arXiv:2601.20799v1 [math.NA] 28 Jan 2026

Jacobi 哈密顿积分器：构造与应用

Adérito Araújo、Gonçalo Inocêncio Oliveira 和 João Nuno Mestre

科英布拉大学数学系 *CMUC*，葡萄牙。

摘要

我们提出了一个系统框架，用于构造 Jacobi 流形上哈密顿系统的几何积分器。通过将 Jacobi 结构的泊松化与齐次辛双实现相结合，Jacobi 动力学被提升为齐次泊松哈密顿系统，从而能够构造保持结构的 Jacobi 哈密顿积分器。我们明确构造了所得格式，并将其应用于多种示例，包括接触哈密顿系统和经典模型。数值实验凸显了这些格式相较于标准积分器在定性方面的优势，包括更好地保持几何结构以及改善长期行为。

1 引言

经典哈密顿系统是由常微分方程构成的系统，用于描述广泛的动力学行为；它们源自一种几何构造，该构造基于定义在赋有适当几何结构 [16, 19] 的流形上的光滑函数，称为哈密顿量。在经典哈密顿力学中，这个流形是赋有辛结构的相空间。辛几何使我们能够为哈密顿函数关联一个内蕴定义的哈密顿向量场，其积分曲线描述了从给定初始条件出发的时间演化。这些轨迹构成的集合定义了哈密顿流，它保持哈密顿量不变，对应于能量守恒。

除特殊情况外，哈密顿流无法解析求得。不过，可以利用其几何结构，通过几何积分器构造精确的数值近似。几何积分器是一类旨在保持精确流定性几何性质的数值方法 [17]。辛积分器就是一个典型例子，它能够保持辛结构，因此具有出色的长期行为 [25]。虽然这类方法不一定能精确保留原始哈密顿量，但通常会守恒一个邻近的修正哈密顿量，从而在较长时间区间内将能量误差控制在有界范围内。

g.inoc.oliveira@gmail.com

随着更一般的几何框架相继出现，哈密顿方法的适用范围大幅拓展。泊松几何 [11, 28] 通过允许退化推广了辛几何，并自然地出现在具有对称性或奇异性的保守系统中。接触几何为描述耗散系统和含时系统提供了自然框架，其应用领域涵盖从力学到热力学[4, 5, 15, 23]。雅可比几何 [6, 18, 20], 兼具泊松结构和接触结构的特点，为描述保守动力学与耗散动力学，以及具有对称性和奇异性的系统，提供了统一框架 [14, 21, 26, 29, 30]。在这些框架下，几何结构再次决定了哈密顿函数如何通过相应的哈密顿向量场诱导出一组微分方程。与辛几何的情形不同，雅可比几何和接触几何将哈密顿量沿轨迹的受控演化编码其中，反映出耗散或外部强迫。

然而，在泊松情形下，仅靠几何积分器保持泊松结构，并不能保证哈密顿量守恒。为解决这一局限， [9], 提出了泊松哈密顿积分器（PHI），生成离散轨迹，使其与某个经过适当选择、用于逼近原哈密顿量的时变哈密顿量的流完全一致。在这些思想的基础上，我们在 [1]提出了一类适用于 Jacobi 哈密顿系统的 Jacobi 哈密顿积分器（JHI）。这些方法既保持底层的雅可比结构，又生成作为修正时变 Jacobi 哈密顿系统精确解的离散轨迹。与保结构格式通常具有的性质一致，JHI 表现出良好的长期行为，并避免全局误差大幅累积。

本工作的主要贡献如下。首先，我们利用 Jacobi 流形与齐次泊松流形之间的几何关系，通过泊松化和齐次辛双实现 [2, 8, 12, 13]，建立了一个系统的框架，用于构造 JHI。其次，我们基于 Magnus 展开和精确齐次拉格朗日双截面，提出了一种显式递归算法，用于生成任意阶的 JHI。由此得到的流具有良定义的 Jacobi 映射，保持内在齐次性；后向误差分析证实，这些映射在预测阶数内与某个修正的 Jacobi 哈密顿系统的精确流一致，从而确保长期定性保真性。最后，我们通过针对低维说明性示例和经典模型的数值实验，展示了该方法的有效性，并着重说明了与标准数值格式相比，JHI 的精度和强几何一致性。

本文组织如下。第 2 节介绍 [1] 中提出的 Jacobi 哈密顿积分器的显式构造。该构造基于 Jacobi 流形的泊松化，以及应用于 Jacobi 哈密顿流的 Magnus 展开，并以齐次拉格朗日双截面的形式表述。此外，第 2 节还对所得格式进行了定性分析，确立了其保结构性质，包括任意阶精度、通过修正哈密顿量体现的后向误差行为，以及对齐次性和雅可比不变量的精确保持。第 3 节以算法形式总结了这一构造，并将所提出的积分器应用于若干具有说明性的示例，包括接触哈密顿系统、低维测试问题和经典模型。全文还讨论了数值实验以及与标准积分器的比较，突出了所提方法在定性和定量方面的优势。

2 Jacobi 哈密顿积分器的构造

雅可比几何同时推广了泊松几何和接触几何，为描述含时系统、耗散系统和热力学系统提供了自然框架 [4, 5, 14,21, 26, 29, 30]。标准的辛积分器或泊松积分器无法直接应用于这一更一般的情形，这促使人们为 Jacobi 系统构造专门的几何积分器。

2.1 方法的构造

Jacobi 哈密顿积分器（JHI）的构造始于引入泊松化流形的齐次辛双实现，为将哈密顿流表示为拉格朗日双截面提供几何框架。

Jacobi 流形上的哈密顿系统通过泊松化提升为相关主 $\mathbb{R}^\times$丛上的齐次泊松哈密顿系统。在该流形上，可以利用齐次泊松喷流构造辛双实现，从而得到局部齐次辛群胚 [2, 12, 13]。在此框架下，哈密顿动力学在概念上由光滑的齐次拉格朗日双截面族编码，并受齐次哈密顿-雅可比方程支配。双实现的映射 α 和 β 定义之后，将连接余切丛与流形，并确保辛结构和齐次性均得以保持。

在这一几何框架的基础上，通过迭代近似这些拉格朗日双截面的生成函数来构造数值积分器。对于依赖时间的哈密顿量，Magnus 展开提供了一种系统化的方法来生成这一近似的系数，并将流表示为哈密顿向量场的单个指数。这种表示自然地保留了哈密顿李代数结构，并将在下一节的后向误差分析中发挥关键作用；该分析将证明 Jacobi 动力学关键几何特征的保留。

2.1.1 Jacobi 哈密顿系统的泊松化

光滑流形 J 上的雅可比结构由双向量场 Λ 和向量场 E 给出，它们定义在 J 上，并满足 $[\Lambda,\Lambda]=2E\wedge\Lambda$ 和 $[E,\Lambda]=0$。我们称 (J,Λ,E) 为 Jacobi 流形。给定一个哈密顿量，即定义在 J 上的光滑函数 H，相应的雅可比哈密顿向量场确定一个哈密顿系统，其形式为

$$X_H=\Lambda(\cdot,dH)-HE(\cdot). \tag{1}$$

设 (J,Λ,E) 是一个坐标为 x 的 Jacobi 流形。泊松化过程 [20]将 J 与一个齐次泊松流形 (P,Π,h_z) 相关联，其中 Π 是一个 -1-齐次泊松结构

$$\Pi=\frac{1}{t}\Lambda+\frac{\partial}{\partial t}\wedge E, \tag{2}$$

并且 h_z 定义了 $z\in\mathbb{R}^\times$的齐次作用

$$h_z(x,t)=(x,zt),\qquad T^*h_z(x,t,\xi_x,\xi_t)=(x,zt,z\xi_x,\xi_t).$$

在这一对应关系下，J 上的哈密顿系统可提升为 P 上的齐次哈密顿系统，其哈密顿量 H是 1-齐次的，即 $h_z^*H=zH$。

2.1.2 齐次辛双实现

齐次辛双实现提供了一个几何框架，在该框架中，哈密顿流被表示为拉格朗日双截面。该双实现定义了映射

$$\alpha, \beta : \mathcal{U} \subset T^*P \to P$$

它将余切丛与流形连接起来，同时保持泊松结构和齐次性：

$$h_z \circ \alpha = \alpha \circ T^*h_z, \qquad h_z \circ \beta = \beta \circ T^*h_z.$$

2.1.3 方法的迭代构造

定义双实现后，迭代算法会生成一个离散流，用于近似泊松化流形上的哈密顿动力学。设 H 为齐次哈密顿量， S_i 表示迭代构造中的第 i 项。 k 阶算法递归执行如下：

1. Set $S_1(x) = \hat{H}(x)$;

2. 计算

$$S_{i+1}(x) = \frac{1}{(i+1)!} \left. \frac{d^i}{ds^i} \right|_{s=0} \hat{H}\left(\alpha\left(d_x S_s^{(i)}\right)\right), \qquad S_s^{(i)} = \sum_{j=1}^{i} s^j S_j;$$

3. 对于时间步长 Δs，求出满足以下条件的 y_n

$$\alpha\left(y_n, \sum_{i=1}^{k} \Delta s^i \nabla_x S_i(y_n)\right) = x_n;$$

4. 更新

$$x_{n+1} := \beta\left(y_n, \sum_{i=1}^{k} \Delta s^i \nabla_x S_i(y_n)\right).$$

这里，每个 S_i 是 S_s的泰勒展开的第 i个系数，它利用 α^{-1} 和 β在原始流形上诱导出一个哈密顿流。

JHI的显式构造遵循泊松哈密顿积分器[10]的构造；关键在于验证第2步保持齐次结构。

定理 2.1. 步骤*1*和*2*中定义的递归保持齐次结构；也就是说，所有生成的 S_i 都是*1*-齐次的。

证明。 我们对 k 进行归纳。对于 $k = 1$，我们有 $S_1(x,t) = H(x,t)$，这显然是 1-齐次的。现在假设 S_1，.....， S_k 都是 1-齐次的。考虑 $S_s^{(k)} = \sum_{j=1}^{k} s^j S_j$；由归纳假设， $S_s^{(k)}$ 也是 1-齐次的。

我们断言 $d(S_s^{(k)} \circ h_z) = T^* h_z \circ dS_s^{(k)}$。事实上，对于 x-分量，一个 h as

$$\frac{\partial S_s^{(k)}}{\partial x}(x, zt) = z \frac{\partial S_s^{(k)}}{\partial x}(x, t),$$

对于 t 分量，利用链式法则，

$$\frac{d}{dt} S_s^{(k)}(x, zt) = z \frac{\partial S_s^{(k)}}{\partial t}(x, zt).$$

另一方面，$\frac{d}{dt} S_s^{(k)}(x, zt) = \frac{d}{dt}\left(z S_s^{(k)}(x, t)\right) = z \frac{\partial S_s^{(k)}}{\partial t}(x, t)$。因此，

$$\frac{\partial S_s^{(k)}}{\partial t}(x, zt) = \frac{\partial S_s^{(k)}}{\partial t}(x, t).$$

最后，S_{k+1} 是 1-齐次的，因为 α 和 $dS_s^{(k)}$ 都是齐次的：

$$\begin{aligned}
h_z^* S_{k+1}(x, t) &= \frac{1}{(k+1)!} \frac{d^k}{ds^k}\Big|_{s=0} \hat{H}\Big(\alpha(d_x S_s^{(k)} \circ h_z)\Big) \\
&= \frac{1}{(k+1)!} \frac{d^k}{ds^k}\Big|_{s=0} \hat{H}\Big(\alpha(T^* h_z \circ d_x S_s^{(k)})\Big) \\
&= \frac{1}{(k+1)!} \frac{d^k}{ds^k}\Big|_{s=0} \hat{H}\Big(h_z \circ \alpha(d_x S_s^{(k)})\Big) \\
&= z \frac{1}{(k+1)!} \frac{d^k}{ds^k}\Big|_{s=0} \hat{H}\Big(\alpha(d_x S_s^{(k)})\Big) \\
&= z S_{k+1}(x, t),
\end{aligned}$$

由此完成证明。 □

这表明，在 [10] 中构造的同一算法可以直接应用于 Jacobi 哈密顿积分器框架，以构建该数值方法。

2.2 保结构性质

构造出 Jacobi 哈密顿积分器后，我们现在分析它的定性性质和保结构性质，包括高阶精度、后向误差行为和齐次性。Magnus 展开发挥着核心作用，它为将流表示为哈密顿向量场的单个指数以及构造更高阶积分器提供了系统的框架。

2.2.1 Magnus 展开

对于含时哈密顿量，通常可以将流映射表示为单个哈密顿向量场的指数。Magnus 展开 [3, 22, 24]提供了这样一种表示，通过嵌套泊松括号刻画动力学的几何结构。

设 (M,ω_{can}) 是一个带有坐标 $x=(q^i,p_i)$ 的正则辛流形，并将两个光滑函数 $f,g\in C^\infty(M)$ 的泊松括号定义为

$$\{f,g\}=\frac{\partial f}{\partial q^i}\frac{\partial g}{\partial p_i}-\frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q^i}.$$

与 f 相关联的哈密顿向量场对函数的作用为 $X_f g=\{f,g\}$。嵌套泊松括号记为

$$\mathrm{ad}_f^0 g=g,\quad \mathrm{ad}_f^n g=\{f,\mathrm{ad}_f^{n-1}g\},\quad n\geq 1,$$

以及相应的李级数

$$\mathrm{Ad}_f g=\exp(\mathrm{ad}_f)g=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\mathrm{ad}_f^n g.$$

对于时变哈密顿量 $H(x,t)$，其流 $\xi(t)$满足 $\dot{\xi}(t)=X_H(\xi(t),t)$，Magnus 展开寻求将流算子 $M(t)$表示为

$$M(t)=\mathrm{Ad}_{\Omega(t)}=\exp(\mathrm{ad}_{\Omega(t)}),$$

其中，$\Omega(t)$是由 H的嵌套泊松括号递归确定的时变哈密顿函数。在任意阶截断该级数，可将该流近似为哈密顿向量场的单个指数，从而确保每个截断的 Magnus 积分器都定义一个辛映射。这使得 Magnus 展开成为构造高阶几何积分器的自然工具。

注 2.2. 对于给定的步长 ϵ，算子 $\mathcal{M}_\epsilon(H)=\Omega(\epsilon)$ 称为 H 的Magnus 级数，并编码了由时变哈密顿量的非交换性引起的所有高阶修正。

定理 2.3 (Magnus [22])。 其解为

$$\dot{M}=MX_{H_0},\qquad M(0)=I,$$

可表示为

$$M(t)=\mathrm{Ad}_{\Omega(t)},$$

其中

$$\dot{\Omega}=\frac{\mathrm{ad}_\Omega}{\mathrm{Ad}_\Omega-1}H_0=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n}{n!}\mathrm{ad}_\Omega^n H_0,\qquad \Omega(0)=0,$$

且 B_n 为伯努利数。

Magnus 展开提供了一系列层次化的近似：每个后续项都会考虑时变哈密顿量的非交换性。截断至 k 阶可直接控制积分器的局部精度，并确保底层辛结构或雅可比结构得以保持。

2.2.2 后向误差分析

后向误差分析为研究几何积分器的长期行为提供了严谨的框架。它不直接估计全局误差，而是构造一个修正哈密顿系统，使其精确流与数值方法相一致。这种方法阐明了积分器 [17] 如何保持几何结构。

对于 Jacobi 哈密顿积分器，与齐次泊松哈密顿积分器（PHI）之间存在一一对应关系 [1],，这使得可以在齐次泊松框架下进行后向误差分析。这简化了修正哈密顿量的构造，同时保留了几何结构。

定义 2.4。流形上的数值积分器 P 是一个光滑的微分同胚族

$$\varphi = (\varphi_\epsilon)_{\epsilon\in I},$$

其中 $I \subset \mathbb{R}$ 是一个包含0的区间，使得映射 $\epsilon \mapsto \varphi_\epsilon(x)$ 对所有$x \in P$均光滑。

定义 2.5。如果积分器 φ 满足阶数 k，则称其相对于向量场$X \in \mathfrak{X}(P)$ 具有该阶数

$$\varphi_\epsilon(x) = \phi_X^\epsilon(x) + o(\epsilon^k),$$

其中 ϕ_X^ϵ 表示 X的精确流。

定义 2.6. 给定一个泊松（分别地，*Jacobi*）流形和一个哈密顿向量场X_H，若一个针对 X_H 的 φ_ϵ 阶积分器 k 是泊松（分别地，*Jacobi*）微分同胚，则称其为泊松（分别地，*Jacobi*）积分器。φ_ϵ

定义 2.7. 设 X_H 为一个泊松（分别地，*Jacobi*）哈密顿向量场。若一个 k阶积分器 φ_ϵ满足以下条件，则称其为针对 H 的泊松（分别地，*Jacobi*）哈密顿积分器：

1. φ_ϵ 是一个泊松（分别地，*Jacobi*）微分同胚；
2. 存在一个时变哈密顿量（H_s）$_s$，使得：
   (a) $H_s - H = o(\epsilon^k)$;
   (b) $\varphi_\epsilon = \phi_H^\epsilon + o(\epsilon^k)$.

注 2.8. 如果一个积分器是泊松哈密顿积分器，且同时保持齐次结构，我们也可以将其定义为齐次泊松哈密顿积分器。

ˆ 设(P, Π, h_z)为一个齐次泊松流形， H为泊松化哈密顿量。其哈密顿向量场 $X_{\hat{H}}$生成流 $\phi_{\hat{H}}^s$。给定一个齐次辛双实现(α, β)，以及积分 P的局部辛群胚的单位映射 σ（其源和靶分别为α 和 β），一个精确的齐次拉格朗日双截面族 L_s诱导出泊松微分同胚

$$\varphi_{L_s} = \beta \circ \alpha^{-1}_{|L_s}.$$

选择精确的拉格朗日双截面

$$L_s = \phi^s_{\alpha^*\hat{H}}(\sigma(P))$$

确保

$$\varphi_{L_s} = \phi^s_{\hat{H}}.$$

因此，对这些双截面进行近似会诱导出一个近似的哈密顿流。

[9] 的关键结果表明，如果变分函数的 Magnus 级数与 ϵH 一致，直到 k阶，那么由此诱导的微分同胚定义了一个 k阶的泊松哈密顿积分器。此外，相关的修正哈密顿量可以显式计算。

定理 2.9 （[9]）。 考虑一个齐次辛双实现（$\mathcal{U}$， α， β）的齐次泊松流形（P， Π， h_z）以及一个齐次哈密顿量 H。令（S_i）$_{i\in\mathbb{N}}$ 为第 *2.1.3* 节中定义的生成函数。则，与拉格朗日双截面 d（$S_s^{(k)}$）相关联的泊松自同构定义了一个 k 阶的齐次泊松哈密顿积分器ˆ ˆ，其对应于 H，并具有满足以下条件的齐次修正哈密顿量 H_s

$$\mathcal{M}_\epsilon(\hat{H}_s) = \epsilon\hat{H} + o(\epsilon^k).$$

这一结果表明，Jacobi 哈密顿积分器保留了经典几何积分器的基本特性：它们并非近似原系统的解，而是提供一个修正哈密顿系统的精确流（参见定理 2.9）。因此，该数值方法继承了哈密顿动力学的关键结构性质。

特别是，该积分器保持雅可比结构、泊松化哈密顿量的等值集（因此也保持雅可比哈密顿量的正确耗散，见下一小节），以及雅可比 Casimir 函数，且误差阶数不超过该方法的阶数：

定理 2.10 （结构保持）。 阶数为 k 的 *Jacobi* 哈密顿积分器可保持齐次泊松结构、泊松化哈密顿量的等值集以及 *Jacobi Casimir* 函数，误差阶数不超过 k。

ˆ证明。 由于修正哈密顿量与 H 在 k 阶之前一致，因此其哈密顿流以相同阶数保持所有相关的几何不变量。 □

2.2.3 雅可比哈密顿系统中的能量耗散

雅可比结构 (Λ, E) 的泊松化给出定义在带有坐标 $t \in \mathbb{R}^\times$ 的扩展流形上的齐次泊松结构 (2)。哈密顿量 H 对应的雅可比哈密顿向量场为 (1)，而诱导出雅可比动力学的 Π 的齐次哈密顿量为 $H = tH$。

ˆ H 的哈密顿向量场为

$$\begin{aligned} X_{\hat{H}} &= \Pi(\cdot, d\hat{H}) \\ &= \frac{1}{t}\Lambda(\cdot, d\hat{H}) + \frac{\partial}{\partial t} \wedge E(\cdot, d\hat{H}) \\ &= \Lambda(\cdot, dH) - HE(\cdot) + tE(H)\frac{\partial}{\partial t} \\ &= X_H + tE(H)\frac{\partial}{\partial t}. \end{aligned}$$

因此，(Λ, E)上的 Jacobi 哈密顿动力学恰好是与 H相关的齐次泊松哈密顿流的投影。

一般而言， H 不会沿 Jacobi 轨迹保持不变，因为 $X_H(H) = -HE(H)$。只有当 $E(H) = 0$时，才会守恒；这在泊松情形下自动成立。提升到齐次泊松系统，可以对此给出几何解释

$$X_{\hat{H}}(\hat{H}) = X_H(tH) + tE(H)\frac{\partial}{\partial t}(tH) = -tHE(H) + tHE(H) = 0.$$

这表明，沿 Jacobi 轨迹观察到的能量变化，对应于齐次泊松动力学中能量与尺度变量 t 之间的交换。换言之， H 表面上的耗散，是将守恒的哈密顿流投影到膨胀变量 t的固定切片上所产生的。从这一观点来看，Jacobi 动力学可以解释为模去膨胀后的守恒哈密顿运动，而 H 的演化则衡量了原系统与由 Reeb 向量场 E生成的尺度方向之间的能量重新分配。

ˆ 因此，由于 JHI 保持齐次哈密顿量 H，它们能够再现原始 Jacobi 哈密顿流的正确耗散行为。

2.2.4 拉格朗日双截面的齐次性

现在我们考察积分器迭代构造中出现的拉格朗日双截面的齐次结构。根据定理 2.1，将精确齐次拉格朗日双截面近似到 k 阶的拉格朗日双截面由以下嵌入给出

$$\tilde{L}_k : y \mapsto \Big(y, \sum_{i=1}^{k} \Delta s^i \nabla S_i(y)\Big),$$

并且是齐次的。更准确地说，根据定理的证明，生成函数满足

$$\frac{\partial S_s^{(k)}}{\partial x}(x, zt) = z\frac{\partial S_s^{(k)}}{\partial x}(x, t), \qquad \frac{\partial S_s^{(k)}}{\partial t}(x, zt) = \frac{\partial S_s^{(k)}}{\partial t}(x, t),$$

对所有 $z \in \mathbb{R}^\times$ 均成立。

用坐标 (x, t) 表示时，该嵌入写作

$$\tilde{L}_k(x, t) = \Big(x, t, \sum_{i=1}^{k} \Delta s^i \nabla_x S_i(x, t), \sum_{i=1}^{k} \Delta s^i \nabla_t S_i(x, t)\Big),$$

并满足齐次性条件

$$\begin{aligned}(\tilde{L}_k \circ h_z)(x, t) &= \Big(x, t, \sum_{i=1}^{k} \Delta s^i \nabla_x S_i(x, zt), \sum_{i=1}^{k} \Delta s^i \nabla_t S_i(x, zt)\Big) \\ &= \Big(x, zt, z\sum_{i=1}^{k} \Delta s^i \nabla_x S_i(x, t), \sum_{i=1}^{k} \Delta s^i \nabla_t S_i(x, t)\Big) \\ &= (T^* h_z \circ \tilde{L}_k)(x, t),\end{aligned}$$

~这表明 L_k 确实保持了齐次结构。
因此以由 k 阶通近精确微分同胚 ~

$$\varphi_{\tilde{L}_k} = \phi^s_{\hat{H}} + o(\Delta s^k).$$

这一结果证实，该积分器继承了底层哈密顿系统的齐次性，并且随着步长趋于零，流的误差以快于 $(\Delta s)^k$ 的速度消失。

3 数值示例

本节通过若干示例说明 Jacobi 哈密顿积分器的构造。该过程遵循图 1 总结的工作流程，下面将对此进行详细说明。

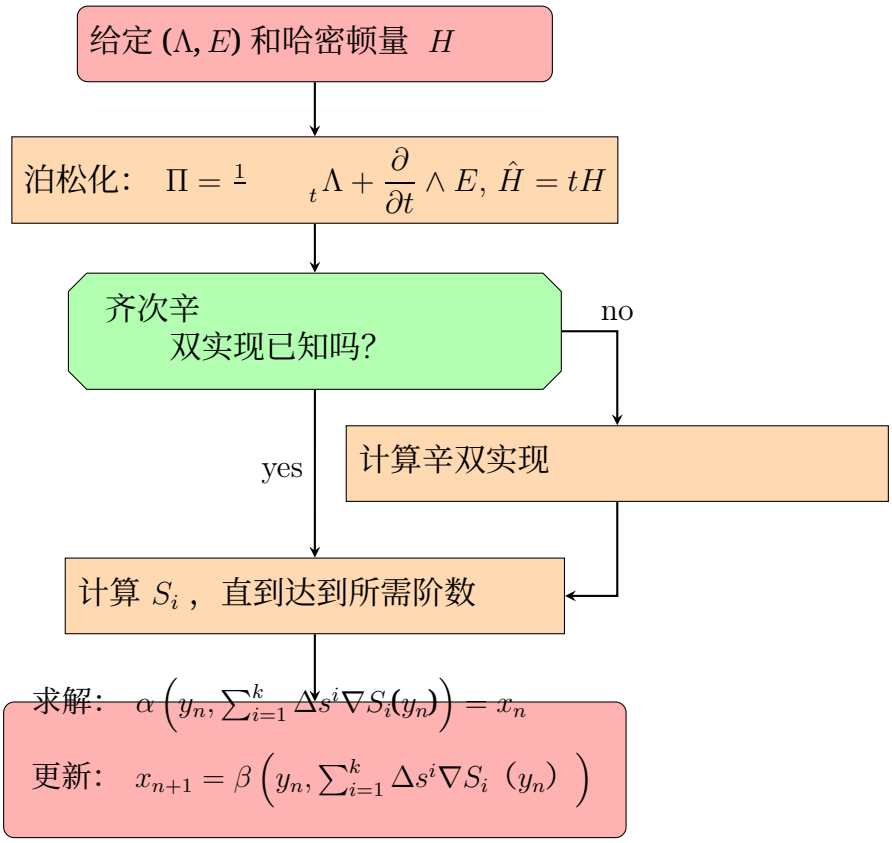


图 1：Jacobi 哈密顿积分器（JHI）构造流程图。

步骤 1：泊松化。给定一个 Jacobi 流形（Λ， E）和一个哈密顿量 H，我们首先通过定义将该系统转换为齐次泊松系统

$$\Pi = \frac{1}{t}\Lambda + \frac{\partial}{\partial t} \wedge E, \qquad \hat{H} = tH,$$

其中 t 是引入齐次性的辅助变量。这一步使我们能够使用为齐次泊松系统开发的方法。

步骤 2：辛双实现。接下来，我们检查是否已知泊松流形的齐次辛双实现 (α, β)。如果尚不可用，则必须先计算得出。该双实现对于将哈密顿流提升到辛空间至关重要，JHI 正是在该空间中构造的。

步骤 3：计算 S_i。 获得双实现后，我们按照第 2.1.3 节所述，递归计算函数 S_i，直至所需的阶数 k。这些函数对辛空间中的哈密顿流进行编码，并决定积分器的精度。

步骤 4：构造积分器。 最后，该方法的第 n 步包括求解

$$\alpha\Big(y_n, \sum_{i=1}^{k} \Delta s^i \nabla S_i(y_n)\Big) = x_n,$$

关于 y_n，然后更新

$$x_{n+1} = \beta\Big(y_n, \sum_{i=1}^{k} \Delta s^i \nabla S_i(y_n)\Big),$$

从而得到轨迹的下一个点。至此，JHI 完成一次迭代。

数值实验分为三组。第一个例子（第 3.1 节）旨在比较 JHI 与二阶龙格–库塔方法的定性表现。第 3.2、3.3 和 3.4 节中的例子是说明性案例，旨在展示所构造积分器的精度阶，包括仅能获得近似辛双实现的情形。最后，第 3.5、3.6 和 3.7 节中的例子对应于文献中广泛研究的经典模型，从而能够与现有数值方法进行直接比较。

第3.2节出现了一个有趣的特征：对于所选的哈密顿量，相应的JHI再现了系统的精确解。在这种情况下，积分器生成的离散流与连续哈密顿流重合，且不引入数值误差。

3.1 接触哈密顿系统

考虑一个具有坐标（q， p， z）的三维流形。典范接触结构 [27]定义为

$$\Lambda = \frac{\partial}{\partial p} \wedge \frac{\partial}{\partial q} + p\,\frac{\partial}{\partial p} \wedge \frac{\partial}{\partial z}, \qquad E = -\frac{\partial}{\partial z}. \tag{3}$$

对于哈密顿量 H，相应的哈密顿向量场为

$$X_H = -\frac{\partial H}{\partial p}\frac{\partial}{\partial q} + \left(\frac{\partial H}{\partial q} + p\frac{\partial H}{\partial z}\right)\frac{\partial}{\partial p} + \left(H - p\frac{\partial H}{\partial p}\right)\frac{\partial}{\partial z}.$$

相应的泊松（辛）结构为

$$\Pi = \frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial p} \wedge \frac{\partial}{\partial q} + \frac{p}{t}\frac{\partial}{\partial p} \wedge \frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial t} \wedge \frac{\partial}{\partial z}. \tag{4}$$

构造一阶 JHI。按照图 1 中的流程图，第一步是对 Jacobi 流形进行泊松化。这里，原始接触流形（Λ, E）和哈密顿量 H 被提升到齐次泊松流形（Π, H）上，其中

$$\Pi = \frac{1}{t}\Lambda + \frac{\partial}{\partial t} \wedge E, \qquad \hat{H} = tH.$$

接下来，流程图询问是否已知齐次辛双实现 (α, β)。在此例中，由于式 (4) 中存在 p-依赖，直接通过泊松喷流构造它较为困难。为了解决这一问题，我们引入辛同胚

$$F(q, p, z, t) = (Q, P, Z, T) = (q, pt, -z, t),$$

它将 Π 变换为典范辛结构

$$F_*\Pi = \frac{\partial}{\partial P} \wedge \frac{\partial}{\partial Q} + \frac{\partial}{\partial T} \wedge \frac{\partial}{\partial Z}.$$

利用已知的典范双实现 [10], ，我们通过 F 将其变换回原坐标。流程图如下所示：

$$\begin{array}{ccc} (M_1, \Pi) & \xrightarrow{F} & (M_2, \omega_{\text{can}}^{-1}) \\ \alpha \uparrow & & \uparrow \alpha_{\text{can}} \\ T^*M_1 & \xrightarrow{(F^{-1})^*} & T^*M_2 \end{array}$$

由此得到显式公式：

$$\alpha(x, \xi_x) = F^{-1} \circ \alpha_{\text{can}} \circ (F^{-1})^*(x, \xi_x) = \left(q - \frac{\xi_p}{2t},\ \frac{tp + \frac{\xi_q}{2}}{t - \frac{\xi_z}{2}},\ z + \frac{\xi_t}{2} - \frac{p\xi_p}{2t},\ t - \frac{\xi_z}{2} \right), \tag{5}$$

$$\beta(x, \xi_x) = \alpha(x, -\xi_x).$$

按照流程图接下来的步骤，在已知 (α, β) 后，我们计算第一个泰勒系数 $S_1(x) = H(x)$。于是，一阶雅可比哈密顿积分器为

1. 求解 y_n：

$$\alpha\big(y_n, \Delta s \nabla S_1(y_n)\big) = x_n,$$

2. 更新解：

$$x_{n+1} = \beta\big(y_n, \Delta s \nabla S_1(y_n)\big),$$

其中 Δs 是时间步长。

数值示例。 考虑哈密顿量 $H(q, p, z) = q + z$，初始条件为$x_0 = (0.1, -1.1, 0.09)$。在时间区间 $[0, 20]$, 内， p 和 z 坐标迅速增长。图 2 将一阶 JHI（同时使用精确双实现和近似双实现）与经典二阶龙格–库塔方法（$\Delta s = 0.1$）进行比较。尽管为一阶，JHI 相对于 RK-2 推迟了爆破，体现了几何结构保持的益处。

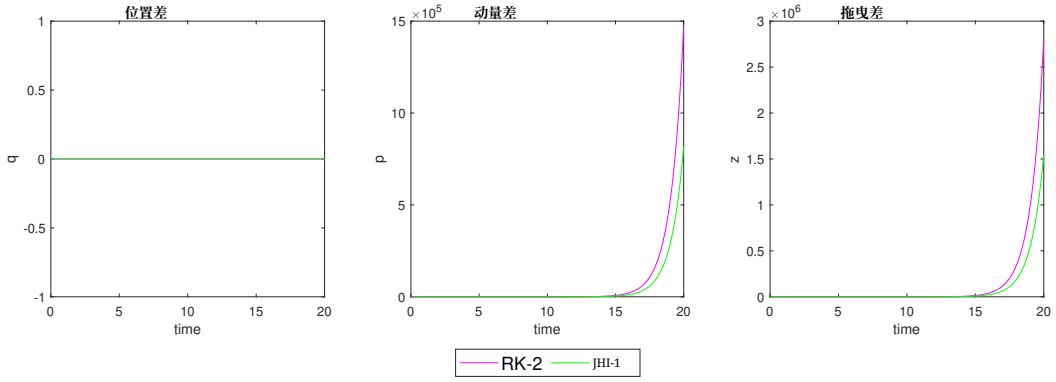


图 2：接触哈密顿量系统中 JHI 和 RK-2 与精确解的比较。

3.2 二维 Jacobi 哈密顿量问题

我们考虑 $\mathbb{R}^2$ 上的二维雅可比结构

$$\Lambda = (x^2+y^2)\frac{\partial}{\partial x}\wedge\frac{\partial}{\partial y}, \qquad E = 2x\frac{\partial}{\partial y} - 2y\frac{\partial}{\partial x}.$$

哈密顿量 $H(x,y)$对应的哈密顿向量场为

$$X_H = \left((x^2+y^2)\frac{\partial H}{\partial y} + 2yH\right)\frac{\partial}{\partial x} - \left((x^2+y^2)\frac{\partial H}{\partial x} + 2xH\right)\frac{\partial}{\partial y}.$$

注 3.1. 在二维空间中，任意双向量 Λ 都自动满足 $[\Lambda,\Lambda] = 0 = 2E\wedge\Lambda$，结合方程 $[E,\Lambda] = 0$，这意味着任意二维雅可比结构 (Λ, E)都等价于一个泊松结构 Λ 与一个泊松向量场 E。

JHI 的构造。 按照图 1 中的流程图，齐次泊松结构为

$$\Pi = \frac{x^2+y^2}{t}\frac{\partial}{\partial x}\wedge\frac{\partial}{\partial y} + 2x\frac{\partial}{\partial t}\wedge\frac{\partial}{\partial y} - 2y\frac{\partial}{\partial t}\wedge\frac{\partial}{\partial x}, \qquad \hat{H} = tH(x,y).$$

在此情形下，直接利用泊松喷流 [12] 构造辛双实现在技术上颇为复杂，这是由于系数的非线性和退化所致。作为替代，我们利用 Weinstein分裂定理 [28],给出的局部标准形，这种方法更加直观，在几何上也更为自然。

为此，我们引入极坐标

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta,$$

使得 $r^2 = x^2+y^2$。在这些坐标中，泊松结构的形式为

$$\Pi = \frac{r^2}{t}\,\partial_r\wedge\partial_\theta + 2r\,\partial_t\wedge\partial_\theta.$$

直接计算可得， $c = r^2/t$ 是 Π的一个卡西米尔函数。定义坐标变换

$$F(x, y, t) = (q, p, c) = \left(\theta, -\tfrac{t}{2}, \tfrac{r^2}{t}\right)$$

我们得到正则泊松结构

$$F_*\Pi = \Pi_{\text{can}} = \partial_q \wedge \partial_p,$$

其中 c 作为横向（卡西米尔）变量。

对于 Π_{can}，辛双实现为

$$\alpha_{\text{can}}(q, p, c, \xi_q, \xi_p, \xi_c) = \left(q - \frac{1}{2}\xi_p,\ p + \frac{1}{2}\xi_q,\ c\right), \quad \beta_{\text{can}}(q, p, c, \xi_q, \xi_p, \xi_c) = \left(q + \frac{1}{2}\xi_p,\ p - \frac{1}{2}\xi_q,\ c\right).$$

将其传输回来可得到双实现

$$\alpha(X, \xi) = (F^{-1} \circ \alpha_{\text{can}} \circ (F^{-1})^*)(X, \xi), \qquad \beta(X, \xi) = \alpha(X, -\xi),$$

它与原始泊松结构 Π相关联。

数值示例。 我们首先计算哈密顿量的轨迹

$$H(x, y) = x^2 + y^2$$

初始条件为 $x_0 =$ **(1, 1)**，时间步长为 $\Delta s = 0.03$，时间区间为 $[0, \pi]$。如图3所示，JHI轨迹与精确解重合，并且比二阶 Runge–Kutta（RK-2）方法表现出更好的定性行为。

事实上，这个哈密顿量导出了一个精确的 JHI格式。确实，由于

$$\hat{H}(\alpha(dS^{(1)})) = t(x^2 + y^2)$$

与参数 s无关，我们有

$$S_2 = \frac{1}{2}\,\frac{d}{ds}\bigg|_{s=0} \hat{H}(\alpha(dS^{(1)})) = 0,$$

并且递归地有 $S_k = 0$ 对所有 $k \geq 2$均成立。因此，JHI 再现了哈密顿向量场的精确流。

现在我们考虑一个非二次哈密顿量,

$$H(x, y) = \cos(x)\sin(y),$$

并在区间 $[0, \pi]$ 上以时间步长 $\Delta s = 0.1$ 和初始条件$x_0 =$ **(1, 1)**计算轨迹。图4显示，一阶 JHI 仍然比 RK-2 提供更准确的定性近似。

为了估算该哈密顿量的一阶 JHI 的数值阶，我们使用时间网格计算初始条件为 $x_0 =$ **(1,1)** 的解，网格上有 $[0, 1]$

$$n = 2^{k+1} + 1, \qquad k = 1, \ldots, 9.$$

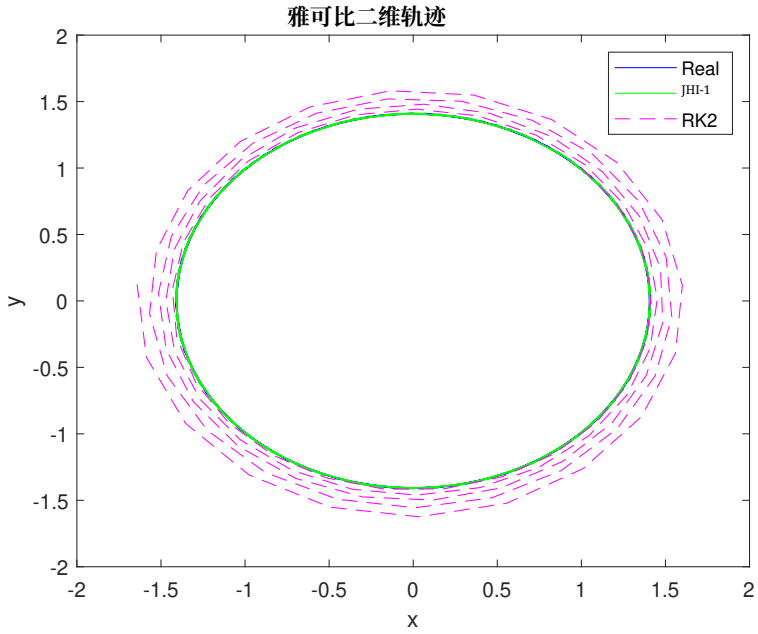


图3：哈密顿量 $H = x^2 + y^2$ 的精确轨迹与 JHI 和 RK-2方法所得轨迹的比较。

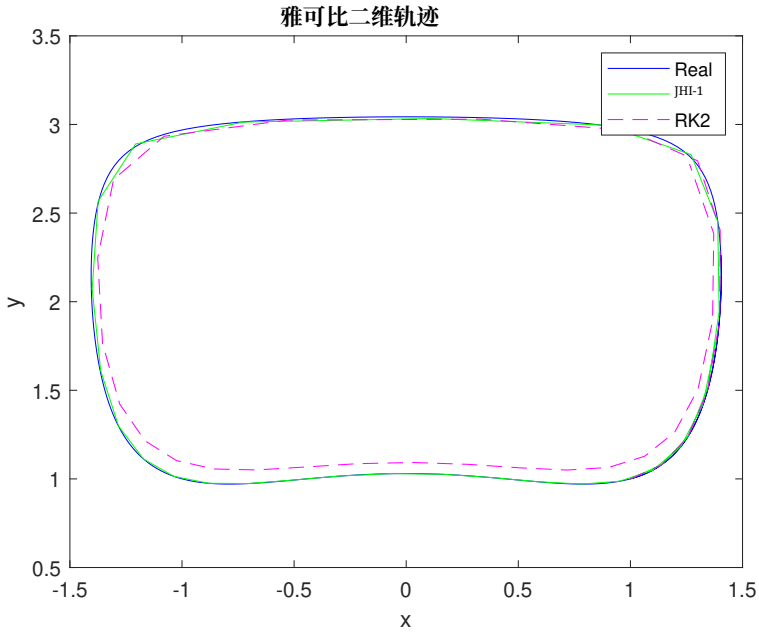


图4：哈密顿量 $H = \cos(x)\sin(y)$ 的精确轨迹与 JHI 和 RK-2方法所得轨迹的比较。

参考解使用高阶方法通过 $2^{11} + 1$ 个时间步得到。误差通过比较

$$x^{(k)}(i) - x^*\left(2^{10-k}(i-1)+1\right).$$

The 表1中的结果表明，数值收敛率接近二阶 .

Δs	$\|\cdot\|_2$ 误差	阶数
2^{-2}	1.61×10^{-2}	–
2^{-3}	4.80×10^{-3}	1.74
2^{-4}	1.30×10^{-3}	1.89
2^{-5}	3.30×10^{-4}	1.95
2^{-6}	8.50×10^{-5}	1.97
2^{-7}	2.10×10^{-5}	1.99
2^{-8}	5.40×10^{-6}	1.99
2^{-9}	1.30×10^{-6}	2.00

表1：二维雅可比哈密顿问题中一阶 JHI 的误差和数值阶。

在当前系统中，哈密顿量沿流的演化并非为 0,

$$E(H) = 2x\cos(x)\cos(y) + 2y\sin(x)\sin(y) \neq 0,$$

因此雅可比流不守恒哈密顿量。若不了解精确解，就无法直接比较沿轨迹的 H 与等高线值。

为解决这一问题，我们考虑提升的泊松哈密顿量

$$\hat{H}(x,t) = tH(x),$$

该量守恒。因此，可以通过以下方式衡量沿轨迹的偏差

$$\frac{\hat{H}(x_0,t_0) - \hat{H}(x,t)}{t}.$$

如图5所示，一阶雅可比哈密顿积分器（JHI）的误差阶为 10^{-5}，而二阶龙格–库塔方法（RK-2）的误差阶为 10^{-3}。

3.3 三维 Jacobi 哈密顿量问题

考虑以下线性雅可比结构

$$\Lambda = 2x_2\frac{\partial}{\partial x_1} \wedge \frac{\partial}{\partial x_2} + 2x_3\frac{\partial}{\partial x_1} \wedge \frac{\partial}{\partial x_3}, \qquad E = \frac{\partial}{\partial x_1},$$

以及哈密顿量 $H(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$。哈密顿向量场 X_H 为

$$\begin{aligned} X_H &= \Lambda(\cdot, dH) - HE(\cdot) \\ &= (2x_2\partial_{x_2}H + 2x_3\partial_{x_3}H - H)\frac{\partial}{\partial x_1} - 2x_2\partial_{x_1}H\frac{\partial}{\partial x_2} - 2x_3\partial_{x_1}H\frac{\partial}{\partial x_3}. \end{aligned}$$

与之关联的齐次泊松结构为

$$\Pi = \frac{2x_2}{t}\frac{\partial}{\partial x_1} \wedge \frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{2x_3}{t}\frac{\partial}{\partial x_1} \wedge \frac{\partial}{\partial x_3} + \frac{\partial}{\partial t} \wedge \frac{\partial}{\partial x_1}. \tag{6}$$

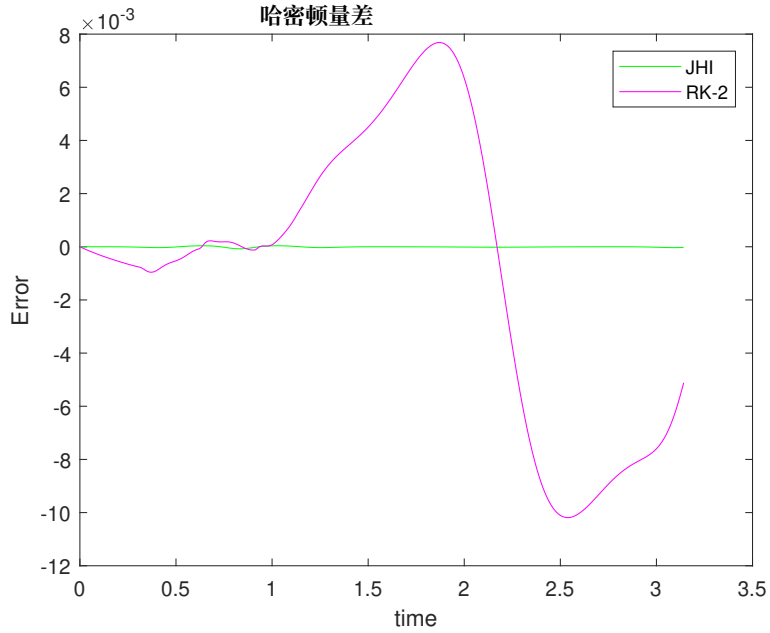


图5：使用 JHI 和 RK-2 计算的轨迹上的哈密顿量误差。

我们将使用与上一节相同的技术来计算辛双实现。由（6）可 легко 检查，$C_2 = t^2 x_2$ 和 $C_3 = t^2 x_3$ 是给定泊松结构的卡西米尔函数。考虑变换 $F(x_1, x_2, x_3, t) = (x_1, t^2 x_2, t^2 x_3, t) = (X_1, X_2, X_3, X_4)$。如果我们通过 F 计算 Π 的推前，就得到 $F_* \Pi = \dfrac{\partial}{\partial X_4} \wedge \dfrac{\partial}{\partial X_1}$，现在很容易计算出此情形下的辛双实现，即

$$\alpha_{\mathrm{can}}(X, \eta) = (X_1 + \frac{1}{2}\eta_4, X_2, X_3, X_4 - \frac{1}{2}\eta_1)$$

以及 $\beta_{\mathrm{can}}(X, \eta) = \alpha(X, -\eta)$。因此，原始流形上的辛双实现计算为 $\alpha = F^{-1} \circ \alpha_{\mathrm{can}} \circ (F^{-1})^*$，其为

$$\alpha(x, t, \xi_x, \xi_t) = \left(x_1 + \frac{1}{2}\xi_t - \frac{x_2\xi_2 + x_3\xi_3}{t}, \frac{t^2 x_2}{(t - \frac{1}{2}\xi_1)^2}, \frac{t^2 x_3}{(t - \frac{1}{2}\xi_1)^2}, t - \frac{1}{2}\xi_1 \right)$$

以及 $\beta(x, t, \xi_x, \xi_t) = \alpha(x, t, -\xi_x, -\xi_t)$。

计算高阶数值方法，得到 $S_2 = 0$ 并且

$$S_3(x) = t \frac{3x_3^4 - x_1^4 + 10x_1^2 x_2^2 + 10x_1^2 x_3^2 + 3x_2^4 + 6x_2^2 x_3^2}{4}.$$

一阶 JHI（JHI-1）定义为在展开中仅取 S_1，而三阶 JHI（JHI-3）则同时包含 S_1 和 S_3，从而得到精度更高的方法。

数值示例。 我们计算了 $H(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ 在初始条件为 $x_0 = [-1, 1, 1]$、时间步长为 $\Delta s = 0.1$、时间区间为 $[0, 2]$ 时的轨迹。图 6 展示了

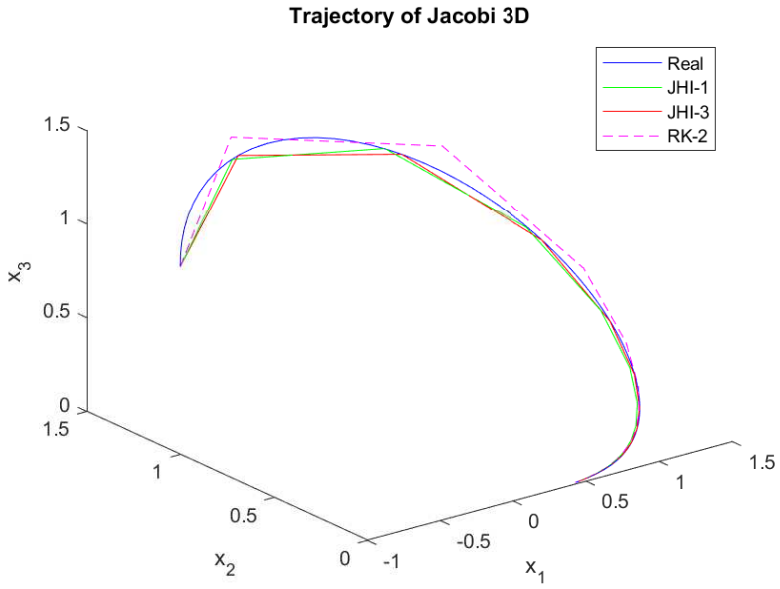


图6：三维问题中实际轨迹与JHI（一阶和三阶）及RK-2方法的比较。

一阶和三阶 JHI轨迹比 RK-2 更好地逼近精确流。

数值阶是在 $[0, 0.9]$ 上通过改变 Δs来估计的。表2表明，对于本例，一阶 JHI-1 的阶为2，三阶 JHI-3 的阶为4。

Δs	$\|\cdot\|_2$ JHI-1误差	JHI-1阶	$\|\cdot\|_2$ JHI-3误差	JHI-3阶
0.225	1.99×10^{-1}	–	6.58×10^{-2}	–
0.1125	6.25×10^{-2}	1.68	8.70×10^{-3}	2.91
0.0563	1.68×10^{-2}	1.89	6.50×10^{-4}	3.75
0.0281	4.30×10^{-3}	1.97	4.20×10^{-5}	3.93
0.0141	1.10×10^{-3}	1.99	2.70×10^{-6}	3.98
0.0070	2.70×10^{-4}	1.99	1.60×10^{-7}	3.99
0.0035	6.70×10^{-5}	2.00	1.00×10^{-8}	3.99
0.0018	1.60×10^{-5}	2.00	6.60×10^{-10}	4.00

表 2：三维雅可比哈密顿量问题中一阶和三阶 JHI 的误差和数值阶。

虽然 H 沿雅可比流（$X_H(H) = -2x_1 H$）不守恒，但提升后的哈密顿量 $H_p = tH$ 保持不变。如图 7 所示，在步长为 $\Delta s = 0.01$、仿真时间为 $[0, 10]$ 的仿真中，与 RK-2 相比，一阶和三阶 JHI 方法表现出更优的哈密顿量保持性。

图 8表明，一阶和三阶 JHI格式均能以机器精度保持卡西米尔函数 $C_2 = t^2 x_2$ 和 $C_3 = t^2 x_3$，误差量级为 10^{-14}。

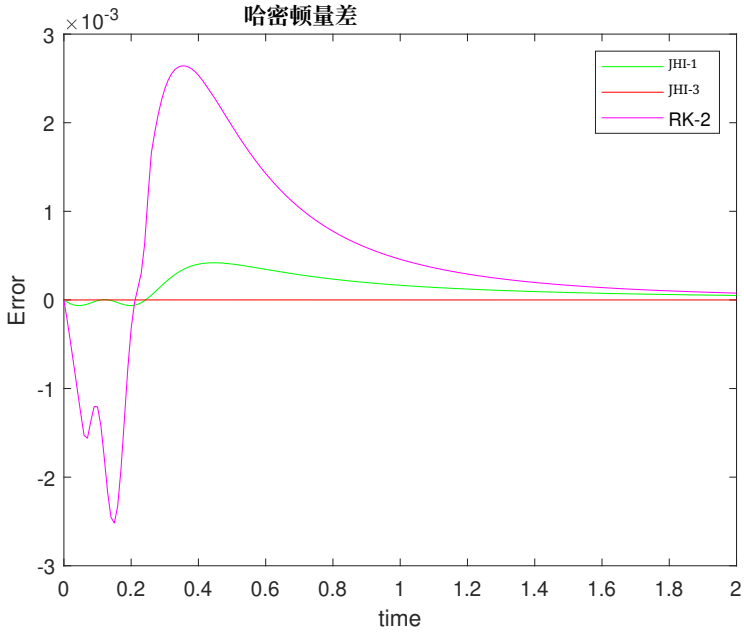


图7：沿三维轨迹的哈密顿量差：JHI（一阶和三阶）与RK-2的比较。

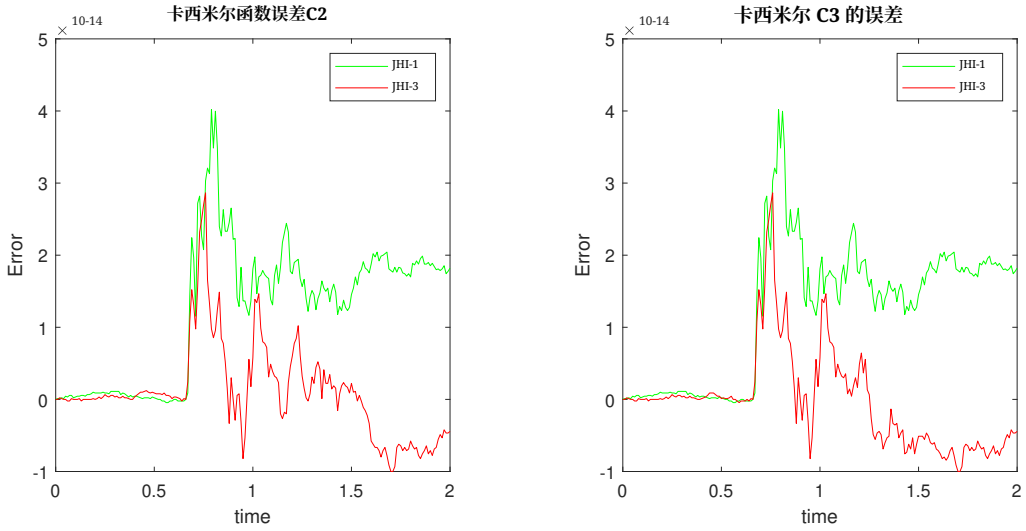


图 8：沿三维轨迹的卡西米尔保持：JHI（1 阶和 3 阶 ）.

3.4 四维雅可比哈密顿问题

我们考虑由下式定义的四维雅可比结构

$$\Lambda = \cos(x_2)\frac{\partial}{\partial x_1} \wedge \frac{\partial}{\partial y_1}, \qquad E = e^{y_2}\left(y_1\frac{\partial}{\partial x_1} + x_1\frac{\partial}{\partial y_1}\right),$$

其中 (x_1, y_1, x_2, y_2) 为 $\in \mathbb{R}^4$。给定哈密顿函数 $H(x, y)$，相应的哈密顿向量场为

$$X_H = \big(\cos(x_2)\partial_{y_1}H - e^{y_2}y_1H\big)\frac{\partial}{\partial x_1} - \big(\cos(x_2)\partial_{x_1}H + e^{y_2}x_1H\big)\frac{\partial}{\partial y_1}.$$

要构造 Jacobi 哈密顿积分器，我们首先将这一雅可比结构提升为齐次泊松结构：

$$\Pi = \frac{\cos(x_2)}{t}\frac{\partial}{\partial x_1}\wedge\frac{\partial}{\partial y_1} + e^{y_2}\frac{\partial}{\partial t}\wedge\left(y_1\frac{\partial}{\partial x_1} + x_1\frac{\partial}{\partial y_1}\right).$$

Π 的零空间很容易求得：

$$\mathcal{N}(\Pi) = \left\{ \begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-tx_1e^{y_2}/\cos(x_2)\\ty_1e^{y_2}/\cos(x_2)\\0\\0\\1\end{bmatrix} \right\}.$$

由此可知，卡西米尔函数 C 的梯度必须与这些向量共线。将第三个向量乘以 $\cos(x_2)/t$，再加上前两个向量的若干倍，可得

$$\nabla C = (-x_1e^{y_2}, y_1e^{y_2}, f, g, \cos(x_2)/t),$$

其中 f 和 g 可任意选取。一种自然的选择是

$$C(x,t) = \cos(x_2)\log t - \frac{e^{y_2}}{2}(x_1^2 - y_1^2), \qquad f = \partial_{x_2}C,\ g = \partial_{y_2}C.$$

由于难以为该系统求得正则变换，我们构造了一个近似的一阶齐次双实现（如 [7]所示）。这为一阶 Jacobi 哈密顿积分器（JHI-1）奠定了基础，其形式为

$$\begin{aligned}
\alpha^{x_1}(x,t,\xi_x,\xi_t) &= x_1 + \frac{1}{2}\Big(-\frac{\cos(x_2)}{t}\xi_{y_1} + y_1e^{y_2}\xi_t\Big),\\
\alpha^{y_1}(x,t,\xi_x,\xi_t) &= y_1 + \frac{1}{2}\Big(\frac{\cos(x_2)}{t}\xi_{x_1} + x_1e^{y_2}\xi_t\Big),\\
\alpha^{x_2}(x,t,\xi_x,\xi_t) &= x_2, \quad \alpha^{y_2} = y_2,\\
\alpha^{t}(x,t,\xi_x,\xi_t) &= t - \big(y_1e^{y_2}\xi_{x_1} + x_1e^{y_2}\xi_{y_1}\big),
\end{aligned}$$

其中 $\beta(x,t,\xi_x,\xi_t) = \alpha(x,t,-\xi_x,-\xi_t)$。这一构造自然地定义了数值方法：JHI-1 使用这一一阶双实现，而更高阶的 JHI 方法（例如 JHI-3）则通过计算递归公式 S_k 中的更多项得到，与三维情形相同。

数值示例。 我们取哈密顿量

$$H(x,y) = \cos(x_1) + \sin(y_1) + x_2 + y_2,$$

并计算精确流和数值流的轨迹。JHI轨迹在 $[0,4\pi]$ 上使用时间步长 $\Delta s = 0.001$ 和初始条件 $x_0 = [1,1,\pi/4,-0.2]$进行计算。图 9 显示，JHI轨迹与精确解高度吻合。

为估计一阶 JHI 的数值阶，我们考虑时间区间$[0,\pi]$，并采用相同的初始条件。表 3 显示，尽管双实现的精度仅为一阶，该方法仍以约二阶的数值阶收敛。

尽管 H 沿流（$E(H) = x_1e^{y_2}\cos(y_1) - y_1e^{y_2}\sin(x_1) \neq 0$）并不守恒，JHI轨迹仍显示出较小的哈密顿量和 Casimir 误差（对于带有 $\Delta s = 0.001$ 的 $[0,3\pi]$，阶数分别为 10^{-8} 和 10^{-6}），见图 10。

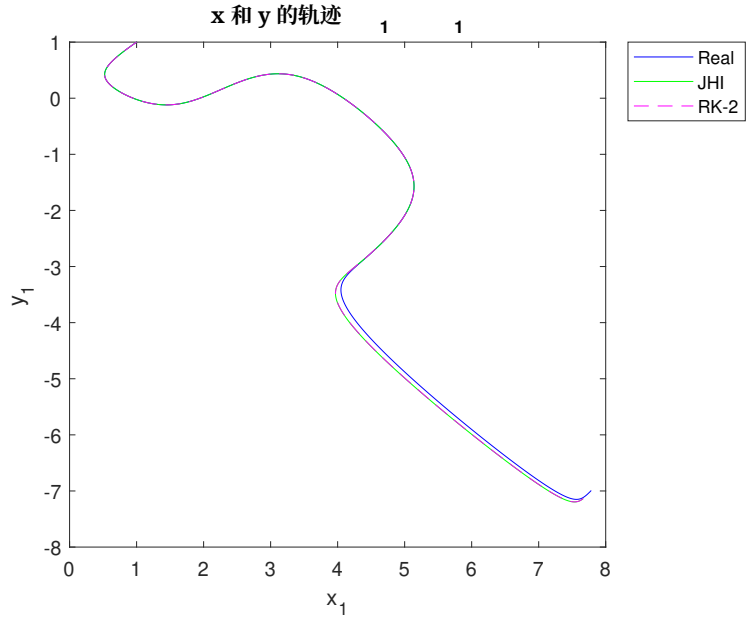


图 9：四维哈密顿问题中精确轨迹与 JHI 和 RK-2 方法的比较。

Δs	$\|\cdot\|_2$ 误差	阶数
0.1963	1.49×10^{-1}	–
0.0982	3.71×10^{-3}	2.00
0.0491	9.40×10^{-4}	1.98
0.0245	2.40×10^{-4}	1.99
0.0123	5.90×10^{-5}	1.99
0.0061	1.40×10^{-5}	2.00
0.0031	3.70×10^{-6}	2.00
0.0015	9.30×10^{-7}	2.00

表 3：误差 或与一阶 JHI 对四维雅可比哈密顿问题的数值阶。

3.5 阻尼谐振子

阻尼谐振子是接触哈密顿系统的经典示例。它使我们能够展示如何为具有非保守动力学的系统构造 JHI，此时哈密顿量并不守恒。

考虑式（3）中的接触结构和哈密顿量

$$H(q,p,z) = \frac{p^2}{2} + \frac{q^2}{2} + \gamma z, \qquad \gamma \in \mathbb{R},$$

它描述了一个阻尼参数振子。齐次哈密顿量为

$$\hat{H}(q,p,z,t) = tH(q,p,z),$$

使用（4）中的齐次辛结构以及（5）中的辛双实现。

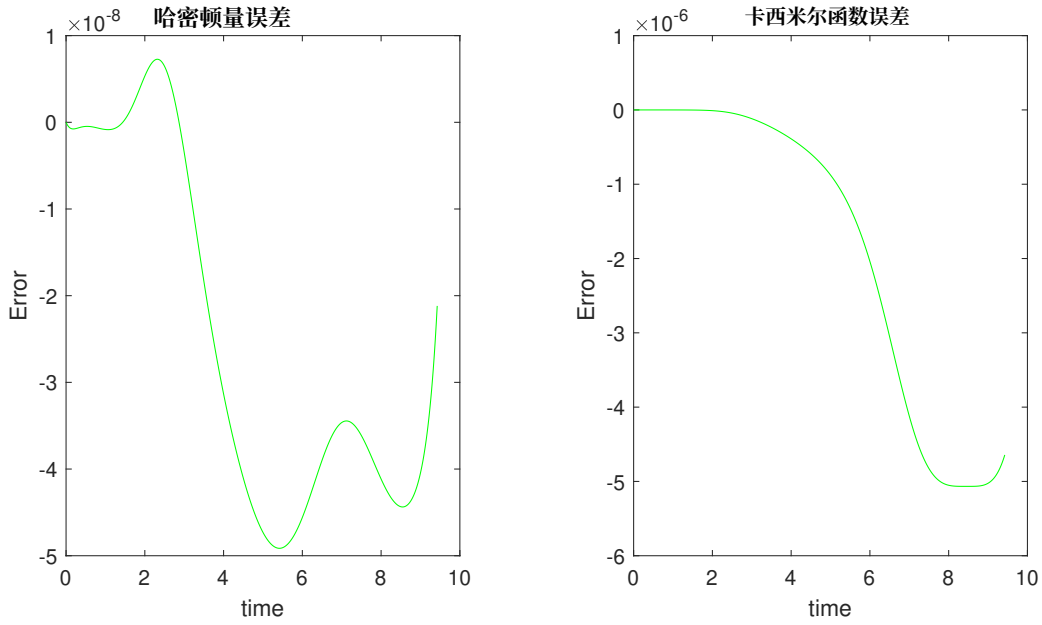


图 10：沿用 JHI 计算得到的数值轨迹上，哈密顿量与卡西米尔函数的差值。

按照第 2.1.3 节中的步骤，我们得到

$$\hat{H}(\alpha(dS^{(1)})) = t\left(1-\frac{s\gamma}{2}\right)\left(\frac{1}{2}(q-0.5sp)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{p+0.5sq}{1-0.5s\gamma}\right)^2+\gamma(z+0.25sq^2+0.5s\gamma z-0.25sp^2)\right)$$

对于高阶方法，$S_2=0$ 和

$$S_3=\frac{1}{3!}\left[\frac{q^2t}{4}(1-\gamma^2)-\frac{\gamma^3tz}{2}+p^2t\left(\frac{\gamma^2}{2}+\frac{1}{4}\right)+\gamma qpt\right].$$

相应的 JHI格式为:

1. 求 y_n 使得

$$\alpha(y_n,\Delta s\nabla\hat{H}(y_n)+\Delta s^3\nabla S_3(y_n))=x_n$$

2. 计算

$$x_{n+1}=\beta(y_n,\Delta s\nabla\hat{H}(y_n)+\Delta s^3\nabla S_3(y_n)).$$

数值示例。使用时间区间 $[0,10]$, 、步长 $\Delta s=0.5$、初始条件 x_0 =(1,0,0) 和 $\gamma=0.01$, 图 11 显示 JHI-1 优于半隐式辛欧拉方法，而 JHI-3 几乎与精确解重合。

数值阶见表 4。正如预期，JHI-1 和 JHI-3 分别表现出接近 2 阶和 4 阶的收敛。

由于 $E(H)=-\gamma$，哈密顿量并未保持不变。图 12 显示，JHI-1 的偏差以 $\mathcal{O}(10^{-4})$ 的幅度围绕零振荡，而 JHI-3 的偏差以 $\mathcal{O}(10^{-5})$ 的幅度围绕零振荡。

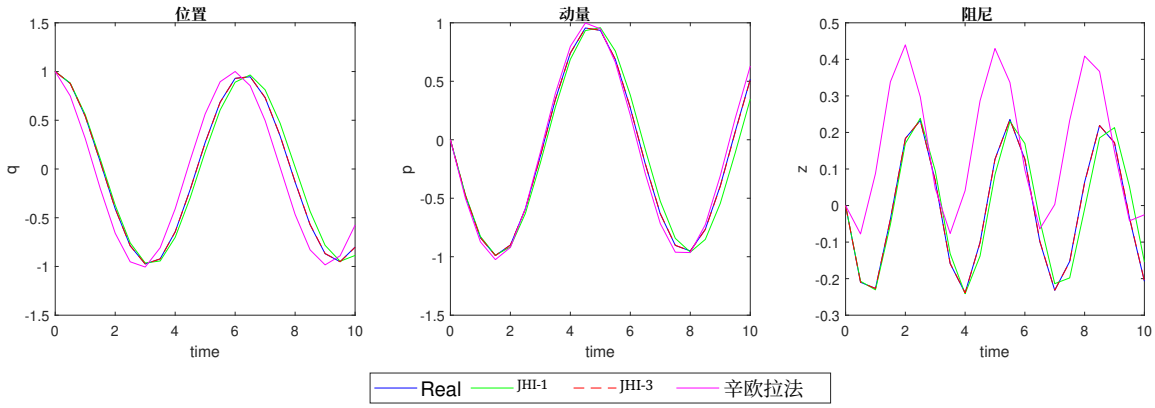


图 11：采用 JHI（一阶和三阶）及辛欧拉法得到的阻尼参数振子轨迹。

Δs	$\|\cdot\|_2$ JHI-1误差	JHI-1阶	$\|\cdot\|_2$ JHI-3误差	JHI-3阶
2^{-1}	3.45×10^{-2}	–	9.30×10^{-4}	–
2^{-2}	9.90×10^{-3}	1.80	6.60×10^{-5}	3.81
2^{-3}	2.60×10^{-3}	1.92	4.40×10^{-6}	3.92
2^{-4}	6.60×10^{-4}	1.97	2.80×10^{-7}	3.97
2^{-5}	1.60×10^{-4}	1.98	1.80×10^{-8}	3.98
2^{-6}	4.20×10^{-5}	1.99	1.10×10^{-9}	3.99
2^{-7}	1.00×10^{-5}	2.00	7.00×10^{-11}	4.00

表 4：阻尼接触哈密顿问题中一阶和三阶 JHI 的误差及数值阶。

3.6 洛特卡-沃尔泰拉系统

洛特卡-沃尔泰拉系统是一个经典的泊松哈密顿系统示例，用于描述 n 物种之间的相互作用。在其标准形式中，该系统是孤立的，这意味着$E = 0$。这里，我们通过将泊松结构推广为雅可比结构来考虑一个封闭系统。

首先，考虑二维二次双向量场

$$\Lambda = -axy\frac{\partial}{\partial x} \wedge \frac{\partial}{\partial y}.$$

我们寻求一个向量场 $E = e_1\frac{\partial}{\partial x} + e_2\frac{\partial}{\partial y}$，使得雅可比条件

$$[\Lambda, \Lambda] = 2E \wedge \Lambda, \qquad [E, \Lambda] = 0$$

得到满足。

第一个 由于对于任意 e_1 和 e_2，$[\Lambda, \Lambda] = 0 = 2E \wedge \Lambda$ 均成立，因此该条件显然得到满足；在

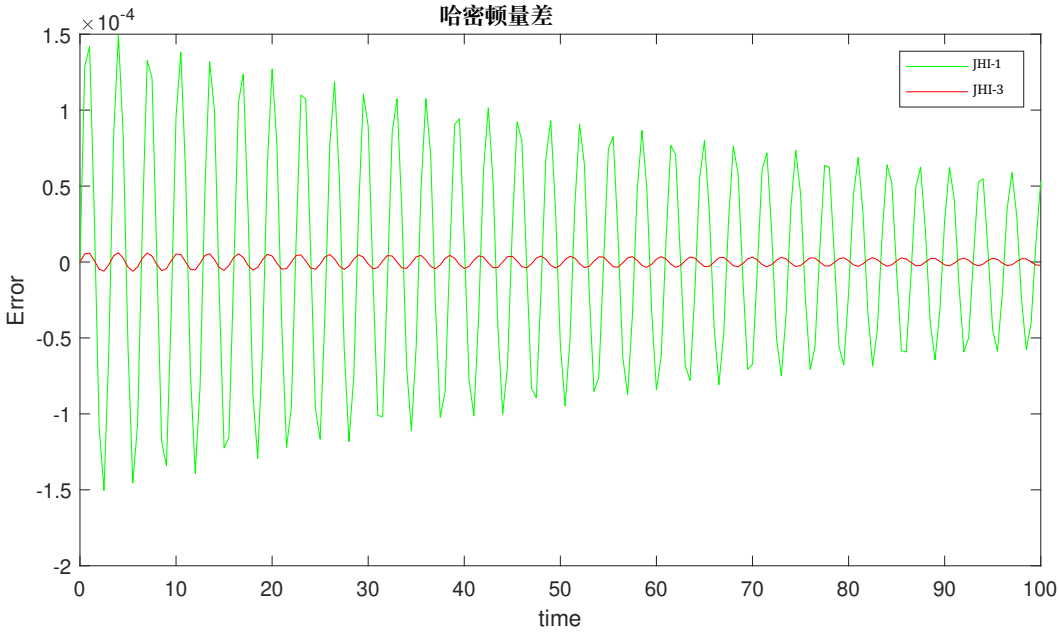


图 12：沿一阶和三阶 JHI 方法轨迹的哈密顿量差。

特定情况下， Λ 是泊松的。第二个条件给出

$$\begin{aligned}[E,\Lambda] &= \left[e_1\frac{\partial}{\partial x},\Lambda\right]+\left[e_2\frac{\partial}{\partial y},\Lambda\right]\\ &= a\Big(-ye_1-xe_2+xy\frac{\partial e_1}{\partial x}+xy\frac{\partial e_2}{\partial y}\Big)\frac{\partial}{\partial x}\wedge\frac{\partial}{\partial y}.\end{aligned}$$

一个解为

$$e_1 = cxy+dx+fx, \qquad e_2 = cxy+dy-fx, \quad c,d,f\in\mathbb{R}.$$

考虑哈密顿量

$$H(x,y) = x-\lambda_1\log x+y-\lambda_2\log y,$$

其对应的雅可比哈密顿向量场为

$$\begin{aligned}X_H &= \Lambda(\cdot,dH)-HE(\cdot)\\ &= [-axy+a\lambda_2 x-H(cxy+dx+fx)]\frac{\partial}{\partial x}+[axy-a\lambda_1 y-H(cxy+dx-fx)]\frac{\partial}{\partial y}.\end{aligned}$$

相应的齐次泊松结构为

$$\Pi = -\frac{axy}{t}\frac{\partial}{\partial x}\wedge\frac{\partial}{\partial y}+(cxy+dx+fx)\frac{\partial}{\partial t}\wedge\frac{\partial}{\partial x}+(cxy+dy-fy)\frac{\partial}{\partial t}\wedge\frac{\partial}{\partial y}.$$

为计算辛双实现，我们假设 $x,y>0$ ，使得 Π 的秩为常数。齐次泊松结构的一个卡西米尔函数为

$$Z(x,y,t) = \log t+\frac{c}{a}(x-y)+\beta\log x-\gamma\log y, \qquad \beta=\frac{d-f}{a},\ \gamma=\frac{d+f}{a}.$$

令 $u=\log\, x, v=\log y$，我们得到

$$\{u,v\}=-\frac{axy}{t}\frac{1}{x}\frac{1}{y}=-\frac{a}{t}\neq 1,$$

因此，我们引入一个正则变换 $(u,v)\mapsto(U,V)$，满足

$$(U_uV_v-U_vV_u)\{u,v\}=1.$$

令 $U=u=\log x$，得到 $V_v=-t/a$。利用 Z，有

$$t=\exp\Big(Z-\frac{c}{a}(e^u-e^v)-\beta u+\gamma v\Big)=:\phi(Z,u,v),$$

and

$$V(U,v,Z)=-\frac{1}{a}\int_0^v\phi(Z,u,s)\,ds.$$

为简便起见，令 $c=0$ 和 $\beta=0$（即 $d=f$），得到

$$V=\frac{t}{a\gamma}(y^{-\gamma}-1).$$

因此，变换 $F(x,y,t)=(U,V,Z)$ 满足 $\{U,V\}=1$，而正则泊松结构的辛双实现为

$$\alpha_{\rm can}(U,V,Z,\eta_U,\eta_V,\eta_Z)=\big(U-\tfrac{1}{2}\eta_V,V+\tfrac{1}{2}\eta_U,Z\big),$$

因此，对于原泊松结构，$\alpha=F^{-1}\circ\alpha_{\rm can}\circ(F^{-1})^*$。相应的余切变换通过 $J^T\eta=\xi$ 得到，其中

$$J=\begin{bmatrix}\frac{1}{x} & 0 & 0\\ 0 & -\frac{t}{a}y^{-\gamma-1} & \frac{y^{-\gamma}-1}{a\gamma}\\ 0 & -\frac{\gamma}{y} & \frac{1}{t}\end{bmatrix},\qquad \eta=J^{-T}\xi.$$

具体而言，

$$\eta_U=x\xi_x,\quad \eta_V=-a\gamma\xi_t-\frac{ay}{t}\xi_y,\quad \eta_Z=ty^{-\gamma}\xi_t+\frac{y}{\gamma}(y^{-\gamma}-1)\xi_y,$$

and

$$\alpha_{\rm can}\circ(F^{-1})^*=\big(\log x+\tfrac{1}{2}(a\gamma\xi_t+\frac{ay}{t}\xi_y),\ t\frac{y^{-\gamma}-1}{a\gamma}+\tfrac{1}{2}x\xi_x,\ \log t-\gamma\log y\big).$$

最后，原坐标的双实现为

$$\begin{aligned}x'&=e^{U'}=x\,e^{\frac{1}{2}(d+f)\xi_t+\frac{ay\xi_y}{t}},\\ y'&=(1-C)^{1/\gamma},\\ t'&=e^{Z'}(1-C),\qquad C=a\gamma V'e^{-Z'}.\end{aligned}$$

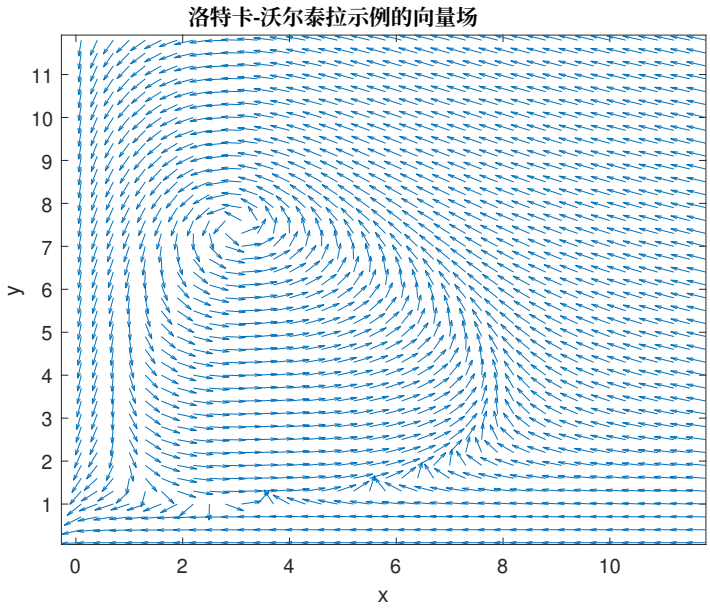


图 13：二维修正的洛特卡-沃尔泰拉问题的向量场。

数值示例。 对于数值仿真，考虑哈密顿量的参数 $\lambda_1 = 3$,$\lambda_2 = 4$ ，以及雅可比结构的参数 $a = 1$, $c = 0$, $d = f = 1$ 。域 $(x, y) \in [0, 12] \times [0, 12]$ 中的向量场如图 13 所示。与经典洛特卡-沃尔泰拉系统中所有轨迹都围绕平衡点闭合不同，这里的轨道仅在平衡点附近闭合，而更远处的轨迹则趋向于零。

为计算轨迹，我们使用时间区间 $[0, 5]$ 、步长 $\Delta s = 0.05$ 以及初始条件 $x_0 = (4, 2)$。图 14比较了一阶雅可比哈密顿积分器（JHI-1）与经典RK-2方法所得的轨迹。我们观察到，JHI-1方法保持了闭合轨迹，而RK-2则没有。

JHI-1的数值阶如表5所示。正如预期，该方法表现出二阶收敛。

Δs	$\|\cdot\|_2$ 误差	阶
2^{-2}	4.60×10^{-1}	–
2^{-3}	1.48×10^{-1}	1.64
2^{-4}	3.83×10^{-2}	1.95
2^{-5}	9.70×10^{-3}	1.99
2^{-6}	2.40×10^{-3}	2.00
2^{-7}	6.00×10^{-4}	2.00
2^{-8}	1.50×10^{-4}	2.00
2^{-9}	3.70×10^{-5}	2.00

表 5： 修正 Lotka–Volterra 问题中 JHI-1 的误差和数值阶 .

该系统对于泊松结构 Λ 并非严格的哈密顿系统，而是对于

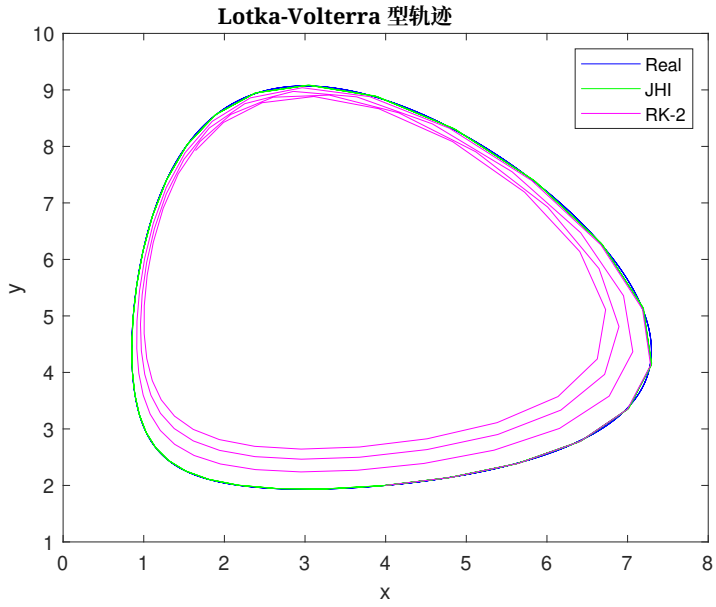


图 14：修正的洛特卡-沃尔泰拉系统中真实轨迹与 JHI-1 和 RK-2方法所得轨迹的比较。

雅可比结构 (Λ, E) 而言才是，因此哈密顿量不会被精确保留。在这种情况下，

$$E(H) = 2cxy + d(x+y) + f(x-y) - \lambda_1(cy + d + f) - \lambda_2(cx + d - f) = 2(x-3),$$

因此它沿轨迹变化。图 15 显示了时间区间 $[0, 10]$、步长为 $\Delta s = 0.01$ 时的哈密顿量误差。由于轨迹闭合，误差呈周期性变化，并保持在 10^{-4} 量级，展现了 JHI-1 良好的长期行为。

3.7 刚体旋转

最后，我们考虑一个以线性双向量为模型的三维 Jacobi 系统，用于描述刚体旋转。此例突显了 JHI 在具有多项式 Jacobi 向量场的高维系统中的应用，并说明了近似双实现的局限性。

考虑线性双向量场

$$\Lambda = x_3 \frac{\partial}{\partial x_2} \wedge \frac{\partial}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} \wedge \frac{\partial}{\partial x_3} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_3} \wedge \frac{\partial}{\partial x_2},$$

并令 $E = f_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + f_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + f_3 \frac{\partial}{\partial x_3}$。

为了定义雅可比结构 (Λ, E)，雅可比条件

$$[\Lambda, \Lambda] = 2E \wedge \Lambda, \quad [E, \Lambda] = 0$$

必须成立。由于 Λ 是泊松的，$[\Lambda, \Lambda] = 0$，因此 $2E \wedge \Lambda = 0$ 意味着

$$f_1 x_1 + f_2 x_2 + f_3 x_3 = 0.$$

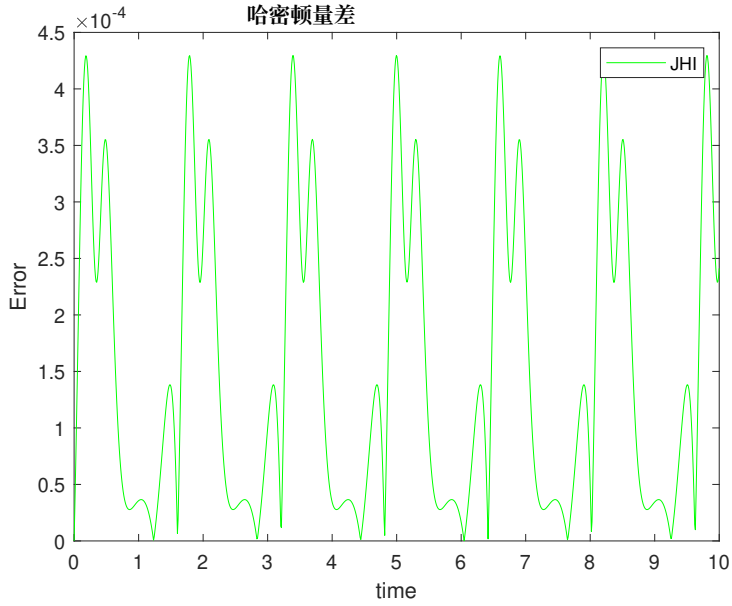


图 15：修正后的 Lotka-Volterra 系统中，沿 JHI-1 轨迹的哈密顿量差。

解为

$$
\begin{aligned}
f_1 &= a_1 x_2 x_3 + d_3 x_2 + d_1 x_3, \\
f_2 &= a_2 x_1 x_3 - d_3 x_1 + d_2 x_3, \\
f_3 &= a_3 x_1 x_2 - d_1 x_1 - d_2 x_2,
\end{aligned}
$$

其中 $a_1 + a_2 + a_3 = 0$ 满足两个雅可比条件。

哈密顿函数为

$$
H(x) = \frac{I_2 + I_3}{2} x_1^2 + \frac{I_1 + I_3}{2} x_2^2 + \frac{I_1 + I_2}{2} x_3^2,
$$

其中 I_1、I_2、$I_3 \in \mathbb{R}$ 为惯性值，从而得到 Jacobi 哈密顿向量场 ld

$$
\begin{aligned}
X_H &= \Lambda(\cdot, dH) - HE(\cdot) \\
&= [(I_2 - I_3) x_2 x_3 - H f_1] \frac{\partial}{\partial x_1} + [(I_3 - I_1) x_1 x_3 - H f_2] \frac{\partial}{\partial x_2} + [(I_1 - I_2) x_1 x_2 - H f_3] \frac{\partial}{\partial x_3}.
\end{aligned}
$$

相应的齐次泊松结构为

$$
\Pi = \frac{x_3}{t} \frac{\partial}{\partial x_2} \wedge \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{x_2}{t} \frac{\partial}{\partial x_1} \wedge \frac{\partial}{\partial x_3} + \frac{x_1}{t} \frac{\partial}{\partial x_3} \wedge \frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial t} \wedge (f_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + f_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + f_3 \frac{\partial}{\partial x_3}).
$$

由于 Π 的秩为 2，因此存在一个卡西米尔函数

$$
C_1 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2.
$$

对于该系统，由于 f_i 对坐标的依赖是二次的，因此很难通过解析方法获得精确辛双实现。为应用 Jacobi 哈密顿

积分器，我们通过对 ξ 中的余切贡献进行线性化，构造了**近似辛双实现**，使其在 ξ 的一阶范围内保持正则泊松括号。这种方法确保所得数值积分器在局部保留 Jacobi 系统的几何结构，并能为短期至中期仿真提供准确的轨迹，即使全局守恒性质只能近似满足。

近似辛双实现定义为

$$\alpha^1(x,t,\xi_x,\xi_t) = x_1 + \frac{1}{2}\left(\frac{x_3}{t}\xi_2 + f_1\xi_t - \frac{x_2}{t}\xi_3\right), \quad \beta^1(x,t,\xi_x,\xi_t) = x_1 - \frac{1}{2}\left(\frac{x_3}{t}\xi_2 + f_1\xi_t - \frac{x_2}{t}\xi_3\right),$$
$$\alpha^2(x,t,\xi_x,\xi_t) = x_2 + \frac{1}{2}\left(\frac{x_1}{t}\xi_3 + f_2\xi_t - \frac{x_3}{t}\xi_1\right), \quad \beta^2(x,t,\xi_x,\xi_t) = x_2 - \frac{1}{2}\left(\frac{x_1}{t}\xi_3 + f_2\xi_t - \frac{x_3}{t}\xi_1\right),$$
$$\alpha^3(x,t,\xi_x,\xi_t) = x_3 + \frac{1}{2}\left(\frac{x_2}{t}\xi_1 + f_3\xi_t - \frac{x_1}{t}\xi_2\right), \quad \beta^3(x,t,\xi_x,\xi_t) = x_3 - \frac{1}{2}\left(\frac{x_2}{t}\xi_1 + f_3\xi_t - \frac{x_1}{t}\xi_2\right),$$
$$\alpha^4(x,t,\xi_x,\xi_t) = t - \frac{1}{2}(f_1\xi_1 + f_2\xi_2 + f_3\xi_3), \qquad \beta^4(x,t,\xi_x,\xi_t) = t + \frac{1}{2}(f_1\xi_1 + f_2\xi_2 + f_3\xi_3).$$

注 3.2. 经典刚体旋转可以转化为李-泊松形式。然而，对于二次型 f_i，通常无法进行这种变换；只有当 $a_1 = a_2 = a_3 = 0$ 时，才能化为李-泊松形式。近似双实现使 *JHI* 方法得以应用，同时保留 *Jacobi* 系统的局部几何结构。

数值示例。 我们首先考虑参数 $I_1 = 5$, $I_2 = I_3 = 10$, $a_1 = a_2 =$0.2, $a_3 = -0.4$, $d_1 = d_2 = d_3 = 0.1$。仿真使用的时间区间为 $[0, 2]$, ，步长为 $\Delta s = 0.005$，初始条件为 $x_0 =$ (1, 1, 1)。图16显示，JHI 方法与真实轨迹重合。

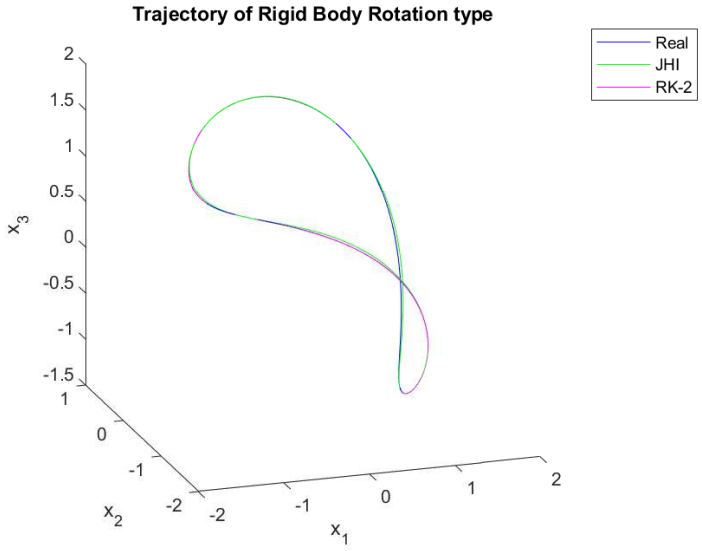


图16：对于参数为 $I_1 = 5$, $I_2 = I_3 = 10$ 的修改后的刚体旋转，真实轨迹与 JHI 和 RK-2 的对比。

接下来，我们测试一个更不稳定的构型： $I_1 = 1$, $I_2 = \pi$, $I_3 = 10$，并使用相同的 Jacobi 参数。图17显示，JHI轨迹保持闭合，但并未完全

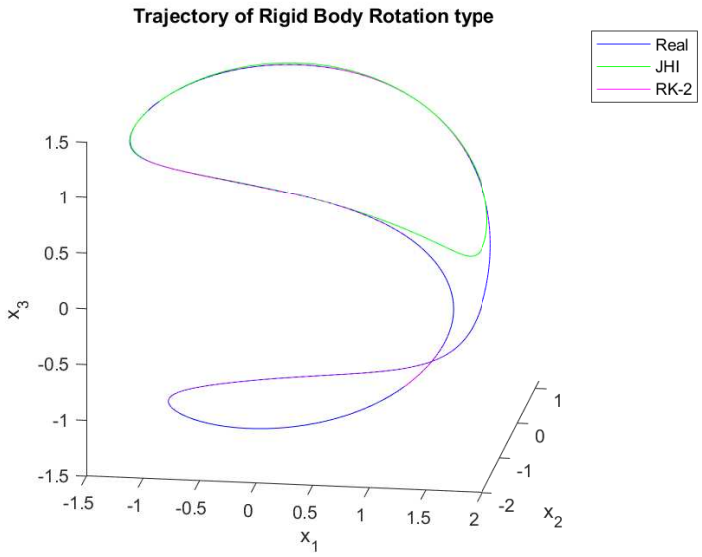


图17：在 $I_1 = 1, I_2 = \pi, I_3 = 10$ 的条件下，修改后的刚体旋转中真实轨迹与 JHI 和 RK-2 的比较。

与真实解重合，这是由于采用了近似的双实现；而 RK-2 的局部精度更高。

哈密顿量并未严格守恒，因为

$$\begin{aligned} E(H) =& x_1x_2x_3\left(a_1(I_2+I_3)+a_2(I_1+I_3)+a_3(I_1+I_2)\right) \\ &+ d_3x_1x_2(I_2-I_1)+d_1x_1x_3(I_3-I_1)+d_2x_2x_3(I_3-I_2). \end{aligned}$$

对于第一种配置（$I_1 = 5, I_2 = I_3 = 10$），轨迹上的哈密顿量误差保持有界，如图18所示。

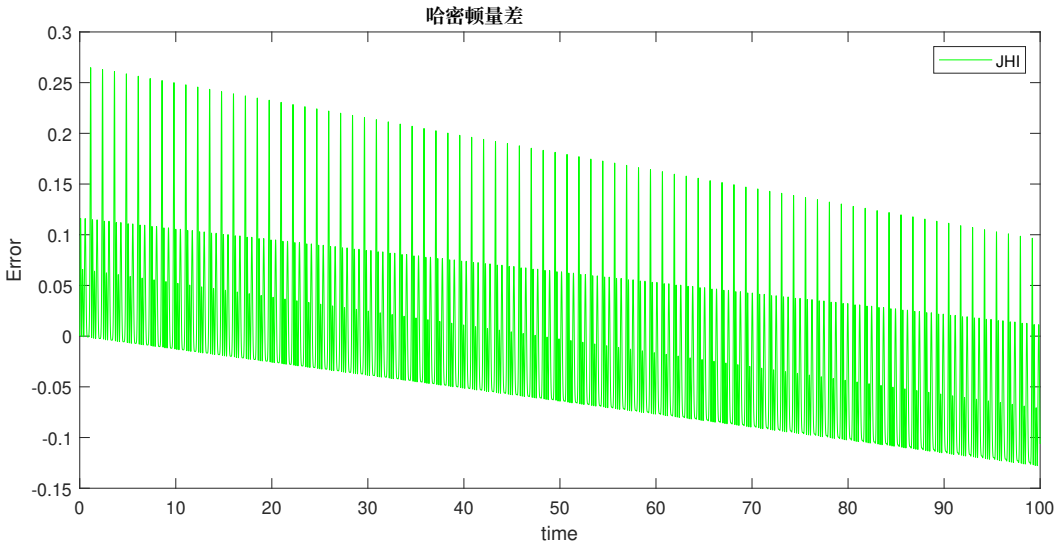


图18：在 $I_1 = 5, I_2 = I_3 = 10$ 的条件下，修改后的刚体旋转中沿 JHI轨迹的哈密顿量差。

4 结论

在本工作中，我们提出了一个构造 Jacobi 哈密顿积分器（JHI）的系统框架，利用 Jacobi 流形与齐次泊松流形之间的几何关系。通过应用泊松化技术并构造齐次辛双实现，我们证明 JHI 的构造可归结为齐次泊松哈密顿积分器的构造。该方法使泊松与辛情形中已有的几何技术能够适用于 Jacobi 系统，同时保持其底层齐次结构。

本工作的核心贡献之一，是利用基于 Magnus 展开和精确齐次拉格朗日双截面的递归算法，显式构造任意阶的 JHI。由此得到的方法保持内在齐次性，确保积分器能够在原始流形上生成定义良好的 Jacobi 映射。后向误差分析表明，JHI 产生的数值流在预期精度阶内与某个修正的 Jacobi 哈密顿系统的精确流相一致，从而保证长期定性保真性。

数值实验展示了 JHI 相较于经典时间积分方法的优势。低维示例验证了理论精度阶，凸显了辛双实现的作用，并展示了该方法在采用近似实现时的稳健性。对经典模型的应用进一步验证了 JHI 的几何一致性和竞争力；在某些示例中，该方法能够精确复现连续流，并保持哈密顿量函数或卡西米尔函数等几何特征。

总之，本工作确立了 Jacobi 哈密顿积分器作为几何积分技术向 Jacobi 流形自然延伸的地位。所提出的框架为未来研究开辟了多个方向，包括系统地构造近似辛双实现、采用自适应时间步进策略，以及将其应用于规模更大、维数更高的系统。预计这些进展将进一步巩固几何数值积分在研究非保守和接触型哈密顿动力学中的作用。

致谢

作者感谢科英布拉大学数学中心（CMUC, https://doi.org/10.54499/UID/00324/2025）在葡萄牙科学与技术基金会（FCT）支持下，通过资助项目 UID/00324/2025 和 UID/PRR/00324/2025 提供的经费支持。Gonçalo Inocêncio Oliveira 感谢 FCT 通过博士奖学金 2024.00328.BD 提供的支持。

参考文献

[1] A. Araújo、G. I. Oliveira 和 J. N. Mestre。Jacobi 哈密顿积分器。预印本，arXiv:2507.18573 [math.DG]，2025.[2] A. M. Blaga、M. A. Salazar、A. G. Tortorella 和 C. Vizman。接触对偶对。《国际数学研究通知》，2020 年 11 月。[3] S. Blanes 、 F. Casas、J. A. Oteo 和 J. Ros。Magnus 展开及其若干应用。《物理学报告》，470(5):151–238，2009 年。[4] A. Bravetti。接触几何与热力学。《现代物理学中的国际几何方法杂志》，16(supp01):1940003，2019 年。[5] A. Bravetti、H. Cruz 和 D. Tapias。接触哈密顿力学。《物理学年鉴》，376:17–39，2017 年 1 月。[6] A. J. Bruce、K. Grabowska 和 J. Grabowski。关于接触几何与 Jacobi 几何的若干评述。《对称性、可积性与几何：方法与应用》，2017 年 7 月。[7] A. Cabrera、D. M. de Diego 和 M. Vaquero。辛实现的近似：构造泊松积分器的一般框架。预印本，arXiv:2409.04342 [math.NA]，2024.[8] A. Cabrera、I. Mărcuţ 和 M. A. Salazar。乘法形式的局部公式。《变换群》，27(2):371–401，2022 年。[9] O. Cosserat。用于泊松积分器的辛群胚。《几何与物理学杂志》，186:104751，2023 年。[10] O. Cosserat、C. Laurent-Gengoux 和 V. Salnikov。泊松几何中的数值方法及其在力学中的应用。《固体数学与力学》，29(5):904–923，2024 年。[11] M. Crainic、R. L. Fernandes 和 I. Mărcuţ。《泊松几何讲义》。《数学研究生教材》。美国数学学会，2021 年。[12] M. Crainic 和 I. Mărcuţ。关于辛实现的存在性。《辛几何杂志》，9(4):435 – 444，2011 年。[13] M. Crainic 和 C. Zhu。Jacobi 结构与泊松结构的可积性。《傅里叶研究所年刊》，57(4):1181–1216，2007 年。[14] M. de León、M. Lainz、A. López-Gordón 和 X. Rivas。自治与非自治接触系统的哈密顿–雅可比理论及可积性。*J. Geom. Phys.*，187:22，2023 年。编号 104787。[15] M. de León 和 C. Sardón。用于时变耗散哈密顿系统的余辛结构与接触结构。*J. Phys. A, Math. Theor.*，50(25):23，2017 年。编号 255205。

[16] S. Dwivedi、J. Herman、L. C. Jeffrey 和 T. van den Hurk。哈密顿群作用与等变上同调。Springer数学简明丛书。施普林格国际出版，2019。[17] E. Hairer、C. Lubich 和 G. Wanner。几何数值积分，施普林格计算数学丛书第31卷。施普林格出版社，柏林，第2版，2006。[18] A. A. Kirillov。局部李代数。《俄罗斯数学调查》，31(4):55–75，1976。[19] P. Libermann 和 C.-M. Marle。辛几何与分析力学。《数学及其应用》。施普林格荷兰，1987。[20] A. Lichnerowicz。泊松流形及其相关李代数。《微分几何杂志》，第*12*卷，第*253–300*页，1977。[21] S.-Q. Liu 和 Y. Zhang。演化偏微分方程的雅可比结构。《数学进展》，227(1):73–130，2011。[22] W. Magnus。线性算子微分方程的指数解。《纯粹与应用数学通讯》，7(4):649–673，1954。[23] R. Mrugala、J. D. Nulton、J. C. Schön 和 P. Salamon。热力学理论中的接触结构。《数理物理报告》，29(1):109–121，1991。[24] J. A. Oteo 和 J. Ros。经典哈密顿系统的 Magnus 展开。《物理学杂志*A*：数学与通用》，24(24):5751，1991年12月。[25] J. M. Sanz-Serna 和 M. P. Calvo。哈密顿数值问题。《应用数学与数学计算》。泰勒-弗朗西斯出版集团，1994。[26] C. Sardón、J. de Lucas 和 F. J. Herranz。雅可比-李系统：基础理论与低维分类。《离散与连续动力系统》，2015:605–614，2015。[27] A. A. Simoes、M. de León、M. L. Valcázar 和 de Diego D. M. 含摩擦的简单热力学系统的接触几何。《英国皇家学会会刊*A*辑》*476:20200244*，2020。[28] A. Weinstein。泊松流形的局部结构。《微分几何杂志》，18(3):523–557，1983。[29] C. Zapata-Carratalá。哈密顿相空间图景：论现代科学中最强大理念之一的基础与推广。博士论文，爱丁堡大学，2019。[30] C. Zapata-Carratalá。雅可比几何与哈密顿力学：无单位方法。《国际几何方法与现代物理学杂志》，17(12):87，2020。编号2030005。