arXiv:2601.20828v1 [math.AT] 28 Jan 2026

拓扑量子场论无法检测米尔诺球面

BEN GRIPAIOS 和 OSCAR RANDAL-WILLIAMS

Abstract. 我们证明，在非常一般的假设下，拓扑量子场论无法检测那些以可平行化流形为边界的同伦球面，例如米尔诺奇异七维球面。此结果适用于各种目标范畴（或 (∞, n)-范畴）以及任意切结构。附录中还包含关于（稳定）带框流形的映射类群的结果，这些结果可能具有独立的研究价值。

对于数学家和物理学家而言，一个有趣的问题是：函子性拓扑量子场论在多大程度上能够检测奇异光滑流形？事实上，数学家或许希望利用适当拓扑量子场论的切割与粘合性质，判定奇异四维球面是否存在；而物理学家则希望更广泛地理解奇异结构与物理学的关联。

关于这个问题，最近取得了一些进展，可概述如下。一方面，在 [Reu23] 中（其中，拓扑量子场论被定义为从定向配边范畴到代数闭域上的向量空间范畴的对称幺半函子），研究表明，4维半单拓扑量子场论无法检测出奇异4维流形。另一方面， [RSP25] 中的研究表明，在更高维度上，存在能够检测希钦球面的半单拓扑量子场论（其取值于超向量空间，并且可以带定向，也可以不带定向）；希钦球面即不以自旋流形为边界的奇异球面，它们恰好存在于 $8k+1$ 和 $8k+2$维，适用于 $k \geq 1$。

这些结果促使 [RSP25中的问题1.3], 提出了一个问题，其最一般的版本是：半单拓扑量子场论能否检测出维度为 > 4的所有奇异球面?

在这里，我们给出的答案是否定的。一个反例是米尔诺典型奇异七维球面（它是某个可平行化、因而也可自旋的流形的边界）。事实上，我们的结果更强，具体而言：（i）不需要半单性假设；（ii）适用范围不仅限于球面，而是适用于任意配边；（iii）适用于一大类目标范畴，这些范畴是向量空间范畴的推广；（iv）适用于这样的配边范畴：其中的流形不仅配备定向，还配备任意切向结构；（v）也适用于向上和／或向下扩展的拓扑量子场论。最后一点使我们能够证明，所谓的“上同调拓扑量子场论”——其取值于由向量空间构成的链复形的（∞，1）-范畴——同样无法检测出米尔诺7维球面。

我们先给出一个与物理学相关的简单陈述，如下所示。

定理 1. 设 Σ 是一个$(4k-1)$维定向同伦球面，它是某个可平行化的 $4k$ 维流形的边界；设 $F\colon \mathsf{Bord}^{SO}_{4k-1} \to \mathsf{Vect}_{\mathbb{k}}$ 是一个取值于域 $\mathbb{k}$ 上向量空间范畴的定向拓扑量子场论。那么，对于任意非空的$(4k-1)$维定向配边 $M\colon P \rightsquigarrow Q$，有

$$F(M\#\Sigma) = F(M) : F(P) \longrightarrow F(Q)$$

对于任意一种连通和的选取。

特别地，令 $4k-1=7$、 $M=S^7$： $\emptyset \rightsquigarrow \emptyset$ 和 Σ 为 Milnor 7-球面，我们看到，这样的拓扑量子场论满足 $F(\Sigma)=F(S^7)\in\mathbb{k}$，从而得出了论文标题中的结论。

在明确描述各种推广之前，我们先给出一个证明，其依据是 Krannich、Kupers 和 Mezher 最近采用的一个思路 [KKM25]。

证明。对于 $4k-1=3$，该结论显然成立，因为根据庞加莱猜想，这个维数下唯一的同伦球面是 S^3，而与它做连通和不会产生任何影响。因此，我们可以假设 $4k-1\geq 7$，此时我们完全处于高维流形理论的范畴之中。

任取一个圆盘 $D^{4k-1}\subset \text{int}(M)$。把手体 $V_g := \natural_g S^{2k-1}\times D^{2k}$ 嵌入到 D^{4k-1} 中，进而嵌入配边 M 的内部。给定这样一个嵌入，令 M' 为 V_g 内部的补集。于是配边 $M: P \rightsquigarrow Q$ 可以分解为以下复合

$$M: P \overset{M'}{\rightsquigarrow} Q\bigsqcup \partial V_g \overset{\mathrm{Id}\sqcup V_g}{\rightsquigarrow} Q.$$

如果 φ 是 ∂V_g的保向微分同胚，那么我们也可以沿着φ将 V_g 与 M' 粘合起来，从而得到一个配边

$$M'\cup_\varphi V_g : P \overset{M'}{\rightsquigarrow} Q\bigsqcup \partial V_g \overset{\mathrm{Id}\sqcup \varphi}{\rightsquigarrow} Q\bigsqcup \partial V_g \overset{\mathrm{Id}\sqcup V_g}{\rightsquigarrow} Q.$$

我们的策略是证明，对于 $g\geq 2$，可以选择 ∂V_g 的微分同胚 φ，使得

(a) 存在一个相对于 P和 Q的保向微分同胚 $M'\cup_\varphi V_g\cong M\#\Sigma$，并且

(b) $F(\varphi)=$恒等映射：$F(\partial V_g)\to F(\partial V_g)$。

由此， F的函子性和幺半性推出 $F(M\#\Sigma)=F(M)$。

d维保向同伦球面的群 Θ_d 可通过以下构造与$\pi_0\text{Diff}_\partial(D^{d-1})$相识。一个在边界附近为恒等映射的微分同胚 ψ，其定义域为 D^{d-1}，可延拓为 S^{d-1}上的保向微分同胚 ψ'；利用它可以将两个 d圆盘粘合起来，构成一个保向异球面 $\Sigma_\psi := D^d\cup_{\psi'} D^d$。这定义了一个函数 $\pi_0\text{Diff}_\partial(D^{d-1})\to\Theta_d$；利用 Smale 的 h配边定理以及 Cerf 的伪同痕蕴含同痕定理，可以验证只要 $d\geq 6$，该函数就是一个同构。

同样，微分同胚 ψ 可延拓为流形 W_g 上的保向微分同胚 $\psi'' := \partial V_g = \#_g S^{2k-1}\times S^{2k-1}$，并可用它构造保向配边 $M'\cup_{\psi''} V_g$。现在我们解释如何将此流形识别为连通和 $M\#\Sigma_\psi$。沿着 $\partial V_g\setminus\text{int}(D^{4k-2})$ 内$D^{2k-1}\times S^{2k-1}$ 的 g 个互不相交副本附加 $2k$-柄，得到一个配边 U： $\partial V_g\rightsquigarrow S^{4k-2}$，且$V_g = U\cup_{\mathrm{Id}} D^{4k-1}$。微分同胚 ψ'' 在 $\partial V_g\setminus\text{int}(D^{4k-2})$ 上是恒等映射，因此它可延拓为 U 的一个微分同胚，该微分同胚在入边界 ∂V_g 上为 ψ''，在出边界 S^{4k-2}上为ψ'。这诱导出一个保向微分同胚

$$M'\cup_{\psi''} V_g = M'\cup_{\psi''}(U\cup_{\mathrm{Id}} D^{4k-1})\cong (M'\cup_{\mathrm{Id}} U)\cup_{\psi'} D^{4k-1} = M\#\Sigma_\psi,$$

得到（a）。

对于（b），我们使用 [KKM25 的定理 2。3], 该定理将[KRW20]系统化：如果 $[\Sigma_\psi]\in\Theta_{4k-1}$ 是一个边界为可平行化$4k$维流形的同伦球面，并且 $g\geq 2$，那么相应的微分同胚

$$[\psi'']\in\pi_0\text{Diff}^+(W_g)$$

属于该群的有限剩余，即包含于每个有限指数子群中。我们可以任意增大 g，因此可以假设这一条件适用。

我们还将用到群 $\pi_0\text{Diff}^+(W_g)$ 是有限生成的这一事实，这可由 [Kre79 定理 2] 得出。

为证明 (b)，我们考虑同态

$$F : \pi_0\mathrm{Diff}^+(W_g) \longrightarrow \mathrm{GL}(F(W_g))$$

由 F 诱导。其像是有限生成的（因为 $\pi_0\mathrm{Diff}^+(W_g)$ 也是），并且是一个线性群（显然，因为向量空间 $F(W_g)$ 可对偶化，因而是有限维的），所以根据马尔采夫 [Mal40] 的一个定理，其像是剩余有限的。由于$[\psi'']$属于 $\pi_0\mathrm{Diff}^+(W_g)$的有限剩余，因此它属于此同态的核，即 $F(\psi'') = \mathrm{Id}$，得证 (b)。□

现在我们来探讨定理可以推广的方式，依次考察方向 (iii-v)。

Other target categories

显然，在定理 1 的证明中，拓扑量子场论的目标范畴是域 $\Bbbk$ 上的向量空间范畴，这一点并不是特别重要。正如我们将要展示的，定理对于范围广得多的一类目标对称幺半范畴仍然成立，其中包括代数（例如任意环上的模或其分次版本）、同调代数（例如向量空间的链复形）和代数几何（例如概形上的拟凝聚层）中显而易见的推广。与物理学明显相关的例子包括超向量空间范畴（它使我们能够在物理学中表示费米子）以及向量空间链复形的导出范畴（它们与上同调拓扑量子场论相关）。

为给出一个一般性的陈述，我们需要介绍一些关于群和范畴的基本概念。也就是说，回顾一下：如果任意两个不同的元素在某个到有限群的同态下像不同，那么这个群就是剩余有限的；如果每个有限生成子群都是剩余有限的，那么这个群就是局部剩余有限的。若一个范畴中的对象的自同构群是局部剩余有限的，我们就称该对象为圆整的；而良圆整范畴则定义为一种对称幺半范畴，其中每个可对偶化对象都是圆整的。

如果将拓扑量子场论的目标范畴替换为任意良圆整范畴，定理 1 的结论仍然成立。

对称幺半范畴满足良圆整这一条件并不苛刻，因为局部剩余有限群的范围很广。例如，任意有限群都是剩余有限的（借助恒等同态即可），整数群也是如此（因为同态 $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/m$ 能将绝对值小于 m的每个整数与零区分开来）。容易看出，剩余有限这一性质在取子群和直积时得以保留，局部剩余有限这一性质也是如此。因此，群范畴中剩余有限群（分别为局部剩余有限群）的任意极限仍是剩余有限群（分别为局部剩余有限群），因为一对映射的等化子是源对象的一个子群。所以，事实上，每个有限生成阿贝尔群都是剩余有限的，而每个阿贝尔群都是局部剩余有限的。事实证明，前有限群、自由群、可解群和幂零群都是剩余有限的；我们在定理 1 的证明中也已经看到，每个线性群（即同构于某个 $GL_n(\Bbbk)$的子群的群，其中 n 为某个域 $\Bbbk$）都是局部剩余有限的。

因此，任意域 $\Bbbk$ 上的向量空间范畴都是良圆整的，因为可对偶对象恰好是有限维向量空间。更一般地，我们有以下结论。

定理 2. 以下都是良圆范畴。

(1) 环上的模范畴（或等价地，仿射概形上的拟凝聚层范畴）。*(2)* 分次环上的分次模范畴。

(3) 域上的向量空间导出范畴。*(4)* 概形上的拟凝聚层范畴。

证明。 我们逐项进行。

(1) 可对偶对象是有限生成投射模 [DP80，例 1.4]，并且任何有限生成模都是圆整的 [Weh03，6.2]。(2) 可对偶对象是其有限个移位之和的一个直和项 R，其自同构构成一个子群；这里把它们视为忘记分次后环上的有限生成模的自同构。因此，根据 (1)，它们构成一个局部剩余有限群。(3) 向量空间的导出范畴等价于分次向量空间范畴 [Kel07]，所以根据 (2) 它是良圆整的。(4) 对任意概形 X，QCoh(X) 的可对偶对象是有限型局部自由层，或等价地，是 X 上的向量丛。给定这样的向量丛 E，用 End(E) 表示相应的自同态丛，并设 $\{X_\alpha\}$ 是 X 的一个仿射概形开覆盖。限制映射 $H^0(X;\mathrm{End}(E)) \to \prod_\alpha H^0\big(X_\alpha;\mathrm{End}(E|_{X_\alpha})\big)$ 是单射（由层公理可知），这给出了可逆元之间的单射 $H^0(X;\mathrm{End}(E))^\times \to \prod_\alpha H^0\big(X_\alpha;\mathrm{End}(E|_{X_\alpha})\big)^\times$.。但若 $X_\alpha = \mathrm{Spec}(A_\alpha)$，则向量丛 $E|_{X_\alpha}$ 对应于一个有限生成投射 A_α-模 M_α，因此$H^0\big(X_\alpha;\mathrm{End}(E|_{X_\alpha})\big)^\times = \mathrm{Aut}_{A_\alpha}(M_\alpha)$，根据 (1)，它是局部剩余有限的。于是 $H^0(X;\mathrm{End}(E))^\times$ 嵌入到局部剩余有限群的乘积中，因此它本身也是局部剩余有限的。□

显然，若我们在目标范畴的选取上被赋予任意的自由度，原则上便可以探测到米尔诺球面（以及所有异 exotic 流形），因为我们可以将拓扑量子场论取为恒等函子。随之产生的问题是：何种目标范畴能让我们重新证明米尔诺球面的存在。

Other tangential structures

定理 1 在配边范畴的对象与态射配备任意切向结构时仍然成立。设 $\theta\colon B \to B\mathrm{O}(4k-1)$ 为一个切向结构，它分类向量丛 $\theta^*\gamma_{4k-1} \to B$，并设 $\mathrm{Bord}^\theta_{4k-1}$ 为其关联的配边范畴。只需看到，若 $(M,\ell_M)\colon (P,\ell_P) \rightsquigarrow (Q,\ell_Q)$ 是一个 θ-配边，$V_g \subseteq D^{4k-1} \subseteq M$ 是一个嵌入，且 ℓ 是通过限制 ℓ_M 在$W_g = \partial V_g = \#_g S^{2k-1}\times S^{2k-1}$ 上得到的 θ-结构，则 θ-结构映射类群

$$\Gamma^\theta(W_g,\ell) := \pi_1\big(\mathrm{Bun}(TW_g\oplus\mathbb{R},\theta^*\gamma_{4k-1})/\!\!/\mathrm{Diff}(W_g),\ell\big)$$

具有以下性质：

(a) 存在一个元素 $[\psi''_\theta]\in\Gamma^\theta(W_g,\ \ell)$，忽略 θ-结构后，它映射到$[\psi'']\in\pi_0\mathrm{Diff}(W_g)$；并且 (b) 当 g 足够大时，$[\psi''_\theta]$ 属于 $\Gamma^\theta(W_g,\ \ell)$ 的有限剩余。

按照定理 1 的证明中相同的论证，我们便得到以下一般性定理。

定理 3. 设 Σ 是一个 $(4k-1)$ 维同伦球面，它界定一个可平行化的 $4k$ 维流形，并设 $F\colon \mathrm{Bord}^\theta_{4k-1}\to\mathsf{C}$ 是一个取值于良圆整范畴C的带θ-结构的拓扑量子场论。则对任意非空的$(4k-1)$维 θ-配边 $(M,\ell_M)\colon(P,\ell_P)\rightsquigarrow(Q,\ell_Q)$，

$$F(M\#\Sigma,\ell) = F(M,\ell_M)\colon F(P,\ell_P)\longrightarrow F(Q,\ell_Q)$$

对任意连通和的选取，其中 $M\#\Sigma$ 上的 θ-结构 ℓ 依赖于上文 *(a)* 中提升 $[\psi''_\theta]$ 的选取，但在 $M\setminus \mathrm{int}(D^{4k-1})$ 上与 $\ell_M|_{M\setminus \mathrm{int}(D^{4k-1})}$ 一致。

注意，我们在定理 3 中并不要求同伦球面 Σ 本身配备、甚至容许一个 θ-结构：由证明可知，当 M 容许时，$M\#\Sigma$ 便容许一个 θ-结构。但这并不令人惊讶，因为它源于众所周知的 [Ebe16] 事实：Σ 与S^{4k-1} 的切丛在它们之间的同伦等价（或同胚）下相互对应，因此 $M\#\Sigma$ 与 M 的切丛也在它们之间的同伦等价（或同胚）下相互对应。

当然，$M\#\Sigma$也可能容许其他 θ-结构 ℓ'，使得 $F(M\#\Sigma,\ell') \neq F(M,\ell_M)$，但这几乎与 F能否探测底流形 $M\#\Sigma$ 与 M之间的差异无关。看出这一点的一种方式是注意到 M可以容许另一个 θ-结构 ℓ'_M，使得 $F(M,\ell'_M) \neq F(M,\ell_M)$，但底流形当然是相同的[1]。事实上，定义在 θ-流形上的拓扑量子场论既探测底流形的某些信息，也探测 θ-结构的某些信息，而定理 3 中的表述应理解为：拓扑量子场论无法区分底流形 $M\#\Sigma$与 M。

我们现在说明如何将性质 (a) 和 (b) 的验证化归为一个研究得更为充分的情形，即带边界流形 $W_{g,1} := W_g \setminus \mathrm{int}(D^{4k-2})$ 的带框架映射类群。我们将在附录中验证此情形下的这些性质，这可能具有独立的意义，并由此完成定理 3 的证明。

引理 4. 存在带边界流形$W_{g,1}$ 的一个标架 $\ell^{\mathrm{fr}} : TW_{g,1} \to \mathbb{R}^{4k-2}$，使得丛映射

$$TW_{g,1}\oplus\mathbb{R} \xrightarrow{\ell^{\mathrm{fr}}\oplus\mathbb{R}} \mathbb{R}^{4k-1} \xrightarrow{\textit{fibre inclusion}} \theta^*\gamma_{4k-1}$$

与限制后的 θ-结构 $\ell|_{W_{g,1}}$ 同伦。

借助该引理，存在一个切向结构变更后粘入圆盘的同态

$$\Gamma^{\mathrm{fr}}_{\partial}(W_{g,1},\ell^{\mathrm{fr}}) \longrightarrow \Gamma^{\theta}(W_g,\ell),$$

利用该同态，$\Gamma^{\mathrm{fr}}_{\partial}(W_{g,1},\ell^{\mathrm{fr}})$ 的性质 (a) 和 (b) 可推出 $\Gamma^{\theta}(W_g,\ell)$ 的同样性质。

引理 4 的证明。 ℓ_M 从 M 到 W_g 的限制 ℓ 与 $\ell_M|_{D^{4k-1}}$ 到 W_g的限制相同，但由于 D^{4k-1} 可缩，θ-结构 $\ell_M|_{D^{4k-1}}$来自 D^{4k-1}的一个标架，因而 W_g 上的 θ-结构 ℓ 来自该流形的一个（一次稳定）标架，即一个丛映射 $\ell^{\text{1-fr}}$：$TW_g\oplus\mathbb{R}\to\mathbb{R}^{4k-1}$。限制 $\ell^{\text{1-fr}}|_{W_{g,1}}: TW_{g,1}\oplus\mathbb{R}\to\mathbb{R}^{4k-1}$ 可以同伦到形如 $\ell^{\mathrm{fr}}\oplus\mathbb{R}$ 的丛映射，因为将其表述为提升问题时，这对应于提升该复合的一个零伦

$$W_{g,1} \xrightarrow{\tau_{W_{g,1}}} B\mathrm{O}(4k-2) \longrightarrow B\mathrm{O}(4k-1)$$

到 $\tau_{W_{g,1}}$ 的零伦；这是可行的，因为 $W_{g,1}$ 与一个 $(2k-1)$ 维胞腔复形同伦等价，而映射 $B\mathrm{O}(4k-2) \to B\mathrm{O}(4k-1)$ 是 $(4k-3)$-连通的。□

[1]一个简单而具体的例子是与符号数对应的（$3+1$）维可逆拓扑量子场论：改变定向会使符号数变号。

Extended TQFTs

已知物理定律的局域性表明，与物理学相关的拓扑量子场论应当向下完全扩展，也就是说，应定义在所考虑时空维数及以下所有维数的流形上。这需要使用 n-范畴。此外，物理学中遇到的许多显式拓扑量子场论都具有上同调性质，这表明拓扑量子场论也应当向上扩展，也就是说，其定义对象不应是范畴（或 n-范畴）之间的函子，而应是 $(\infty,1)$-范畴（或 (∞,n)-范畴）之间的函子。

我们的结果同样适用于这类情形。具体而言，对于任意向下扩展的拓扑量子场论，我们可以将所有余维大于一的流形限制为空集，从而得到一个未扩展的拓扑量子场论，并可将已经推导出的定理应用于此。类似地，对于向上扩展的拓扑量子场论，我们可以转到相应的同伦范畴，其中态射是 1-态射在由 2-态射连接这一等价关系下的等价类。假设目标范畴的同伦范畴是良圆整的，我们的定理便适用。

特别地，考虑取值于域 $\Bbbk$ 的导出 $(\infty,1)$-范畴中的上同调拓扑量子场论，其相应的同伦范畴是域 $\Bbbk$ 上向量空间的经典导出范畴。根据定理 2 的第 (3) 部分，后者是良圆整的，因此本文标题中的定理同样适用于这类上同调拓扑量子场论。

Appendix: Finite residuals of (stably-) framed mapping class groups

本附录旨在运用 [GRW16、Kra20、KRW21]的结果和方法，概述以下命题的证明。我们必然假设读者熟悉这些内容。

设 ℓ^{fr} 是$W_{g,\,1}$的一个标架，且 $\Gamma^{\mathrm{fr}}_{\partial}(W_{g,\,1},\ \ell^{\mathrm{fr}})$是带框架映射类群。

定理 5。 设 $[\psi]\in\pi_0\mathrm{Diff}(D^{4k-2})$ 对应于一个同伦球面 $[\Sigma_\psi]$，且该球面属于子群$\mathrm{bP}_{4k}\leq\Theta_{4k-1}$；令 $[\psi'']\in\pi_0\mathrm{Diff}_\partial(W_{g,\,1})$ 表示将该微分同胚嵌入$W_{g,\,1}$所得的映射。则

(a) 存在一个元素 $[\psi''_\theta]\in\Gamma^{\mathrm{fr}}_{\partial}(W_{g,\,1},\ell^{\mathrm{fr}})$ 映射到 $[\psi'']\in\pi_0\mathrm{Diff}_\partial(W_{g,\,1})$；*(b)* 当 g足够大时，$[\psi''_\theta]$ 属于 $\Gamma^{\mathrm{fr}}_{\partial}(W_{g,\,1},\ell^{\mathrm{fr}})$ 的有限剩余。

我们将先证明关于稳定带标架映射类群 $\Gamma^{\mathrm{sfr}}_{\partial}(W_{g,\,1},\ \ell^{\mathrm{sfr}})$ 的类似命题，然后由此推出关于 $\Gamma^{\mathrm{fr}}_{\partial}(W_{g,\,1},\ \ell^{\mathrm{fr}})$ 的命题。

稳定带标架映射类群。令 Θ^{sfr}_d 表示配备了某种稳定标架的同伦 d-球面的群。正如光滑化理论识别了 $\Theta_d=\pi_d(\mathrm{Top}/\mathrm{O})$（对于 $d\neq4$），它也识别了 $\Theta^{\mathrm{sfr}}_d=\pi_d(\mathrm{Top})$。此情形下 Kervaire–Milnor序列的对应物，是与纤维化序列 $\mathrm{Top}\to\mathrm{G}\to\mathrm{G/Top}$ 相关联的长正合序列。利用 Sullivan 对 $\pi_d(\mathrm{G/Top})$ 的计算（以二次 L-理论的形式），可特别得到一个正合列

$$0\longrightarrow \mathrm{bP}^{\mathrm{sfr}}_{4k}:=\pi_{4k}(\mathrm{G/Top})=\mathbb{Z}\longrightarrow\Theta^{\mathrm{sfr}}_{4k-1}\longrightarrow\pi^s_{4k-1}\longrightarrow 0.$$

忽略稳定标架后，便得到一个映射到 Kervaire–Milnor序列的映射

$$0\longrightarrow \mathrm{bP}_{4k}\longrightarrow\Theta_{4k-1}\longrightarrow\pi^s_{4k-1}/(\mathrm{Im}J)\longrightarrow\cdots,$$

且 $\mathbb{Z}=\mathrm{bP}^{\mathrm{sfr}}_{4k}\to\mathrm{bP}_{4k}$ 显然是满射。

正如 D^d 的映射类群可识别为 Θ_{d+1} 一样，群$\Gamma_\partial^{\mathrm{sfr}}(D^{4k-2},\ \ell_D)$ 可识别为 $\Theta_{4k-1}^{\mathrm{sfr}}$。沿着 $D^{4k-1}\subset W_{g,\ 1}$ 将稳定框架微分同胚通过恒等映射延拓，定义了一个同态

$$\Theta_{4k-1}^{\mathrm{sfr}}=\Gamma_\partial^{\mathrm{sfr}}(D^{4k-2},\ell_D)\longrightarrow\Gamma_\partial^{\mathrm{sfr}}(W_{g,1},\ell_W),$$

其像落在中心。（因为任何稳定标架微分同胚 $W_{g,1}$ ，只要固定边界，就可以通过同痕变形使其也固定 $D^{4k-1}\subset W_{g,1}$。）它还是单射。（因为沿着核中的一个元素重新粘合 V_g to $S^{4k-1}\setminus\mathrm{int}(V_g)$，会得到带有通常标架的 S^{4k-1}，但也会得到最初选取的 $\Theta_{4k-1}^{\mathrm{sfr}}$ 中的那个元素。）

引理 6。作用于 $H_{2k-1}(W_{g,1};\mathbb{Z})$ 诱导出一个同构

$$\Gamma_\partial^{\mathrm{sfr}}(W_{g,1},\ell_W)/\Theta_{4k-1}^{\mathrm{sfr}}\xrightarrow{\sim}\begin{cases}\mathrm{Sp}_{2g}^{q}(\mathbb{Z}) & 2k-1\neq 3,7\\ \mathrm{Sp}_{2g}^{q\ or\ a}(\mathbb{Z}) & 2k-1=3,7.\end{cases}$$

到$\mathrm{Sp}_{2g}(\mathbb{Z})$ 的一个子群，该子群由保持某个二次细化的那些矩阵组成（当 $2k-1\neq 3$, 7 时，该细化的阿尔夫不变量为 *0*；其余情况下，阿尔夫不变量可能取任一值）。

证明。我们将使用 [KRW21], ，并假定读者熟悉该论文中的记号：为保持一致，我们暂时记 $\check{\Gamma}^{\mathrm{sfr},}{}_{g}^{\ \ell_W}=\Gamma_\partial^{\mathrm{sfr}}(W_{g,1},\ell_W)$。我们推导出以下交换图。

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & \pi_1\mathrm{Diff}_\partial(W_{g,1}) & & & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & \searrow & & & \\
0 & \longrightarrow & \pi_{4k-1}(\mathrm{SO}) & \longrightarrow & \pi_1\mathrm{map}_\partial(W_{g,1},\mathrm{SO}) & \longrightarrow & \pi_1\mathrm{map}_*(W_{g,1},\mathrm{SO}) & \longrightarrow & 0\\
 & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
0 & \longrightarrow & \Theta_{4k-1}^{\mathrm{sfr}} & \longrightarrow & \check{\Gamma}_g^{\mathrm{sfr},\ell_W} & \longrightarrow & \check{\Gamma}_g^{\mathrm{sfr},\ell_W}/\Theta_{4k-1}^{\mathrm{sfr}} & \longrightarrow & 0\\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \Theta_{4k-1} & \longrightarrow & \Gamma_g^{\mathrm{sfr},[\ell_W]} & \longrightarrow & \Gamma_g^{\mathrm{sfr},[\ell_W]}/\Theta_{4k-1} & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

虚线映射是满射，理由如下。与 $\xi\in\pi_{2k}(\mathrm{SO}(2k))\ =\pi_1(\Omega^{2k-1}\mathrm{SO}(2k))$ 相关联的是一族 $D^{2k-1}\times S^{2k-1}$ 的微分同胚环路，它们在边界上恒等；可沿 $\pi_{2k-1}(W_{g,1})$ 的任意生成元 x 将其植入 $W_{g,1}$ ，从而得到 $\pi_1\mathrm{Diff}_\partial(W_{g,1})$ 中的元素 $=\mathbb{Z}\{a_1,b_1,a_2,b_2,\ldots,a_g,b_g\}$。经虚线映射到 $\pi_1\mathrm{map}_*(W_{g,1},\mathrm{SO})\ \cong H_{2k-1}(W_{g,1};\pi_{2k}(\mathrm{SO}))$ 后，它被映到 ξ 在稳定化映射 $\pi_{2k}(\mathrm{SO}(2k))\to\pi_{2k}(\mathrm{SO})$ 下的像的 x 倍。对于所有 k ，这个稳定化映射都是满射（目标群大多为零；若非如此，则使用 [DM89, 定理 1.1]），因此虚线映射是满射。

由此可知，诱导映射 $\check{\Gamma}^{\mathrm{sfr},}{}_{g}^{\ \ell_W}/\Theta_{4k-1}^{\mathrm{sfr}}\to\Gamma^{\mathrm{sfr},}{}_{g}^{\ [\ell_W]}/\Theta_{4k-1}$ 是一个同构。

根据 [KRW21，引理 6.3] ，我们有 $\Gamma^{\mathrm{sfr},}{}_{g}^{\ [\ell_W]}=\Gamma^{\mathrm{sfr},}{}_{g}^{\ [[\ell_W]]}$，它是 Γ_g 作用于 $W_{g,1}$ 上相对于一点的稳定标架集合时 ℓ_W 的稳定子。因此 $\Gamma^{\mathrm{sfr},}{}_{g}^{\ [\ell_W]}/\Theta_{4k-1}$ 是 Γ_g/Θ_{4k-1} 在该集合上的诱导作用的稳定子。该作用在 [Kra20 第 2], 节中作了分析，并且由此（利用 [Kra20，引理 2.1]）可知，子群 $I_g/\Theta_{4k-1}<\Gamma_g/\Theta_{4k-1}$ 自由作用，从而同态

$$\Gamma_g^{\mathrm{sfr},[[\ell_W]]}/\Theta_{4k-1}\longrightarrow\mathrm{Sp}_{2g}(\mathbb{Z})$$

是单射。但在 $\mathrm{Sp}_{2g}(\mathbb{Z})$ 中的像 $G^{\mathrm{sfr},}{}_{g}^{\ [[\ell_W]]}$由 $\Gamma^{\mathrm{sfr},}{}_{g}^{\ [[\ell_W]]}$在 [KRW21 第 6], 节中描述，并且当 $2k-1\neq 3$, 7 时为 $\mathrm{Sp}_{2g}^{q}(\mathbb{Z})$；如果 $2n-1=3$, 7，则为 $\mathrm{Sp}_{2g}^{q}(\mathbb{Z})$ 或 $\mathrm{Sp}_{2g}^{a}(\mathbb{Z})$

这取决于与带框流形 $(W_{g,\,1},\ \ell_W)$ 相关的某个二次型的阿尔夫不变量，参见 [KRW21 第 2.5.2、2.5.3]节。□

将 $\Gamma^{\mathrm{sfr}}_{\partial}(W_{g,\,1},\ \ell_W)$ 的一个元素映射到其映射环面所给出的稳定带框流形，由此定义了一个同态 $\Gamma^{\mathrm{sfr}}_{\partial}(W_{g,\,1},\ \ell_W) \to \pi^s_{4k-1}$，并将$\Theta^{\mathrm{sfr}}_{4k-1} \to \pi^s_{4k-1}$扩展。结合引理 6 中描述的同态，可得一个中心扩张

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} = \mathrm{bP}^{\mathrm{sfr}}_{4k} \longrightarrow \Gamma^{\mathrm{sfr}}_{\partial}(W_{g,1}, \ell_W) \longrightarrow \pi^s_{4k-1} \times \mathrm{Sp}^{q \text{ or } a}_{2g}(\mathbb{Z}) \longrightarrow 0. \tag{1}$$

依照 [GRW16 第 7]，节，我们可以通过了解 $\Gamma^{\mathrm{sfr}}_{\partial}(W_{g,\,1},\ \ell_W)$ 的阿贝尔化来获知有关此扩张的一些信息；当 g 足够大时，可应用 [GRW17 推论 1.8] 来确定该阿贝尔化。具体而言，相应的 Madsen–Tillmann谱为 $\Sigma^{\infty-(4k-2)}\mathrm{O}/\mathrm{O}(4k-2)_+$，并由 [GRW16 引理 5.2] 可知，阿贝尔化为

$$\pi^s_{4k-1}(\Sigma^\infty \mathrm{O}/\mathrm{O}(4k-2)_+) = \pi^s_{4k-1} \oplus \mathbb{Z}/4.$$

根据例如 [KRW21, 第 4 节，$\pi^s_{4k-1}\times\mathrm{Sp}^{q\ \ a\ \text{or}}_{2g}(\mathbb{Z})$ 的阿贝尔化与此相同。1], 因此，考察这一扩张的 Serre谱序列可知，将其分类的类 $e \in H^2(\pi^s_{4k-1} \times \mathrm{Sp}^{q\ \ a\ \text{or}}_{2g}(\mathbb{Z}); \mathbb{Z})$ 给出一个同态

$$e(-) : H_2(\pi^s_{4k-1} \times \mathrm{Sp}^{q \text{ or } a}_{2g}(\mathbb{Z}); \mathbb{Z}) \longrightarrow \mathbb{Z}$$

该同态是满射。由于 π^s_{4k-1} 是有限群，它的存在不会影响此映射的像。因此，将 (1) 限制在第二个因子上，便定义了一个中心扩张

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} = \mathrm{bP}^{\mathrm{sfr}}_{4k} \longrightarrow E \longrightarrow \mathrm{Sp}^{q \text{ or } a}_{2g}(\mathbb{Z}) \longrightarrow 0 \tag{2}$$

其欧拉类满足 $H_2(\mathrm{Sp}^{q\ \ a\ \text{or}}_{2g}(\mathbb{Z}); \mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}$ 是满射，并且这个 E 是 $\Gamma^{\mathrm{sfr}}_{\partial}(W_{g,1}, \ell_W)$ 的有限指数正规子群。

正如 [KRW21, 第 4 节所回顾的，群 $\mathrm{Sp}^q_{2g}(\mathbb{Z})$ 和 $\mathrm{Sp}^a_{2g}(\mathbb{Z})$ 具有关于 g 的同调稳定性，且稳定同调相同，因此针对第一类群所陈述的计算对第二类群也同样成立。于是，由 [Kra20, 引理 3.15, (3.10), 定义 3.17] (或 [GRW16, 引理 7.5, 定理 7.7] 的证明) 可知，对于足够大的 g，有

$$H^2(\mathrm{Sp}^{q \text{ or } a}_{2g}(\mathbb{Z}); \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}\{\tfrac{\mathrm{sgn}}{8}\} \oplus \mathbb{Z}/4,$$

因此模掉挠元后。根据 [KKM25，第 5.1 引理 (iii)]，E 的有限剩余与对应于 $\frac{\mathrm{sgn}}{8}$ 的扩张的有限剩余相同；而根据[KKM25，第 5.2]，这就是子群 $\mathbb{Z} = \mathrm{bP}^{\mathrm{sfr}}_{4k} < E$。

由于 E在 $\Gamma^{\mathrm{sfr}}_{\partial}(W_{g,1}, \ell_W)$ 中具有有限指数，因此后一个群的有限剩余也为子群 $\mathbb{Z} = \mathrm{bP}^{\mathrm{sfr}}_{4k}$。所以，$\mathrm{bP}_{4k-1} \le \pi_0\mathrm{Diff}^+(W_g)$ 中的每个元素都可提升为 $\Gamma^{\mathrm{sfr}}_{\partial}(W_{g,1}, \ell_W)$ 中的一个元素，且该元素属于此群的有限剩余，证毕。

带框架映射类群。为了将这一结果推广到带框架而非稳定带框架的映射类群，我们将用到下面的引理。感谢 Henry Wilton 就此提供建议。

引理 7。设

$$1 \longrightarrow F \longrightarrow G \longrightarrow H \longrightarrow 1$$

是一个群扩张，且 F 有限。那么有限剩余所诱导的映射 $\mathrm{fr}(G) \to \mathrm{fr}(H)$ 是满射。

证明。令 $\iota(G) \leq G$ 为 G 在其有限生成群的有限商完备化中的像。有限群 F 在 G 中的像 F' 是有限的，因此在有限生成群的有限商拓扑中是闭的（因为该拓扑是豪斯多夫的，而有限子空间是紧的，因而是闭的）。闭子群的正规化子在有限生成群的有限商拓扑中是闭的： F' 的正规化子包含 $\iota(G)$，因此也包含其闭包 G，故 F' 是 G的正规子群。于是 G/F' 是对闭正规子群取商，因此仍是有限生成群的有限商群，由此得到一个交换图

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \longrightarrow & F & \longrightarrow & G & \xrightarrow{\pi} & H & \longrightarrow & 1 \\ & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \iota} & & \downarrow{\scriptstyle \iota} & & \\ 1 & \longrightarrow & F' & \longrightarrow & \widehat{G} & \xrightarrow{p} & \widehat{G}/F' & \longrightarrow & 1. \end{array}$$

设 $h \in \mathsf{fr}(H)$ 和 $g \in G$ 满足 $\pi(g) = h$。现在 $\iota(h) = 1$，因为 G/F' 是逆极限有限的，因而是剩余有限的。由此可得 $\iota(g) \in F'$。因此存在一个 $f \in F$，使得 $\iota(f^{-1} \cdot g) = 1$，即 $f^{-1} \cdot g \in \mathsf{fr}(G)$。由于 $\pi(f^{-1} \cdot g) = \pi(g) = h$，这就证明了该断言。□

选定$W_{g,1}$的一个参考标架后，从标架空间到稳定标架空间的映射对应于

$$\mathrm{map}_{\partial}(W_{g,1}, \mathrm{SO}(4k-2)) \longrightarrow \mathrm{map}_{\partial}(W_{g,1}, \mathrm{SO}).$$

引理 8. 该映射的同伦纤维 F 在任意一点上的纤维均具有 $\pi_0(F) = \mathbb{Z}/4$，且$\pi_1(F)$ 有限。

证明。这是一个 H-空间之间的映射，因此任意一点上的同伦纤维都相同：所以我们可以取基点上的纤维。相应的映射

$$\prod_{i=1}^{2g} \Omega^{2k-1}\mathrm{SO}(4k-2) \simeq \mathrm{map}_*(W_{g,1}, \mathrm{SO}(4k-2)) \longrightarrow \mathrm{map}_*(W_{g,1}, \mathrm{SO}) \simeq \prod_{i=1}^{2g} \Omega^{2k-1}\mathrm{SO}$$

在放宽的边界条件下是（$2k-2$）-连通的，因此在此范围内， F 与映射的同伦纤维 $\Omega^{4k-1}\mathrm{SO}/\mathrm{SO}(4k-2)$ 相同

$$\Omega^{4k-2}\mathrm{SO}(4k-2) \longrightarrow \Omega^{4k-2}\mathrm{SO}.$$

现在，根据 GRW16 引理 5， $\pi_{4k-1}(\mathrm{SO}/\mathrm{SO}(4k-2)) = \mathbb{Z}/4$，由初等有理同伦论可知， $\pi_{4k}(\mathrm{SO}/\mathrm{SO}(4k-2))$ 是有限的。□

同伦纤维

$$B\mathrm{Diff}^{\mathrm{fr}}_{\partial}(W_{g,1}; \ell^{\mathrm{fr}}_{\partial}) \longrightarrow B\mathrm{Diff}^{\mathrm{sfr}}_{\partial}(W_{g,1}; \ell^{\mathrm{sfr}}_{\partial})$$

因此，在每个点上的同伦群都相同，从而得到一个正合序列

$$\{\text{finite group}\} \longrightarrow \Gamma^{\mathrm{fr}}_{\partial}(W_{g,1}, \ell^{\mathrm{fr}}) \longrightarrow \Gamma^{\mathrm{sfr}}_{\partial}(W_{g,1}, \ell^{\mathrm{sfr}}) \xrightarrow{\frown} \mathbb{Z}/4.$$

这表明 $\Gamma^{\mathrm{fr}}_{\partial}(W_{g,\,1},\ \ell^{\mathrm{fr}})$ 满射到一个有限指数子群 $H \leq \Gamma^{\mathrm{sfr}}_{\partial}(W_{g,\,1},\ \ell^{\mathrm{sfr}})$，且核有限。该子群必包含 $\Gamma^{\mathrm{sfr}}_{\partial}(W_{g,\,1},\ \ell^{\mathrm{sfr}})$ 的有限剩余 $\mathbb{Z} = \mathsf{bP}^{\mathrm{sfr}}_{4k}$，作为其有限剩余；由引理 7 可知， $\Gamma^{\mathrm{fr}}_{\partial}(W_{g,\,1},\ \ell^{\mathrm{fr}})$ 的有限剩余满射到 $\mathbb{Z} = \mathsf{bP}^{\mathrm{sfr}}_{4k} \leq \Gamma^{\mathrm{sfr}}_{\partial}(W_{g,\,1},\ \ell^{\mathrm{sfr}})$，证毕。

References

[DM89] D. M. Davis 和 M. Mahowald, *The n -of-origin* **1** 1989 3, SO( ) , Forum Math. ( ), 239 250 no. –.[DP80] A. Dold 和 D. Puppe, *Duality, trace and transfer*, 《几何拓扑国际会议论文集》, 华沙, 1978**154**（1980）, 81–102。[Ebe16] J. Ebert, *Parallelizability of the Milnor's exotic spheres in dimension 7*, MathOverflow, 2016, `https://mathoverflow.net/q/58140`（版本: 2016-01-20）。

[GRW16] S. Galatius 和 O. Randal-Williams, *Abelian quotients of mapping class groups of highly connected manifolds* **365** 2016 1 2, 857 879 , 《数学年刊》（），no. - – 。[GRW17] , *Homological stability for moduli spaces of high dimensional manifolds. II*, 《数学年刊》（2）186（2017），no. 1，127–204。[Kel07] B. Keller, *Derived categories and tilting*, 伦敦数学会讲义丛书, 页49–104，剑桥大学出版社，2007。[KKM25] M. Krannich, A. Kupers 和 F. Mezher, *Framed configuration spaces and exotic spheres* 2509 19074, 2025 , arXiv: . 。[Kra20] M. Krannich, *Mapping class groups of highly connected* $(4k+2)$*-manifolds*, 《精选数学》（新系列）26（2020），no. 5，论文编号81，49。[Kre79] M. Kreck, *Isotopy classes of diffeomorphisms of* $k-1$ *-connected almost-parallelizable* （），代数拓扑，奥胡斯（会议论文集，奥胡斯大学，奥胡斯，1978），《数学讲义》第763卷，施普林格，柏林，1979，第643–663页。[KRW20] M. Krannich 和 O. Randal-Williams, *Mapping class groups of simply connected high-dimensional manifolds need not be arithmetic* **358** 2020 , 《巴黎科学院数学报告》（），no. 4，469–473。[KRW21] A. Kupers 和 O. Randal-Williams, *Framings of* $W_{g\ 1}$ **72** 2021 3, , , 《数学季刊》（），no. – 。[Mal40] A. Malcev, *On isomorphic matrix representations of infinite groups*, 《数学文集》[《数学文集》] 新系列8/50（1940），405–422。[Reu23] D. Reutter, *Semisimple four-dimensional topological field theories cannot detect exotic smooth structure* **16** 2023 2, 542 566 , 《拓扑学杂志》（），no. – 。[RSP25] D. Reutter 和 C. Schommer-Pries, *Semisimple field theories detect stable diffeomorphism* **482** 2025 110598, 82 , 《数学进展》（），论文编号。[Weh03] B. A. F. Wehrfritz, *Artinian-finitary groups over commutative rings*, 《伊利诺伊数学杂志》47（2003），no. 1-2，551–565。*Email address*: bmg33@cam.ac.uk

Cavendish Laboratory, University of Cambridge, JJ Thomson Avenue, Cambridge CB3 0US, UK

Email address: or257@cam.ac.uk

Centre for Mathematical Sciences, Wilberforce Road, Cambridge CB3 0WB, UK