎里斯基谱的霍赫斯特对偶；详见 [PW24，第 3 节。6] 以了解更详细的讨论。此外，根据 [Pre09，14.4。5], 此映射诱导开子集框架的同构。

回顾 8.8。 令 $\mathcal{T}$ 为刚性紧生成 tt-范畴。可定义范畴 $\mathcal{D}$ 若满足 对平移封闭 ，即 $\Sigma^n\mathcal{D} \subseteq \mathcal{D}$ 对任意整数 $n$均成立。在 [Wag23，命题 6.15], 中证明了， $\mathcal{T}$ 的平移封闭可定义子范畴$\mathcal{T}$在 pinj($^{\Sigma}$) 上诱导一种拓扑；所得拓扑空间记作 Zg$_{\mathcal{T}}$($\mathcal{T}$)。现在，令 Zg(/$\Sigma$) 为 Zg$^{\Sigma}$($\mathcal{T}$) 关于平移函子 $\Sigma$的显然作用所得的商。那么商映射诱导开集框架的同构

$$\operatorname{Op}(\operatorname{Zg}(\mathcal{T})/\Sigma) \simeq \operatorname{Op}(\operatorname{Zg}^{\Sigma}(\mathcal{T})).$$

回顾 8.9。 设 $R$ 是一个环。记 Zg($R$) 为$R$的齐格勒谱；例如参见 [GP05，第 6]节。函子 Mod($R$) →**D**($R$将一个模映射为集中在 0 次的复形，从而诱导出一个闭嵌入

$$\operatorname{Zg}(R) \to \operatorname{Zg}(\mathbf{D}(R))/\Sigma.$$

事实上，这由 [GP05，定理 73] 结合方程（8.8）即可得到。

**命题 8.10**。 设 $R$ 是一个满足望远镜猜想的交换相干环。那么ttZg(**D**($R$)) 实现了 *smashing* 子范畴的框架。

证明。 结合方程（8.7）和方程（8.9），我们得到一个闭嵌入

$$\operatorname{Spec}(R)^{\vee} \to \operatorname{inj}_{\text{zig}}(R) \to \operatorname{Zg}(R) \to \operatorname{Zg}(\mathbf{D}(R))/\Sigma.$$

根据我们关于 **D**($R$) 满足望远镜猜想的假设，我们得到 Cl(Spec($R$)$^{\vee}$ 同构于 $\mathbb{D}^{\otimes}$(**D**($R$))；参见方程（2.5）和方程（7.7）。因此，上述嵌入表明，直接像诱导出一个格映射

$$\mathbb{D}^{\otimes}(\mathbf{D}(R)) \to \mathbb{D}^{\Sigma}(\mathbf{D}(R)) \tag{8.11}$$

其中 $\mathbb{D}^{\Sigma}$(**D**(R)) 表示 **D**($R$) 中平移封闭可定义子范畴所构成的格，它与 Cl(Zg(**D**($R$)) /$\Sigma$ 同构；见 公式 (8.8)。我们声称这就能推出所需结果。注意，只需验证有限个 tt-齐格勒闭子集的并仍是 tt-齐格勒闭集即可。设 $X_i = \mathcal{D}_i \cap$gpinj(**D**($R$)), 其中 $\mathcal{D}_i \in \mathbb{D}^{\otimes}$(**D**($R$)), 对于 $i = 1$, 2。考虑

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \vee \mathcal{D}_2,$$

其中 $\vee$ 表示 $\mathbb{D}^{\otimes}$(**D**($R$)) 中的并。为了证明我们的断言，只需验证 $X_1 \cup X_2 = \mathcal{D} \cap$ gpinj(**D**($R$))。但利用公式（8.11）中的映射，我们推得并 $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \vee \mathcal{D}_2$ 与 $\mathbb{D}^{\Sigma}$ (**D**($R$)) 中的并相同。因此，由 [Wag23，命题 6.1，5] 我们推得 $X_1 \cup X_2 = \mathcal{D} \cap$ gpinj(**D**($R$)), 正如所需。□

## References

[Aok23] Ko Aoki, *The sheaves-spectrum adjunction*, arXiv 预印本 arXiv:2302.04069（2023 年）。[Bal05] Paul Balmer, *The spectrum of prime ideals in tensor triangulated categories*, 《纯粹与应用数学杂志》588（2005 年），149–168 页。[Bal10] Paul Balmer, *Tensor triangular geometry*, 《国际数学家大会论文集》第二卷，印度斯坦图书机构，新德里，2010 年，第 85–112 页。MR 2827786[Bal20a] , *A guide to tensor-triangular classification*, 《同伦论手册》，Chapman and Hall/CRC，2020 年，第 145–162 页。[Bal20b] , *Homological support of big objects in tensor-triangulated categories*, 《J. Éc. polytech. Math.》7（2020 年），1069–1088 页。MR 4136434[Bal20c] Paul Balmer, *Nilpotence theorems via homological residue fields*, 《突尼斯数学杂志》2（2020 年），第 2 期，359–378 页。[BBB24] Scott Balchin、David Barnes 和 Tobias Barthel, *Profinite equivariant spectra and their tensor-triangular geometry* 2401 01878 2024 , arXiv 预印本 arXiv: 。( )。[BDS16] Paul Balmer、Ivo Dell'Ambrogio 和 Beren Sanders, *Grothendieck–Neeman duality and the Wirthmüller isomorphism* **152** 2016 8, 1740 1776 , 《组合数学》( ), 第 – 期。[BF11] Paul Balmer 和 Giordano Favi, *Generalized tensor idempotents and the telescope conjecture* **102** 2011 6, 1161 1185 , 《伦敦数学会会刊》( ), 第 – 期。[BKS19] Paul Balmer 、 Henning Krause 和 Greg Stevenson, *Tensor-triangular fields: ruminations* **25** 2019 1 36 , 《Selecta Mathematica》( ), –。[BKS20] , *The frame of smashing tensor-ideals*, 《剑桥哲学学会数学会刊》，第 168 卷，剑桥大学出版社，2020 年，第 323–343 页。[BˇS17] Silvana Bazzoni 和 Jan ˇSt'ov´ıˇcek, , *Smashing localizations of rings of weak global dimension at most one* **305** 2017 351 401 , 《数学进展》( ), –。[BS21] Scott Balchin 和 Greg Stevenson, *Big categories, big spectra*, arXiv 预印本 arXiv:2109.11934（2021 年）。[BW23] Isaac Bird 和 Jordan Williamson, *Definable functors between triangulated categories with applications to tensor-triangular geometry and representation theory*, arXiv 预印本 arXiv:2310.02159（2023 年）。[GP04] Grigory Garkusha 和 Mike Prest, *Injective objects in triangulated categories*, 《代数及其应用杂志》 **3** 2004 4, 367 389 2114415 ( ), 第 – 期。MR GP, [ 05] *Triangulated categories and the Ziegler spectrum*, 《代数与表示论》8（2005 年），第 4 期，499–523 页。MR 2199207[Kra00] Henning Krause, *Smashing subcategories and the telescope conjecture—an algebraic approach* **139** 2000 1, 99 133 , 《数学发明》( ), 第 – 期。MR [ 19] 1728877 KS H. Krause 和 G. Stevenson, *The derived category of the projective line*, 《数学中的谱结构与拓扑方法》，EMS 会议报告系列，EMS 出版社，苏黎世， [2019] ©2019，第 275–297 页。MR 4248148[Nee92] Amnon Neeman, *The connection between the k-theory localization theorem of Thoma-son, Trobaugh and Yao and the smashing subcategories of Bousfield and Ravenel*, 《高等师范学校科学年鉴》25（1992 年），第 5 期，547–566 页（英文）。[PP11] Jorge Picado 和 Aleš Pultr, *Frames and locales: topology without points*, 施普林格科学与商业媒体，2011 年。[Pre09] Mike Prest, *Purity, spectra and localisation*, 数学百科全书及其应用，第 121 卷，剑桥大学出版社，剑桥，2009 年。MR 2530988[PS21] Mike Prest 和 Alexander Sl´avik, *Purity in categories of sheaves*, 《数学杂志》297（2021 年），第 1–2 期，429–451 页。MR 4204698[PW24] Mike Prest 和 Rose Wagstaffe, *Model theory in compactly generated stable(-tensor-)triangulated categories* **3** 2024 1, 147 197 4740104 , 《模型论》( )，第 – 期。MR[Sch17] Peter Scholze, *Condensed mathematics*, 预印本，见作者个人网页：https://www.math.uni-bonn.de/people/scholze/Condensed.pdf（2017 年）。[Ste11] Greg Stevenson, *Tensor actions and locally complete intersections*, 博士论文，网址：https://openresearch-repository.anu.edu.au/items/62fadb0f-b40b-406b-9ca5- 6c708982b2f2（2011 年）。[Ste13] , *Support theory via actions of tensor triangulated categories*, 《纯粹与应用数学杂志》681（2013 年），219–254 页。MR 3181496

*A tour of support theory for triangulated categories through tensor triangular* [Ste18]，*geometry* 2018, 63 101 ，在

代数与拓扑之间搭建桥梁，施普林格，第–页。[Tho97] R. W. Thomason,
*The classification of triangulated subcategories*, Compositio Math. **105** （1997），第1期，1–27。MR 1436741[Wag23] Rose Wagstaffe,
*Definability in monoidal additive and tensor triangulated categories*, 发表于某处（2023）。

Juan Omar Gómez, Fakultat für Mathematik, Universität Bielefeld, D-33501 Bielefeld, Germany
*Email address*: jgomez@math.uni-bielefeld.de
*URL*: https://sites.google.com/cimat.mx/juanomargomez/home

Mauricio Medina-Barcenas, Departamento de Matemáticas, Universidad Autónoma Metropolitana UAM Iztapalapa, CDMX, México
*Email address*: mmedina@xanum.uam.mx
*URL*: https://www.medinabarcenas.com/

Greg Stevenson, Aarhus University, Department of Mathematics, Ny Munkegade 118, bldg. 1530, 8000 Aarhus C, Denmark
*Email address*: greg@math.au.dk
*URL*: https://sites.google.com/view/gregstevenson

Bernardo Villarreal Departamento de Matematicas Centro de Investigación y de , , , , , Estudios Avanzados del Instituto Politecnico Nacional Av. IPN 2508 CDMX México
*Email address*: bvillarreal@math.cinvestav.mx
*URL*: https://sites.google.com/math.cinvestav.edu.mx/bvillarreal

Angel Zaldivar Department of Mathematics University of Guadalajara Blvd. Gral. , , , , , , , , Marcelino Gracía 1421 Olímpica 44430 Jalisco México.
*Email address*: luis.zaldivar@academicos.udg.mx*URL*: https://www.lazaldivar.com/