arXiv:2601.21509v1 [math.DG] 29 Jan 2026

Pansu 渐近定理与 Mitchell切定理的定量版本

ENRICO LE DONNE、SEBASTIANO NICOLUSSI GOLO 和 Andrea Tettamanti

Abstract. 我们定量研究测地李群收敛到其度量极限的速度。对于幂零测地李群，我们给出原度量与渐近度量之差的估计；对于一般测地李群，则给出原度量与切度量之差的类似估计。在这两种情形下，我们的结果都改进了文献中已有的界。

Contents

1. 引言 1 2. 次芬斯勒李群 6 2.1. 李群上的次芬斯勒度量 6 2.2. Baker–Campbell–Hausdorff 公式 7 2.3. 向量空间与李代数的分次 7 3. 次芬斯勒群的大尺度与小尺度几何 10 3.1. 渐近 Carnot 群与 Pansu 渐近定理 11 3.2. 密切卡诺群与 Mitchell切定理 11 3.3. 次芬斯勒李群结构的单参数族 13 3.3.1. 单连通幂零次芬斯勒李群上的收缩度量 14 3.3.2. 次芬斯勒李群上的膨胀度量 16 3.4. Carnot 商理想 16 4. Gr¨onwall 引理类结果 20 4.1. Pansu 渐近定理的 Gr¨onwall 引理 20 4.2. Mitchell切定理的 Gr¨onwall 引理 24 5. 定量Pansu渐近定理 27 5.1. 定理 5.1 和定理 1.1 的证明 30 6. 定量Mitchell切定理 34 6.0.1. 一个测地连通子集 35 6.1. 定理 6.1 和定理 1.2 的证明 36 7. 应用与例子 40 参考文献 42

1. Introduction

配备距离函数的群的极限已在数学的多个领域得到广泛研究，涵盖几何群论、调和分析和控制论；例如参见 [RS76; Gro81; FS82; NSW85; Mit85; Pan89; Ste93; Bel96; Gro99; Mon02; BLU07; Bre14; ABB20; LD25]。在许多情况下，度量群的极限仍保有群结构。重要

Date：2026年1月30日。

的例子见于几何群论：配备词度量的有限生成幂零群的渐近锥是 Carnot 群——即赋有测地距离、并具有内在膨胀族的单连通幂零李群；参见 [Gro81; Pan83]。这些度量李群也作为次黎曼李群的切锥出现；更一般地，它们也是 Carnot–Carath´eodory 空间的切锥；参见 [Mit85; Bel96; Jea14]。

粗略地说，给定一个度量空间，渐近锥可以看作从无限远处观察该空间所看到的空间，而切锥则可以理解为该空间在无穷小尺度下的形态。形式上，给定一个度量空间 $(X,\ d)$，我们将其渐近锥 （分别将其在 $p \in X$ 处的切锥 ）定义为序列 $(X,\ \epsilon d,\ p)$ 在 $\epsilon \to 0$（分别在 $\epsilon \to \infty$）时的格罗莫夫–豪斯多夫极限，若该极限存在。

本文研究赋有左不变测地距离且该距离诱导流形拓扑的李群；我们将这类对象简称为测地李群。事实上，这些对象恰好也称为次芬斯勒李群；参见第2.1节。我们的目标是研究测地李群序列，并分析它们向极限收敛的速率。我们重点关注两种情形：

(a) 单连通幂零测地李群的缩小版本收敛到其渐近锥；(b) 测地李群的放大版本收敛到其切锥。

这两种情形恰好对应于 Pansu 和 Mitchell 在 [Pan83; Mit85], 中分别从定性角度研究的情形。在这两种设定下，距离函数序列和极限距离函数都可以视为定义在同一底集上的距离函数，而且这种收敛实际上在紧集上一致。本文旨在对这种收敛速度给出定量估计。由此，我们得到测地李群的度量与其切度量之间差异的定量界限（若该群为幂零群，则为其渐近度量）。

将测地李群与其切锥（或渐近锥）对应起来并非规范的：经典构造取决于相应李代数中特定线性子空间的选择。我们旨在说明，不同且恰当的对应方式能够给出更精确的定量估计。这些选择包括选取分次，接下来我们将参考 [LD25]回顾相关内容。

给定向量空间 V， V的线性分次 是由子空间 $(V_i)_{i\in I}$组成的集合，其中 I 是一个集合，并且满足 $V = \oplus_{i\in I} V_i$。若 $I \subseteq \mathbb{R}$，则记 $V_{\leq j} := \oplus\{V_i : i \in I,\ \ i \leq j\}$。幂零李代数$\mathfrak{g}$ 的渐近分次 （也称为相容线性分次）是指将 $\mathfrak{g}$视为向量空间时，其线性分次 $(V_i)_{i\in\mathbb{N}}$ 满足

$$\mathfrak{g}^{(j)} = V_j \oplus \mathfrak{g}^{(j+1)}, \quad \forall j \in \mathbb{N},$$

其中 $\mathfrak{g}^{(j)}$ 表示 $\mathfrak{g}$ 的下中心列的第 j 项。现在固定一个单连通幂零测地李群 $(G,\ d)$。给定 G 的李代数 $\mathfrak{g}$ 的一种渐近分次，可以将 $(G,\ d)$ 的渐近锥 $(G_\infty,\ d_\infty)$ 微分同胚地识别为 G 本身；识别方式见第3.1节。因此，可以将渐近距离视为 G 上的距离函数。遵循 [Pan83] 的早期参考，我们称其为与该分次相关联的*Pansu* 极限度量 。著名的 Pansu 渐近定理（参见

[Pan83]，第 417 页）可表述为一个度量比较定理：

$$\frac{d(1,g)}{d_\infty(1,g)} \to 1, \quad \text{as } g \to \infty.$$

随后可以研究误差项 $|d(1,g) - d_\infty(1,g)|$，以量化趋近渐近锥的收敛速度。显然，根据 Pansu 渐近定理，该误差作为 $d(1,g)$ 的函数是次线性的。Tashiro 在 [Tas22, Theorem 4.1] 中证明，若 G 是非奇异的二步幂零群，则误差项有一个常数上界。在 [BLD12] 中，Breuillard 和 Le Donne 给出了任意幂零步群的误差项上界。他们证明，若 G 是 s 步幂零的，则

$$|d(1,g) - d_\infty(1,g)| = O\left(d(1,g)^{1-1/s}\right), \quad \text{as } g \to \infty. \tag{1}$$

对于黎曼二步群，我们有更精确的结果，见 [LD+25]。然而，对于一般的次芬斯勒群，界 (1) 是尖锐的。

设 (G,d) 是一个单连通幂零测地李群，且 $(V_i)_i$ 是 $\mathfrak{g}$ 的一种渐近分次。我们引入两个常数 α_∞ 和 β，以改进 Breuillard 和 Le Donne 的界 (1)。常数 α_∞ 用于量化 V_1 接近于 Carnot 群分层的第一层的程度，采用第 2.3 节回顾的标准定义。我们首先定义

$$\alpha_{(1,\infty)} \coloneqq \max\left\{j \in \mathbb{N} : [V_{p_1}, \dots, V_{p_k}] \subseteq V_{|p|} \oplus V_{\geq |p|+j},\ \forall k \in \mathbb{N},\ \forall p \in \mathbb{N}^k\right\},$$

其中，$[V_a, V_b]$ 表示由形如 $[v_a, v_b]$ 的括号（其中 $v_a \in V_a, v_b \in V_b$）张成的空间，而 $[V_{p_1}, \dots, V_{p_k}]$ 表示左迭代括号 $[V_{p_1}, [\cdots, [V_{p_{k-1}}, V_{p_k}]\cdots]]$。接下来，记 π_1 为投影 $\mathfrak{g} = V_1 \oplus [\mathfrak{g},\mathfrak{g}] \to V_1$，其核为 $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$；记 $\Delta \subseteq \mathfrak{g}$ 为与 d 相关联的分布（定义见第 2.1 节），我们定义

$$\alpha_{(2,\infty)} \coloneqq \max\left\{j \in \mathbb{N} : v - \pi_1(v) \in \mathfrak{g}^{(j+1)},\ \forall v \in \Delta\right\}.$$

最后，我们引入以下常数

$$\begin{aligned}
\alpha_\infty &\coloneqq \alpha_\infty(\Delta, (V_i)_i) \\
&\coloneqq \min\{\alpha_{(1,\infty)}, \alpha_{(2,\infty)}\} \\
&= \max\left\{ j \in \mathbb{N} : \begin{cases} k \in \mathbb{N},\ p \in \mathbb{N}^k, \\ v \in \Delta \end{cases} \implies \begin{cases} [V_{p_1}, \dots, V_{p_k}] \subseteq V_{|p|} \oplus V_{\geq |p|+j}, \\ v - \pi_1(v) \in \mathfrak{g}^{(j+1)} \end{cases} \right\}.
\end{aligned} \tag{2}$$

常数 $\alpha_{(1,\infty)}$ 是 Cornullier 在[Cor17]中引入的常数 e_D 的一种变体。注意，当且仅当 $\alpha_\infty = +\infty$时，(G, Δ) 是 Carnot 群。在后一种情况下，距离 d和 d_∞ 一致。关于 α_∞的其他性质，请参见第4.1节。

对于配备分布 Δ 及其李代数 $\mathfrak{h}$的线性分次 $(D_i)_i$的李群 H，我们引入一类 $\mathfrak{h}$ 的理想，称为 Carnot 商理想，使得商李代数在以下意义下是 Carnot 群。若子空间 $\mathfrak{i} \subseteq \mathfrak{h}$ 满足以下条件，则称其为关于分次$(D_i)_i$ 的(H, Δ) *Carnot* 商理想：

- $\mathfrak{i}$ 是 $\mathfrak{h}$的理想；
- $\mathfrak{h}/\mathfrak{i}$ 由 $(D_i + \mathfrak{i})_i$分层；
- $\Delta \subseteq D_1 + \mathfrak{i}$.

接下来，我们将 β 定义为最小整数 k，使得存在包含于子空间 $D_1 \oplus \cdots \oplus D_k$中的Carnot商理想：

$$\beta := \beta(\Delta, (D_i)_i) := \min\{k \in \mathbb{Z} : \exists \mathfrak{i} \subseteq D_{\leq k} \text{ Carnot quotient ideal}\}. \tag{3}$$

关于常数 β，值得牢记的例子如下。若 G是步数为 s_1 的 Carnot 群，而 H 是一个单连通的 s_2步幂零测地李群，则存在 $G \times H$ 的一个渐近分次，使得 $\beta \leq s_2$；参见命题 7.1。注意，$\beta = 0$ 当且仅当（G，Δ）是 Carnot 群，在这种情况下，下面的界是平凡的。我们现在可以陈述第一个主要结果。

定理 1.1 （定量版 Pansu 定理）。设（G, d）是一个测地李群。假设G 是单连通且幂零的。固定一个渐近分次后，考虑相应的 *Pansu* 极限度量 d_∞ 在 G上的度量，以及在（2）和（3）中分别定义的常数 α_∞ 和 β。那么，对于某个 $C > 0$，有

$$|d(p,q) - d_\infty(p,q)| \leq C \max\{d_\infty(1,p), d_\infty(1,q)\}^{1-\alpha_\infty/\beta}, \quad \forall p \in G,\ \forall q \in G \setminus B_{d_\infty}(1,1). \tag{4}$$

当 $\alpha_\infty/\beta = \infty$ 与 (G, Δ) 重合且其为 Carnot 群时，属于退化情形；此时我们显然有 $d = d_\infty$。在所有情形下，我们都有 $\alpha_\infty/\beta \geq 1/s$，其中 s 是 G 的幂零步，因此定理 1.1 改进了界（1）。由界（4）可直接看出，(G, d_∞) 是 (G, d) 的渐近锥，参见定理 3.5 和定理 5.1。

第二个主要结果涉及测地李群的切锥收敛速率的类似界。设 $\mathfrak{g}$ 是一个配备括号生成分布 Δ的李代数。$(\mathfrak{g}, \Delta)$ 的一种切分次（也称为适配线性分次）是 $\mathfrak{g}$ 的一种分次 $(W_i)_i$，满足

$$\sum_{i=1}^{j} \mathrm{ad}_\Delta^{i-1}\Delta = W_j \oplus \sum_{i=1}^{j-1} \mathrm{ad}_\Delta^{i-1}\Delta, \quad \forall j \in \mathbb{N},$$

其中，我们将 $\mathrm{ad}_A^k B := [A, \ldots, A, B]$ 记作 A 出现 k 次。注意到 $W_1 = \Delta$，并且由于假设 Δ 是括号生成的，这样的分次确实存在。现在固定一个测地李群 (G, d)，其李代数为 $\mathfrak{g}$，分布为 Δ。在为 $(\mathfrak{g}, \Delta)$ 选择一个切分次后，可以在局部将 G 与 (G, d) 在 1 处的切锥 (G_0, d_0) 识别；关于该识别，参见第 3.2 节。因此，我们可以将度量 d_0 视为 G 中 1 的某个邻域上的距离函数，并将其称为与该分次相关的切度量。Mitchell切定理可以表述为一个度量比较定理：

$$\frac{d(1,g)}{d_0(1,g)} \to 1, \quad \text{as } g \to 1.$$

与渐近情形类似，我们用两个常数来量化误差 $|d(1, g) - d_0(1, g)|$：α_0 和 β。常数 β 与渐近分次中公式 (3) 里的常数相同，而 α_0 则是 α_∞在切向分次情形下的对应量。其定义为

$$\alpha_0 := \alpha_0((W_i)_i) := \max\left\{j \in \mathbb{N} : [W_{p_1}, \ldots, W_{p_k}] \subseteq W_{|p|} \oplus W_{\leq |p|-j},\ \forall k \in \mathbb{N},\ \forall p \in \mathbb{N}^k\right\}. \tag{5}$$

这里，当且仅当 (G, Δ) 是 Carnot 群时，$\alpha_0 = \infty$。我们的第二个主要结果是以下界：

定理 1.2 (定量版米切尔定理)。设(G, d) 是一个配备左不变测地度量的李群。固定一个切分次后，考虑在 G 中单位元的有界邻域 U 上与之关联的切度量 d_0，以及

分别在(5) 和(3)中定义的常数 α_0 和 β。那么，对于某个 $C > 0$，有

$$\begin{aligned}
&-Cd(p,q)^{1/\beta}d_0(1,p)^{1+(\alpha_0-1)/\beta}\\
&\le d(p,q)-d_0(p,q)\\
&\le Cd_0(p,q)^{1/\beta}d_0(1,p)^{1+(\alpha_0-1)/\beta} \quad \forall p,q\in U \ with\ d_0(1,p)\ge d_0(1,q).
\end{aligned}$$

特别地，我们有

$$|d(p,q)-d_0(p,q)|\le C\max\{d_0(1,p),d_0(1,q)\}^{1+\alpha_0/\beta}, \quad \forall p,q\in U. \tag{6}$$

由界（6）可直接看出，(G,d_0) 是 (G,d) 的切锥，见定理3.7和定理 6.1。

退化情形 $\alpha_0/\beta = \infty$ 对应于 (G,Δ) 为一个 Carnot 群，此时 d 和 d_0 重合。定理 1.1 强化了 Breuillard 和 Le Donne 的结果，而定理 1.2 则是对 Mitchell 的结果的定量化，其结果比在 [Bel96]中得到的更精确。事实上，记 s 为切锥 G_0的幂零步，Bellaiche 在 [Bel96 的定理 6.4], 中证明，当 ϵ 足够小时，有如下界

$$-C\epsilon d(p,q)^{1/s}\le d(p,q)-d_0(p,q)\le C\epsilon d_0(p,q)^{1/s}, \quad \forall p,q\in B_{d_0}(1,\epsilon). \tag{7}$$

定理 1.2 中的新界推出了（7），因为 $\beta\le s$ 和 $(\alpha_0-1)/\beta\ge 0$。

我们简要概述证明这些定理的策略。两个证明相似，因此我们重点讨论定理 1.1。我们考虑一参数李群乘积族 $(*_\epsilon)_{\epsilon\in\mathbb{R}}$ 在 G 上，使得 $G=(G,*_1)$ 与 $(G,*_0)$ 同构于 G的渐近锥。接下来，我们引入一参数测地度量族 $(\rho_\epsilon)_{\epsilon\in\mathbb{R}}$ 在 G 上，使得对每个 ϵ， ρ_ϵ 都是 $*_\epsilon$-左不变的， $\rho_1=d$，并且 $\rho_0=d_\infty$. 定理 1.1 是定理 5.1 的推论。定理 5.1 指出，度量 ρ_ϵ 在紧集上一致地定量收敛于 ρ_0 。具体而言，对每个紧集 $K\subseteq G$，都存在一个常数 C ，使得

$$|\rho_0(p,q)-\rho_\epsilon(p,q)|\le C\epsilon^{\alpha_\infty/\beta}, \quad \forall\epsilon\in[0,1],\ \forall p,q\in K.$$

我们说明如何证明不等式 $\rho_0(p,q)-\rho_\epsilon(p,q)\lesssim\epsilon^{\alpha_\infty/\beta}$，其中紧集 K固定；另一个不等式的证明采用相同的技巧。我们从一条连接 p 与 q的 ρ_ϵ-测地线 γ 出发，构造一条曲线 γ_0 ，使得 $\gamma_0(0)=p$ ，且 $\mathrm{Length}_{\rho_0}(\gamma_0)\le\mathrm{Length}_{\rho_\epsilon}(\gamma)$，然后对 γ与 γ_0 端点间的 ρ_0-距离进行估计。为估计端点间的距离，我们注意到，对于 Lie(G) 中的每个 Carnot 商理想 $\mathfrak{i}\lhd$ 以及每个 $\epsilon\in[0,1]$，曲线 $t\mapsto\gamma_\epsilon^{-1}(t)\ *_\epsilon\ \gamma(t)$ 都包含于 $\mathfrak{i}$中。随后，可以利用球盒定理和 β的定义，以及一个 Gr¨onwall 型引理和 α_∞的定义，来估计 γ 与 γ_0端点间的 ρ_0-距离。

本文的结构如下。在第2节中，我们介绍有关测地李群的基本定义和已知结果。在第3节中，我们介绍李群的渐近锥和切空间的必要概念及相关结果。第4节包含两个 Gr¨onwall 型引理的证明，这些引理是证明主要定理所必需的。最后，在第5节和第6节中，我们分别证明定理1.1和定理1.2。我们在第7节以一些应用和例子作为结尾。

2. Sub-Finsler Lie groups

2.1. 李群上的次芬斯勒度量。 我们的主要研究对象是赋予左不变测地度量且该度量诱导流形拓扑的李群。根据 Berestovskij [Ber88], 的一个结果，这些度量李群恰好就是次芬斯勒李群；下面我们将按照专著[LD25]的风格介绍它们。

设 G 是一个李群，其李代数为 $\mathfrak{g}$，视为单位元 $\mathbf{1}$ 处的切空间 G。 G 上的左不变极化是一个子丛 $\Delta \subset TG$，满足对所有 $g \in G$，都有 $\Delta_g \coloneqq \Delta \cap T_gG = (L_g)_*\Delta_1 \subset T_gG$，其中 $L_g{:}G \to G$ 表示按 g 作的左平移，而 Δ_1 是 $\mathfrak{g}$ 的一个向量子空间。注意，空间 Δ_1 唯一确定左不变极化 Δ，因此， $\mathfrak{g}$ 的向量子空间集合与 G 上的左不变极化集合之间存在一一对应关系。为简化记号，在不会引起混淆时，我们也将 $\Delta_1 = \Delta$ 记作 $\Delta_1 = \Delta$ 。若与 Δ 相切的向量场所生成的李代数包含 TG 的一个标架，则左不变极化 Δ 是括号生成的。由于极化 Δ 是左不变的，当且仅当由 Δ_1 生成的 $\mathfrak{g}$ 的李子代数是 $\mathfrak{g}$. 时，它才是括号生成的

在 $\mathfrak{g}$ 上固定一个范数 $\|\cdot\|$ 。令 G 上与左不变的括号生成极化 Δ 相对应的子空间为 $\Delta_1 \subseteq \mathfrak{g}$ 。我们用 $\mathfrak{g}$ 上的范数在该极化上定义一个左不变范数。令 $\mathfrak{g}$. 上的范数在 Δ_1 上的限制为 $\|\cdot\|_1$。那么，对于 $g \in G$，我们将 Δ_g 上的范数定义为 Δ_1 上的范数经左平移的推前。

$$\|v\|_g \coloneqq \|(\mathrm{d}L_{g^{-1}})_g v\|_1, \quad \forall g \in G,\ \forall v \in \Delta_g.$$

三元组 $(G,\ \Delta,\ \|\cdot\|)$ 称为次芬斯勒李群。每个次芬斯勒李群都关联着一个左不变度量，称为卡诺-卡拉 ´多利度量或次芬斯勒度量，其定义如下。在区间 I 上定义的绝对连续曲线 $\gamma : I \to G$ 称为 Δ-水平的，如果对于几乎所有的 t，其在时刻 t 的导数都属于 $\Delta_{\gamma(t)}$. 。那么，两点 x 和 $y \in G$ 之间的次芬斯勒距离 d_{sF} 定义为

$$d_{sF}(x,y) \coloneqq \inf\big\{L(\gamma) : \gamma \ \Delta\text{-horizontal curve from } x \text{ to } y\big\},$$

其中 $L(\gamma) \coloneqq \int_I \|\dot\gamma(t)\|_{\gamma(t)}\mathrm{d}t$. 也可以考虑与非括号生成的极化相关的次芬斯勒度量。不过，我们将研究范围限定于与括号生成的极化相对应的度量，因为根据 Chow定理（亦称 Chow–Rashevsky定理，见 [Cho40]和 [Ras38]），此类度量是有限的、诱导出流形拓扑，并且是测地的。因此，任意两点之间都可以由一条测地路径连接。如果范数由一个标量积诱导，则称该度量为次黎曼度量。如果空间 Δ 是整个李代数 $\mathfrak{g}$，则称该度量为芬斯勒 度量（或者，如果范数还来自一个标量积，则称为黎曼 度量）。我们也将度量群（$G,\ d_{sF}$）称为次芬斯勒李群。

这一背景下的一个重要结果是球盒定理，它在局部比较黎曼度量与次芬斯勒度量。假设 Δ 与 Δ 中元素的所有阶数不超过 s的李括号一起线性张成 $\mathfrak{g}$ 。球盒定理（例如参见 [Mon02, Theorem 2.4.2]）表明，对任意次芬斯勒度量 d_{sF} 和任意黎曼度量 d_e ，在每个紧集 $K \subset G$ 上都有：

$$\frac{1}{C} d_{sF}(x,y)^s \le d_e(x,y) \le C d_{sF}(x,y), \quad \forall x,y \in K, \tag{8}$$

对某个常数 $C \geq 1$.

2.2. **Baker–Campbell–Hausdorff 公式**。 简而言之，Baker–Campbell–Hausdorff 公式（BCH 公式）使我们能够根据李代数的结构，重建李群在单位元邻域中的乘积。对于单连通幂零李群，BCH 公式使我们能够将群与其李代数等同起来，并仅用李代数运算来表示乘积。

设 $G = (G, \cdot)$ 是一个李群，其李代数为 $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot])$。那么，存在原点 $V \subseteq \mathfrak{g}$ 的一个邻域和单位元 $U \subseteq G$ 的一个邻域，使得 $\exp : V \to U$ 是微分同胚。BCH 公式为

$$\log(\exp(x_1)\cdot\exp(x_2)) = x_1 + x_2 + \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{q\in\{1,2\}^k} b_{k,q}[x_{q_1},\dots,x_{q_k}], \quad \forall x_1, x_2 \in V, \tag{9}$$

其中，$b_{k,q}$ 是普适常数，$[x_{q_1},\dots,x_{q_k}]$ 表示左迭代括号：
$[x_{q_1},\dots,x_{q_k}] := [x_{q_1}, [\cdots, [x_{q_{k-1}}, x_{q_k}]\cdots]]$.

BCH 公式在 V 上定义了一个局部群运算 $*$，称为*Dynkin* 乘积：

$$x_1 * x_2 := \log(\exp(x_1)\cdot\exp(x_2)).$$

通过指数映射，我们得到一个局部群同构（因而得到一个对应关系）：

$$\exp : V \to U, \quad (V, *) \simeq (U, \cdot).$$

若群 G是单连通且幂零的，则指数映射是一个整体微分同胚 [CG90，定理 1.2。1], 因此在这种情况下，$(\mathfrak{g}, *) \simeq (G, \cdot)$。所以此时 $(\mathfrak{g}, *)$ 是一个李群，其李代数为 $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot])$。此外，其指数映射是恒等映射 [LD25，命题 9.4。4]:

$$\mathrm{id} = \exp : (\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot]) \to (\mathfrak{g}, *).$$

2.3. **向量空间与李代数的分次**。设 V 是一个实向量空间，且 $k \in \mathbb{N}$。子空间 $(D_i)_{i=1}^k$ 的集合称为V 的（线性）分次，若$V = \bigoplus_{i=1}^k D_i$. 对于 $i \in \{1,\dots,k\}$，我们称 D_i 为该分次的 i第 - 层。我们用 $\pi_i : V \to D_i$ 表示关于该分次投影到 i层的投影；对于 $x \in V$，我们使用记号 $(x)_i := \pi_i(x)$。我们用 $D_{\leq i}$（分别用 $D_{\geq i}$）表示子空间 $D_1 \oplus \cdots \oplus D_i$（分别为 $D_i \oplus \cdots \oplus D_k$）。

分次会诱导如下线性映射。设 $(D_i)_{i=1}^k$ 是 V的一个分次。对于$\epsilon \in \mathbb{R}$，定义 $\delta_\epsilon : V \to V$为满足以下性质的线性映射：对所有 $j \in \{1,\dots,k\}$以及所有 $x \in D_j$，有 $\delta_\epsilon(x) = \epsilon^j x$。族 $(\delta_\epsilon)_{\epsilon\in\mathbb{R}}$ 称为与 $(D_i)_{i=1}^k$相关联的单参数膨胀族。

我们考察极化李群的两类线性分次，分别称为渐近线性分次和切线线性分次。Cornulier 首先在 [Cor17], 中引入了渐近分次，并称之为相容线性分次；他利用这种分次将幂零李群与其渐近锥相识别。类似地，选取切分次可以将子芬斯勒李群（局部地）与其切锥相识别。这些识别将在第 3.1 节和第 3.2 节中说明。

设 $\mathfrak{g}$ 为一个李代数。用$(\mathfrak{g}^{(i)})_{i\geq 1}$ 表示 $\mathfrak{g}$，的下中心列，它是 $\mathfrak{g}$ 的子空间序列，由 $\mathfrak{g}^{(1)} := \mathfrak{g}$ 和 $\mathfrak{g}^{(i+1)} := [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^{(i)}]$.归纳定义

定义2.1（渐近分次）。 设 $\mathfrak{g}$ 为一个 s步幂零李代数。 $\mathfrak{g}$ 的分次$(V_j)_{j=1}^s$ 是一个渐近分次，如果

$$\mathfrak{g}^{(j)} = V_j \oplus \mathfrak{g}^{(j+1)}, \quad \forall j \in \{1, \dots, s\}. \tag{10}$$

定义 2.2（切分次）。设 $\mathfrak{g}$ 是一个李代数， Δ 是一个括号生成子空间。对 $k \in \mathbb{N}$ 定义:

$$\Delta^k \coloneqq \mathrm{ad}_\Delta^{k-1}\Delta \coloneqq \underbrace{[\Delta, \dots, \Delta]}_{k \text{ times}},$$

and

$$\Delta^{[k]} \coloneqq \sum_{i=1}^{k} \Delta^k.$$

令 $s \coloneqq \min\{n \in \mathbb{N} : \Delta^{[n]} = \mathfrak{g}\}$ 为 Δ 的幂零步。 $\mathfrak{g}$ 的一个分次 $(W_j)_{j=1}^s$ 称为 $\mathfrak{g}$ 的切分次，如果 Δ

$$\Delta^{[j]} = W_j \oplus \Delta^{[j-1]}, \quad \forall j \in \{1, \dots, s\}.$$

在下文中，一种称为分层的特殊线性分次将发挥重要作用。对于正整数 s，如果存在一个分次 $\mathfrak{g} = \bigoplus_{i=1}^s D_i$ 满足 $[D_1, D_j] = D_{j+1}$，且对$1 \le j \le s-1$， $D_s \neq \{0\}$，并且 $[D_1, D_s] = \{0\}$，则称李代数 $\mathfrak{g}$ 具有 s 步分层。我们称这样的分次为分层。分层在李代数同构意义下是唯一的。分层定义中的空间 $D_1, \dots, D_s$ 称为层，对于每个 i，我们将空间 D_i 称为第 - 个层。注意，每个具有 s步分层的李代数都是幂零的，其幂零步为 s。

一个（代数）*Carnot* 群是一个单连通李群，其李代数具有分层结构，并且固定了这样一种分层。设 G 是一个 Carnot 群， Δ 是 Lie(G) 的第一层。若 d 是与极化 Δ相关联的次芬斯勒度量，我们称度量群 (G, d) 为（度量）*Carnot* 群。

度量 Carnot 群 (G, d) 具有许多良好性质。其中包括自相似性，也就是说，对于每个 $r > 0$，它们都存在等距映射 $(G, d) \to (G, rd)$；还具有等距齐性，也就是说，等距映射在 G 上具有传递性。由此可得，球盒定理在全局范围内成立:

定理 2.3（Carnot 群的球盒定理 [LD25，定理 11.2。3]）。设（G, d）是一个按（V_i）$_{i=1}^s$分层的 *Carnot* 群，按照第 *2.2* 节的说明，我们将其与（$\mathfrak{g}, *$）视为同一对象。那么，对于 $\mathfrak{g}$ 上的任意范数 $\|\cdot\|$，存在一个常数 $C \ge 1$，使得

$$\frac{1}{C} d(0, x) \le \sum_{i=1}^{s} \|(x)_i\|^{1/i} \le C d(0, x), \quad \forall x \in \mathfrak{g}. \tag{11}$$

命题2.4（线性分次的性质）. 设$(\mathfrak{g}, \Delta)$ 为极化李代数，并设 $q \in \mathbb{N}$ 为 Δ的步。设 $(W_i)_{i=1}^q$ 为 $\mathfrak{g}$的切分次。则

(1) $[W_i, W_j] \subseteq W_{\le i+j}$, $\forall i, j \in \{1, \dots, q\}$.

(2) If $[W_1, W_j] \subseteq W_{1+j}$, $\forall j \in \{1, \dots, q-1\}$, *and* $[W_1, W_q] = \{0\}$, *then* $(W_i)_{i=1}^q$ *is a stratification.*

如果 $\mathfrak{g}$ 是步长为 $s \in \mathbb{N}$ 的幂零元素，且$(V_i)_{i=1}^s$ 是 $\mathfrak{g}$的渐近分次，那么

(3) $q \le s$.

(4) $\mathfrak{g}^{(j)} = \Delta^j + \mathfrak{g}^{(j+1)}, \quad \forall j \in \{1, \dots, s\}$.

(5) $\mathfrak{g} = \Delta^{[j]} + \mathfrak{g}^{(j+1)}, \quad \forall j \in \{1, \dots, s\}.$

(6) $[V_i, V_j] \subseteq V_{\geq i+j}, \ \forall i, j \in \{1, \dots, s\}.$

(7) If $[V_1, V_j] \subseteq V_{1+j}, \ \forall j \in \{1, \dots, s-1\}$, *then* $(V_i)_{i=1}^s$ *is a stratification.*

证明。 (1)。令 $i, j \in \{1, \dots, q\}$. 那么

$$[W_i, W_j] \subseteq [\Delta^{[i]}, \Delta^{[j]}] \subseteq \Delta^{[i+j]} = W_{\leq i+j}.$$

(2). 我们通过对 k 使用归纳法证明

$$[W_1, W_k] = W_{k+1}, \quad \forall k \in \{1, \dots, q-1\}.$$

对于 $k = 1$，根据切分次的定义：

$$\begin{aligned} \Delta^{[2]} &= W_2 \oplus \Delta, \text{ and} \\ \Delta^{[2]} &\stackrel{\text{def}}{=} [\Delta, \Delta] + \Delta \\ &= [W_1, W_1] + \Delta. \end{aligned}$$

因此 $\dim(W_2) \leq \dim([W_1, W_1])$。但 $[W_1, W_1] \subseteq W_2$，故 $W_2 = [W_1, W_1]$.

现固定 $k \in \{1, \dots, q-2\}$，并假设该断言在直到 k 时成立。再次根据切分次的定义：

$$\begin{aligned} \Delta^{[k+2]} &= W_{k+2} \oplus \Delta^{[k+1]}, \text{ and} \\ \Delta^{[k+2]} &\stackrel{\text{def}}{=} \Delta^{[k+1]} + \Delta^{k+2} \\ &= \Delta^{[k+1]} + [W_1, W_{k+1}], \end{aligned}$$

其中在最后一个等式中，我们利用归纳假设推出

$$\Delta^{k+2} = \underbrace{[\Delta, \dots, \Delta]}_{k+1 \text{ brackets}} = [W_1, \underbrace{[W_1, \dots, W_1]}_{k \text{ brackets}}] \stackrel{\text{ind. hyp.}}{=} [W_1, W_{k+1}].$$

因此，$\dim(W_{k+2}) \leq \dim([W_1, W_{k+1}])$。但是 $[W_1, W_{k+1}] \subseteq W_{k+2}$，因此 $W_{k+2} = [W_1, W_{k+1}]$.

(3)。这显然可由渐近分次和切分次的定义得出。

(4)。我们对 j 进行归纳。对于 $j = 1$，这显然成立，因为限制在括号生成子空间上的到阿贝尔化 $\mathfrak{g}/[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ 的投影是满射。因此，假设该结论对某个 $j \in \{1, \dots, s-1\}$ 成立。那么

$$\mathfrak{g}^{(j+1)} = [\mathfrak{g}^{(j)}, \mathfrak{g}] = [\Delta^j + \mathfrak{g}^{(j+1)}, \Delta + \mathfrak{g}^{(2)}] \subseteq \Delta^{j+1} + \mathfrak{g}^{(j+2)},$$

并且由于 Δ^{j+1}，$\mathfrak{g}^{(j+2)} \subseteq \mathfrak{g}^{(j+1)}$，我们有 $\mathfrak{g}^{(j+1)} = \Delta^{j+1} + \mathfrak{g}^{(j+2)}$.

(5)。我们对 j 进行归纳。我们已在 (4) 中证明了 $j = 1$ 的情形。因此，假设该结论对某个 $j \in \{1, \dots, s-1\}$ 成立。那么

$$\mathfrak{g} = \Delta^{[j]} + \mathfrak{g}^{(j+1)} \stackrel{(4)}{=} \Delta^{[j]} + \Delta^{j+1} + \mathfrak{g}^{(j+2)} = \Delta^{[j+1]} + \mathfrak{g}^{(j+2)}.$$

(6). 令 $i, j \in \{1, \dots, s\}$。 那么

$$[V_i, V_j] \subseteq [\mathfrak{g}^{(i)}, \mathfrak{g}^{(j)}] \subseteq \mathfrak{g}^{(i+j)} = V_{\geq i+j}.$$

(7). 由于 $V_s = \mathfrak{g}^{(s)}$，因此 $[V_1, V_s] = \{0\}$。我们对 k 进行归纳法证明：

$$[V_1, V_k] = V_{k+1}, \quad \forall k \in \{1, \dots, s-1\}.$$

对于 $k = 1$，根据渐近分次的定义：

$$\begin{aligned}\mathfrak{g}^{(2)} &= V_2 \oplus \mathfrak{g}^{(3)}, \text{ and}\\ \mathfrak{g}^{(2)} &= [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]\\ &= [V_1 \oplus \mathfrak{g}^{(2)}, V_1 \oplus \mathfrak{g}^{(2)}]\\ &\overset{2.4(6)}{\subseteq} [V_1, V_1] + \mathfrak{g}^{(3)}.\end{aligned}$$

因此 $\dim(V_2) \leq \dim([V_1, V_1])$。但是 $[V_1, V_1] \subseteq V_2$，因此 $V_2 = [V_1, V_1]$.

现在固定 $k \in \{1, \ldots\ldots, s-2\}$，并假设该结论对 k 之前的情形均成立。同样，根据渐近分次的定义：

$$\begin{aligned}\mathfrak{g}^{(k+2)} &= V_{k+2} \oplus \mathfrak{g}^{(k+3)}, \text{ and}\\ \mathfrak{g}^{(k+2)} &= [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^{(k+1)}]\\ &= [V_1 \oplus \mathfrak{g}^{(2)}, V_{k+1} \oplus \mathfrak{g}^{(k+2)}]\\ &\overset{2.4(6)}{\subseteq} [V_1, V_{k+1}] + \mathfrak{g}^{(k+3)}.\end{aligned}$$

因此 $\dim(V_{k+2}) \leq \dim([V_1, V_{k+1}])$。但是 $[V_1, V_{k+1}] \subseteq V_{k+2}$，因此 $V_{k+2} = [V_1, V_{k+1}]$. □

3. Large and small scale geometry of sub-Finsler groups

我们回顾一些关于带基点度量空间的格罗莫夫-豪斯多夫收敛的基本概念。

定义 3.1（Hausdorff 逼近序列）。 设 (X_j, x_y) 和 (Y_j, y_j)（ $j \in \mathbb{N}$ 的）是两个带基点度量空间序列。若映射序列 $\phi_j : (X_j, x_j) \to (Y_j, y_j)$ 满足***Hausdorff*** 逼近 条件，则称其为 Hausdorff 逼近序列：对所有 $R > 0$ 和所有 $\delta > 0$，都存在一个序列 ϵ_j，使得

- $\epsilon_j \to 0$，当 $j \to \infty$ 时；
- $\phi_j|_{B(x_j, R)}$ 是一个 $(1, \epsilon_j)$-拟等距嵌入；
- $\phi_j(B(x_j, R))$ 是 $B(y_j, R - \delta)$ 的一个 ϵ_j-网。

我们指出，若 $\phi_j : (X_j, x_j) \to (Y_j, y_j)$ 是测地度量空间的一个 Hausdorff 逼近序列，则 $\phi_j(B(x_j, R))$ 是 $B(y_j, R)$ 的一个 ϵ_j-网。

定义 3.2（格罗莫夫-豪斯多夫极限）。 如果存在一个 Hausdorff 逼近序列 $\phi_j : (X_j, x_j) \to (Y, y)$，则称带基点度量空间 (Y, y) 是带基点度量空间序列 (X_j, x_j) 的格罗莫夫-豪斯多夫极限，其中 $j \in \mathbb{N}$。

我们将需要以下经典判据，见 [LD25，命题 12.1。3]:

命题3.3（GH 收敛判据）。 设 d_j 是集合 X 上的距离序列，并且在 d_∞-有界集上一致收敛到距离 d_∞ 。设$x_0 \in X$。如果

$$diam_{d_\infty}\left(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} B_{d_j}(x_0, R)\right) < \infty, \quad \forall R > 0,$$

于是 $\mathrm{id} : (X、\ d_j、\ x_0) \to (X、\ d_\infty、\ x_0)$ 是一个 ***Hausdorff*** 逼近序列。

3.1. **渐近 Carnot 群与 Pansu 渐近定理**。

定义 3.4（渐近 Carnot 代数与群）。 一个具有李代数（$\mathfrak{g}$, $[\cdot,\cdot]$）的单连通 s 步幂零李群 G 的渐近 *Carnot* 代数是李代数（$\mathfrak{g}_\infty$, $[\cdot,\cdot]^{(0)}$），其中

$$\mathfrak{g}_\infty \coloneqq \bigoplus_{i=1}^{s} \mathfrak{g}^{(i)}/\mathfrak{g}^{(i+1)}$$

并且 $[\cdot,\cdot]^{(0)}$ 是 $\mathfrak{g}_\infty$ 上的唯一李括号，使得对于 $v \in \mathfrak{g}^{(i)}$ 和 $w \in \mathfrak{g}^{(j)}$:

$$[v+\mathfrak{g}^{(i+1)}, w+\mathfrak{g}^{(j+1)}]^{(0)} \coloneqq [v,w]+\mathfrak{g}^{(i+j+1)}.$$

G 的渐近 *Carnot* 群 G_∞ 是单连通幂零李群，其李代数为 ($\mathfrak{g}_\infty$, $[\cdot,\cdot]^{(0)}$)。

注意， $\mathfrak{g}_\infty$ 是可分层的，而空间 $(\mathfrak{g}^{(i)}/\mathfrak{g}^{(i+1)})_{i=1}^{s}$ 自然地为 $\mathfrak{g}_\infty$.提供了一个分层

若群 G 配备了次芬斯勒度量 d，则可以如下定义 G_∞ 上的次芬斯勒度量 d_∞ 。设 d 对应于一个极化Δ 和 $\mathfrak{g}$上的范数 $\|\cdot\|$，并用 $\rho:\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}/[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ 表示以$[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$为核的投影。由于 Δ 是括号生成的， ρ 在 Δ_1 上的限制是满射。定义*Pansu* 极限范数 $\|\cdot\|_\infty$ 为 $\mathfrak{g}/[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ 上的范数，其在原点处的单位球为$B_{\|\cdot\|_\infty}(0,\ 1) \coloneqq \rho(B_{\|\cdot\|}(0,\ 1)\cap\Delta_1)$。
Pansu 极限度量 d_∞ 是 G_∞ 上与 $(\mathfrak{g}/[\mathfrak{g},\mathfrak{g}],\ \|\cdot\|_\infty)$ 相关联的次芬斯勒度量。我们指出，$(G_\infty,\ d_\infty)$ 是一个（度量）Carnot 群，根据下述定理，它是 $(G,\ d)$ 的渐近锥。

定理 3.5 (Pansu 渐近定理 [Pan83])。 单连通幂零次芬斯勒李群(G,d) 的渐近锥是 *Carnot* 群 (G_∞,d_∞)。

可以将一个单连通幂零次芬斯勒李群与其渐近 Carnot 群逐点等同，并定量研究度量 d 收敛到度量 d_∞的速度，从而得到 Pansu 定理的一个定量版本。这种等同依赖于对 $\mathfrak{g}$. 的渐近分次所作的非典范选择。设$(V_i)_{i=1}^{s}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的一个渐近分次，并设 $j\in\{1,\ 2,\ \ldots\ldots,\ s\}$。回顾渐近分次条件意味着 $\mathfrak{g}^{(j)} = V_j \oplus \mathfrak{g}^{(j+1)}$。于是 $\pi_j:\mathfrak{g}^{(j)}\to V_j$ 诱导 $\mathfrak{g}^{(j)}/\mathfrak{g}^{(j+1)}$ 与 V_j 之间的一个同构，而这些同构诱导一个向量空间同构 $\mathfrak{g}\simeq\mathfrak{g}_\infty$. 。在此等同下，我们可以把李括号 $[\cdot,\cdot]^{(0)}$ 从 $\mathfrak{g}_\infty$ 拉回到 $\mathfrak{g}$。

利用指数映射（对于单连通幂零群而言，它们是全局微分同胚），我们得到这些识别

$$G \simeq \mathfrak{g} \simeq \mathfrak{g}_\infty \simeq G_\infty.$$

请注意，一般而言，识别映射 $G\to G_\infty$ 只是一个微分同胚，而不是群同构。

3.2. **密切卡诺群与Mitchell切定理**。设
$(G,\ \Delta,\ \|\cdot\|)$ 是一个次芬斯勒李群，不一定是幂零的。用 $[\cdot,\cdot]$ 表示 $\mathfrak{g} \coloneqq \mathrm{Lie}(G)$ 上的括号，用 $s \coloneqq \min\{n\in\mathbb{N} : \sum_{i=1}^{n}\mathrm{ad}_\Delta^{i-1}(\Delta) = \mathfrak{g}\}$ 表示该分布的阶数。

定义 3.6 （密切卡诺代数与群）。$(G,\ \Delta)$ 的密切卡诺代数 是李代数 $(\mathfrak{g}_0,\ [\![\cdot,\ \cdot]\!]^{(0)})$，其中，沿用定义 2.2 中的记号，

$$\mathfrak{g}_0 \coloneqq \bigoplus_{i=1}^{s} \Delta^{[i]}/\Delta^{[i-1]},$$

并且括号 $[\![\cdot,\cdot]\!]^{(0)}$ 是唯一的李括号，使得对 $x \in \Delta^{[i]},\ y \in \Delta^{[j]}$:

$$[\![x+\Delta^{[i-1]}, y+\Delta^{[j-1]}]\!]^{(0)} \coloneqq [x,y]+\Delta^{[i+j-1]}.$$

G 的密切卡诺群 G_0 是具有李代数（$\mathfrak{g}_0, [\![\cdot,\cdot]\!]^{(0)}$）的单连通幂零李群。

李代数 $\mathfrak{g}_0$ 是可分层的，并且（$\Delta^{[i]}/\Delta^{[i-1]}$）$_{i=1}^{s}$ 是一个分层；此外还可注意到 $\Delta^{[1]}/\Delta^{[0]} = \Delta$。因此，偶对（$\Delta, \|\cdot\|$）在 G_0上定义了次芬斯勒距离 d_0，我们称之为切度量，而度量群（G_0, d_0）是一个（度量）Carnot 群。对每一点 $p \in G$，群（G_0, d_0）是（G, d）在 p处的切锥:

定理3.7 (Mitchell切定理)。 设(G, d) 是一个次芬斯勒李群，且 $p \in G$。那么， G 在 p 处的切锥是密切卡诺群(G_0, d_0)。

事实上，我们将给出定理3.7的一个定量表述：对所有 $R > 0$， R-球之间的戈罗莫夫–豪斯多夫距离具有如下形式的上界

$$d_{\mathrm{GH}}\left(\left(B_{\frac{1}{\epsilon}d}(1,R), \frac{1}{\epsilon}d\right), (B_{d_0}(1,R), d_0)\right) = O_R(\epsilon^{\alpha_0/\beta}). \tag{12}$$

类似于将幂零李代数与其渐近 Carnot 代数相对应，我们可以在选定切分次后，将每个次芬斯勒李群与其密切卡诺群局部对应起来，从而定量研究度量 d 收敛到度量 d_0的速度。设 $(W_i)_{i=1}^{s}$ 是 $(\mathfrak{g}, \Delta)$ 的一个切分次。那么，对每个$i \in \{1, \dots, s\}$，$\Delta^{[i]}/\Delta^{[i-1]}$ 作为向量空间同构于 W_i 。 这些同构诱导出一个向量空间同构 $\mathfrak{g} \simeq \mathfrak{g}_0$；在此对应下，我们可以将括号 $[\![\cdot,\cdot]\!]^{(0)}$ 拉回为 $\mathfrak{g}$上的一个括号。接下来，利用指数映射在原点附近是局部微分同胚这一事实，我们将 G中的单位元邻域与 G_0中的单位元邻域对应起来:

$$G \overset{\text{locally}}{\simeq} \mathfrak{g} \simeq \mathfrak{g}_0 \simeq G_0.$$

我们再次指出，一般而言，这并不是局部群同构。

球盒定理有一个以切度量表述的版本。设 $(G,\ \Delta,\ \|\cdot\|)$ 是一个次芬斯勒李群，且 $(W_i)_{i=1}^{s}$ 是一个切分次。我们将 G 中的单位元邻域与 $\mathfrak{g}$ 中配备 Dynkin 乘积的原点邻域等同。根据一般的球盒定理（参见 [LD25，定理 12.5），3], $\mathfrak{g}$ 上的函数 $d_0(0,\ \cdot)$ 和 $d(0,\ \cdot)$ 在局部上双 Lipschitz 可比；也就是说，存在 $\mathfrak{g}$ 中 0 的一个邻域 Ω 和一个常数 $C > 0$，使得

$$\frac{1}{C} d_0(0,p) \le d(0,p) \le C d_0(0,p), \quad \forall p \in \Omega. \tag{13}$$

3.3. **次芬斯勒李群结构的单参数族**。设 G为一个李群，且 $(D_i)_{i=1}^k$ 是 $\mathfrak{g} \coloneqq \mathrm{Lie}(G)$ 的一个分次。利用与该分次相关联的伸缩族，我们可以在 $\mathfrak{g}$ 上定义两个李括号单参数族。令 $\epsilon \in \mathbb{R}, \epsilon \neq 0$，则定义

$$[x,y]^{(\epsilon)} \coloneqq \delta_\epsilon[\delta_\epsilon^{-1}x, \delta_\epsilon^{-1}y],$$
$$[\![x,y]\!]^{(\epsilon)} \coloneqq [x,y]^{(1/\epsilon)}.$$

引理 3.8. 设 G 是一个李群，且 $(D_i)_{i=1}^s$ 是一个分次。那么

(1) 若 $(D_i)_{i=1}^s$ 是一个切分次，则括号 $[\![\cdot,\cdot]\!]^{(\epsilon)}$ 关于 ϵ 多项式依赖，因此可延拓至 $\epsilon = 0$。此外

$$\lim_{\epsilon\to 0}[\![x,y]\!]^{(\epsilon)} = [\![x,y]\!]^{(0)}, \quad \forall x,y \in \mathfrak{g},$$

其中 $[\![\cdot,\cdot]\!]^{(0)}$ 是第*3.2*节中定义的李括号。

(2) 若 G 是幂零的，且 $(D_i)_{i=1}^s$ 是一个渐近分次，则括号$[\cdot,\cdot]^{(\epsilon)}$ 关于 ϵ 多项式依赖，因此可延拓至 $\epsilon = 0$。此外

$$\lim_{\epsilon\to 0}[x,y]^{(\epsilon)} = [x,y]^{(0)}, \quad \forall x,y \in \mathfrak{g},$$

其中 $[\cdot,\cdot]^{(0)}$ 是第*3.1*节中定义的李括号。

证明。 我们只证明 (1)，断言 (2) 可由类似论证推出。令 $x,y \in \mathfrak{g}$，则

$$\begin{aligned}
[\![x,y]\!]^{(\epsilon)} &= \left[\!\!\left[\sum_{i=1}^s (x)_i, \sum_{i=1}^s (y)_i\right]\!\!\right]^{(\epsilon)} \\
&= \sum_{i,j} \delta_\epsilon^{-1}[\delta_\epsilon(x)_i, \delta_\epsilon(y)_j] \\
&\overset{2.4(1)}{=} \sum_{i,j}\sum_{k\le i+j} \delta_\epsilon^{-1}([\epsilon^i(x)_i, \epsilon^j(y)_j])_k \\
&= \sum_{i,j}\sum_{k\le i+j} \epsilon^{i+j-k}([(x)_i,(y)_i])_k.
\end{aligned}$$

所以 $[\![\cdot,\cdot]\!]^{(\epsilon)}$ 是关于 ϵ 的多项式。接下来，令 $i,j \in \{1,\dots,s\}$ 和 $w \in D_i, z \in D_j$。则

$$[\![w,z]\!]^{(\epsilon)} \overset{2.4(1)}{=} \sum_{k\le i+j} \delta_\epsilon^{-1}([\delta_\epsilon w, \delta_\epsilon z])_k = \sum_{k\le i+j} \epsilon^{i+j-k}([w,z])_k \xrightarrow{\epsilon\to 0} ([w,z])_{i+j} = [\![w,z]\!]^{(0)}.$$

□

定义 3.9。 对于 $\epsilon \in \mathbb{R}$，我们用 $\star_\epsilon$（分别用 $\cdot_\epsilon$）表示与 $[\cdot,\cdot]^{(\epsilon)}$（分别与 $[\![\cdot,\cdot]\!]^{(\epsilon)}$）相关联的 Dynkin 乘积，只要 Dynkin级数收敛。

回顾一下，如果李代数 $\mathfrak{g}$ 是幂零的，那么 BCH 公式是多项式，因此 Dynkin 乘积是一个（全局）群乘法。下一个引理表明，在适当条件下，映射 $\epsilon \mapsto \star_\epsilon$ 和 $\epsilon \mapsto \cdot_\epsilon$ 是解析的。

引理 3.10 ([LD25，引理 12.2。4])。 设 V 为一个向量空间， $\Lambda \subseteq \mathbb{R}$ 为开集，且 $([\cdot,\cdot]_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ 为定义在 V上的一族李括号。假设映射 $\lambda \mapsto [\cdot,\cdot]_\lambda$ 是解析的。记 $\star_\lambda$ 为与 $[\cdot,\cdot]_\lambda$相关联的 *Dynkin* 乘积。于是，映射

$$(\lambda,x,y) \mapsto x \star_\lambda y \quad \textit{and} \quad (\lambda,x,y) \mapsto \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} x \star_\lambda (sy)\Big|_{s=0}$$

在包含 $\Lambda \times \{0\} \times \{0\}$ 的 $\Lambda \times V \times V$ 某个开子集上解析。

我们还引入了两个次芬斯勒度量的单参数族。

3.3.1.单连通幂零次芬斯勒李群上的收缩度量。设 (G,d) 是与 $(\Delta,\|\cdot\|)$ 相关联的单连通幂零次芬斯勒李群，并赋有渐近分次 $(V_i)_{i=1}^s$。我们将收缩度量定义为

$$\rho_\epsilon(x,y) \coloneqq \begin{cases} |\epsilon| d(\delta_\epsilon^{-1}x, \delta_\epsilon^{-1}y), & \epsilon \neq 0, \\ d_\infty(x,y), & \epsilon = 0. \end{cases} \quad , \quad \forall x,y \in G. \tag{14}$$

函数 ρ_ϵ 实际上是度量；对于 $\epsilon \neq 0$，度量 ρ_ϵ 是 G 上与.....相关联的 $*_\epsilon$-左不变次芬斯勒度量

$$\Delta^{(\epsilon)} \coloneqq \delta_\epsilon \Delta, \quad \|v\|^{(\epsilon)} \coloneqq \epsilon \|\delta_\epsilon^{-1} v\|, \ \forall v \in \Delta^{(\epsilon)}. \tag{15}$$

为完整起见，我们还考虑 $\epsilon = 0$ 的情形，并定义

$$\Delta^{(0)} \coloneqq V_1, \text{ and } \|\cdot\|^{(0)} \coloneqq \|\cdot\|_\infty. \tag{16}$$

注记3.11。收缩度量的定义意味着，对于 $\epsilon \neq 0$，伸缩 $\delta_\epsilon : (G, |\epsilon| d) \to (G, \rho_\epsilon)$ 是一个等距映射。

命题 3.12。若 (G,d) 是一个 *Carnot* 群，且$(\rho_\epsilon)_\epsilon$ 是在(14)中定义的收缩度量，则

$$\rho_\epsilon = d, \quad \forall \epsilon \in [0,1]. \tag{17}$$

证明。与分层 $(V_i)_{i=1}^s$ 相关联的膨胀 (δ_ϵ) 是 $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot])$ 的李代数同构，对 $\epsilon \neq 0$ 成立。因此，

$$[\cdot,\cdot]^{(\epsilon)} = [\cdot,\cdot], \quad \forall \epsilon \neq 0.$$

由此可得 $*_\epsilon = *_1, \quad \forall \epsilon \neq 0$。此外，由于 d 的水平子空间是 V_1，我们还有

$$\Delta^{(\epsilon)} = V_1, \quad \|\cdot\|^{(\epsilon)} = \|\cdot\|, \quad \forall \epsilon \in (0,1].$$

因此，

$$\rho_\epsilon = d, \quad \forall \epsilon \neq 0.$$

接下来，在将 $\mathfrak{g}$与 $\mathfrak{g}_\infty$ 等同之后，我们还得到

$$[\cdot,\cdot]^{(0)} = [\cdot,\cdot], \quad \mathfrak{g}/[\mathfrak{g},\mathfrak{g}] = V_1, \quad \|\cdot\|_\infty = \|\cdot\|,$$

从而 $\rho_0 = d$. □

下一个结果表明，收缩度量 ρ_ϵ 与 ρ_0 到原点的距离是等价的，至多相差一个普适乘性常数，以及一个线性依赖于 ϵ的加性常数。

定理 3.13 （关于收缩度量的 Guivarc'h 定理 [LD25，推论 12.4。4]）。设 G 是一个配备渐近分次（V_i）$_{i=1}^s$的单连通幂零次芬斯勒李群。那么，存在一个常数 $C \geq 1$ 使得

$$\frac{1}{C}\rho_0(1,x) - C\epsilon \leq \rho_\epsilon(1,x) \leq C\rho_0(1,x) + C\epsilon, \quad \forall x \in G, \ \forall \epsilon \geq 0. \tag{18}$$

利用映射 π_1 是次度量映射这一事实，我们可以将 ρ_0-测地线提升为 ρ_ϵ-容许曲线（长度相同），下面对此作出解释。度量空间之间的一个次度量映射 $f : X \to Y$是满足以下条件的映射：

$$f(\overline{B}_{d_X}(x,r)) = \overline{B}_{d_Y}(f(x),r), \quad \forall x \in X, \ \forall r \geq 0.$$

命题 3.14. 设 $\mathfrak{g}$ 为幂零李代数。则投影映射$\pi_1 : (\mathfrak{g}, *_\mathfrak{o}, \|\cdot\|^{(\epsilon)}) \to (V_1, +, \|\cdot\|_\infty)$ 是群同态和次度量映射。

证明。 投影映射 π_1 是群同态，因为

$$(x *_\epsilon y)_1 = (x)_1 + (y)_1, \quad \forall x, y \in \mathfrak{g}.$$

关于 π_1 是次度量映射的断言，我们使用范数$\|\cdot\|_\infty$和 $\|\cdot\|^{(\epsilon)}$ 的定义来计算

$$\begin{aligned}\pi_1\left(B_{\|\cdot\|^{(\epsilon)}}(0,1)\right) &= \pi_1\left(\delta_\epsilon B_{\|\cdot\|^{(1)}}(0,1/\epsilon)\right)\\ &= \epsilon\pi_1\left(B_{\|\cdot\|^{(1)}}(0,1/\epsilon)\right)\\ &= \epsilon B_{\|\cdot\|_\infty}(0,1/\epsilon)\\ &= B_{\|\cdot\|_\infty}(0,1).\end{aligned}$$

□

度量几何中的一个标准事实是，次度量映射可以将其目标空间中的 1-Lipschitz 曲线提升到其定义域中：

命题 3.15。 设 $f : X \to Y$ 是度量空间之间的次度量映射。假设 X 是有界紧的。那么，对于每条 1-*Lipschitz* 曲线 $\gamma : [0,T] \to Y$以及每个 $x \in f^{-1}(\gamma(0))$，存在一条 1-*Lipschitz* 曲线 $\tilde\gamma : [0,T] \to X$，使得$\tilde\gamma(0) = x$ 且 $f \circ \tilde\gamma = \gamma$.

命题 3.16。 设 G是一个配备渐近分次的单连通幂零次芬斯勒李群 $(V_1, \dots, V_s)$，使得与收缩度量 ρ_ϵ 相关联的次*Finsler*结构为 $(\Delta^{(\epsilon)}, \|\cdot\|^{(\epsilon)})$。那么，对于任意欧几里得度量 $\|\cdot\|_{\mathrm{E}}$，存在一个常数 $C > 0$，其仅取决于 G、Δ、$\|\cdot\|$、$\|\cdot\|_{\mathrm{E}}$以及$(V_1, \dots, V_s)$，使得

$$\|(u)_k\|_{\mathrm{E}} \le C\epsilon^{k-1}\|(u)_k\|^{(\epsilon)}, \quad \forall k \in \{1,\dots,s\},\ \forall \epsilon \in [0,1],\ \forall u \in \Delta^{(\epsilon)}, \tag{19}$$

采用约定 $0^0 = 1$，并且

$$\|u\|_{\mathrm{E}} \le C\|u\|^{(\epsilon)}, \quad \forall \epsilon \in [0,1],\ \forall u \in \Delta^{(\epsilon)}. \tag{20}$$

证明。 关于 (19)，令 $\epsilon \in (0,1]$ 和 $u \in \Delta^{(\epsilon)}$。由于 $\|\cdot\|^{(1)}$ 和 $\|\cdot\|_{\mathrm{E}}$ 是 $\mathfrak{g}$上的范数，存在一个常数 $C \le 1$ 使得 $\|\cdot\|^{(1)} \ge C\|\cdot\|_{\mathrm{E}}$。因此

$$\begin{aligned}\|(u)_k\|^{(\epsilon)} &\overset{\text{def}}{=} \epsilon\|\delta_\epsilon^{-1}(u)_k\|^{(1)}\\ &\ge C\epsilon\|\delta_\epsilon^{-1}(u)_k\|_{\mathrm{E}}\\ &= C\epsilon^{1-k}\|(u)_k\|_{\mathrm{E}}.\end{aligned}$$

对于 $\epsilon = 0$，由于 $\Delta^{(0)} \overset{(16)}{=} V_1$ 且 $\|\cdot\|_{\mathrm{E}}|_{V_1}$ 是 V_1上的范数，存在一个常数 C'使得

$$\|u\|_{\mathrm{E}} \le C'\|u\|^{(0)}, \quad \forall u \in V_1. \tag{21}$$

关于 (20)，令 $\epsilon \ne 0$ 和 $u \in \Delta^{(\epsilon)}$。于是

$$\begin{aligned}\|u\|^{(\epsilon)} &\overset{\text{def}}{=} \epsilon\|\delta_\epsilon^{-1}u\|^{(1)}\\ &\ge C\epsilon\|\delta_\epsilon^{-1}u\|_{\mathrm{E}}\\ &= C\|(u)_1 + \epsilon^{-1}(u)_2 + \cdots + \epsilon^{-s+1}(u)_s\|_{\mathrm{E}}\\ &\ge C\|(u)_1 + (u)_2 + \cdots + (u)_s\|_{\mathrm{E}}\\ &= C\|u\|_{\mathrm{E}}.\end{aligned}$$

若 $\epsilon = 0$，则由 (21)，$\|u\|_{\mathrm{E}} \le C'\|u\|^{(0)},\ \forall u \in V_1 = \Delta^{(0)}$. □

3.3.2. 次芬斯勒李群上的膨胀度量。 设 (G,d) 是一个次芬斯勒李群（不必幂零），具有与 $(\Delta,\|\cdot\|)$ 相关联的距离，并赋予切分次 $(W_i)_{i=1}^s$。令 $r>0$ 足够小，使得限制于 $B_{d_0}(0,r)$ 的指数映射为微分同胚。我们将膨胀度量定义为

$$d_\epsilon(x,y) \coloneqq \begin{cases} \frac{1}{|\epsilon|} d(\delta_\epsilon x, \delta_\epsilon y), & \epsilon \neq 0, \\ d_0(x,y), & \epsilon = 0. \end{cases} \qquad , \quad \forall x,y \in B_{d_0}(0,r).$$

局部而言，对于 $\epsilon \neq 0$，度量 d_ϵ 是 $\cdot_\epsilon$ 上单位元邻域内与 $(\Delta,\|\cdot\|)$。相关联的左不变次芬斯勒度量。

注 3.17。 膨胀度量的定义表明，对于 $\epsilon \neq 0$，伸缩$\delta_{\epsilon^{-1}} : (B_{d_0}(0,|\epsilon|r)\ \frac{1}{|\epsilon|} d) \to (B_{d_0}(0,r)\ d_\epsilon)$ 是一个等距映射。

对 (13) 应用膨胀 δ_ϵ，我们可得到距离族的某种等度连续性性质：存在 $r>0$, $C \geq 1$，使得

$$\frac{1}{C} d_0(0,p) \leq d_\epsilon(0,p) \leq C d_0(0,p), \quad \forall p \in B_{d_0}(0,r),\ \forall \epsilon \in (0,1]. \tag{22}$$

此外，由于 d_ϵ 是测地距离，我们还可得

$$B_{d_\epsilon}(0,r'/C) \subseteq B_{d_0}(0,r'), \quad \forall r' \leq r, \forall \epsilon \in (0,1]. \tag{23}$$

3.4. **Carnot 商理想**。 在定理 5.1 和定理 6.1 的证明中，我们需要对两条曲线 γ_0 和 γ_ϵ之差的范数进行估计。为此，我们引入 $\mathfrak{g}$ 的一类理想 $\mathfrak{i}$，称为 Carnot 商理想，使得 γ_0 和 γ_ϵ 在商 $\mathfrak{g}/\mathfrak{i}$ 上的投影重合。因此，它们的差$v \coloneqq \gamma_0(1)^{-1} *_\epsilon \gamma_\epsilon(1)$属于 $\mathfrak{i}$。随后，我们利用这一事实来得到 v 的范数上界，该上界优于直接应用球盒定理所得的上界（见引理 5.3 和引理 6.3）。

定义 3.18。 设 (G,Δ) 是一个极化群，且 $(D_i)_{i=1}^s$ 是一个分次。若子空间 $\mathfrak{i} \subseteq \mathfrak{g}$ 满足以下条件，则称其为 (G,Δ) 的*Carnot* 商理想 （相对于分次$(D_i)_{i=1}^s$ ）

(1) $\mathfrak{i}$ 是 $\mathfrak{g}$的理想。(2) $\mathfrak{g}/\mathfrak{i}$ 由 $(\pi(D_j))_{1\leq j\leq s}$ 分层，其中 $\pi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}/\mathfrak{i}$ 是商映射。(3) $\Delta \subseteq D_1 + \mathfrak{i}$.

我们声称条件 (3) 等价于

$$\pi(u) = \pi \circ \pi_1(u), \quad \forall u \in \Delta. \tag{24}$$

事实上，设 $u = \sum_{i=1}^s (u)_i \in \Delta$。那么

$$\pi(u) = \pi(\pi_1(u)) \iff \pi\left(\sum_{i=2}^s (u)_i\right) = 0 \iff \sum_{i=2}^s (u)_i \in \mathfrak{i}.$$

此外，我们声称条件 (3) 也等价于

$$\Delta + \mathfrak{i} = D_1 + \mathfrak{i}. \tag{25}$$

事实上，若 $\Delta + \mathfrak{i} = D_1 + \mathfrak{i}$，则显然 $\Delta \subseteq D_1 + \mathfrak{i}$。现在假设 $\Delta \subseteq D_1 + \mathfrak{i}$，因此 $\Delta + \mathfrak{i} \subseteq D_1 + \mathfrak{i}$。商映射 $\pi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}/\mathfrak{i}$ 是李代数同态，因此，由于 Δ 是括号生成的，$\pi(\Delta) = \Delta + \mathfrak{i}$ 也括号生成。

因此， $\Delta + \mathfrak{i}$ 是分层李代数 $\mathfrak{g}/\mathfrak{i}$的第一层 $D_1 + \mathfrak{i}$ 中的括号生成子空间，所以它必定与 $D_1 + \mathfrak{i}$.重合

此外请注意，如果 $(D_i)_{i=1}^s$ 是切分次，则对于任意理想，条件 (3) 都成立，因为 $\Delta = D_1$ 和 $\pi_1|_{D_1} = \mathrm{id}$。

例 3.19。 (1) 设 $(G, \Delta, \|\cdot\|)$ 是一个次芬斯勒李群，并设 $(D_i)_{i=1}^s$是渐近分次或切分次之一。记 d 为 G上的次芬斯勒度量。则

$$(G, d) \text{ is a Carnot group} \iff \{0\} \text{ is a Carnot quotient ideal.}$$

事实上，如果 (G, d) 是一个 Carnot 群，那么显然 $\{0\}$ 是一个 Carnot 商理想。反之，如果 $\{0\}$ 是一个 Carnot 商理想，则分次 $(D_i)_{i=1}^s$ 是 Lie(G) 的一个分层，并且根据 (25) 可得 $\Delta = D_1$。

(2) 对于每个带有渐近分次 $(V_1)_{i=1}^s$的幂零李代数 $\mathfrak{g}$，对于任意极化 Δ，理想 $V_2 \oplus \cdots \oplus V_s$ 都是 Carnot 商理想。(3) 考虑来自 [LDT22] 的不可分层李代数 $N_{5,2,2}$。它是由 $\mathbb{R}^5 = \mathrm{span}\{e_1, \ldots, e_5\}$ 生成的李代数，其非平凡括号为 $[e_1, e_2] = e_4, [e_1, e_4] = [e_2, e_3] = e_5$。考虑渐近分次 $V_1 = \mathrm{span}\{e_1, e_2, e_3\}$，

$V_2 =$ 张成$\{e_4\}$， $V_3 =$张成$\{e_5\}$，且单位元处的分布为 $\Delta = V_1$。于是$\mathfrak{i} =$张成$\{e_5\}$是一个 Carnot 商理想。

定义 3.20。 设 $(D_i)_{i=1}^s$ 是一个极化李群 (G, Δ) 的李代数的分次，满足 $\mathrm{step}(\Delta) \le s$。我们定义

$$\beta := \min\{k \in \mathbb{Z} : \exists \mathfrak{i} \subseteq D_{\le k} \text{ Carnot quotient ideal}\} \in \{0, \ldots, s\}.$$

注意到根据例 3.19 (1)，度量空间 (G, d) 是 Carnot 群，当且仅当 $\beta = 0$。

例 3.21。 (1) 对于每个黎曼群 G，其李代数为 $\mathfrak{g}$ 且切分次为 $W_1 = \mathfrak{g}$，我们都有 $\beta \le 1$，因为 $\mathfrak{g}$ 是其自身的 Carnot 商理想。

(2) 一个满足 $1 < \beta < s$ 的例子。考虑李代数 $N_{5,2,2} =$ 张成$\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$，以及来自 [LDT22], 的 5 维丝状代数：$N_{5,2,1} =$ 张成$\{e_1', e_2', e_3', e_4', e_5'\}$；它是唯一非平凡括号为 $[e_1', e_2'] = e_3'$， $[e_1', e_3'] = e_4'$， $[e_1', e_4'] = e_5'$的 5 维李代数。令$\mathfrak{g} = N_{5,2,1} \times N_{5,2,1}$ 为李代数直积。在 $\mathfrak{g}$ 上赋予由 $(V_i)_{i=1}^4$ 定义的渐近分次

$$\begin{aligned} V_1 &:= \mathrm{span}\{e_1, e_2, e_3, e_1', e_2'\}, \\ V_2 &:= \mathrm{span}\{e_4, e_3'\}, \\ V_3 &:= \mathrm{span}\{e_5, e_4'\}, \\ V_4 &:= \mathrm{span}\{e_5'\}, \end{aligned}$$

以及括号生成子空间 $\Delta := N_{5,2,2} + V_1$。那么 $\mathfrak{i} := N_{5,2,2}$ 是一个 Carnot 商理想。事实上， $\mathfrak{i}$ 显然是 $\mathfrak{g}$ 的理想，并且 $\mathfrak{g}/\mathfrak{i} \simeq N_{5,2,1}$由 $(V_i + \mathfrak{i})_{i=1}^4$ 分层。因此 $\beta \le 3$。此外，相对于 $(V_i)_{i=1}^4$，$(\mathfrak{g}, \Delta)$ 的每个 Carnot 商理想 $\mathfrak{j}$ 都必须包含 e_5，否则 $\mathfrak{g}/\mathfrak{j}$ 将不可分层（因为它会包含 $N_{5,2,2}$ 作为子代数）。因此$\beta = 3$。

我们记录 Carnot 商理想的一些性质。

引理 3.22（与渐近分次相关的 Carnot 商理想的性质）。 设 （$\mathfrak{g}, \Delta$）是一个幂零极化李代数，且 （V_i）$_i$ 是一个渐近分次。设 $\mathfrak{i} \lhd \mathfrak{g}$ 是关于（V_i）$_i$的 *Carnot* 商理想。那么

(1) $\mathfrak{i}$ 是膨胀不变的。*(2)* $\mathfrak{i} \lhd (\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot]^{(\epsilon)})$ 是一个理想，对每个 $\epsilon \in [0,1]$.*(3)* $\pi|_{\Delta^{(\epsilon)}} = \pi \circ \pi_1|_{\Delta^{(\epsilon)}}$，对每个 $\epsilon \in (0,1]$。*(4)* $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot]^{(\epsilon)})/\mathfrak{i}$ 由 $(\pi(V_j))^{1\le j\le s}$ 分层，对每个 $\epsilon \in [0,1]$。

(5) 用 $[\cdot,\cdot]^{(\epsilon,\mathfrak{i})}$ 表示 $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot]^{(\epsilon)})/\mathfrak{i}$ 上的商括号。则

$$[\cdot,\cdot]^{(\epsilon,\mathfrak{i})} = [\cdot,\cdot]^{(\tau,\mathfrak{i})}, \quad \forall \epsilon, \tau \in [0,1].$$

(6) 对于 $\epsilon \in [0,1]$，为 $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot]^{(\epsilon)})$ 和 $(\mathfrak{g}/\mathfrak{i}, [\cdot,\cdot]^{(\epsilon,\mathfrak{i})})$ 分别配备 *Dynkin* 乘积 $*_\epsilon$ 与 $*_{\epsilon,\mathfrak{i}}$。则 $\pi : (\mathfrak{g}, *_\epsilon) \to (\mathfrak{g}/\mathfrak{i}, *_{\epsilon,\mathfrak{i}})$ 是一个李群同态。

证明。 (1). 对于 $\tau > 0$，记 $\delta_\tau : \overline{\mathfrak{g}/\mathfrak{i}} \to \mathfrak{g}/\mathfrak{i}$ 为商上关于 $(\pi(V_j))_{j=1}^s$的伸缩。我们断言

$$\overline{\delta_\tau} \circ \pi = \pi \circ \delta_\tau, \quad \forall \tau \in \mathbb{R}_{>0}.$$

事实上，对于 $v \in V_j$，我们有

$$\pi(\delta_\tau v) = \pi(\tau^j v) = \tau^j \pi(v) = \overline{\delta_\tau}(\pi(v)),$$

因为 $\overline{\delta_\tau}|_{\pi(V_j)}$ 是乘以 τ^j。由线性性可得该断言。因此

$$\{0\} = \overline{\delta_\tau}(\pi(\mathfrak{i})) = \pi(\delta_\tau(\mathfrak{i})).$$

因此 $\delta_\tau(\mathfrak{i}) \subseteq \ker \pi = \mathfrak{i}$。

(2). 对于 $\epsilon > 0$，由 $\mathfrak{i}$ 的伸缩不变性可知

$$[\mathfrak{g}, \mathfrak{i}]^{(\epsilon)} \overset{\text{def}}{=} \delta_\epsilon[\delta_{\epsilon^{-1}}\mathfrak{g}, \delta_{\epsilon^{-1}}\mathfrak{i}] \subseteq \delta_\epsilon[\mathfrak{g}, \mathfrak{i}] \subseteq \delta_\epsilon \mathfrak{i} \subseteq \mathfrak{i}.$$

由引理 3.8，我们还得到 $\epsilon = 0$.的情形

(3). 显然，对于每个 $\epsilon > 0$，都有 $\pi_1 \bigcirc \delta_\epsilon = \delta_\epsilon \bigcirc \pi_1$。因此，对于 $u \in \Delta$，有

$$\begin{aligned} \pi \circ \pi_1 \circ \delta_\epsilon(u) &= \pi \circ \delta_\epsilon \circ \pi_1(u) \\ &= \overline{\delta_\epsilon} \circ \pi \circ \pi_1(u) \\ &\overset{(24)}{=} \overline{\delta_\epsilon} \circ \pi(u) \\ &= \pi \circ \delta_\epsilon(u), \end{aligned}$$

也就是说，$\pi|_{\Delta^{(\epsilon)}} = \pi \bigcirc \pi_1|_{\Delta^{(\epsilon)}}$。

（4）。对于 $\epsilon = 0$，这是显然的。对于 $\epsilon > 0$，利用 $\mathfrak{g}/\mathfrak{i}$ 按 $(\pi(V_j))_{j=1}^{s}$ 分层，因此 $\pi([V_1, V_k]) = \pi(V_{k+1})$，我们得到

$$\begin{aligned}
[\pi(V_1), \pi(V_k)]^{(\epsilon,\mathfrak{i})} &= \pi([V_1, V_k]^{(\epsilon)}) \\
&= \pi(\delta_\epsilon[\delta_{\epsilon^{-1}} V_1, \delta_{\epsilon^{-1}} V_k]) \\
&= \overline{\delta_\epsilon}(\pi([V_1, V_k])) \\
&= \overline{\delta_\epsilon}(\pi(V_{k+1})) \\
&= \pi(V_{k+1}).
\end{aligned}$$

（5）。设 $\epsilon \in (0,1]$ 和 $v \in V_i$，$w \in V_j$。那么

$$\begin{aligned}
[\pi(v), \pi(w)]^{(\epsilon,\mathfrak{i})} &= \pi([v, w]^{(\epsilon)}) \\
&= ([v, w]^{(\epsilon)})_{i+j} + \mathfrak{i} \\
&= ([v, w])_{i+j} + \mathfrak{i} \\
&= [v, w]^{(0)} + \mathfrak{i} \\
&= [\pi(v), \pi(w)]^{(0,\mathfrak{i})},
\end{aligned}$$

其中，在第二个等式中，我们用到了 $[\pi(V_1)\ \pi(V_k)]^{(\epsilon,\mathfrak{i})} = \pi(V_{i+j})$。

（6）。两个指数映射 $\exp_{\mathfrak{g}} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ 和 $\exp_{\mathfrak{g}/\mathfrak{i}} : \mathfrak{g}/\mathfrak{i} \to \mathfrak{g}/\mathfrak{i}$ 都是全局微分同胚，并且满足 $\exp_{\mathfrak{g}} \overline{\ } \mathrm{id}_{\mathfrak{g}}$ 和 $\exp_{\mathfrak{g}/\mathfrak{i}} \overline{\ } \mathrm{id}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{i}}$。由于 $\mathfrak{g}$ 是单连通的，存在唯一的李群同态 $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}/\mathfrak{i}$，使得 $\rho_* = \pi$。我们有

$$\rho = \exp_{\mathfrak{g}/\mathfrak{i}} \circ \pi \circ \exp_{\mathfrak{g}}^{-1} = \pi.$$

□

如果将渐近分次替换为切分次，并将括号 $[\cdot,\cdot]^{(\epsilon)}$ 替换为括号 $[\![\cdot,\ \cdot]\!]^{(\epsilon)}$，类似的性质依然成立：

引理 3.23（与切分次相关的 Carnot 商理想的性质）。设（$\mathfrak{g}$、Δ）是一个极化李代数，且（W_i）$_i$ 是相对于Δ的一个切分次。设 $\mathfrak{i} \lhd \mathfrak{g}$ 是相对于（W_i）$_i$的一个 *Carnot* 商理想。那么

(1) $\mathfrak{i}$ 是膨胀不变的。

(2) $\mathfrak{i} \lhd (\mathfrak{g}, [\![\cdot,\cdot]\!]^{(\epsilon)})$ 是理想，对每个 $\epsilon \in [0,1]$.均成立。

(3) $(\mathfrak{g}, [\![\cdot,\cdot]\!]^{(\epsilon)})/\mathfrak{i}$ *is stratified by* $(\pi(W_j))_{1\le j\le s}$*, for every* $\epsilon \in [0,1]$.

(4) 记 $(\mathfrak{g}, [\![\cdot,\cdot]\!]^{(\epsilon)})/\mathfrak{i}$ 上的商括号为 $[\![\cdot,\cdot]\!]^{(\epsilon,\mathfrak{i})}$。则

$$[\![\cdot,\cdot]\!]^{(\epsilon,\mathfrak{i})} = [\![\cdot,\cdot]\!]^{(\tau,\mathfrak{i})}, \quad \forall \epsilon, \tau \in [0,1].$$

(5) 对于 $\epsilon \in [0,1]$，在 $(\mathfrak{g}, [\![\cdot,\cdot]\!]^{(\epsilon)})$ 和 $(\mathfrak{g}/\mathfrak{i}, [\![\cdot,\cdot]\!]^{(\epsilon,\mathfrak{i})})$ 上分别赋予 *Dynkin* 乘积 $\cdot_\epsilon$ 和 $\cdot_{\epsilon,\mathfrak{i}}$。则 $\pi : (\mathfrak{g}, \cdot_\epsilon) \to (\mathfrak{g}/\mathfrak{i}, \cdot_{\epsilon,\mathfrak{i}})$ 是局部李群同态。

证明。断言 (1)、(2)、(3) 和 (4) 分别由引理 3.22 的 (1)、(2)、(4) 和 (5) 的证明中所采用的相同论证得到。

关于（5），两个指数映射 $\exp_{\mathfrak{g}} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ 和 $\exp_{\mathfrak{g}/\mathfrak{i}} : \mathfrak{g}/\mathfrak{i} \to \mathfrak{g}/\mathfrak{i}$ 都是局部微分同胚，并且在原点附近分别满足 $\exp_{\mathfrak{g}} = \mathrm{id}_{\mathfrak{g}}$ 和 $\exp_{\mathfrak{g}/\mathfrak{i}} = \mathrm{id}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{i}}$。因此，映射 $\exp_{\mathfrak{g}/\mathfrak{i}} \bigcirc \pi \bigcirc \exp_{\mathfrak{g}}^{-1} = \pi$ 是一个局部李群同态。□

4. Grönwall Lemma type results

Gr¨onwall 引理型结果用于在两条曲线从同一点出发且其导数之差具有一致上界的条件下，给出这两条曲线端点距离的上界。这里的主要技术难点在于，我们需要比较不同点处的导数。在我们的语境中，典型的 Gr¨onwall 引理如下，其证明可见 [ALDNG23，引理 A.1]，或见 [LD25，引理 12.2.2]。

引理 4.1 (Gr¨onwall)。 设 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ 且 $X, Y : \Omega \times [0,T] \to \mathbb{R}^n$。设 $\|\cdot\|$ 是 $\mathbb{R}^n$上的一个范数。假设存在 $E, K > 0$，使得对所有 $p, q \in \Omega$ 以及所有 $t \in [0,T]$

$$\|X(p,t) - Y(q,t)\| \le E + K\|p - q\|.$$

若 $\eta, \gamma : [0,T] \to \Omega$ 分别是 X和 Y的积分曲线，并满足 $\eta(0) = \gamma(0)$，则

$$\|\gamma(t) - \eta(t)\| \le E\frac{e^{Kt} - 1}{K}, \quad \forall t \in [0,T].$$

本节将在一些更严格的假设下，证明引理 4.1 的两个更精确版本；这些假设足以将结果应用于 Pansu 定理和 Mitchell 定理的更精确版本的证明。

4.1. Gr¨onwall 引理：Pansu 渐近定理。

我们证明一个适用于 Pansu 渐近定理背景的 Gr¨onwall 引理版本（见引理 4.9）。首先，需要引入一些常数。

定义 4.2. 设 $(\mathfrak{g}, \Delta)$ 为一个极化幂零李代数 $\mathfrak{g}$，且 $(V_i)_{i=1}^s$ 为一个渐近分次。我们定义

- $\alpha_{(1,\infty)} \coloneqq \max\{j \in \mathbb{N} : [V_{p_1}, \dots, V_{p_k}] \subseteq V_{|p|} \oplus V_{\ge |p|+j},\ \forall k \in \mathbb{N},\ \forall p \in \mathbb{N}^k\}$.
- $\alpha_{(2,\infty)} \coloneqq \max\{j \in \mathbb{N} : v - \pi_1(v) \in \mathfrak{g}^{(j+1)},\ \forall v \in \Delta\}$.
- $\alpha_\infty \coloneqq \min\{\alpha_{(1,\infty)}, \alpha_{(2,\infty)}\}$.

常数 $\alpha_{(1,\infty)}$ 是 Cor- nullier 在 [Cor17]，中引入的常数 e_D 的一个细微变体，可以将其视为对该渐近分次的可分层程度的量化。注意，$(V_1, \dots, V_s)$ 是一个分层，当且仅当$\alpha_{(1,\infty)} = +\infty$. 常数 $\alpha_{(2,\infty)}$ 可以看作是对 Δ 距离成为分层的第一层有多近的量化。注意，$\alpha_{(2,\infty)} = +\infty$ 当且仅当$\Delta = V_1$. 由此可知，(G, Δ) 是一个（度量）Carnot 群，当且仅当 $\alpha_\infty = +\infty$.

例 4.3. (1) 设 G 是一个配备了分层 $(V_i)_i$ 的单连通幂零可分层李群。假设 G 配备了极化 $\Delta = V_1 \oplus V_2$。那么

$$\alpha_{(1,\infty)} = +\infty,\ \alpha_{(2,\infty)} = \alpha_\infty = 1.$$

(2) 设 G 是一个配备渐近分次 $(V_i)_i$ 的单连通非分层幂零李群。假设 G 配备极化 $\Delta = V_1$.，则

$$\alpha_\infty = \alpha_{(1,\infty)} < \alpha_{(2,\infty)} = +\infty.$$

命题 4.4. 若配备渐近分次$(V_i)_{i=1}^s$ 的幂零次芬斯勒李群 $(G, \Delta, \|\cdot\|)$ 不是 *Carnot* 群，则

$$\alpha_\infty < \beta,$$

其中 α_∞ 和 β 是定义 *4.2* 和定义 *3.20* 中的常数。

证明。 由于 $(G,\ \Delta,\ \|\cdot\|)$ 不是 Carnot，$\beta \geq 1$。设 $\mathfrak{i} \subseteq V_{\leq\beta}$ 为一个 Carnot 商理想。我们分两种情况讨论。

情况 1：$\Delta \neq V_1$。一方面，由于 $\mathfrak{i}$ 是一个 Carnot 商理想，我们有

$$\Delta \overset{3.18(3)}{\subseteq} V_1 + \mathfrak{i} \subseteq V_{\leq\beta}.$$

另一方面，根据 $\alpha_{(2,\infty)}$ 的定义，我们有

$$\Delta \subseteq V_1 \oplus V_{\geq\alpha_{(2,\infty)}+1}.$$

因此，由于 $\Delta \neq V_1$，我们有 $\alpha_{(2,\infty)} + 1 \leq \beta$，从而 $\alpha_\infty \leq \alpha_{(2,\infty)} < \beta$.

情况 2：$\Delta = V_1$。令 $k \in \{2,\ \ldots,\ s-1\}$ 和 $p \in \mathbb{N}^k$。根据定义 3.18：

$$\begin{aligned}[V_{p_1},\ldots,V_{p_k}] + \mathfrak{i} &\overset{3.18(1)}{=} [V_{p_1}+\mathfrak{i},\ldots,V_{p_k}+\mathfrak{i}]\\ &\overset{3.18(2)}{\subseteq} V_{|p|} + \mathfrak{i}.\end{aligned}$$

因此，

$$[V_{p_1},\ldots,V_{p_k}] \subseteq V_{|p|} + \mathfrak{i} \subseteq V_{|p|} + V_{\leq\beta}.$$

利用命题2.4，我们得到

$$[V_{p_1},\ldots,V_{p_k}] \overset{2.4(6)}{\subseteq} V_{|p|} \oplus V_{|p|+1} \oplus \cdots \oplus V_\beta.$$

特别地，由于 $|p| \geq 2$，我们有

$$[V_{p_1},\ldots,V_{p_k}] \subseteq V_{|p|} \oplus V_{|p|+1} \oplus \cdots \oplus V_{|p|+\beta-2}.$$

此外，根据 $\alpha_{(1,\infty)}$ 的定义：

$$[V_{p_1},\ldots,V_{p_k}] \subseteq V_{|p|} \oplus V_{|p|+\alpha_{(1,\infty)}} \oplus \cdots \oplus V_{|p|+\beta-2}.$$

因此 $\alpha_{(1,\infty)} \leq \beta - 2$，否则根据命题2.4(7)，$\mathrm{Lie}(G)$ 将是可分层的（从而 $(G,\ d)$ 将是一个 Carnot 群）。□

引理 4.5. 设 $\mathfrak{g}$是一个带有渐近分次的极化幂零李代数，该渐近分次诱导出投影 $x \mapsto (x)_j$。设 $n \in \mathbb{N}, p \in \mathbb{N}^n$，以及 $x_1, \ldots, x_n \in \mathfrak{g}$.那么

(26)
$$[(x_1)_{p_1},\ldots,(x_n)_{p_n}] - [(x_1)_{p_1},\ldots,(x_n)_{p_n}]^{(0)} = \sum_{j=|p|+\alpha_{(1,\infty)}}^{s} ([(x_1)_{p_1},\ldots,(x_n)_{p_n}])_j.$$

证明。 我们对 $n \in \mathbb{N}$ 使用归纳法来证明

(27) $$[(x_1)_{p_1},\ldots,(x_n)_{p_n}]^{(0)} = ([(x_1)_{p_1},\ldots,(x_n)_{p_n}])_{|p|},\quad \forall p \in \mathbb{N}^n,\ \forall x_1,\ldots,x_n \in \mathfrak{g}.$$

根据括号 $[\cdot,\cdot]^{(0)}$ 的定义，对于 $x,\ y \in \mathfrak{g}$和 $j,\ k \in \mathbb{N}$，有：

(28) $$[(x)_j,(y)_k]^{(0)} = ([(x)_j,(y)_k])_{j+k}.$$

现在假设该断言对长度不超过 $n-1$ 的括号成立。利用渐近分次的性质，我们得到

$$\begin{aligned}([(x_1)_{p_1},\ldots,(x_n)_{p_n}])_{|p|} &\overset{2.4(6)}{=} \sum_{j=|p|-p_1}^{s} ([(x_1)_{p_1},([(x_2)_{p_2},\ldots,(x_n)_{p_n}])_j])_{|p|}\\ &\overset{2.4(6)}{=} ([(x_1)_{p_1},([(x_2)_{p_2},\ldots,(x_n)_{p_n}])_{|p|-p_1}])_{|p|}\\ &\overset{(27)}{=} ([(x_1)_{p_1},([(x_2)_{p_2},\ldots,(x_n)_{p_n}]^{(0)})_{|p|-p_1}])_{|p|}\\ &\overset{(28)}{=} [(x_1)_{p_1},\ldots,(x_n)_{p_n}]^{(0)}.\end{aligned}$$

现在，根据 $\alpha_{(1,\infty)}$ 的定义，我们有

$$[(x_1)_{p_1},\dots,(x_n)_{p_n}]-[(x_1)_{p_1},\dots,(x_n)_{p_n}]^{(0)} \overset{2.4(6),(27)}{=} \sum_{j=|p|+1}^{s}([(x_1)_{p_1},\dots,(x_n)_{p_n}])_j$$
$$= \sum_{j=|p|+\alpha_{(1,\infty)}}^{s}([(x_1)_{p_1},\dots,(x_n)_{p_n}])_j.$$

□

引理 4.6. 设 $\mathfrak{g}$ 是一个带有渐近分次的极化幂零李代数，该渐近分次诱导出投影 $x\mapsto (x)_j$。设 x_1、$x_2\in\mathfrak{g}$ 和 $\epsilon\in[0,1].$。那么

(29)
$$x_1 *_\epsilon x_2 - x_1 *_0 x_2 = \sum_{k=2}^{s}\sum_{q\in\{1,2\}^k}\sum_{p\in\{1,\dots,s\}^k}\sum_{j=|p|+\alpha_{(1,\infty)}}^{s} b_{k,q}\epsilon^{j-|p|}([(x_{q_1})_{p_1},\dots,(x_{q_k})_{p_k}])_j,$$

其中 $b_{k,q}$ 是 *BCH* 公式 (9)中的常数。

证明。 对于 $y_1,\dots,y_n\in\mathfrak{g}$和 $n\in\mathbb{N}$，根据括号 $[\cdot,\cdot]^{(\epsilon)}$的定义，我们有

$$[y_1,\dots,y_n]^{(\epsilon)}=\delta_\epsilon[\delta_\epsilon^{-1}y_1,\dots,\delta_\epsilon^{-1}y_n],$$

又由于膨胀是 $(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot]^{(0)})$ 的李代数自同构，我们有

$$[y_1,\dots,y_n]^{(0)}=\delta_\epsilon[\delta_\epsilon^{-1}y_1,\dots,\delta_\epsilon^{-1}y_n]^{(0)}.$$

现在我们使用 BCH 公式和引理 4.5 进行计算

$$x_1 *_\epsilon x_2 - x_1 *_0 x_2 \overset{(9)}{=} \sum_{k=2}^{s}\sum_{q\in\{1,2\}^k} b_{k,q}([x_{q_1},\dots,x_{q_k}]^{(\epsilon)}-[x_{q_1},\dots,x_{q_k}]^{(0)})$$
$$=\sum_{k=2}^{s}\sum_{q\in\{1,2\}^k} b_{k,q}\delta_\epsilon([\delta_{\epsilon^{-1}}x_{q_1},\dots,\delta_{\epsilon^{-1}}x_{q_k}]-[\delta_{\epsilon^{-1}}x_{q_1},\dots,\delta_{\epsilon^{-1}}x_{q_k}]^{(0)})$$
$$\overset{(26)}{=}\sum_{k=2}^{s}\sum_{q\in\{1,2\}^k}\sum_{p\in\{1,\dots,s\}^k}\sum_{j=|p|+\alpha_{(1,\infty)}}^{s} b_{k,q}\delta_\epsilon([(\delta_{\epsilon^{-1}}x_{q_1})_{p_1},\dots,(\delta_{\epsilon^{-1}}x_{q_k})_{p_k}])_j$$
$$=\sum_{k=2}^{s}\sum_{q\in\{1,2\}^k}\sum_{p\in\{1,\dots,s\}^k}\sum_{j=|p|+\alpha_{(1,\infty)}}^{s} b_{k,q}\epsilon^{j-|p|}([(x_{q_1})_{p_1},\dots,(x_{q_k})_{p_k}])_j.$$

□

引理 4.7. 设$(\mathfrak{g},\Delta)$ 为一个带有范数$\|\cdot\|$ 和渐近分次的极化幂零李代数，该渐近分次诱导出投影 $x\mapsto(x)_j=\pi_j(x)$ 以及膨胀 $(\delta_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$。对于 $\mathfrak{g}$ 上的任意范数 $\|\cdot\|_{\mathrm{E}}$，存在一个常数 C，使得

(30)
$$\|u-\pi_1(u)\|_{\mathrm{E}}\le C\epsilon^{\alpha_{(2,\infty)}}\|u\|^{(\epsilon)},\quad \forall\epsilon\in[0,1],\forall u\in\Delta^{(\epsilon)}$$

证明. 由 (19) 可知，存在一个 C，使得

$$\|(u)_k\|_{\mathrm{E}}\overset{(19)}{\le} C\epsilon^{k-1}\|u\|^{(\epsilon)},\quad \forall\epsilon\in(0,1],\ \forall u\in\Delta^{(\epsilon)},\ \forall k\in\{2,\dots,s\}.$$

因此，根据$\alpha_{(2,\infty)}$ 的定义和三角不等式

$$\|u-\pi_1(u)\|_{\mathrm{E}}\le\|(u)_{\alpha_{(2,\infty)}+1}\|_{\mathrm{E}}+\|(u)_{\alpha_{(2,\infty)}+2}\|_{\mathrm{E}}+\dots+\|(u)_s\|_{\mathrm{E}}$$
$$\le C\epsilon^{\alpha_{(2,\infty)}}\|u\|^{(\epsilon)}+\dots+C\epsilon^{s-1}\|u\|^{(\epsilon)}$$
$$\le C\epsilon^{\alpha_{(2,\infty)}}\|u\|^{(\epsilon)}.$$

对于 $\epsilon = 0$，由于 $\Delta^{(0)} = V_1$：

$$\|u - \pi_1(u)\|_{\mathrm{E}} = 0 \le C\epsilon^{\alpha_{(2,\infty)}}\|u\|^{(0)}, \quad \forall u \in \Delta^{(0)}.$$

□

我们现在可以陈述并证明适用于 Pansu 定理的 Gr¨onwall 引理版本。

定义 4.8。给定 $u \in L^2([0,1],\mathfrak{g})$ 和 $\epsilon \in [0,1]$，我们定义时变向量场 $X^{u,\epsilon}\colon \mathfrak{g}\times[0,1]\to\mathfrak{g}$ 如下

$$X^{u,\epsilon}(g,t) \coloneqq (L_g^{*_\epsilon})_* u(t).$$

引理 4.9 (Gr¨onwall 引理（Pansu 定理的情形）)。设 $(G,\Delta,\|\cdot\|)$ 是一个配备渐近分次 $(V_i)_{i=1}^s$ 的幂零次芬斯勒李群。设 $\|\cdot\|_{\mathrm{E}}$ 是 $\mathfrak{g}$ 上的一个范数。存在一个常数 $C>0$，使得对于所有 $L>0$，以及所有满足 $\|u(t)\|^{(\epsilon)} \le L$ 的 $u \in L^2([0,1],\Delta^{(\epsilon)})$，几乎处处的 $t\in[0,1]$，都有：

(1) 对于定义 *4.8* 中所定义的向量场，我们有：对于 g、$h \in B_{\mathrm{E}}(0,1)$ 以及几乎每一个 $t\in[0,1]$：

$$\|X^{u,\epsilon}(g,t) - X^{\pi_1\circ u,0}(h,t)\|_{\mathrm{E}} \le CL(\epsilon^{\alpha_\infty} + \|g-h\|_{\mathrm{E}}),$$

其中 α_∞ 是定义 *4.2* 中的常数。

(2) 设 γ、$\eta\colon[0,1]\to\mathfrak{g}$ 分别为 $X^{u,\epsilon}$ 与 $X^{\pi_1\circ u,0}$ 的积分曲线，且 $\gamma(0)=\eta(0)$ 以及 $\gamma(t)\ \eta(t) \in B_{\mathrm{E}}(0,1)\ \forall t\in[0,1]$。则

$$\|\gamma(1)-\eta(1)\|_{\mathrm{E}} \le \epsilon^{\alpha_\infty}(\mathrm{e}^{CL}-1)$$

证明。**证明 (1)**。设 $g,h\in B_{\mathrm{E}}(0,1)$ 且 $t\in[0,1]$ 使得 $\|u(t)\|^{(\epsilon)}\le L$。我们有 $\|\cdot\|_{\mathrm{E}} \overset{(20)}{\lesssim} \|\cdot\|^{(\epsilon)}$，从而 $\|u(t)\|_{\mathrm{E}} \lesssim L$，其中这些不等式在相差一个不依赖于 ϵ 或 u 的乘法常数的意义下成立。我们有

$$\begin{aligned}\|X^{u,\epsilon}(g,t) - X^{\pi_1\circ u,0}(h,t)\|_{\mathrm{E}} \le{}& \|X^{u,\epsilon}(g,t) - X^{u,0}(g,t)\|_{\mathrm{E}}\\ &+ \|X^{u,0}(g,t) - X^{u,0}(h,t)\|_{\mathrm{E}}\\ &+ \|X^{u,0}(h,t) - X^{\pi_1\circ u,0}(h,t)\|_{\mathrm{E}}.\end{aligned}$$

我们分别对右侧的三个量进行估计。

我们估计 $\|X^{u,\epsilon}(g,t) - X^{u,0}(g,t)\|_{\mathrm{E}}$：回想一下，对于每个 $\tau\in[0,1].$，指数映射 $\exp\colon(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot]^{(\tau)})\to(\mathfrak{g},*_\tau)$ 都是恒等映射。因此

$$X^{u,\epsilon}(g,t) - X^{u,0}(g,t) = (L_g^{*_\epsilon})_* u(t) - (L_g^{*_0})_* u(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} g *_\epsilon ru(t) - g *_0 ru(t)\Big|_{r=0}.$$

为了简化记号，我们定义两个函数 $x_1,\ x_2\colon(-1,\ 1)\to\mathfrak{g}$ 为 $x_1(r)\coloneqq g,\quad x_2(r)\coloneqq ru(t)$。我们利用常数 $\alpha_{(1,\infty)}$ 的性质，并由引理 4.6 得到：

$$\begin{aligned}&X^{u,\epsilon}(g,t) - X^{u,0}(g,t)\\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} x_1(r) *_\epsilon x_2(r) - x_1(r) *_0 x_2(r)\Big|_{r=0}\\ &\overset{(29)}{=} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\sum_{k=2}^{s}\sum_{q\in\{1,2\}^k}\sum_{p\in\{1,\dots,s\}^k}\sum_{j=|p|+\alpha_{(1,\infty)}}^{s} b_{k,q}\epsilon^{j-|p|}([(x_{q_1}(r))_{p_1},\dots,(x_{q_k}(r))_{p_k}])_j\Big|_{r=0}\\ &= \sum_{k=2}^{s}\sum_{m=1}^{k}\sum_{p\in\{1,\dots,s\}^k}\sum_{j=|p|+\alpha_{(1,\infty)}}^{s} b_{k,q}\epsilon^{j-|p|}([(g)_{p_1},\dots,(u(t))_{p_m},\dots,(g)_{p_k}])_j,\end{aligned}$$

其中我们用到：在求导并在 $r = 0$处求值之后， $x_1(r)$与 $x_2(r)$的非零迭代括号仅有那些 $x_2(r)$恰好出现一次的项。我们指出，由于 $\epsilon \in [0,1]$与 $j \in \{|p| + \alpha_{(1,\infty)}, \dots\dots, s\}$，故 $\epsilon^{j-|p|}$至多为$\epsilon^{|p|+\alpha_{(1,\infty)}-|p|} = \epsilon^{\alpha_{(1,\infty)}}$。最后，回顾到 $\|[a,b]\|_{\mathrm{E}} \lesssim \|a\|_{\mathrm{E}}\|b\|_{\mathrm{E}}$， $\forall a, b \in \mathfrak{g}$，其中不等式至多相差一个仅依赖于 G的乘性常数，以及 $\|\cdot\|_{\mathrm{E}}$，我们给出界

$$\|X^{u,\epsilon}(g,t) - X^{u,0}(g,t)\|_{\mathrm{E}} \lesssim \sum_{k=2}^{s}\sum_{m=1}^{k}\sum_{p\in\{1,\dots,s\}^k} L\epsilon^{|p|+\alpha_{(1,\infty)}-|p|} \lesssim L\epsilon^{\alpha_{(1,\infty)}}.$$

我们估计 $\|X^{u,0}(g,t) - X^{u,0}(h,t)\|_{\mathrm{E}}$：注意到映射 $\phi : g \mapsto (L_g^{*0})_* = \mathrm{d}(L_g^{*0})_0$ 是光滑的。因此，它在紧集上是利普希茨连续的，故存在一个常数 C 使得

$$\|\phi(g') - \phi(h')\|_{\mathrm{op}} \le C\|g' - h'\|_{\mathrm{E}}, \quad \forall g', h' \in B_{\mathrm{E}}(0,1),$$

其中 $\|\cdot\|_{\mathrm{op}}$是线性算子 $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$的算子范数。由此可得

$$\begin{aligned}\|X^{u,0}(g,t) - X^{u,0}(h,t)\|_{\mathrm{E}} &= \|\phi(g)u(t) - \phi(h)u(t)\|_{\mathrm{E}}\\ &\le \|\phi(g) - \phi(h)\|_{\mathrm{op}}\|u(t)\|_{\mathrm{E}}\\ &\lesssim L\|g - h\|_{\mathrm{E}},\end{aligned}$$

其中该不等式在一个乘法因子以内成立，该因子不依赖于 ϵ、 u或 L。

我们估计 $\|X^{u,0}(h,t) - X^{\pi_1\circ u,0}(h,t)\|_{\mathrm{E}}$：由于映射 $(L_h^{*0})_*$关于 h是线性且光滑的，因此存在一个常数 C 使得

$$\|(L_{h'}^{*0})_*(u(t)) - (L_{h'}^{*0})_*(\pi_1(u(t)))\|_{\mathrm{E}} \le C\|u(t) - \pi_1(u(t))\|_{\mathrm{E}}, \quad \forall h' \in B_{\mathrm{E}}(0,1).$$

我们利用常数 $\alpha_{(2,\infty)}$的性质，并由引理 4.7 得:

$$\begin{aligned}\|X^{u,0}(h,t) - X^{\pi_1\circ u,0}(h,t)\|_{\mathrm{E}} &\overset{\mathrm{def}}{=} \|(L_h^{*0})_*(u(t)) - (L_h^{*0})_*(\pi_1(u(t))\|_{\mathrm{E}}\\ &\le C\|u(t) - \pi_1(u(t))\|_{\mathrm{E}}\\ &\overset{(30)}{\le} CL\epsilon^{\alpha_{(2,\infty)}}.\end{aligned}$$

我们得出结论，存在一个常数 C，它仅取决于 G， d， (V_i) L 和 $\|\cdot\|_{\mathrm{E}}$，使得

$$\begin{aligned}\|X^{u,\epsilon}(g,t) - X^{\pi_1\circ u,0}(h,t)\|_{\mathrm{E}} \le{}& \|X^{u,\epsilon}(g,t) - X^{u,0}(g,t)\|_{\mathrm{E}}\\ &+ \|X^{u,0}(g,t) - X^{u,0}(h,t)\|_{\mathrm{E}}\\ &+ \|X^{u,0}(h,t) - X^{\pi_1\circ u,0}(h,t)\|_{\mathrm{E}}.\\ \le{}& CL(\epsilon^{\min\{\alpha_{(1,\infty)},\alpha_{(2,\infty)}\}} + \|g - h\|_{\mathrm{E}}).\end{aligned}$$

(2) 的证明。应用 Gr¨onwall 引理 4.1 和引理 4.9(1)。 □

4.2. **Gr¨onwall 引理与 Mitchell切定理**。现在我们证明一个适用于 Mitchell 定理背景下的 Gr¨onwall 引理版本（见引理 4.14）。

定义4.10. 设（$\mathfrak{g}$， Δ）为一个极化李代数 $\mathfrak{g}$ ，且（W_i）$_{i=1}^{s}$ 为一个切分次。我们定义

$$\alpha_0 \coloneqq \max\{j \in \mathbb{N} : [W_{p_1}, \dots, W_{p_k}] \subseteq W_{|p|} \oplus W_{\le|p|-j},\ \forall k \in \mathbb{N},\ \forall p \in \mathbb{N}^k\}.$$

常数 α_0 是切向分次语境中常数$\alpha_{(1,\infty)}$ 的类似物。它可以视为对一个切分次可分层程度的量化；一个切分次是一个分层，当且仅当 $\alpha_0 = +\infty$。注意，根据切分次的定义，我们有 $\Delta = W_1$，因此在此语境中不存在常数$\alpha_{(2,\infty)}$的类似物。

引理 4.11. 设 $\mathfrak{g}$为一个配备切分次的极化李代数，该切分次诱导出投影 $x \mapsto (x)_j$。设 $n \in \mathbb{N}$、 $p \in \mathbb{N}^n$ 和 x_1、……、$x_n \in \mathfrak{g}$.。则

$$[(x_1)_{p_1}, \dots, (x_n)_{p_n}] - [\![(x_1)_{p_1}, \dots, (x_n)_{p_n}]\!]^{(0)} = \sum_{j=1}^{|p|-\alpha_0} ([(x_1)_{p_1}, \dots, (x_n)_{p_n}])_j. \tag{31}$$

证明。 我们对 $n \in \mathbb{N}$ 使用归纳法证明

$$[\![(x_1)_{p_1}, \dots, (x_n)_{p_n}]\!]^{(0)} = ([(x_1)_{p_1}, \dots, (x_n)_{p_n}])_{|p|}, \quad \forall p \in \mathbb{N}^n,\ \forall x_1, \dots, x_n \in \mathfrak{g}. \tag{32}$$

根据括号 $[\![\cdot,\cdot]\!]^{(0)}$ 的定义，对于 $x, y \in \mathfrak{g}$ 和 $j, k \in \mathbb{N}$，有：

$$[\![(x)_j, (y)_k]\!]^{(0)} = ([(x)_j, (y)_k])_{j+k}. \tag{33}$$

接下来，假设该结论对长度不超过 $n-1$ 的括号成立。利用切向分次的性质，我们得到

$$\begin{aligned}
([(x_1)_{p_1}, \dots, (x_n)_{p_n}])_{|p|} &\overset{2.4(1)}{=} \sum_{j=1}^{|p|-p_1} ([(x_1)_{p_1}, ([(x_2)_{p_2}, \dots, (x_n)_{p_n}])_j])_{|p|} \\
&\overset{2.4(1)}{=} ([(x_1)_{p_1}, ([(x_2)_{p_2}, \dots, (x_n)_{p_n}])_{|p|-p_1}])_{|p|} \\
&\overset{(32)}{=} ([(x_1)_{p_1}, ([\![(x_2)_{p_2}, \dots, (x_n)_{p_n}]\!]^{(0)})_{|p|-p_1}])_{|p|} \\
&\overset{(33)}{=} [\![(x_1)_{p_1}, \dots, (x_n)_{p_n}]\!]^{(0)}.
\end{aligned}$$

现在，根据 α_0的定义，我们有

$$\begin{aligned}
[(x_1)_{p_1}, \dots, (x_n)_{p_n}] - [\![(x_1)_{p_1}, \dots, (x_n)_{p_n}]\!]^{(0)} &\overset{2.4(1),(32)}{=} \sum_{j=1}^{|p|-1} ([(x_1)_{p_1}, \dots, (x_n)_{p_n}])_j \\
&= \sum_{j=1}^{|p|-\alpha_0} ([(x_1)_{p_1}, \dots, (x_n)_{p_n}])_j.
\end{aligned}$$

□

引理 4.12. 设 $\mathfrak{g}$ 是配备切分次的极化李代数，该切分次诱导投影 $x \mapsto (x)_j$。设 x_1、$x_2 \in \mathfrak{g}$ 和 $\epsilon \in [0,1]$. 则

$$x_1 \cdot_\epsilon x_2 - x_1 \cdot_0 x_2 = \sum_{k=2}^{s} \sum_{q \in \{1,2\}^k} \sum_{p \in \{1,\dots,s\}^k} \sum_{j=1}^{|p|-\alpha_0} b_{k,q} \epsilon^{|p|-j} ([(x_{q_1})_{p_1}, \dots, (x_{q_k})_{p_k}])_j, \tag{34}$$

其中$b_{k,p}$ 是 *BCH* 公式(9)中的常数。

证明。 对于 $y_1, \dots, y_n \in \mathfrak{g}$和 $n \in \mathbb{N}$，根据括号 $[\![\cdot,\cdot]\!]^{(\epsilon)}$ 的定义，我们有

$$[\![y_1, \dots, y_n]\!]^{(\epsilon)} = \delta_\epsilon^{-1} [\delta_\epsilon y_1, \dots, \delta_\epsilon y_n],$$

并且根据膨胀是 $(\mathfrak{g}, [\![\cdot,\cdot]\!]^{(0)})$ 的李代数自同构这一事实，我们得到

$$[\![y_1, \dots, y_n]\!]^{(0)} = \delta_\epsilon^{-1} [\![\delta_\epsilon y_1, \dots, \delta_\epsilon y_n]\!]^{(0)}.$$

现在我们使用 BCH 公式 (9) 和引理 4.11 进行计算

$$\begin{aligned} x_1 \cdot_\epsilon x_2 - x_1 \cdot_0 x_2 &\overset{(9)}{=} \sum_{k=2}^{s} \sum_{q\in\{1,2\}^k} b_{k,q}([\![x_{q_1},\dots,x_{q_k}]\!]^{(\epsilon)} - [\![x_{q_1},\dots,x_{q_k}]\!]^{(0)}) \\ &= \sum_{k=2}^{s} \sum_{q\in\{1,2\}^k} b_{k,q}\delta_\epsilon^{-1}([\delta_\epsilon x_{q_1},\dots,\delta_\epsilon x_{q_k}] - [\![\delta_\epsilon x_{q_1},\dots,\delta_\epsilon x_{q_k}]\!]^{(0)}) \\ &\overset{(31)}{=} \sum_{k=2}^{s} \sum_{q\in\{1,2\}^k} \sum_{p\in\{1,\dots,s\}^k} \sum_{j=1}^{|p|-\alpha_0} b_{k,q}\delta_\epsilon^{-1}([(\delta_\epsilon x_{q_1})_{p_1},\dots,(\delta_\epsilon x_{q_k})_{p_k}])_j \\ &= \sum_{k=2}^{s} \sum_{q\in\{1,2\}^k} \sum_{p\in\{1,\dots,s\}^k} \sum_{j=1}^{|p|-\alpha_0} b_{k,q}\epsilon^{|p|-j}([(x_{q_1})_{p_1},\dots,(x_{q_k})_{p_k}])_j. \end{aligned}$$

□

我们现在可以陈述并证明适用于米切尔定理的 Gr¨onwall 引理版本。

定义 4.13。 给定 $u \in L^2([0,1],\mathfrak{g})$ 和 $\epsilon \in [0,1]$，我们定义时变向量场 $Y^{u,\epsilon}\colon \mathfrak{g}\times[0,1]\to\mathfrak{g}$ 如下：

$$Y^{u,\epsilon}(g,t) \coloneqq (L_g^{\epsilon})_* u(t).$$

引理 4.14 (Gr¨onwall 引理（米切尔定理）。 设 $(G,\Delta,\|\cdot\|)$ 是一个配备切分次 $(W_i)_{i=1}^s$ 的次芬斯勒李群。设 $\|\cdot\|_{\mathrm{E}}$ 是 $\mathfrak{g}$ 上的范数。存在一个常数 $C>0$，使得对于每个 $\epsilon\in[0,1]$、每个 $L>0$ 以及所有满足 $\|u(t)\|_{\mathrm{E}}\le L$ 的 $u\in L^2([0,1],\Delta)$，对几乎处处的 $t\in[0,1]$，我们有：

(1) 对于定义 *4.13* 中的向量场，对于 $g,h\in B_{\mathrm{E}}(0,1)$以及几乎处处的 $t\in[0,1]$，有：

$$\|Y^{u,\epsilon}(g,t) - Y^{u,0}(h,t)\|_{\mathrm{E}} \le CL(\epsilon^{\alpha_0} + \|g-h\|_{\mathrm{E}}),$$

其中 α_0 是定义*4.10*中的常数。

(2) 设 $\gamma,\eta\colon[0,1]\to\mathfrak{g}$ 分别是 $Y^{u,\epsilon}$ 和 $Y^{u,0}$ 的积分曲线，满足$\gamma(0)=\eta(0)$且 $\gamma(t)\ \eta(t)\in B_{\mathrm{E}}(0,1)\ \forall t\in[0,1]$。那么

$$\|\gamma(1)-\eta(1)\|_{\mathrm{E}} \le \epsilon^{\alpha_0}(\mathrm{e}^{CL}-1).$$

证明。 **证明 (1)**。我们沿用引理 4.9 证明中的相同策略。令$g,h\in B_{\mathrm{E}}(0,1)$，并取满足 $\|u(t)\|_{\mathrm{E}}\le L$ 的 $t\in[0,1]$。我们有

$$\|Y^{u,\epsilon}(g,t) - Y^{u,0}(h,t)\|_{\mathrm{E}} \le \|Y^{u,\epsilon}(g,t) - Y^{u,0}(g,t)\|_{\mathrm{E}} + \|Y^{u,0}(g,t) - Y^{u,0}(h,t)\|_{\mathrm{E}}.$$

我们分别对右侧的两个量进行估计。

我们对 $\|Y^{u,\epsilon}(g,t) - Y^{u,0}(g,t)\|_{\mathrm{E}}$ 进行估计：回顾一下，对每个 $\tau\in[0,1].$，指数映射 $\exp\colon(\mathfrak{g},[\![\cdot,\cdot]\!]^{(\tau)})\to(\mathfrak{g},\cdot_\tau)$ 都是恒等映射。因此

$$Y^{u,\epsilon}(g,t) - Y^{u,0}(g,t) = (L_g^{\epsilon})_* u(t) - (L_g^{0})_* u(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} g\cdot_\epsilon ru(t) - g\cdot_0 ru(t)\Big|_{r=0}.$$

为了简化记号，我们定义两个函数 $x_1,\ x_2\colon(-1,\ 1)\to\mathfrak{g}$ 由$x_1(r)\coloneqq g,\ x_2(r)\coloneqq ru(t)$。我们利用常数 α_0 的性质，并根据

引理 4.12，我们得到：

$$\begin{aligned}
&Y^{u,\epsilon}(g,t) - Y^{u,0}(g,t)\\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} x_1(r) \cdot_\epsilon x_2(r) - x_1(r) \cdot_0 x_2(r)\Big|_{r=0}\\
&\overset{(34)}{=} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} \sum_{k=2}^{s} \sum_{q\in\{1,2\}^k} \sum_{p\in\{1,\dots,s\}^k} \sum_{j=1}^{|p|-\alpha_0} b_{k,q}\epsilon^{|p|-j}([(x_{q_1}(r))_{p_1},\dots,(x_{q_k}(r))_{p_k}])_j\Big|_{r=0}\\
&= \sum_{k=2}^{s}\sum_{m=1}^{k} \sum_{p\in\{1,\dots,s\}^k} \sum_{j=1}^{|p|-\alpha_0} b_{k,q}\epsilon^{|p|-j}([(g)_{p_1},\dots,(u(t))_{p_m},\dots,(g)_{p_k}])_j,
\end{aligned}$$

其中我们利用了这样一个事实：在求导并在 $r = 0$ 处求值之后，$x_1(r)$ 和 $x_2(r)$ 的唯一非零迭代括号，是那些其中 $x_2(r)$ 恰好出现一次的迭代括号。我们指出，由于 $\epsilon \in [0,1]$ and $j \in \{1,\dots,|p| - \alpha_0\}$，因此 $\epsilon^{|p|-j}$ 至多为 $\epsilon^{|p|-(|p|-\alpha_0)} = \epsilon^{\alpha_0}$。最后，回顾 $\|[a,b]\|_{\mathrm{E}} \lesssim \|a\|_{\mathrm{E}}\|b\|_{\mathrm{E}},\ \forall a,b \in \mathfrak{g}$，其中该不等式在相差一个仅依赖于 G and $\|\cdot\|_{\mathrm{E}}$ 的乘法常数的意义下成立，我们得到

$$\|Y^{u,\epsilon}(g,t) - Y^{u,0}(g,t)\|_{\mathrm{E}} \lesssim L\sum_{k=2}^{s}\sum_{m=1}^{k}\sum_{p\in\{1,\dots,s\}^k} \epsilon^{|p|-(|p|-\alpha_0)} \lesssim L\epsilon^{\alpha_0},$$

其中这些不等式在相差一个仅依赖于 G,(W_i) 和 $\|\cdot\|_{\mathrm{E}}$ 的乘法常数的意义下成立。

我们估计 $\|Y^{u,0}(g,t) - Y^{u,0}(h,t)\|_{\mathrm{E}}$：注意映射 $\phi : g \mapsto (L_g^0)_* = \mathrm{d}(L_g^0)_0$ 是光滑的。因此，它在紧集上是利普希茨的，从而存在常数 C 使得

$$\|\phi(g) - \phi(h)\|_{\mathrm{op}} \le C\|g - h\|_{\mathrm{E}}.$$

由此可得

$$\begin{aligned}
\|Y^{u,0}(g,t) - Y^{u,0}(h,t)\|_{\mathrm{E}} &= \|\phi(g)u(t) - \phi(h)u(t)\|_{\mathrm{E}}\\
&\le \|\phi(g) - \phi(h)\|_{\mathrm{op}}\|u(t)\|_{\mathrm{E}}\\
&\le CL\|g - h\|_{\mathrm{E}}.
\end{aligned}$$

我们得出存在仅依赖于 $G, d,(W_i)$ 和 $\|\cdot\|_{\mathrm{E}}$ 的常数 C'，使得

$$\begin{aligned}
\|Y^{u,\epsilon}(g,t) - Y^{u,0}(h,t)\|_{\mathrm{E}} &\le \|Y^{u,\epsilon}(g,t) - Y^{u,0}(g,t)\|_{\mathrm{E}} + \|Y^{u,0}(g,t) - Y^{u,0}(h,t)\|_{\mathrm{E}}\\
&\le C'L(\epsilon^{\alpha_0} + \|g - h\|_{\mathrm{E}}).
\end{aligned}$$

证明(2)。应用 Gr¨onwall 引理 4.1 与引理 4.14(1)。 □

5. Quantitative Pansu Asymptotic Theorem

定理 1.1 是下述等价结果的推论，该结果比较收缩度量。在完成定理 1.1 的证明之后，我们说明它如何蕴含定理 3.5。

定理 5.1. 设 G 是一个单连通幂零次芬斯勒李群。相对于一个渐近分次，考虑 G 上的 *Pansu* 极限度量 ρ_0 以及收缩度量 ρ_ϵ。则对每个紧集 $K \subseteq G$，存在常数 $C > 0$使得

$$|\rho_0(p,q) - \rho_\epsilon(p,q)| \le C\epsilon^{\alpha_\infty/\beta}, \quad \forall \epsilon \in [0,1],\ \forall p,q \in K, \tag{35}$$

其中，α_∞ 和 β 是定义 *4.2* 和 *3.20* 中的常数。

从现在起直到本节结束，我们均处于定理 5.1 的假设下。此外，我们考虑式（15）中定义的子芬斯勒结构（$\Delta^{(\epsilon)}$, $\|\cdot\|^{(\epsilon)}$），它们与收缩度量 ρ_ϵ 相关联。我们将渐近分次记为（V_1、.....、 V_s）。

证明的策略是，取其中一种结构下的一条测地线，对其进行修改，使其成为另一种结构下的容许曲线，同时控制其长度，然后对端点之间的距离进行估计。下一个引理用于证明这两条曲线之差属于某个 Carnot 商理想。

引理 5.2. 设 $\epsilon \in (0,1]$, 是由控制函数 $u \in L^2([0,1], \Delta^{(\epsilon)})$控制的 ρ_ϵ-容许曲线，设 γ_0 是下列方程的解

$$\begin{cases} \gamma_0(0) = \gamma_\epsilon(0) \\ \dot\gamma_0(t) = (L^{*_0}_{\gamma_0(t)})_* \pi_1(u(t)), \end{cases}$$

并设 $\mathfrak{i}$ 是一个 *Carnot* 商理想（根据定义 *3.18*）。记 $\pi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}/\mathfrak{i}$ 为商映射。则

(1) $\pi \circ \gamma_0 = \pi \circ \gamma_\epsilon$.

(2) $\gamma_0(1) - \gamma_\epsilon(1),\ \gamma_0(1)^{-1} *_0 \gamma_\epsilon(1),\ \gamma_0(1)^{-1} *_\epsilon \gamma_\epsilon(1) \in \mathfrak{i}$.

证明。 (1)。只需证明投影曲线是同一个柯西问题的解。回顾一下，对于每个李代数 $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot]^{(\epsilon)})$, $\mathfrak{i}$都是一个理想，见引理 3.22(2)。此外，商括号与 ϵ 无关，见引理 3.22(5)。我们将 $\mathfrak{g}/\mathfrak{i}$ 上的 Dynkin 乘积记为 $*_\mathfrak{i}$ ，并将关于该乘积对元素 $v \in \mathfrak{g}/\mathfrak{i}$ 的左平移记为 $L^\mathfrak{i}_v$。另请注意，根据引理 3.22(6)，商映射 $\pi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}/\mathfrak{i}$ 是李群同态。因此，我们有

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\pi \circ \gamma_\epsilon)(t) &= (\mathrm{d}\pi)\dot\gamma_\epsilon(t) \\ &= (\mathrm{d}\pi)(\mathrm{d}L^{*_\epsilon}_{\gamma_\epsilon(t)})u(t) \\ &= \mathrm{d}(\pi \circ L^{*_\epsilon}_{\gamma_\epsilon(t)})u(t) \\ &= \mathrm{d}(L^\mathfrak{i}_{\pi(\gamma_\epsilon(t))} \circ \pi)u(t) \\ &= \mathrm{d}(L^\mathfrak{i}_{\pi(\gamma_\epsilon(t))}) \circ \pi(u(t)). \end{aligned}$$

And

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\pi \circ \gamma_0)(t) &= (\mathrm{d}\pi)\dot\gamma_0(t) \\ &= (\mathrm{d}\pi)(\mathrm{d}L^{*_0}_{\gamma_0(t)})\pi_1(u(t)) \\ &= \mathrm{d}(\pi \circ L^{*_0}_{\gamma_0(t)})\pi_1(u(t)) \\ &= \mathrm{d}(L^\mathfrak{i}_{\pi(\gamma_0(t))} \circ \pi)\pi_1(u(t)) \\ &= \mathrm{d}(L^\mathfrak{i}_{\pi(\gamma_0(t))}) \circ \pi \circ \pi_1(u(t)), \\ &= \mathrm{d}(L^\mathfrak{i}_{\pi(\gamma_0(t))}) \circ \pi(u(t)), \end{aligned}$$

其中最后一步用到了引理 3.22(3)。因此， $\pi \bigcirc \gamma_0 = \pi \bigcirc \gamma_\epsilon$。

(2). $\gamma_0(1) - \gamma_\epsilon(1) \in \mathfrak{i}$ 这一事实可由 (1) 直接得出。利用 (1) 以及 π 是李群同态这一事实，我们对 $\tau \in \{0, \epsilon\}$ 得到：

$$\begin{aligned} &(\pi \circ \gamma_0(1))^{-1} *_{\mathfrak{i}} (\pi \circ \gamma_\epsilon(1)) = 0 \\ \iff\ &\pi(\gamma_0(1)^{-1} *_\tau \gamma_\epsilon(1)) = 0, \end{aligned}$$

因此 $\gamma_0(1)^{-1} *_\tau \gamma_\epsilon(1) \in \mathfrak{i}$. □

为了证明定理 5.1，我们还需要一个结果。

引理 5.3。对于每个 $L \geq 1$ 以及 $\mathfrak{g}$ 上的每个范数 $\|\cdot\|$，都存在一个常数$C > 0$，使得

$$\rho_\epsilon(0, v) \leq C\|v\|^{1/\beta}, \quad \forall \epsilon \in [0,1],\ \forall v \in (B_{\rho_0}(0, L) \setminus B_{\rho_0}(0, \epsilon)) \cap V_{\leq\beta}. \tag{36}$$

其中 β 是定义 *3.20* 中的常数。

证明。若 $\beta = 0$，则 $V_{\leq\beta} = \{0\}$，且 (36) 显然成立。因此，设 $\beta \geq 1$，固定 $\epsilon \in [0,1]$，并令 $B_\epsilon \coloneqq (B_{\rho_0}(0, L) \setminus B_{\rho_0}(0, \epsilon)) \cap V_{\leq\beta}$。由于 $B_\epsilon \subseteq V_{\leq\beta}$，根据 Carnot 群的球盒定理（见定理 2.3），存在一个常数 $C_1 > 0$，使得

$$\rho_0(0, v) \overset{(11)}{\leq} C_1\|v\|^{1/\beta}, \quad \forall v \in B_\epsilon. \tag{37}$$

现在我们用反证法证明 (36)。假设存在序列 $(\epsilon_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq [0,1]$ 和 $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $v_n \in B_{\epsilon_n}$，使得对每个 $n \in \mathbb{N}$:

$$\rho_{\epsilon_n}(0, v_n) > n\|v_n\|^{1/\beta}. \tag{38}$$

于是，由 Guivarc'h 定理 3.13，存在一个常数 $D \geq 1$，使得

$$n \overset{(38)}{<} \frac{\rho_{\epsilon_n}(0, v_n)}{\|v_n\|^{1/\beta}} \overset{(37)}{\leq} C_1 \frac{\rho_{\epsilon_n}(0, v_n)}{\rho_0(0, v_n)} \overset{(18)}{\leq} C_1 D + \frac{C_1 D \epsilon_n}{\rho_0(0, v_n)}.$$

因此 $\rho_0 \overset{\epsilon_n}{(0,v_n)} \to \infty$. 特别地，当 n 充分大时

$$\epsilon_n > \rho_0(0, v_n),$$

这与 $v_n \in B_{\epsilon_n}$ 的事实矛盾。 □

我们得到以下推论。

推论 5.4. 对于每个 $L \geq 1$，以及 $\mathfrak{g}$ 上的每个范数 $\|\cdot\|$，都存在一个常数$C > 0$，使得

$$\rho_\epsilon(0, v) \leq C \max\{\|v\|^{1/\beta}, \epsilon\}, \quad \forall \epsilon \in [0,1],\ \forall v \in B_{\rho_0}(0, L) \cap V_{\leq\beta}. \tag{39}$$

其中 β 是定义 *3.20* 中的常数。

证明。固定 $\epsilon \in [0,1]$，并令 $v \in B_{\rho_0}(0, \epsilon) \cap V_{\leq\beta}$。那么根据 Guivarc'h 定理 3.13，存在一个常数 $C \geq 1$，使得

$$\rho_\epsilon(0, v) \overset{(18)}{\leq} C(\rho_0(0, v) + C\epsilon) \leq C^2\epsilon.$$

这一事实结合式 (36)，完成了证明。 □

5.1. **定理 5.1 和定理 1.1 的证明。**

定理 *5.1* 的证明。 若 (G,d) 是一个 Carnot 群，则由命题 3.12 可得

$$\rho_\epsilon \overset{(17)}{=} d, \quad \forall \epsilon \in [0,1].$$

因此，假设 (G,d) 不是 Carnot。我们首先建立一些界。根据 β 的定义，存在一个 Carnot 商理想（根据定义 3.18）$\mathfrak{i} \lhd \mathfrak{g}$，使得 $\mathfrak{i} \subseteq V_{\leq\beta}$。令 $C \geq 1$ 为 Guivarc'h 定理 3.13 中的常数。令 $\|\cdot\|$ 为 $\mathfrak{g}$ 上的一个范数，其单位球足够大，使得

$$B_{\rho_0}(0, 2+4C+6C^2) \subseteq B_{\|\cdot\|}(0,1). \tag{40}$$

由运算的连续性和定义域的紧性，存在一个$L \geq 1$，使得

$$\rho_0(0, v^{-1} *_\epsilon w) \leq L, \quad \forall \epsilon \in [0,1],\ \forall v, w \in \overline{B}_{\|\cdot\|}(0,1).$$

因此，根据推论 5.3，存在一个 $C' > 0$，使得 $\forall \epsilon, \tau \in [0,1],\ \forall v, w \in B_{\|\cdot\|}(0,1)$，满足 $v^{-1} *_\epsilon w \in V_{\leq\beta}$，我们有

$$\rho_\tau(0, v^{-1} *_\epsilon w) \overset{(39)}{\leq} C' \max\{\|v^{-1} *_\epsilon w\|^{1/\beta}, \tau\}. \tag{41}$$

根据引理 3.10，映射 $(\lambda, x, y) \mapsto x *_\lambda y$ 在 $[0,1] \times B_{\|\cdot\|}(0,2)^{-1} \times B_{\|\cdot\|}(0,2)$ 上是解析的（因为 Dynkin 乘积中的级数是多项式，因而在全局收敛）。因此，由于解析映射在紧集上是利普希茨的，存在一个~常数 $C > 0$ 使得

$$\|v^{-1} *_\tau w - v^{-1} *_\tau z\| \leq \tilde{C}\|w - z\|, \quad \forall \tau \in [0,1],\ \forall v, w, z \in \overline{B}_{\|\cdot\|}(0,1). \tag{42}$$

设 $K \subseteq \mathfrak{g}$ 为一个紧集，$\epsilon \in [0,1]$，且 $p, q \in K$。我们定义 $L \coloneqq \max\{\rho_\epsilon(p,q)\ \rho_0(p,q)\}$。不失一般性，我们可以假设 $K \subseteq B_{\rho_0}(0,1)$。

我们证明**第一个不等式**：$\rho_0(p,q) \leq \rho_\epsilon(p,q) + C\epsilon^{\alpha\infty/\beta}$. 设 $\gamma_\epsilon : [0,1] \to \mathfrak{g}$ 是从 p 到 q 的一条 ρ_ϵ-测地线，并以恒定速度参数化，控制函数为 $u \in L^2([0,1], \Delta^{(\epsilon)})$。由于 γ_ϵ 以恒定速度参数化，我们有 $\|u(t)\|^{(\epsilon)} = \rho_\epsilon(p,q) \leq L$ 对几乎处处的 t 成立。我们有如下的一致界：

$$\begin{aligned} \rho_\epsilon(p,q) &\leq \rho_\epsilon(0,p) + \rho_\epsilon(0,q) \\ &\overset{(18)}{\leq} C\rho_0(0,p) + C\epsilon + \rho_0(0,q) + C\epsilon \\ &\leq 4C. \end{aligned} \tag{43}$$

我们验证，与 $\epsilon \in (0,1)$ 无关，曲线 γ_ϵ 位于有界集 $B_{\rho_0}(0, 6C^2 + C)$ 内：

$$\begin{aligned} \rho_0(0, \gamma_\epsilon(t)) &\overset{(18)}{\leq} C\rho_\epsilon(0, \gamma_\epsilon(t)) + C\epsilon \\ &\leq C(\rho_\epsilon(0,p) + \rho_\epsilon(p, \gamma_\epsilon(t)) + C\epsilon \\ &\overset{(18)}{\leq} C(\rho_0(0,p) + C\epsilon + \rho_\epsilon(p,q)) + C\epsilon \\ &\overset{(43)}{\leq} 6C^2 + C. \end{aligned}$$

令 $\gamma_0 : [0,1] \to \mathfrak{g}$ 为以下方程的解

$$\begin{cases} \gamma_0(0) = p \\ \dot{\gamma}_0(t) = (L^{*_0}_{\gamma_0(t)})_* \pi_1(u(t)). \end{cases}$$

注意， γ_0 是空间 $(\mathfrak{g}_\infty, *_0)$ 中的一条 V_1-容许曲线，其控制函数为 $\pi_1 \bigcirc u_\circ$ 特别地，曲线 γ_0 和 $\pi_1 \bigcirc \gamma_\epsilon$ 在各自的空间 $(\mathfrak{g}_\infty, \rho_0)$ 与 $(V_1, \|\cdot\|_\infty)$ 中长度相同。因此，此外，由于 $\pi_1 : (\mathfrak{g}, \rho_\epsilon) \to (V_1, \|\cdot\|_\infty)$ 根据命题 3.14 是一个 1-利普希茨映射，我们有

$$\begin{aligned} L_{\rho_0}(\gamma_0) &= L_{\|\cdot\|_\infty}(\pi_1 \circ \gamma_\epsilon) \\ &\le L_{\rho_\epsilon}(\gamma_\epsilon) \\ &= \rho_\epsilon(p, q) \qquad (44) \\ &\overset{(43)}{\le} 4C. \qquad (45) \end{aligned}$$

此外，由于 γ_ϵ 以恒定速度参数化，

$$\|u(t)\|^{(\epsilon)} \overset{(43)}{\le} 4C, \quad \text{for a.e. } t \in [0,1]$$

并且，

$$\begin{aligned} \rho_0(0, \gamma_0(t)) &\le \rho_0(0, p) + \rho_0(p, \gamma_0(t)) \\ &\le 1 + L_{\rho_0}(\gamma_0) \\ &\overset{(45)}{\le} 1 + 4C. \end{aligned}$$

我们已经证明，曲线 γ_ϵ 和 γ_0 位于有界集

$$B_{\rho_0}(0, 1 + 4C + 6C^2) \overset{(40)}{\subseteq} B_{\|\cdot\|}(0, 1).$$

此外，我们注意到， γ_0 和 γ_ϵ 分别是定义 4.8 中向量场 $X^{\pi_1 \circ u, 0}$ 和 $X^{u, \epsilon}$ 的积分曲线。因此，我们可以应用 Gr¨onwall 引理 4.9 来估计

$$\|\gamma_0(1) - \gamma_\epsilon(1)\| \le \epsilon^{\alpha_\infty}(\mathrm{e}^{\hat{C}L} - 1) \qquad (46)$$

接下来，根据引理 5.2，我们有 $v := \gamma_0(1)^{-1} *_0 \gamma_\epsilon(1) \in \mathfrak{i} \subseteq V_{\le\beta}$，并由 (42) 得：

$$\begin{aligned} \|v\| &= \|L^{*_0}_{\gamma_0(1)^{-1}}(\gamma_0(1) *_0 v) - L^{*_0}_{\gamma_0(1)^{-1}}(\gamma_0(1))\| \\ &\overset{(42)}{\le} \tilde{C}\|\gamma_0(1) *_0 v - \gamma_0(1)\| \\ &= \tilde{C}\|\gamma_\epsilon(1) - \gamma_0(1)\|. \qquad (47) \end{aligned}$$

由于 $v \in V_{\le\beta}$，根据定理 2.3，存在一个仅依赖于 $G, (V_i)_{i=1}^s$ 和 $\|\cdot\|$ 的常数 $C \ge 1$，使得

$$\rho_0(0, v) \overset{(11)}{\le} \bar{C}\|v\|^{1/\beta}. \qquad (48)$$

最后，我们得到 (35) 的第一个界：

$$\begin{aligned} \rho_0(p, q) &\le \rho_0(p, \gamma_0(1)) + \rho_0(\gamma_0(1), \gamma_\epsilon(1)) \\ &\le L_{\rho_0}(\gamma_0) + \rho_0(0, v) \\ &\overset{(44),(48)}{\le} \rho_\epsilon(p, q) + \bar{C}\|v\|^{1/\beta} \\ &\overset{(47)}{\le} \rho_\epsilon(p, q) + \bar{C}\tilde{C}\|\gamma_0(1) - \gamma_\epsilon(1)\|^{1/\beta} \\ &\overset{(46)}{\le} \rho_\epsilon(p, q) + \bar{C}\tilde{C}(\mathrm{e}^{\hat{C}L} - 1)^{1/\beta}\epsilon^{\alpha_\infty/\beta}. \end{aligned}$$

我们证明**第二个不等式**： $\rho_\epsilon(p, q) \le \rho_0(p, q) + C\epsilon^{\alpha_\infty/\beta}$. 令 $\gamma_0 : [0,1] \to \mathfrak{g}$ 为一条从 p 到 q 的 ρ_0-测地线，其以恒定速度参数化，控制函数为 $v \in L^2([0,1], V_1)$。由于 γ_0 以恒定速度参数化，因此有 $\|u(t)\|^{(0)} =$

$\rho_0(p,\ q) \le L$ 对几乎处处的 t成立。根据命题 3.14，投影 $\pi_1 : (\mathfrak{g},\ \rho_\epsilon) \to (V_1,\ \|\cdot\|_\infty)$ 是一个次度量映射，因此，根据命题 3.15，我们可以将 $\pi_1 \bigcirc \gamma_0$ 提升为一条曲线 $\gamma_\epsilon : I \to \mathfrak{g}$，使得

$$\pi_1 \circ \gamma_0 = \pi_1 \circ \gamma_\epsilon. \tag{49}$$

我们断言，相对于 $*_\epsilon$， γ_ϵ 的控制函数是一个函数 $u \in L^\infty([0,1],\ \Delta^{(\epsilon)})$，满足

$$\pi_1 \circ u = v, \text{ and } \|u\|^{(\epsilon)} = \|v\| \text{ almost everywhere.} \tag{50}$$

事实上，由于 γ_ϵ 是次芬斯勒李群中的一条可求长曲线，它有一个可测控制 $u : [0,1] \to \Delta^{(\epsilon)}$.。我们通过证明两个函数都是曲线 $\pi_1 \bigcirc \gamma_0$ 关于 V_1 上阿贝尔乘积的控制，来说明 $\pi_1 \bigcirc u = v$。回想一下，根据命题 3.14，$\pi_1 : (\mathfrak{g},\ *_\epsilon) \to (V_1,\ +)$ 是一个同态，因此我们计算：

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\pi_1 \circ \gamma_0(t) &= \mathrm{d}(\pi_1 \circ L^{*_0}_{\gamma_0(t)})_0 v(t)\\ &= \mathrm{d}(L^{+}_{\pi_1(\gamma_0(t))})_0 \pi_1 \circ v(t)\\ &= \mathrm{d}(L^{+}_{\pi_1(\gamma_0(t))})_0 v(t),\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\pi_1 \circ \gamma_0(t) &\overset{(49)}{=} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\pi_1 \circ \gamma_\epsilon(t)\\ &= \mathrm{d}(\pi_1 \circ L^{*_\epsilon}_{\gamma_0(t)})_0 u(t)\\ &= \mathrm{d}(L^{+}_{\pi_1(\gamma_\epsilon(t))})_0 \pi_1 \circ u(t)\\ &\overset{(49)}{=} \mathrm{d}(L^{+}_{\pi_1(\gamma_0(t))})_0 \pi_1 \circ u(t).\end{aligned}$$

由于次芬斯勒李群中的控制函数是唯一的，我们有 $\pi_1 \bigcirc u = v$。最后，$\|u\|^{(\epsilon)} = \|v\|$，因为曲线 $\pi_1 \bigcirc \gamma_0$ 和 γ_ϵ 在各自空间 $(V_1,\ +,\ \|\cdot\|_\infty)$ 和 $(\mathfrak{g},\ *_\epsilon,\ \rho_\epsilon)$ 中具有相同的长度。因此 $u \in L^\infty([0,1],\ \Delta^{(\epsilon)})$。

特别地，曲线 γ_0 and γ_ϵ 在各自的空间 $(\mathfrak{g},\ *_0,\ \rho_0)$ 和 $(\mathfrak{g},\ *_\epsilon,\ \rho_\epsilon)$ 中长度相同。因此，我们有

$$L_{\rho_\epsilon}(\gamma_\epsilon) = L_{\rho_0}(\gamma_0) = \rho_0(p,q) \le 2, \tag{51}$$

特别地，$\|u\|^{(\epsilon)} \overset{(50)}{=} \|\pi_1 \bigcirc u\| \le 2$ 几乎处处成立。

我们断言曲线 γ_0 and γ_ϵ 都位于 $B_{\|\cdot\|}(0,\ 1)$ 内。事实上，对于第一条曲线，显然有 $\gamma_0(t) \in B_{\rho_0}(0,\ 2) \subseteq B_{\|\cdot\|}(0,\ 1)$，因为 $p,\ q \in B_{\rho_0}(0,\ 1)$，且 γ_0 是一条 ρ_0-测地线。对于第二条曲线，我们估计：

$$\begin{aligned}\rho_0(0,\gamma_\epsilon(t)) &\overset{(18)}{\le} C(\rho_\epsilon(0,\gamma_\epsilon(t)) + C\epsilon)\\ &\le C(\rho_\epsilon(0,p) + \rho_\epsilon(p,\gamma_\epsilon(t)) + C\epsilon)\\ &\overset{(18)}{\le} C(C\rho_0(0,p) + C\epsilon + L_{\rho_\epsilon}(\gamma_\epsilon) + C\epsilon)\\ &\overset{(51)}{\le} C(C + C + 2 + C).\end{aligned}$$

因此 $\gamma_\epsilon(t) \in B_{\rho_0}(3C^2 + 2C) \subseteq B_{\|\cdot\|}(0,\ 1)$。

我们按照证明第一部分中的类似方法继续。注意到，根据定义 4.8，γ_0和 γ_ϵ 分别是向量场 $X^{\pi_1 \circ u,0}$ 和 $X^{u,\epsilon}$的积分曲线。因此，我们可以应用 Gr¨onwall 引理 4.9 来估计

$$\|\gamma_0(1) - \gamma_\epsilon(1)\| \le \epsilon^{\alpha_\infty}(\mathrm{e}^{\hat{C}L} - 1). \tag{52}$$

由引理 5.2，$w \coloneqq \gamma_0(1)^{-1} *_\epsilon \gamma_\epsilon(1) \in \mathfrak{i} \subseteq V_{\leq\beta}$，再次利用 (42)，可得

$$\begin{aligned}\|w\| &= \|L^{*_\epsilon}_{\gamma_0^{-1}(1)}(\gamma_0(1) *_\epsilon w) - L^{*_\epsilon}_{\gamma_0^{-1}(1)}(\gamma_0(1))\| \\ &\overset{(42)}{\leq} \tilde{C}\|\gamma_0(1) *_\epsilon w - \gamma_0(1)\| \\ &= \tilde{C}\|\gamma_0(1) - \gamma_\epsilon(1)\|. \end{aligned} \tag{53}$$

我们得到（35）的第二个界：

$$\begin{aligned}\rho_\epsilon(p,q) &\leq \rho_\epsilon(p,\gamma_\epsilon(1)) + \rho_\epsilon(\gamma_0(1),\gamma_\epsilon(1)) \\ &\leq L_{\rho_\epsilon}(\gamma_\epsilon) + \rho_\epsilon(0,w) \\ &\overset{(51),(41)}{\leq} \rho_0(p,q) + C'\max\{\|w\|^{1/\beta},\epsilon\} \\ &\overset{(53)}{\leq} \rho_0(p,q) + C'\tilde{C}\max\{\|\gamma_0(1)-\gamma_\epsilon(1)\|^{1/\beta},\epsilon\} \\ &\overset{(52)}{\leq} \rho_0(p,q) + C'\tilde{C}\max\{(\mathrm{e}^{\hat{C}L}-1)^{1/\beta}\epsilon^{\alpha_\infty/\beta},\epsilon\} \\ &\leq \rho_0(p,q) + C'\tilde{C}\max\{1,(\mathrm{e}^{\hat{C}L}-1)^{1/\beta}\}\max\{\epsilon^{\alpha_\infty/\beta},\epsilon\} \\ &\leq \rho_0(p,q) + C'\tilde{C}\max\{1,(\mathrm{e}^{\hat{C}L}-1)^{1/\beta}\}\epsilon^{\alpha_\infty/\beta}, \end{aligned}$$

这里我们用到 $\epsilon \leq 1$，并且由于 $(G,\ d)$ 不是 Carnot 群，根据命题 4.4 可得 $\alpha_\infty/\beta < 1$. □

接下来，我们利用定理 5.1 证明定理 1.1。我们强调，类似的论证也可以从定理 1.1 推出定理 5.1。

定理 *1.1* 的证明。令 $p \in G, q \in G \setminus B_{d_\infty}(1,1)$，并定义

$$\epsilon \coloneqq \max\{d_\infty(1,p), d_\infty(1,q)\}^{-1} \leq 1.$$

于是 $\delta_\epsilon p,\ \delta_\epsilon q \in B_{d_\infty}(1,\ 1)$，因此根据定理 5.1，存在一个常数 $C > 0$使得

$$\begin{aligned}|d(p,q) - d_\infty(p,q)| &= \frac{1}{\epsilon}|\epsilon d(p,q) - \epsilon d_\infty(p,q)| \\ &= \frac{1}{\epsilon}|\rho_\epsilon(\delta_\epsilon p,\delta_\epsilon q) - \rho_0(\delta_\epsilon p,\delta_\epsilon q)| \\ &\overset{(35)}{\leq} \frac{1}{\epsilon}C\epsilon^{\alpha_\infty/\beta} \\ &= C\max\{d_\infty(1,p),d_\infty(1,q)\}^{1-\alpha_\infty/\beta}, \end{aligned}$$

证明 (4)。 □

现在我们说明定理 5.1 如何推出 Pansu 渐近定理（定理 3.5）。

定理 *3.5* 的证明。选取 G的一个渐近分次，并考虑 Pansu 极限度量 d_∞ 以及定义在 G 上的收缩度量 ρ_ϵ。我们首先证明

$$\operatorname{diam}_{d_\infty}\left(\bigcup_{0<\epsilon<1} B_{\rho_\epsilon}(1,R)\right) < \infty, \quad \forall R > 0. \tag{54}$$

事实上，固定 R，$\epsilon > 0$，并令 $p \in B_{\rho_\epsilon}(1, R)$。根据 Guivarc'h 定理 3.13，存在一个常数 $C > 0$，它与 R 和 ϵ无关，因此我们有

$$d_\infty(1,p) \overset{(18)}{\leq} C\rho_\epsilon(1,p) + C\epsilon \leq CR + C\epsilon.$$

因此 $\cup_{0<\epsilon<1} B_{\rho_\epsilon}(1, R) \subseteq B_{d_\infty}(1, C(R+1))$，从而证明了断言 (54)。

接下来，根据定理 5.1，对于任意非负序列 $\epsilon \searrow 0$，度量 ρ_ϵ在紧集上一致收敛于 ρ_0，因而在 d_∞-有界集上也一致收敛。因此，命题3.3意味着

$$(G, \rho_\epsilon, 1) \xrightarrow{\mathrm{GH}} (G, d_\infty, 1), \quad \text{as } \epsilon \to 0.$$

最后回顾一下，根据注记3.11，对于每个 $\epsilon \in (0, 1)$

. □，$(G, \rho_\epsilon, 1)$ 和 $(G, \epsilon d, 1)$ 是等距的

6. 定量 Mitchell 切理论

定理 1.2 由下面这个比较膨胀度量的结果推出。在完成定理 1.2 的证明后，我们将说明它如何推出定理3.7。

定理 6.1。设 G 是一个次芬斯勒李群。相对于一个切分次，考虑 G 上的切度量 d_0 和膨胀度量 d_ϵ。那么，存在 G 中包含1 的邻域Ω 以及 $C > 0$，使得

(55)
$$-Cd_\epsilon(p,q)^{1/\beta}\epsilon^{\alpha_0/\beta} \leq d_\epsilon(p,q) - d_0(p,q) \leq Cd_0(p,q)^{1/\beta}\epsilon^{\alpha_0/\beta}, \quad \forall \epsilon \in [0,1],\ \forall p,q \in \Omega,$$

其中 α_0 和 β 是定义*4.10*和*3.20*中的常数。

本节余下部分均采用定理 6.1 的假设。此外，对于 $\epsilon \in [0,1]$,，我们将与度量 d_ϵ 关联的次Finsler结构记为 $(\Delta, \|\cdot\|)$，并将切分次记为 $(W_1, \ldots\ldots, W_s)$。

我们对定理 6.1 的证明采用与定理 5.1 相同的策略。因此，我们需要在切向分次和膨胀度量的背景下，重新陈述并证明定理 5.1 所需的引理。

引理 6.2。设 $\epsilon \in (0,1]$,设 γ_ϵ 是一条带有控制函数 $u \in L^2([0,1], \Delta)$的 d_ϵ-容许曲线，使得以下方程的解 γ_0

$$\begin{cases} \gamma_0(0) = \gamma_\epsilon(0) \\ \dot\gamma_0(t) = (L^{\gamma_0}_{\gamma_0(t)})_* u(t) \end{cases}$$

有定义。设 $\mathfrak{i}$ 是一个 *Carnot* 商理想（根据定义 *3.18*）。记 $\pi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}/\mathfrak{i}$ 为商映射。那么

(1) $\pi \circ \gamma_0 = \pi \circ \gamma_\epsilon$.

(2) $\gamma_0(1) - \gamma_\epsilon(1),\ \gamma_0(1)^{-1} \cdot_0 \gamma_\epsilon(1),\ \gamma_0(1)^{-1} \cdot_\epsilon \gamma_\epsilon(1) \in \mathfrak{i}$.

证明。 我们采用与引理 5.2 的证明相同的策略。

(1). 只需证明投影曲线是同一个柯西问题的解。回顾一下，对于每个李代数 $(\mathfrak{g}, [\![\cdot,\ \cdot]\!]^{(\epsilon)})$，$\mathfrak{i}$ 都是一个理想，见引理 3.23(2)。此外，商括号与 ϵ无关，见引理 3.23(4)。我们用 $\cdot_\mathfrak{i}$ 表示 $\mathfrak{g}/\mathfrak{i}$上的 Dynkin 乘积，并将关于此乘积的元素 $v \in \mathfrak{g}/\mathfrak{i}$ 的左平移记作 $L^\mathfrak{i}_v$。另请注意，根据

引理3.23(5)，商映射 $\pi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}/\mathfrak{i}$ 是局部李群同态。因此，对于几乎所有的 $t \in [0,1]$，我们有

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\pi\circ\gamma_\epsilon)(t) &= (\mathrm{d}\pi)\dot{\gamma_\epsilon}(t)\\ &= (\mathrm{d}\pi)(\mathrm{d}L^{\cdot\epsilon}_{\gamma_\epsilon(t)})u(t)\\ &= \mathrm{d}(\pi\circ L^{\cdot\epsilon}_{\gamma_\epsilon(t)})u(t)\\ &= \mathrm{d}(L^{\mathfrak{i}}_{\pi(\gamma_\epsilon(t))}\circ\pi)u(t),\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\pi\circ\gamma_0)(t) &= (\mathrm{d}\pi)\dot{\gamma_0}(t)\\ &= (\mathrm{d}\pi)(\mathrm{d}L^{\cdot 0}_{\gamma_0(t)})u(t)\\ &= \mathrm{d}(\pi\circ L^{\cdot 0}_{\gamma_0(t)})u(t)\\ &= \mathrm{d}(L^{\mathfrak{i}}_{\pi(\gamma_0(t))}\circ\pi)u(t).\end{aligned}$$

(2). $\gamma_0(1) - \gamma_\epsilon(1) \in \mathfrak{i}$ 这一事实可直接由 (1) 得出。利用 (1) 以及 π 是李群同态这一事实，对于 $\tau \in \{0,\ \epsilon\}$，我们得到:

$$\pi(\gamma_0(1)^{-1}\cdot_\tau \gamma_\epsilon(1)) = (\pi\circ\gamma_0(1))^{-1}\cdot_{\mathfrak{i}} (\pi\circ\gamma_\epsilon(1)) = 0.$$

因此 $\gamma_0(1)^{-1}\cdot_\tau \gamma_\epsilon(1) \in \mathfrak{i}$. □

我们还需要一个类似于引理 5.3 中的统一界，不过针对的是膨胀度量。

引理 6.3。对于 $\mathfrak{g}$上的任意范数 $\|\cdot\|$，存在常数 $R>0, C>0$，使得

$$d_\epsilon(0,v) \le C\|v\|^{1/\beta},\quad \forall \epsilon\in[0,1],\ \forall v \in B_{d_0}(0,R)\cap W_{\le\beta}. \tag{56}$$

其中 β 是定义 *3.20* 中的常数。

证明。固定足够小的 $R>0$，使得 $\exp|_{B_{d_0}(0,R)}$ 是到其像上的微分同胚。令 $B \coloneqq B_{d_0}(0,R)\cap W_{\le\beta}$. 由于 $B \subseteq W_{\le\beta}$，根据 Carnot 群的球盒定理（见定理 2.3），存在一个常数 C_1，使得

$$d_0(0,v) \le C_1\|v\|^{1/\beta},\quad \forall v\in B. \tag{57}$$

再结合式（22）即可得出结论：存在一个常数 C_2，使得

$$d_\epsilon(0,v) \overset{(22)}{\le} C_2 d_0(0,v) \overset{(57)}{\le} C_1C_2\|v\|^{1/\beta},\quad \forall v\in B.$$

□

6.0.1. 一个测地连通子集。对于每个足够小的 $R>0$，使得 $\exp|_{B_{d_0}(0,R)}$ 是微分同胚，我们构造一个集合 Ω，使其在 $B_{d_0}(0,R)$ 内为 d_ϵ-测地连通，对所有 $\epsilon\in[0,1]$ 均如此；这里的意思是，对于每个 $p,q\in\Omega$，都存在一条取值于 $B_{d_0}(0,R)$ 的 d_ϵ-测地线。

取 $R>0$ 足够小，并令 $C>1$ 为(22)中的常数。定义

$$\tilde{\Omega} \coloneqq B_{d_0}(0,r),\quad \text{with } r = r(R) \coloneqq \frac{R}{4C^2}.$$

˜我们断言，对所有 $\epsilon \in [0,1]$，Ω在 $B_{d_0}(0,R)$内是 d_ϵ-测地连通的。˜事实上，取 p, $q \in \Omega$。假设 $\epsilon \neq 0$，并令 $\tilde{\gamma} : [0,1] \to (G,d)$为从$\delta_\epsilon(p)$到 $\delta_\epsilon(q)$的一条测地线。我们断言

$$\tilde{\gamma}(t) \in B_{d_0}(0, R\epsilon), \quad \forall t \in [0,1]. \tag{58}$$

事实上，我们证明，只要 $\tilde{\gamma}(t)$ 位于 $B_{d_0}(0, R)$ 内，它实际上就位于 $B_{d_0}(0, 3C^2 r\epsilon)$ 内：假设 $\tilde{\gamma}(t) \in B_{d_0}(0, R)$，则

$$\begin{aligned} d_0(0,\tilde{\gamma}(t)) &\overset{(22)}{\leq} C d(0,\tilde{\gamma}(t)) \\ &\leq C(d(0,\delta_\epsilon p) + L_d(\tilde{\gamma})) \\ &= C(d(0,\delta_\epsilon p) + d(\delta_\epsilon p, \delta_\epsilon q)) \\ &\leq C(2d(0,\delta_\epsilon p) + d(0,\delta_\epsilon q)) \\ &\overset{(22)}{\leq} C^2(2d_0(0,\delta_\epsilon p) + d_0(0,\delta_\epsilon q)) \\ &\leq 3C^2 r\epsilon. \end{aligned}$$

由于 $\tilde{\gamma}$ 连续且 $\tilde{\gamma}(0) = \delta_\epsilon p \in B_{d_0}(0, R)$，因此

$$\tilde{\gamma}(t) \in B_{d_0}(0, 3C^2 r\epsilon) \subseteq B_{d_0}(0, R\epsilon), \quad \forall t \in [0,1],$$

这就证明了 (58)。因此，由于 $\delta_\epsilon^{-1} : (B_{d_0}(0, R)\ \epsilon^{-1} d) \to (B_{d_0}(0, R)\ d_\epsilon)$ 是一个等距映射，曲线 $\gamma \coloneqq \delta_\epsilon^{-1} \bigcirc \tilde{\gamma}$ 是一条从 p 到 q、位于 $B_{d_0}(0, R)$ 内的 d_ϵ-测地线。接下来假设 $\epsilon = 0$, 并令 γ_0 为连接 p 和 q 的一条 d_0-测地线。于是由三角不等式可得:

$$d_0(0,\gamma_0(t)) \leq 2r < R.$$

˜我们推导出 Ω 具有所述性质。

6.1. **定理 6.1 和定理 1.2 的证明**。

定理 *6.1* 的证明。 我们首先构造集合 Ω。取足够小的 R，使得 $\exp|_{B_{d_0}(0,R)}$ 是一个微分同胚，并且映射 $(\epsilon, p, q) \mapsto p^{-1} \cdot_\epsilon q$ 在$V \coloneqq [-1,1] \times B_{d_0}(0, R) \times B_{d_0}(0, R)$ 上解析（由引理 3.8 和引理 3.10 可知，这样的 R存在）。根据 β的定义，存在一个 Carnot 商理想（依据定义 3.18）$\mathfrak{i} \lhd \mathfrak{g}$，满足 $\mathfrak{i} \subseteq W_{\leq\beta}$。令 $\|\cdot\|$ 为 $\mathfrak{g}$ 上的一个范数, 其单位球足够大，使得 $B_{d_0}(0, R) \subseteq B_{\|\cdot\|}(0,1)$。令 $C > 1$ 为式 (22) 中的常数。

我们断言，存在一个 $r > 0$，其 $r(C^2 + 2C + 1) < R$，使得:

$$p^{-1} \cdot_\epsilon q \in B_{d_0}(0, R), \quad \forall p, q \in B_{d_0}(0, r(C^2 + 2C + 1)),\ \forall \epsilon \in [-1,1]. \tag{59}$$

事实上，由于映射 $(\epsilon, p, q) \mapsto p^{-1} \cdot_\epsilon q$ 在紧集 V 上是解析的，故存在常数 $\tilde{C}$，使得 $(\epsilon, p, q) \mapsto p^{-1} \cdot_\epsilon q$ 在 V 上是 $\tilde{C}$-利普希茨的。此外，由˜Carnot 群的球盒定理（见定理 2.3），存在常数 $D \geq 1$，使得对 $\forall (\epsilon, p, q) \in V$，我们有

$$\begin{aligned} d_0(0, p^{-1} \cdot_\epsilon q) &\overset{(11)}{\leq} \tilde{D}\|p^{-1} \cdot_\epsilon q\|^{1/s} \\ &= \tilde{D}\|p^{-1} \cdot_\epsilon q - 0 \cdot_\epsilon 0\|^{1/s} \\ &\leq \tilde{C}\tilde{D}(\|p^{-1}\| + \|q\|)^{1/s} \\ &\overset{(11)}{\leq} \tilde{C}\tilde{D}^2(d_0(0,p^{-1}) + d_0(0,q))^{1/s} \\ &\leq 2\tilde{C}\tilde{D}^2 \max\{d_0(0,p), d_0(0,q)\}^{1/s}. \end{aligned}$$

因此，存在一个足够小的 $r > 0$，使得断言 (59) 成立。

ˆ令 C 为引理 4.14 中的常数，并令 C_* 为满足以下条件的常数

$$x < 2Cr \implies \mathrm{e}^{\hat{C}x} - 1 < C_* x. \tag{60}$$

接下来，令 $r' \coloneqq \frac{r}{4C^2}$。根据第 6.0.1 节中的讨论，对于每个 ϵ，球 $B_{d_0}(0,\ r')$ 在 $B_{d_0}(0,\ r)$ 内是 d_ϵ- 测地连通的。我们定义 $\Omega \coloneqq B_{d_0}(0,\ r')$。

由于 $(\epsilon,\ p,\ q) \mapsto p^{-1} \cdot_\epsilon q$ 在 V 上是 $\tilde{C}$-利普希茨的，且 $r(C^2+2C+1) < R$，因此：

$$\|v^{-1} \cdot_\tau w - v^{-1} \cdot_\tau z\| \le \tilde{C}\|w - z\|, \quad \forall \tau \in [-1,1],\ \forall v,w,z \in B_{d_0}(0, r(C^2+2C+1)). \tag{61}$$

从现在起，固定 $p,\ q \in \Omega$ 和 $\epsilon \in [0,1]$.

我们证明**第一个不等式**：$d_0(p,\ q) \le d_\epsilon(p,\ q) + C\epsilon^{\alpha_0/\beta}$. 令 $\gamma_\epsilon : [0,1] \to B_{d_0}(0,\ r)$ 为一条从 p 到 q 的 d_ϵ- 测地线，以恒定速度参数化，控制函数为 $u \in L^2([0,1],\ \Delta)$，且满足 $d_\epsilon(p,\ q) = L_{d_\epsilon}(\gamma_\epsilon) = \|u\|_2 =: L < 2Cr$。令 $\gamma_0 : [0,1] \to \mathfrak{g}$ 为下式的解

$$\begin{cases} \gamma_0(0) = \gamma_\epsilon(0) \\ \dot{\gamma}_0(t) = (L^{\cdot 0}_{\gamma_0(t)})_* u(t). \end{cases}$$

注意到

$$\begin{aligned} L_{d_0}(\gamma_0) &= L_{d_\epsilon}(\gamma_\epsilon) \\ &= d_\epsilon(p,q) \\ &\le d_\epsilon(0,p) + d_\epsilon(0,q) \\ &\overset{(22)}{\le} C(d_0(0,p) + d_0(0,q)) \\ &\le 2Cr'. \end{aligned} \tag{62}$$

因此 $d_0(0,\ \gamma_0(t)) \le d_0(0,\ p) + d_0(p,\ \gamma_0(t)) \le r' + 2Cr' < r(2C+1) < R$。

我们已经证明，曲线 γ_0 和 γ_ϵ 位于有界集

$$B_{d_0}(0, r(2C+1)) \subseteq B_{d_0}(0,R) \subseteq B_{\|\cdot\|}(0,1).$$

此外，我们注意到，根据定义 4.13，γ_0 和 γ_ϵ 分别是向量场 $Y^{u,\ 0}$ 和 $Y^{u,\ \epsilon}$ 的积分曲线。因此，我们可以使用 Gr¨onwall 引理 4.14 来界定

$$\|\gamma_0(1) - \gamma_\epsilon(1)\| \le \epsilon^{\alpha_0}(\mathrm{e}^{\hat{C}L} - 1) \overset{(60)}{\le} C_* L \epsilon^{\alpha_0}, \tag{63}$$

ˆ 对某个常数 $C > 0$成立。

接下来，由引理 6.2：$\gamma_0^{-1}(1) \cdot_0 \gamma_\epsilon(1) \in \mathfrak{i} \subseteq W_{\le\beta}$。因此，由定理 2.3，存在一个仅依赖于 G，$(W_i)_{i=1}^s$，和 $\|\cdot\|$ 的常数 C'，使得

$$d_0(0, \gamma_0^{-1}(1) \cdot_0 \gamma_\epsilon(1)) \overset{(11)}{\le} C' \|\gamma_0^{-1}(1) \cdot_0 \gamma_\epsilon(1)\|^{1/\beta}. \tag{64}$$

我们还需要最后一个界，通过应用（61）即可得到：

$$\begin{aligned} \|\gamma_0^{-1}(1) \cdot_0 \gamma_\epsilon(1)\| &= \|L^{\cdot 0}_{\gamma_0^{-1}(1)}(\gamma_0(1) \cdot_0 \gamma_0^{-1}(1) \cdot_0 \gamma_\epsilon(1)) - L^{\cdot 0}_{\gamma_0^{-1}(1)}(\gamma_0(1))\| \\ &\overset{(61)}{\le} \tilde{C}\|\gamma_0(1) \cdot_0 \gamma_0^{-1}(1) \cdot_0 \gamma_\epsilon(1) - \gamma_0(1)\| \\ &= \tilde{C}\|\gamma_\epsilon(1) - \gamma_0(1)\|. \end{aligned} \tag{65}$$

最后，我们得到第一个不等式：

$$\begin{aligned} d_0(p,q) &\le d_0(p,\gamma_0(1)) + d_0(\gamma_0(1),\gamma_\epsilon(1)) \\ &\le L_{d_0}(\gamma_0) + d_0(0,\gamma_0^{-1}(1)\cdot_0\gamma_\epsilon(1)) \\ &\overset{(62),(64)}{\le} L_{d_\epsilon}(\gamma_\epsilon) + C'\|\gamma_0^{-1}(1)\cdot_0\gamma_\epsilon(1)\|^{1/\beta} \\ &\overset{(65)}{\le} d_\epsilon(p,q) + C'\tilde{C}\|\gamma_0(1)-\gamma_\epsilon(1)\|^{1/\beta} \\ &\overset{(63)}{\le} d_\epsilon(p,q) + C'\tilde{C}C_*^{1/\beta}L^{1/\beta}\epsilon^{\alpha_0/\beta}. \end{aligned}$$

我们证明**第二个不等式**：$d_\epsilon(p,q) \le d_0(p,q) + C\epsilon^{\alpha_0/\beta}$. 设 $\gamma_0:[0,1]\to B_{d_0}(0,r)$ 是一条从 p 到 q 的 d_0-测地线，以恒定速度参数化，其控制函数为 $v\in L^2([0,1],\Delta)$，且 $d_0(p,q) = L_{d_0}(\gamma_0) = \|v\|_2 =: L' < 2r$。我们按照第一个不等式的证明进行；令 $\gamma_\epsilon:[0,1]\to\mathfrak{g}$ 为以下方程的解

$$\begin{cases} \gamma_\epsilon(0) = \gamma_0(0) \\ \dot\gamma_\epsilon(t) = (L^\epsilon_{\gamma_\epsilon(t)})_* v(t). \end{cases}$$

我们断言

$$\gamma_\epsilon(t) \in B_{d_0}(0, r'(C^2+2C)),\ \forall t. \tag{66}$$

事实上，

$$\begin{aligned} L_{d_\epsilon}(\gamma_\epsilon) &= L_{d_0}(\gamma_0) \\ &\le d_0(p,q) < 2r', \end{aligned} \tag{67}$$

and

$$d_\epsilon(0,p) \overset{(22)}{\le} Cd_0(0,p) < Cr'.$$

因此，

$$d_\epsilon(0,\gamma_\epsilon(t)) \le d_\epsilon(0,p) + d_\epsilon(p,\gamma_\epsilon(t)) \le Cr' + L_{d_\epsilon}(\gamma_\epsilon) \le r'(C+2),$$

因此 γ_ϵ 包含于 $B_{d_\epsilon}(0,\ r'(C+2))$ 中。由于 $Cr'(C+2) = r'(C^2+2C) < R$，由 (23) 可得

$$B_{d_\epsilon}(0,r'(C+2)) \overset{(23)}{\subseteq} B_{d_0}(0,r'(C^2+2C)),$$

证明断言 (66)。

我们按照证明第一部分的方法，先建立所需的界。

注意到，γ_0 和 γ_ϵ 都包含于 $B_{d_0}(0,\ r(C^2+2C)) \subseteq B_{d_0}(0,\ R) \subseteq B_{\|\cdot\|}(0,\ 1)$ 中，并且如定义 4.13 所述，γ_0 和 γ_ϵ 分别是向量场 $Y^{u,\,0}$ 和 $Y^{u,\,\epsilon}$的积分曲线。因此，我们可以使用格朗沃尔引理 4.14 来估计

$$\|\gamma_0(1)-\gamma_\epsilon(1)\| \le \epsilon^{\alpha_0}(e^{\hat{C}L'}-1) \overset{(60)}{\le} C_*L'e^{\alpha_0}. \tag{68}$$

接下来，由于 γ_0 和 γ_ϵ 包含于 $B_{d_0}(0,\ r(C^2+2C))$ 中，我们有

$$\gamma_0^{-1}(1)\cdot_0\gamma_\epsilon(1) \overset{(59)}{\in} B_{d_0}(0,R).$$

此外，根据引理 6.2，$\gamma_0^{-1}(1)\cdot_0\gamma_\epsilon(1) \in \mathfrak{i}\subseteq W_{\le\beta}$。因此，我们可以应用引理 6.3 得到如下界

$$d_0(0,\gamma_0^{-1}(1)\cdot_0\gamma_\epsilon(1)) \overset{(56)}{\le} C'\|\gamma_0^{-1}(1)\cdot_0\gamma_\epsilon(1)\|^{1/\beta}, \tag{69}$$

其中存在某个不依赖于 ϵ 的常数 C'。

我们还需要最后一个界，通过应用（61）得到：

$$\begin{aligned}\|\gamma_0^{-1}(1)\cdot_\epsilon\gamma_\epsilon(1)\| &= \|L^{\cdot_0}_{\gamma_0^{-1}(1)}(\gamma_0(1)\cdot_0\gamma_0^{-1}(1)\cdot_\epsilon\gamma_\epsilon(1)) - L^{\cdot_0}_{\gamma_0^{-1}(1)}(\gamma_0(1))\| \\ &\overset{(61)}{\leq} \tilde{C}\|\gamma_0(1)\cdot_0\gamma_0^{-1}(1)\cdot_\epsilon\gamma_\epsilon(1)-\gamma_0(1)\| \\ &= \tilde{C}\|\gamma_\epsilon(1)-\gamma_0(1)\|. \end{aligned} \tag{70}$$

我们得到第二个不等式：

$$\begin{aligned} d_\epsilon(p,q) &\leq d_\epsilon(p,\gamma_\epsilon(1)) + d_\epsilon(\gamma_0(1),\gamma_\epsilon(1)) \\ &\leq L_{d_\epsilon}(\gamma_\epsilon) + d_\epsilon(0,\gamma_0^{-1}(1)\cdot_\epsilon\gamma_\epsilon(1)) \\ &\overset{(67),(69)}{\leq} L_{d_0}(\gamma_0) + C'\|\gamma_0^{-1}(1)\cdot_\epsilon\gamma_\epsilon(1)\|^{1/\beta} \\ &\overset{(70)}{\leq} d_0(p,q) + C'\tilde{C}\|\gamma_0(1)-\gamma_\epsilon(1)\|^{1/\beta} \\ &\overset{(68)}{\leq} d_0(p,q) + C'\tilde{C}C_*^{1/\beta}L'^{1/\beta}\epsilon^{\alpha_0/\beta}. \end{aligned}$$

□

接下来，我们利用定理 6.1 证明定理 1.2。需要强调的是，类似的论证也可以由定理 1.2 推导出定理 6.1。

定理 1.2 的证明。 设 Ω 为定理 6.1 中的集合，设 $r \in (0,1]$ 满足 $B_{d_0}(1,2r) \subseteq \Omega$，且设 $p, q \in B_{d_0}(1,r)$，其中 $d_0(1,p) \geq d_0(1,q)$。我们定义 $\epsilon := \frac{1}{r}d_0(1,p)$。注意到 $\delta_\epsilon^{-1}p, \delta_\epsilon^{-1}q \in B_{d_0}(1,2r) \subseteq \Omega$。事实上，

$$d_0(1,\delta_\epsilon^{-1}p) = rd_0(1,p)^{-1}d_0(1,p) < 2r,$$

类似地

$$d_0(1,\delta_\epsilon^{-1}q) = rd_0(1,p)^{-1}d_0(1,q) < 2r.$$

此外，我们有 $\epsilon \leq 1$。因此，根据定理 6.1，存在一个 $C>0$，使得

$$\begin{aligned} d(p,q) - d_0(p,q) &= \epsilon(d_\epsilon(\delta_\epsilon^{-1}p,\delta_\epsilon^{-1}q) - d_0(\delta_\epsilon^{-1}p,\delta_\epsilon^{-1}q)) \\ &\overset{(55)}{\geq} -Cd_\epsilon(\delta_\epsilon^{-1}p,\delta_\epsilon^{-1}q)^{1/\beta}\epsilon^{1+\alpha_0/\beta} \\ &= -Cd(p,q)^{1/\beta}\epsilon^{1+(\alpha_0-1)/\beta} \\ &= -Cr^{-1-(\alpha_0-1)/\beta}d(p,q)^{1/\beta}d_0(1,p)^{1+(\alpha_0-1)/\beta}, \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} d(p,q) - d_0(p,q) &= \epsilon(d_\epsilon(\delta_\epsilon^{-1}p,\delta_\epsilon^{-1}q) - d_0(\delta_\epsilon^{-1}p,\delta_\epsilon^{-1}q)) \\ &\overset{(55)}{\leq} Cd_0(\delta_\epsilon^{-1}p,\delta_\epsilon^{-1}q)^{1/\beta}\epsilon^{1+\alpha_0/\beta} \\ &= Cd_0(p,q)^{1/\beta}\epsilon^{1+(\alpha_0-1)/\beta} \\ &= Cr^{-1-(\alpha_0-1)/\beta}d_0(p,q)^{1/\beta}d_0(1,p)^{1+(\alpha_0-1)/\beta}. \end{aligned}$$

□

我们还得到以下推论：

推论 6.4. 设(G,d) 是一个配备了 s 步分布的次芬斯勒李群。相对于某个切分次，考虑 G 中单位元邻域上的切度量 d_0 。那么存在常数 $r \in (0,1]$ 和 $C>0$，使得

$$|d(p,q)-d_0(p,q)| \le C\max\{d_0(1,p),d_0(1,q)\}^{1+1/s}, \quad \forall p,q \in B_{d_0}(1,r). \tag{71}$$

证明。这是定理 1.2 的推论。根据 α_0和 β的定义，对于每个切分次，我们有 $\alpha_0/\beta \ge 1/s$ 。□

现在我们说明定理 1.2 如何推出 Mitchell切定理（定理3.7）以及定量估计 (12)。

定理*3.7*的证明。设 $U \subseteq G$ 是一个单位元邻域，在该邻域内估计 (6) 成立。对于 $\epsilon \in (0,1],$，考虑如下膨胀

$$\delta_{1/\epsilon} : U \to G_0,$$

如第2节 2.3 中所述，其中我们按照第3节 3.2 中的方式，将 U 视为 G_0 中的一个单位元邻域。

我们证明 $\forall R>0$、 $\forall \tau>0$以及映射

$$\delta_{1/\epsilon} : \left(B_{\frac{1}{\epsilon}d}(1,R), \frac{1}{\epsilon}d\right) \to (G_0,d_0)$$

是一个 (1， τ)-拟等距嵌入，当 $\epsilon>0$ 足够小时。事实上，固定 $R>0$。则当 $\epsilon>0$ 足够小时，使得

$$B_{\frac{1}{\epsilon}d}(1,R) = B_d(1,\epsilon R) \subseteq U,$$

并且对于 p， $q \in B_{\frac{1}{\epsilon}d}$(1， R)，根据定理 1.2，存在一个 C，使得

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{\epsilon}d(p,q)-d_0(\delta_{1/\epsilon}p,\delta_{1/\epsilon}q)\right| &= \frac{1}{\epsilon}\left|d(p,q)-d_0(p,q)\right| \\ &\overset{(6)}{\le} C\frac{1}{\epsilon}(\epsilon R)^{1+\alpha_0/\beta} \to 0, \quad \text{as } \epsilon \to 0.\end{aligned}$$

接下来，我们证明 $\forall R>0$, $\forall \tau>0$，并且当 ϵ 足够小时

$$B_{d_0}(1,R) \subseteq \delta_{1/\epsilon}\left(B_{\frac{1}{\epsilon}d}(1,R+\tau)\right).$$

事实上，令 $q \in B_{d_0}$(1， R)，并考虑 $p := \delta_\epsilon q \in B_{d_0}$(1， ϵR)，其中 $\epsilon>0$ 足够小，使得 $p \in \Omega$。于是根据定理 1.2，存在一个 C，使得

$$\frac{1}{\epsilon}d(1,p) \overset{(6)}{\le} d_0(1,q) + CR^{1+\alpha_0/\beta}\epsilon^{\alpha_0/\beta} \to d_0(1,q), \quad \text{as } \epsilon \to 0.$$

Therefore $(G,\frac{1}{\epsilon}d) \overset{\text{GH}}{\to} (G_0,d_0)$ as $\epsilon \to 0$. □

7. Applications and examples

在本节最后，我们给出一些例子，说明我们的新结果如何得出比文献中先前结果更精确的界。第一组例子估计形如 $G \times H$ 的乘积（其中一项是 Carnot 群 G，另一项是单连通幂零群 H）收敛到渐近锥的收敛速率，且该估计不依赖于 G。

命题 7.1。 设$(G,\ (V_i^G)_{i=1}^r)$是一个 r 步分层群，且$(H,\ \Delta_H)$是一个 s 步单连通幂零李群，并配备了一个括号生成分布。设 d 是 $G\times H$ 上与分布$V_1^G\times\Delta_H$相关联的次芬斯勒度量， d_∞ 是相应的 *Pansu* 极限度量。那么存在一种渐近分次，使得

$$|d(p,q)-d_\infty(p,q)|=O(\max\{d_\infty(1,p),d_\infty(1,q)\}^{1-1/s}),\quad \text{as } p,q\to\infty.$$

证明。 设 $(V_i^H)_{i=1}^s$ 是 H 的渐近分次。那么，由$V_i=V_i^G\times V_i^H$定义的 $(V_i)_{i=1}^{\max\{r,s\}}$ 是 $G\times H$ 的渐近分次。关于此分次，H 是 $G\times H$ 的 Carnot 商理想（根据定义 3.18），因此由定义 3.20 可得 $\beta\le s$。由于 $\alpha_\infty\ge 1$ ，我们有 $\alpha_\infty/\beta\ge 1/s$，因此定理 1.1 蕴含

$$|d(p,q)-d_\infty(p,q)|=O(\max\{d_\infty(1,p),d_\infty(1,q)\}^{1-1/s}),\quad \text{as } p,q\to\infty.$$

□

我们强调，命题 7.1 中 $G\times H$ 的幂零步为 $\max\{r,\ s\}$，可能大于 s。

接下来，我们考虑例 3.21(2) 中非常具体的乘积。

例 7.2。 设 $\mathfrak{g}=N_{5,\ 2,\ 2}\times N_{5,\ 2,\ 1}$ 且 $(V_i)_{i=1}^4$ 是配备了例 3.21(2) 中渐近分次的次芬斯勒群。于是由命题 7.1：

$$|d(1,p)-d_\infty(1,p)|=O(d(1,p)^{2/3}),\quad \text{as } p\to\infty,$$

这是对该界的改进

$$|d(1,p)-d_\infty(1,p)|=O(d(1,p)^{3/4}),\quad \text{as } p\to\infty$$

该界可通过使用 [BLD12 的命题 4.1] 得到。

我们强调，不同的分次选择会在 Pansu 渐近定理的定量版本和 Mitchell切定理的定量版本中给出不同的估计。关于渐近定理 1.1，指数$1-\alpha_\infty/\beta$ 显然随渐近分次的选择而变化。该数至多为 $1-1/s$，且越小则界越精确。排除 Carnot情形，该数至少为 $1/s$。在下一个例子中，我们说明对于某个特定分次确实如此。

例 7.3. 设 $(G,(V_i)_{i=1}^s)$ 为一个分层群。设 $d^{(k)}$ 为 G 上与分布 $\Delta_{(k)}:=V_1\oplus V_k$ 相关联的次芬斯勒距离，其中 $k\in\{2,\dots,s\}$，并设 $d_\infty^{(k)}$为相应的 Pansu 极限度量。关于该分层，我们有 $\beta=s$ 和 $\alpha_\infty=k-1$。因此定理 1.1 蕴含

$$|d^{(k)}(p,q)-d_\infty^{(k)}(p,q)|=O(\max\{d_\infty^{(k)}(1,p),d_\infty^{(k)}(1,q)\}^{(s-k+1)/s}),\quad \text{as } p,q\to\infty.$$

注意，对于 $k=s$，上述方程中的指数为 $1/s$；根据命题 4.4，对于非 Carnot 群，这是 $1-\alpha_\infty/\beta$ 的最小值。

我们还得到了一个类似于命题 7.1 的结果，但针对的是切空间。

命题7.4。 设$(G,\ (W_i^G)_{i=1}^r)$是一个 r 步分层群，且(H,Δ_H)是一个配备了 s 步括号生成分布的李群。设 d 是 $G\times H$ 上与分布 $V_1^G\times\Delta_H$ 相关联的一个次芬斯勒度量， d_0 是相应的切度量。那么存在一种切分次，使得

$$|d(p,q)-d_0(p,q)|=O(\max\{d_0(1,p),d_0(1,q)\}^{1+1/s}),\quad \text{as } p,q\to 0.$$

证明。 证明与命题 7.1 的证明类似。设 $(W_i^H)_{i=1}^s$ 是 H 的一个切分次。那么，由 $W_i = W_i^G \times W_i^H$ 定义的 $(W_i)_{i=1}^{\max\{r,s\}}$ 是 $G \times H$ 的一个切分次。关于此分次， H 是 $G \times H$ 的一个 Carnot 商理想（根据定义 3.18），因此由定义 3.20 可得 $\beta \le s$。由于$\alpha_0 \ge 1$，我们有 $\alpha_0/\beta \ge 1/s$，因此定理 1.2 意味着

$$|d(p,q) - d_0(p,q)| = O(\max\{d_0(1,p), d_0(1,q)\}^{1+1/s}), \quad \text{as } p,q \to 0.$$

□

References

[ABB20] A. Agrachev、D. Barilari 和 U. Boscain。《次黎曼几何全面导论》。第181卷。剑桥高等数学研究丛书。从哈密顿观点出发，附 Igor Zelenko 的附录。剑桥：剑桥大学出版社，2020年，页码 xviii+745.[ALDNG23] G. Antonelli、E. Le Donne 和 S. Nicolussi Golo。“利普希茨 Carnot-Carath´eodory 结构及其极限”。英文。载于：《动力系统与控制杂志》29.3（2023），第805–854页。[Bel96] A. Bella¨ıche。“次黎曼几何中的切空间”。英文。载于：《次黎曼几何》。第一届欧洲数学大会卫星会议论文集“非完整日：次黎曼几何、控制理论、机器人学”，法国巴黎，1992年6月30日至7月1日。巴塞尔：Birkh¨auser，1996年，第1–78页。[Ber88] V. N. Berestovskij。“具有内禀度量的齐性流形 I”。俄文。载于：西伯利亚数学杂志 29.6(172)（1988），第17–29页。[BLD12] E. Breuillard 和 E. Le Donne。“幂零群、渐近锥与次芬斯勒几何”。载于：（2012）。未发表。https://www.math.u-psud.fr/~breuilla/Balls.pdf。[BLU07] A. Bonfiglioli、E. Lanconelli 和 F. Uguzzoni。《分层李群及其次拉普拉斯算子的位势理论》。施普林格数学专著。柏林：Springer，2007年，页码 xxvi+800.[Bre14] E. Breuillard。“多项式增长的局部紧群的几何与大球的形状”。载于：群、几何与动力学 8.3（2014），第669–732页。[CG90] L. Corwin 和 F. Greenleaf。《幂零李群的表示及其应用：第1卷，第1部分，基础理论与实例》。剑桥高等数学研究丛书。剑桥：剑桥大学出版社，1990年。.[Cho40] W. Chow。“关于一阶线性偏微分方程组”。载于：数学年刊 117（1940），第98–105页。[Cor17] Y. Cornulier。“群的次线性双 Lipschitz 等价”。载于：《高等师范学校科学年刊》52（2017）。[FS82] G. B. Folland 和 E. M. Stein。《齐性群上的 Hardy 空间》。第28卷。《数学札记》。新泽西州普林斯顿：普林斯顿大学出版社，1982年，页码 xii+285.[Gro81] M. Gromov。“多项式增长群与扩张映射。附 Jacques Tits 的附录”。英文。载于：《高等科学研究所数学出版物》53（1981），第53–78页。

[Gro99] M. Gromov。《黎曼与非黎曼空间的度量结构》。第152卷。数学进展。根据1981年法文原著编写，附 M. Katz、P. Pansu 和 S. Semmes 的附录。马萨诸塞州波士顿：Birkh¨auser Boston Inc.，1999年，页码 xx+585.[Jea14] F. Jean。《非完整系统的控制：从次黎曼几何到运动规划》。Springer数学丛书。Cham：Springer，2014年，页码 x+104.[LD25] E. Le Donne。《度量李群：齐性观点下的 Carnot-Carath´eodory 空间》。英文。第306卷。《研究生数学教材》。Cham：Springer，2025年。[LD+25] E. Le Donne、L. Nalon、S. Nicolussi Golo 和 S.-Y. Ryoo。《幂零步长2的黎曼李群的渐近性质》。cvgmt 预印本。2025年。[LDT22] E. Le Donne 和 F. Tripaldi。“低维 Carnot 群集锦”。载于：《度量空间中的分析与几何》10.1（2022），第155–289页。[Mit85] J. Mitchell。“关于 Carnot-Carathéodory 度量”。载于：《微分几何杂志》21（1985），第35–45页。[Mon02] R. Montgomery。《次黎曼几何巡礼：测地线及其应用》。《数学调查与专著》。美国数学会，2002年。[NSW85] A. Nagel、E. M. Stein 和 S. Wainger。“由向量场定义的球与度量 I：基本性质”。载于：《数学学报》155.1-2（1985），第103–147页。[Pan83] P. Pansu。“幂零流形中球的增长与闭测地线”。载于：《遍历理论与动力系统》3.3（1983），第415—445页。[Pan89] P. Pansu。“Carnot-Carathéodory 度量与秩一对称空间的拟等距”。载于：《数学年刊》（第2辑）129.1（1989），第1–60页。[Ras38] P. K. Rashevsky。“完全非完整空间中的任意两点都可由一条可容许曲线连接”。载于：Liebknecht 师范学院学报，物理数学辑 2（1938）。（俄文），第83–94页。[RS76] L. P. Rothschild 和 E. M. Stein。“次椭圆微分算子与幂零群”。载于：《数学学报》137.3-4（1976），第247–320页。[Ste93] E. M. Stein。《调和分析：实变量方法、正交性与振荡积分》。第43卷。《普林斯顿数学丛书》。在 Timothy S. Murphy 协助下编写，《调和分析专著》第三卷。新泽西州普林斯顿：普林斯顿大学出版社，1993年，页码 xiv+695.[Tas22] K. Tashiro。“非奇异幂零群收敛至渐近锥的速度”。英文。载于：《几何专论》216.2（2022）。编号18，16页。