arXiv:2601.21559v1 [math.AG] 29 Jan 2026

通过非同构八面体构造非傅里叶–穆凯正合函子的新例子

Alberto Canonaco 和 Mattia Ornagh I

Abstract. 我们研究一个三角范畴 $\mathcal{S}$，它具有由三个对象组成的满强例外序列，且其中的 Hom 空间是一维的。我们证明，从 $\mathcal{S}$到另一个三角范畴 $\mathcal{T}$ 的正合函子的同构类，与满足自然条件的 $\mathcal{T}$ 八面体的同构类一一对应。作为应用，我们构造了一个从 $\mathcal{S}$ 到 $\mathbf{D}^b(\Bbbk[x]\text{-mod})$ 的正合函子，但它不具有 dg 提升。这给出了一个在 $\mathbf{D}^b(\mathbb{P}^2)$ 与 $\mathbf{D}^b(\mathbb{P}^1)$ 之间的非傅里叶-穆凯精确函子的显式例子。

Introduction

设 X_1 和 X_2 是域 $\Bbbk$上的两个光滑射影概形。在凝聚层的有界导出范畴之间的一个正合（$\Bbbk$-线性）函子 $\mathrm{F}\colon \mathbf{D}^b(X_1) \to \mathbf{D}^b(X_2)$，若存在 $E \in \mathbf{D}^b(X_1 \times X_2)$ 使得 $\mathrm{F} \cong \Phi_E$，则称其为傅里叶 - 穆凯 型（或简称傅里叶 - 穆凯），其中

$$\Phi_E(-) := \mathbb{R}(p_2)_*\big(E \overset{\mathbb{L}}{\otimes} p_1^*(-)\big)\colon \mathbf{D}^b(X_1) \to \mathbf{D}^b(X_2),$$

其中 $p_i\colon X_1 \times X_2 \to X_i$ 自然投影，对于 $i = 1, 2$。对象 E 称为 F 的核 。Shigeru Mukai 在20世纪80年代引入了这类函子，用以研究阿贝尔簇及其对偶簇的导出范畴之间的等价。十年后，Orlov 证明了一项著名结果，称为*Orlov* 表示定理：若 F 是全忠实的，则它是傅里叶-穆凯函子，且核在同构意义下唯一（见 [19, 2.2 定理]）。更准确地说，原始表述还要求 F 存在一个伴随函子，但后来发现这一假设是多余的。事实上，由 [5,定理 1.1] 可轻易推出，每个正合函子$\mathbf{D}^b(X_1) \to \mathbf{D}^b(X_2)$都有伴随函子。

受 Orlov 定理以及所有有意义的几何函子$\mathbf{D}^b(X_1) \to \mathbf{D}^b(X_2)$都是傅里叶-穆凯函子的启发，Bondal、Larsen 和 Lunts 猜想，每个正合函子$\mathbf{D}^b(X_1) \to \mathbf{D}^b(X_2)$都是傅里叶-穆凯函子（见 [4, 猜想 7.2]）。多年后，这一猜想才被推翻：Rizzardo、Van den Bergh 和 Neeman 在 [21, 定理 1.4] 中给出了首个非傅里叶-穆凯正合函子的例子。他们的构造依赖极其复杂的技术工具，即使是该函子本身的定义，非专业人士也难以理解（简要概述见 [9, 6.2] ）。同一批作者及其合作者后续的工作，对这一例子进行了推广和部分简化（见[20, 定理 1.3], [15]）。然而，这类已知例子都有一些共同特征：它们依赖精细的障碍理论，涉及极为复杂的 A_∞ 方法，并要求 $\dim(X_1)$，$\dim(X_2) \geq 3$。事实上， [21] 中发展的技术在维数 ≤ 2 下根本行不通。对于其他已知的非傅里叶-穆凯正合函子例子，情况似乎也一样，即 Vologodsky 在 [24]中构造的那些例子。尽管这些例子更容易描述，但它们没那么有趣的原因在于，它们要求 $\Bbbk = \mathbb{F}_p$ （其中 p 是一个素数）。

因此，自然会问：在任意域上，是否存在“简单”的非傅里叶–穆凯正合函子例子，且可能满足 $\dim(X_1)$, $\dim(X_2) \leq 2$。尤其是， $X_1 = \mathbb{P}^1$ 或 $X_2 = \mathbb{P}^1$的情形颇为引人注目。事实上，导出范畴 $\mathbf{D}^b(\mathbb{P}^1)$ 有非常明确的描述；并且当 $X_1 = \mathbb{P}^1$或 $X_2 = \mathbb{P}^1$ 时，每个傅里叶-穆凯函子都有一个核，且该核在同构意义下唯一，参见 [8, 命题 2.4]。本文的主要结果如下。

定理 **A.** 存在非傅里叶-穆凯精确函子 $\mathbf{D}^b(\mathbb{P}^2) \to \mathbf{D}^b(\mathbb{P}^1)$ 以及 $\mathbf{D}^b(\mathbb{P}^1) \to \mathbf{D}^b(\mathbb{P}^2)$。

Date: 2026年1月30日。2020 *Mathematics Subject Classification.* 13D09，14A22，14F08，18G35，18G80。
Key words and phrases. 三角范畴、Fourier-Mukai函子、dg范畴、增强。A. C. 是 GNSAGA (INdAM) 的成员，并获得 PRIN 2022 研究项目“模空间与特殊簇”的部分资助。M. O. 获得 ERC 高级资助项目 101095900-TriCatApp 的资助。

这一结果适用于任意域，是一个纯代数定理的简单几何应用。在陈述该定理之前，我们先回顾一下：正合函子 $\mathbf{D}^b(X_1) \to \mathbf{D}^b(X_2)$ 是傅里叶-穆凯函子，当且仅当它具有一个（dg）提升。还需注意，范畴 $\mathbf{D}^b(X_i)$（对于 $i = 1,2$）具有强唯一增强。因此，对于给定函子，是否存在提升并不取决于$\mathbf{D}^b(X_i)$的增强选择（更多详情见第1节）。现在陈述我们的主要代数结果。全文中，我们用 A-mod 表示有限生成左模构成的范畴，这些左模是某个 $\Bbbk$-代数 A上的模。

定理 *B.* 设 $\mathcal{S}$ 是一个（$\Bbbk$-线性的）三角范畴，且具有满强例外序列（A, B, C），满足 $\mathcal{S}(A, B) \cong \mathcal{S}(A, C) \cong \mathcal{S}(B, C) \cong \Bbbk$，并且复合映射 $\mathcal{S}(A, B) \otimes \mathcal{S}(B, C) \to \mathcal{S}(A, C)$ 非零。那么存在一个正合函子 $\mathcal{S} \to D^b(\Bbbk[x]\text{-}mod)$，它不允许提升。此外，该函子的本质像包含于 $D^b_0(\Bbbk[x]\text{-}mod)$ 中；这是 $D^b(\Bbbk[x]\text{-}mod)$ 的满三角子范畴，由上同调被 x 的某个幂湮灭的复形组成。

我们指出，定理 B 给出了一个不可提升函子的例子，该函子介于两个遗传代数的有界导出范畴之间。事实上，有 $\mathcal{S} \cong \mathbf{D}^b(A\text{-mod})$，其中 A 是一个（左）遗传代数（见引理 3.1）。注意，这类三角范畴具有强唯一增强；参见例 1.3。

我们现在简要介绍定理 B 的证明。三角范畴 $\mathcal{S}$ 具有特别简单的结构，因此可以完整刻画其中的 distinguished 三角（见命题 3.2）。更确切地说，我们将 f和 g分别记为一维 $\Bbbk$-模 $\mathcal{S}(A, B)$ 和 $\mathcal{S}(B, C)$ 的生成元。于是， $\mathcal{S}$ 中的每个 distinguished 三角都来自一个八面体中的四个 distinguished 三角，该八面体扩展了 f 和 g，并附带与此八面体相关的另外两个三角（这些三角先验上不一定是 distinguished 的）（见 [3, 注释 1.1.13]）。一般而言，如果这两个额外的三角都是 distinguished 的，我们就称该八面体为良好的。由此可知，从 $\mathcal{S}$ 到某个三角范畴 $\mathcal{T}$ 的正合函子的同构类，与 $\mathcal{T}$中良八面体的同构类一一对应；见推论 3.3。利用这一刻画，很容易推出：只要 $\mathcal{T}$ 具有强唯一增强，且包含两个扩展同一对可复合态射的非同构良八面体，就存在一个没有提升的正合函子 $\mathcal{S} \to \mathcal{T}$（见命题 4.2）。据我们所知，文献中唯一一个扩展同一对可复合态射的两个非同构（良）八面体的例子出自 K¨unzer，见 [14, §2]。在他的例子中，三角范畴是 $\mathbb{Z}/(p^6)$-模的稳定 Frobenius 范畴，它不是域上线性的。将环 $\mathbb{Z}/(p^6)$替换为 $\Bbbk[x]/(x^6)$，即可得到一个 $\Bbbk$-线性版本。不过，目前尚不清楚这个三角范畴是否具有（强）唯一增强。另一方面，我们证明，K¨unzer 的构造可以加以改造，从而在$\mathbf{D}^b_0(\Bbbk[x]\text{-模})$中得到一个类似的例子（见命题 2.2）。

本文的约定与内容。 全文中， $\Bbbk$ 表示一个域（尽管许多一般性结果在 $\Bbbk$ 为任意交换环时仍然成立）。我们假设所有预加性范畴和所有加性函子都是 $\Bbbk$-线性的。

在第 1 节中，我们回顾有关 dg 范畴、三角范畴的（dg）增强以及正合函子的（dg）提升的基本概念，并介绍几何设定中可提升函子与傅里叶-穆凯函子之间的关系。除了一些记号约定外，以上内容均属标准内容。在第 2 节中，我们引入良八面体的概念，并给出一个具体例子：两个非同构的良好八面体延拓同一对可复合态射；参见命题 2.2。该命题的完整证明见附录 B，其论证紧随 K¨unzer 的原始论证。在第 3 节中，我们先介绍具有满强例外序列的三角范畴的一些一般性质，然后讨论定理 B 中的范畴 $\mathcal{S}$，并陈述命题 3.2。尽管该结果或许为专家所知，我们仍在附录 A 中给出证明，因为我们未能在文献中找到合适的参考资料。最后，在第 4 节和第 5 节中，我们证明定理 B 和定理 A。

1. Dg lifts and dg enhancements

我们假设读者熟悉 dg 范畴的相关术语。完整的介绍可见 [12], , 另请参阅 [10]。

我们用 $\mathbf{dgCat}$ 表示以 dg 函子为态射的（小型、 $\Bbbk$-线性）dg 范畴所构成的范畴，并用 $\mathbf{Hqe}$ 表示其关于拟等价的局部化。注意，$\mathbf{dgCat}$和$\mathbf{Hqe}$具有相同的对象。关于态射，我们回顾一下：$\mathbf{dgCat}$ 具有一种模型结构，其弱等价为拟等价，且每个对象都是纤维对象（见 [22]）。由此可知，每个态射 $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$

在 **Hqe** 中都可以由图表 $\mathcal{A} \xleftarrow{S} \mathcal{A}' \xrightarrow{F} \mathcal{B}$ 表示，其中 S 是任意一个余纤维对象为 $\mathcal{A}'$ 的拟等价。

给定一个微分分次范畴 $\mathcal{A}$、一个对象 $A \in \mathcal{A}$ 以及一个闭的零次态射 f，其中 $\mathcal{A}$，我们总可以定义 A 的 n- 平移（其中 $n \in \mathbb{Z}$）以及 f 的映射锥（见 [10, 定义 2.3.1 和 2.3.2]）。若 $\mathcal{A}$ 对平移和锥封闭，我们就称它为强预三角化的。给定一个微分分次范畴 $\mathcal{A}$，我们总可以将 $\mathcal{A}$ “嵌入”到一个强预三角化的微分分次范畴中。具体而言，我们用 Pretr($\mathcal{A}$) 表示 $\mathcal{A}$ 的预三角化包络。它是 $\mathsf{C}^{dg}(\mathcal{A})$ 中包含 $\mathcal{A}$ 在米田嵌入下的像、且对微分分次同构封闭的最小强预三角化全 dg 子范畴。这里，$\mathsf{C}^{dg}(\mathcal{A})$ 表示从反微分分次范畴 $\mathcal{A}^{\circ}$ 到 $\Bbbk$-模复形的微分分次范畴 $\mathsf{C}^{dg}(\Bbbk)$ 的 dg 函子所构成的微分分次范畴。若米田嵌入 $\mathcal{A} \to$Pretr($\mathcal{A}$) 是拟等价，我们就称微分分次范畴 $\mathcal{A}$ 为预三角化的。记 $\mathbf{Hqe}^{p}$ 为 **Hqe** 中以预三角化微分分次范畴为对象的全子范畴，则预三角化包络给出一个函子 Pretr: **Hqe** $\to \mathbf{Hqe}^{p}$，它是包含函子 $\mathbf{Hqe}^{p} \to$**Hqe** 的左伴随（见 [12, §4.5] 或 [10, 命题 3.5.3]）。

若 $\mathcal{A}$ 是一个预三角 dg 范畴，则其同伦范畴 $H^0(\mathcal{A})$ 自然具有三角（$\Bbbk$-线性）范畴的结构。我们将具有此三角结构的范畴 $H^0(\mathcal{A})$ 记作 $H^0_t(\mathcal{A})$。作为记号，**He** 表示一个范畴，其对象是（小的、 $\Bbbk$-线性的）范畴，态射是函子的同构类。另一方面，**Ht** 表示一个范畴，其对象是（小的、 $\Bbbk$-线性的）三角范畴，态射是正合函子的同构类。

注 1.1。 虽然预三角 dg 范畴只是满足某些性质的 dg 范畴，但三角范畴则是在一个范畴上赋予额外结构（平移和可 distinguished 三角）得到的。三角范畴之间的正合函子必须保持三角结构。特别地，它由一对 (F α) 给出，其中 F 是一个普通函子，而 α: F$\circ[1] \to [1]\circ$F 是一个自然同构。按照通常的记号滥用，我们将这样的正合函子简单地记作 F。不过，需要记住的是，正合函子的一个（同）态射 γ: (F α) $\to$ (F$'$, α') 是函子之间的一个普通（同）态射 γ: F $\to$F$'$，满足 $\alpha'_X \circ \gamma_{X[1]} = \gamma_X[1] \circ \alpha_X$，对于源范畴中的每个对象 X 都成立。

显然，将一个微分分次范畴（分别地，一个预三角化微分分次范畴） $\mathcal{A}$ 映至 H^0（$\mathcal{A}$）（分别地，映至 H^0_t（$\mathcal{A}$））的映射可扩张为函子 H^0: **Hqe** $\to$ **He**（分别地，函子 H^0_t: $\mathbf{Hqe}^{p} \to \mathbf{Ht}$）。此外，存在一个交换图

(1.1)
$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Hqe}^{p} & \xrightarrow{\ \ \ } & \mathbf{Hqe} \\ {\scriptstyle H^0_t}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle H^0} \\ \mathbf{Ht} & \xrightarrow{\ \ \ } & \mathbf{He} \end{array},$$

其中上方的 　（分别地，下方的）水平映射是自然嵌入（分别地，遗忘）函子 .

定义 1.2. 三角范畴 $\mathcal{T}$ 的一个（微分分次）增强是一个对(A,E)，其中 $\mathcal{A}$ 是一个预三角化微分分次范畴，且 E: $H^0_t(\mathcal{A}) \to \mathcal{T}$ 是 **Ht** 中的一个同构。具有增强的三角范畴称为代数的。

设 $\mathcal{T}$ 为一个代数三角范畴。我们称 $\mathcal{T}$ 具有（强）唯一增强，如果给定 $\mathcal{T}$ 的两个增强 ($\mathcal{A}$,E) 与 ($\mathcal{A}'$, E′)，存在一个同构 f: $\mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ 属于 **Hqe**（使得 E $=$E′$\circ H^0_t(f)$ 属于 **Ht**）。

例 1.3. 若 $\mathcal{A}$ 是遗传阿贝尔范畴且 $? \in \{-, +, b, \emptyset\}$ 则 $\mathbf{D}^{?}(\mathcal{A})$ 具有强唯一增强，见 [6,定理 A]。

定义 1.4. 设 ($\mathcal{A}$,E) 与 ($\mathcal{A}'$,E′) 为两个三角范畴 $\mathcal{T}$ 与 $\mathcal{T}'$ 的增强。我们称 $f \in \mathbf{Hqe}(\mathcal{A}, \mathcal{A}')$ 是 F $\in \mathbf{Ht}(\mathcal{T}, \mathcal{T}')$ 相对于增强 ($\mathcal{A}$, E) 与 ($\mathcal{A}'$, E′) 的 （*dg*） 提升，如果如下图表

$$\begin{array}{ccc} H^0_t(\mathcal{A}) & \xrightarrow{H^0_t(f)} & H^0(\mathcal{A}') \\ {\scriptstyle \mathsf{E}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathsf{E}'} \\ \mathcal{T} & \xrightarrow{\ \mathsf{F}\ } & \mathcal{T}' \end{array}$$

在**Ht**中是交换的。

备注 1.5. 一般而言，F是否容许提升取决于增强(𝒜,E)与(𝒜′,E′)的选择。然而，容易看出，当 $\mathcal{T}$ 与 $\mathcal{T}'$ 具有强唯一增强时，这种依赖性便消失；在这种情况下，我们可以直接说F具有提升。

命题 1.6。 设 X_1 与 X_2 为 $\mathbb{k}$上的两个光滑射影概形。

(1) $\mathbf{D}^b(X_i)$ 具有强唯一增强，对 $i=1,\ 2$。*(2)* 正合函子 $\mathbf{D}^b(X_1)\ \to\mathbf{D}^b(X_2)$ 是傅里叶-穆凯的，当且仅当它具有提升。

证明。 可以适当选择 $\mathbf{D}^b(X_1)$ 与$\mathbf{D}^b(X_2)$ 的增强，使得正合函子$\mathbf{D}^b(X_1)\ \to\mathbf{D}^b(X_2)$ 是傅里叶-穆凯的，当且仅当它容许提升。这一事实来自 To¨en 所声称的一个更一般的陈述（见 [23, §8.3]）。To¨en 的陈述在完全一般情形下的完整证明将见于 [7]。不过请注意，该论断已由 Lunts 与 Schn¨urer 在更强假设下于 [17, 定理 1.1]，中得到证明，而这在我们的设定下已经足够。随后，利用 Orlov 表示定理即可容易地得出结论（另见 [9,§6.3]）。 □

2. NON-ISOMORPHIC GOOD OCTAHEDRA

设 $\mathcal{T}$为一个三角范畴。设 $A\xrightarrow{f}B\xrightarrow{g}C$ 为 $\mathcal{T}$ 的两个可复合态射，且 $h:=g\circ f$。我们可以将 f、 g 和 h 补全为三个distinguished 三角

$$A\xrightarrow{f}B\xrightarrow{f'}D\xrightarrow{f''}A[1], \tag{2.1}$$

$$A\xrightarrow{h}C\xrightarrow{h'}E\xrightarrow{h''}A[1], \tag{2.2}$$

$$B\xrightarrow{g}C\xrightarrow{g'}F\xrightarrow{g''}B[1], \tag{2.3}$$

在 $\mathcal{T}$中。由(TR4)，存在一个交换图

$$\begin{array}{ccccccc}
A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{f'} & D & \xrightarrow{f''} & A[1] \\
\| & & \downarrow{\scriptstyle g} & \searrow{\scriptstyle l} & \downarrow{\scriptstyle k} & & \| \\
A & \xrightarrow{h} & C & \xrightarrow{h'} & E & \xrightarrow{h''} & A[1] \\
\downarrow{\scriptstyle f} & & \| & & \downarrow{\scriptstyle k'} & \searrow{\scriptstyle l'} & \downarrow{\scriptstyle f[1]} \\
B & \xrightarrow{g} & C & \xrightarrow{g'} & F & \xrightarrow{g''} & B[1]
\end{array} \tag{2.4}$$

使得

$$D\xrightarrow{k}E\xrightarrow{k'}F\xrightarrow{k''}D[1] \tag{2.5}$$

是 $\mathcal{T}$中的一个可 distinguished 三角，其中 $k'':=f'[1]\circ g''$。 $\mathcal{T}$中的一个八面体 是形如(2.4)的交换图，使得(2.1)、(2.2)、(2.3)和(2.5)均为distinguished 三角。为缩短记号，我们令

$$I:=\{A,B,C,D,E,F\},\qquad J:=\{f,f',f'',g,g',g'',h,h',h'',k,k',k'',l,l'\}. \tag{2.6}$$

对于八面体，存在一个显然的同构概念。具体而言，假设我们有两个八面体，第˜一个由(2.4)给出，第二个由一个类似的图给出，其中每个对象 $X\in I$ 被替换为 X ，每个态射 $x\in J$ 被替换为 $\tilde{x}$。于是，若存在˜六个同构 $\phi_X:\ X\to X$（对 $X\in I$），使得对 J中的每个态射 $x\colon\ Y\to Z$ 都有 $\tilde{x}\circ\phi_Y=\phi_Z\circ x$ ，其中，若对某个 $X\in I$有 $Z=X[1]$ ，则我们令 $\phi_Z:=\phi_X[1]$，我们就称这两个八面体同构。

如果以下三角形满足条件，我们就称八面体 (2.4) 是良好的

$$B\xrightarrow{l}E\xrightarrow{\binom{k'}{-h''}}F\oplus A[1]\xrightarrow{(g''\ f[1])}B[1], \tag{2.7}$$

$$B\xrightarrow{\binom{g}{f'}}C\oplus D\xrightarrow{(h'\ -k)}E\xrightarrow{l'}B[1]. \tag{2.8}$$

是被区分的。

注 2.1. 在任意三角范畴中，每一对可复合的态射是否都能补成一个好八面体，似乎仍是一个开放问题（参见 [3, 注释 1.1.13]）。为后文之用，我们指出一个使八面体成为好的（相当严格的）充分条件。请注意，无论如何，根据对 $l = h' \circ g$ 应用 (TR4)，都存在一个八面体

$$\begin{array}{ccccccc}
B & \xrightarrow{g} & C & \xrightarrow{g'} & F & \xrightarrow{g''} & B[1] \\
\| & & \downarrow{\scriptstyle h'} & & \downarrow{\scriptstyle c} & & \| \\
B & \xrightarrow{l} & E & \xrightarrow{a} & G & \xrightarrow{b} & B[1] \\
\downarrow{\scriptstyle g} & & \| & & \downarrow{\scriptstyle d} & & \downarrow{\scriptstyle g[1]} \\
C & \xrightarrow{h'} & E & \xrightarrow{-h''} & A[1] & \xrightarrow{h[1]} & C[1].
\end{array}$$

特别地，三角 $A \xrightarrow{g' \circ h} F \xrightarrow{c} G \xrightarrow{d} A[1]$ 是 distinguished 的，并且由于 $g' \circ h = g' \circ g \circ f = 0$，我们可以假设（将 a、b和 c 以及 d 替换为某个同构 s下的 $s \circ a$、$b \circ s^{-1}$、$s \circ c$ 和 $d \circ s^{-1}$）$G = F \oplus A[1]$，其中 c 是自然嵌入，d 是自然投影。记

$$a = \left(\begin{smallmatrix} a' \\ a'' \end{smallmatrix}\right) \colon E \to F \oplus A[1], \qquad b = \begin{pmatrix} b' & b'' \end{pmatrix} \colon F \oplus A[1] \to B[1],$$

图表的交换性意味着

$$b' = g'', \qquad a'' = -h'', \qquad a' \circ h' = g', \qquad g[1] \circ b'' = h[1].$$

因此，当且仅当 $k' \colon E \to F$ 是满足 $k' \circ h' = g'$的唯一态射，且 $f[1] \colon A[1] \to B[1]$是满足 $g[1] \circ f[1] = h[1]$的唯一态射时，(2.7) 确实是 distinguished 的。类似地，可以看出，当且仅当 $g \colon B \to C$是满足 $g \circ f = h$的唯一态射，且 $k \colon D \to E$是满足 $h'' \circ k = f''$的唯一态射时，(2.8) 是 distinguished 的。

我们通过给出$\mathbf{D}^b_0(R$-模$)$中的两个非同构良八面体的例子来结束本节，其中 $R := \Bbbk[x]$。令 $R_n := R/(x^n)$（对于 $n \in \mathbb{N}$），我们将 $x^i \colon R_m \to R_n$ 记作 $i \geq 0, n-m$，它是由乘以 x^i 诱导的 R-模态射。此外，$y \colon R_m \to R_n[1]$ 将表示 $\mathbf{D}^b(R$-模$)$中与以下短正合列的同构类相对应的态射

$$0 \to R_n \xrightarrow{x^m} R_{n+m} \xrightarrow{x^0} R_m \to 0$$

在 R-模中。

命题 2.2. 这两个可复合态射

$$A := R_3 \xrightarrow{f := x^1} B := R_3 \xrightarrow{g := x^1} C := R_3 \tag{2.9}$$

可以扩展为 $\mathbf{D}^b_0(R$-模$)$中的两个非同构良八面体。采用(2.4)中的记号，第一个八面体如下：

$$\begin{gathered}
F = D = R_1[1] \oplus R_1, \qquad E = R_2[1] \oplus R_2, \\
f' = \left(\begin{smallmatrix} y \\ x^0 \end{smallmatrix}\right), \qquad h' = \left(\begin{smallmatrix} y \\ x^0 \end{smallmatrix}\right), \qquad g'' = \begin{pmatrix} -x^2[1] & y \end{pmatrix}, \qquad h'' = \begin{pmatrix} -x^1[1] & y \end{pmatrix},
\end{gathered} \tag{2.10}$$

and

$$k = \left(\begin{smallmatrix} x^1[1] & 0 \\ 0 & x^1 \end{smallmatrix}\right), \qquad k' = \left(\begin{smallmatrix} x^0[1] & 0 \\ 0 & x^0 \end{smallmatrix}\right) \tag{2.11}$$

其余 态射由复合确定）。第二个八面体由(2.10) 给出，并且

$$\tilde{k} = \left(\begin{smallmatrix} x^1[1] & y \\ 0 & x^1 \end{smallmatrix}\right), \qquad \tilde{k}' = \left(\begin{smallmatrix} x^0[1] & -y \\ 0 & x^0 \end{smallmatrix}\right). \tag{2.12}$$

注记 2.3. 上述例子与 K¨unzer 在 [14] 中给出的例子密切相关。更确切地说，命题 2.2 中的所有对象和态射也可以在 R_6-mod 的稳定 Frobenius 范畴 R_6-mod 中加以解释（要看出这一点，必须利用如下事实：对于 $0 \leq i \leq 6$，$R_i[1] \cong R_{6-i}$ 属于 R_6-mod）。如果以一种显然的方式改写 K¨unzer 的例子，将 $\mathbb{Z}/(p^6)$-mod 替换为 R_6-mod，则命题 2.2 中的第一个八面体恰好对应于 [14, §2] 中的第一个八面体。由于第二个八面体并非如此，我们不能直接由 K¨unzer 的结果推出命题 2.2。不过，将在附录 B 中给出的命题 2.2 的证明在很大程度上受到 [14] 的启发。

3. Full and strong exceptional sequences

设 $\mathcal{S}$ 是具有满强例外序列 $(E_1, \dots, E_n)$ 的三角范畴。回顾一下，这意味着对每个 $i, j \in \{1, \dots, n\}$ 以及每个 $n \in \mathbb{Z}$，有如下结论：

- $\mathcal{S}(E_i,\ E_i) \cong \Bbbk$;
- $\mathcal{S}(E_i,\ E_j[n]) \neq 0 \implies n = 0$ 和 $i \leq j$;
- $\mathcal{S} = \langle E_1, \dots,\ E_n \rangle$ 是 $\{E_1, \dots, E_n\}$的三角包络。

我们用 $\mathcal{E}$ 表示 $\mathcal{S}$ 的全子范畴，其对象为 $\{E_1, \dots, E_n\}$；并且还假设 $\mathcal{E}$的 Hom 空间（在 $\Bbbk$上）均为有限维。注意，这意味着对每个 $X,\ Y \in \mathcal{S},\ \oplus_{n\in\mathbb{Z}}\mathcal{S}(X,\ Y[n])$都是有限维的。

在开始之前 ating下一个结果，我们回顾：给定箭图 Q，范畴 $\Bbbk[Q]$定义如下 s:

- $\Bbbk[Q]$ 与 Q具有相同的对象。
- 给定 $X, Y \in \Bbbk[Q]$，Hom空间 $\Bbbk[Q](X, Y)$是由 Q中所有以 X 为（初始）源、以 Y为（最终）靶的有限可复合态射串生成的自由 $\Bbbk$-模。
- 复合由串的拼接给出，并通过双线性加以延拓。恒等态射为空串。

引理 3.1. $\mathcal{S}$ 是一个*Krull–*施密特范畴。[1] 此外，若 $\mathcal{S}$ 是代数的，则下列结论成立。

(1) $\mathcal{S} \cong \mathbf{D}^b(A\text{-mod})$ 属于 **Ht**，其中 $A := \mathrm{End}_{\mathcal{S}}(\oplus_{i=1}^{n} E_i)$。*(2)* $\mathcal{S}$ 具有强唯一增强，且 $\mathcal{S}$ 的一个增强由 $\mathrm{Pretr}(\mathcal{E})$ 给出（其中 $\mathcal{E}$被视为集中在次数 0 的微分分次范畴）。*(3)* 若 $\mathcal{E}$对某个箭图 Q具有形式 $\Bbbk[Q]$，则 A 是左遗传的。

证明。 由 [2, 引理 4.8] 立即可得 $\mathcal{S}$是幂等完备的。此外，对每个 $X \in \mathcal{S}$，$\mathrm{End}_{\mathcal{S}}(X)$ 是半完美环（因为它在 $\Bbbk$ 上是有限维的）。因此，由 [13,推论 4.4]可知 $\mathcal{S}$ 是 Krull–施密特范畴。

现假设 $\mathcal{S}$ 是代数的。

(1) 例如，参见 [18, 推论 1.9]。(2) 一个标准事实是（证明可见于 [10, 引理 4.3.1 与注 4.3.2]），Pretr($\mathcal{E}$) 是 $\mathcal{S}$的一个增强。最后，由 [16,定理 5.61]可知 $\mathcal{S}$ 具有强唯一增强。[2](3) 易见 A（作为 $\Bbbk$-代数）同构于 Q的道路 $\Bbbk$-代数。于是由 [1,VII，定理 1.7]可知 A 是左遗传的。

□

现在假设 $\mathcal{E}$ 具有 $\Bbbk[Q]$的形式，其中 Q 是箭图 $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$。更明确地说，$n = 3$，我们用 A、B、C 分别代替 E_1、E_2 和 E_3，并且

$$\mathcal{S}(A, B) = \Bbbk f, \qquad \mathcal{S}(B, C) = \Bbbk g, \qquad \mathcal{S}(A, C) = \Bbbk h, \tag{3.1}$$

其中 $h := g \circ f \neq 0$。注意，$\mathcal{S}$ 与定理 B 陈述中的相同。

命题 3.2。 设 $\mathcal{S}$ 为一个三角范畴，且具有如 (3.1) 所示的满强例外序列。那么 $\mathcal{S}$ 是代数的，并且在 **Ht** 中于同构意义下唯一确定。此外，将 $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$扩展为一个八面体，并沿用 (2.4) 和 (2.6) 中的记号，则以下结论成立。

(*1*) 在同构意义下，$\mathcal{S}$ 中的每个不可分解对象都具有 $X[n]$的形式，其中 $X \in I$ 唯一且 $n \in \mathbb{Z}$唯一。

(*2*) $\mathcal{S}$ 中的不可分解对象都是例外的；除平移和同构外，不可分解对象之间非零的、连接非同构对象的唯一态射是 J中的那些态射。更确切地说，给定

[1]若每个对象都是具有局部自同态环的对象的有限直和，则加性范畴称为 Krull–施密特范畴。在 Krull–施密特范畴中，一个对象不可分解当且仅当其自同态环是局部环，并且每个对象都能以本质唯一的方式表示为不可分解对象的有限直和。[2]当 A 是左（半）遗传的（因此 A-模构成遗传范畴）时，也可以改为引用例 1.3。

互不相同的 X、$Y \in I$ 和 $n \in \mathbb{Z}$，有 $\mathcal{S}(X, Y[n]) = 0$，但以下情况除外：

$$\begin{gathered}\mathcal{S}(A,B)=\Bbbk f, \qquad \mathcal{S}(A,C)=\Bbbk h, \qquad \mathcal{S}(B,C)=\Bbbk g, \qquad \mathcal{S}(B,D)=\Bbbk f',\\ \mathcal{S}(B,E)=\Bbbk l, \qquad \mathcal{S}(C,E)=\Bbbk h', \qquad \mathcal{S}(C,F)=\Bbbk g', \qquad \mathcal{S}(D,E)=\Bbbk k,\\ \mathcal{S}(D,A[1])=\Bbbk f'', \qquad \mathcal{S}(E,F)=\Bbbk k', \qquad \mathcal{S}(E,A[1])=\Bbbk h'',\\ \mathcal{S}(E,B[1])=\Bbbk l', \qquad \mathcal{S}(F,B[1])=\Bbbk g'', \qquad \mathcal{S}(F,D[1])=\Bbbk k''.\end{gathered}$$

态射的复合完全由下列关系确定：

$$\begin{gathered}f''=h''\circ k, \qquad g'=k'\circ h', \qquad h=g\circ f, \qquad k''=f'[1]\circ g'', \qquad l=h'\circ g=k\circ f',\\ l'=f[1]\circ h''=g''\circ k', \qquad f'\circ f=0, \qquad h''\circ h'=0, \qquad g[1]\circ g''=0, \qquad k'\circ k=0.\end{gathered} \tag{3.2}$$

(3) $\mathcal{S}$ 中的三角是特异的，当且仅当它（同构于）若干三角形的有限直和，其中每一个在相差旋转的意义下，要么是(2.1)、(2.2)、(2.3)、(2.5)、(2.7)、(2.8)之一（特别地，八面体(2.4) 是良的），要么对某个 $X \in I$ 为 $X \xrightarrow{\mathrm{id}} X \to 0 \to X[1]$。

作为命题 3.2（其证明将在附录 A 中给出）的直接推论，我们得到下述结果。

推论 3.3. 设 $\mathcal{T}$ 是一个（小）三角范畴。在$\mathbf{Ht}(\mathcal{S},\mathcal{T})$ 与 $\mathcal{T}$中良八面体的同构类集合之间存在一个自然双射。

4. Proof of Theorem B

我们开始 wi th 一个结果，为不具有提升的正合函子的存在性提供充分条件。

引理 4.1. 设 $\mathcal{A}$ 为一个微分分次范畴，并设 $\mathcal{E} := \Bbbk[Q]$，其中 Q 为一个箭图。

(1) 映射 $H^0\colon \mathbf{Hqe}(\mathcal{E},\mathcal{A}) \to \mathbf{He}(\mathcal{E}, H^0(\mathcal{A}))$ 是单射。

Suppose $\mathcal{A}$是预三角化的，并且 $H^0(\mathrm{Pretr}(\mathcal{E}))$ 与 $H^0(\mathcal{A})$ 具有强唯一增强。*(2)* 若 F、$\mathsf{F}' \in \mathbf{Ht}(H^0(\mathrm{Pretr}(\mathcal{E}))$ $H^0(\mathcal{A}))$ 使得 $\mathsf{F} \neq \mathsf{F}'$ 且 $\mathsf{F}|_{\mathcal{E}} = \mathsf{F}'|_{\mathcal{E}} \in \mathbf{He}(\mathcal{E}, H^0(\mathcal{A}))$，则 F 与 F' 中（至少）有一个不具有提升。

证明. (1) 可以采用与 [10, 定理 4.3.8] 的证明中相同的论证。更精确地说，利用 $\Bbbk[Q]$ 在 **dgCat** 中是余纤维的这一事实（见 [10, 命题 4.3.5]），$\mathbf{Hqe}(\mathcal{E},\mathcal{A})$ 的每个元素都可以由一个微分分次函子 $\mathcal{E} \to \mathcal{A}$ 表示。然后可以应用 [10, 引理 4.3.7]。

(2) 假设 F 有提升。根据备注 1.5，这相当于说，对于某个$\mathbf{Hqe}^{\mathrm{p}}(\mathbf{Pretr}(\mathcal{E})\ \mathcal{A})$，$\mathsf{F} = H^0_t(f)$。回顾 (1.1)，有如下交换图

$$\begin{array}{ccccc}\mathbf{Hqe}^{\mathrm{p}}(\mathrm{Pretr}(\mathcal{E}),\mathcal{A}) & \xrightarrow[\cong]{} & \mathbf{Hqe}(\mathrm{Pretr}(\mathcal{E}),\mathcal{A}) & \xrightarrow[\cong]{(-)|_{\mathcal{E}}} & \mathbf{Hqe}(\mathcal{E},\mathcal{A}) \\ \downarrow{\scriptstyle H^0_t} & & & & \downarrow{\scriptstyle H^0} \\ \mathbf{Ht}(H^0(\mathrm{Pretr}(\mathcal{E})), H^0(\mathcal{A})) & \longrightarrow & \mathbf{He}(H^0(\mathrm{Pretr}(\mathcal{E})), H^0(\mathcal{A})) & \xrightarrow{(-)|_{\mathcal{E}}} & \mathbf{He}(\mathcal{E}, H^0(\mathcal{A})),\end{array}$$

其中，上方一行是双射，这是由于 Pretr 与包含函子$\mathbf{Hqe}^{\mathrm{p}} \to \mathbf{Hqe}$之间存在伴随，而 H^0 由前半部分可知是单射。于是，f 是$\mathbf{Hqe}^{\mathrm{p}}(\mathbf{Pretr}(\mathcal{E})\ \mathcal{A})$中唯一映射到 $\mathsf{F}|_{\mathcal{E}} = \mathsf{F}'|_{\mathcal{E}} \in \mathbf{He}(\mathcal{E}, H^0(\mathcal{A}))$的元素。因此，不存在 $f' \in \mathbf{Hqe}^{\mathrm{p}}(\mathbf{Pretr}(\mathcal{E})\ \mathcal{A})$使得 $H^0_t(f') = \mathsf{F}'$，这就证明了 F' 没有提升。

□

命题 4.2. 设 $\mathcal{S}$ 如定理 *B* 的陈述所述，并设 $\mathcal{T}$ 是一个具有强唯一增强的三角范畴。如果 $\mathcal{T}$中存在两个非同构的良八面体，它们延拓了同一对可复合态射，那么就存在一个没有提升的正合函子 $\mathcal{S} \to \mathcal{T}$。

证明。 由命题 3.2 可知，$\mathcal{S}$ 是代数的，因此根据引理 3.1，它具有强唯一增强。再回顾备注 1.5，我们可以假设 $\mathcal{S} = H^0(\mathbf{Pretr}(\mathcal{E}))$（其中 $\mathcal{E}$ 是 $\mathcal{S}$ 的全子范畴，其对象为$\{A, B, C\}$），类似地，$\mathcal{T} = H^0(\mathcal{A})$，其中 $\mathcal{A}$ 是某个预三角化 dg 范畴。根据推论 3.3，在 $\mathcal{T}$ 中扩张同一对可复合态射的两个非同构的良好八面体，对应于两个不同的元素 F，$\mathsf{F}' \in \mathbf{Ht}(\mathcal{S},\ \mathcal{T})$，使得 $\mathsf{F}|_{\mathcal{E}} = \mathsf{F}'|_{\mathcal{E}}$。因此，由引理 4.1 可得，$\mathsf{F}$ 和 F' 中至少有一个不存在提升。□

现在，定理 B 直接由命题 4.2 得出；注意到根据例 1.3，$\mathbf{D}^b(\Bbbk[x]\text{-模})$具有强唯一增强，并且根据命题 2.2，在$\mathbf{D}^b_0(\Bbbk[x]\text{-模})$中存在扩张同一对可复合态射的两个非同构的良好八面体。

注 4.3. 不难看出，与由 (2.10) 和 (2.11) 定义的八面体相对应的正合函子有提升。因此，由 (2.10) 和 (2.12) 定义的八面体没有提升。

5. Proof of Theorem A

只需证明存在一个非傅里叶–穆凯正合函子 $\mathsf{G}:\mathbf{D}^b(\mathbb{P}^2)\to\mathbf{D}^b(\mathbb{P}^1)$。事实上，给定这样的 G，其（左或右）伴随函子 $\mathsf{G}':\mathbf{D}^b(\mathbb{P}^1)\to\mathbf{D}^b(\mathbb{P}^2)$ 也是非傅里叶–穆凯的（见 [11,命题 5.9]），并且是正合的（见 [18, 1.2 引理]）。

为了构造 G，我们先考虑定理 B 给出的函子。显然 r
在 $\mathbf{D}^b_0(\Bbbk[x]\text{-模})$ 与 $\mathbf{D}^b(\mathbb{P}^1)$ 的全子范畴之间存在正合等价；该全子范畴由上同调支撑在一个 a $\Bbbk$-有理点上的复形构成。因此，我们得到一个没有提升的正合函子 $\mathsf{F}:\ \mathcal{S}\to\mathbf{D}^b(\mathbb{P}^1)$。这里 $\mathcal{S}$ 与定理 B 中相同，并且和之前一样，我们令 $\mathcal{E}$ 为 $\mathcal{S}$ 的全子范畴，其中
h
对象 $\{A,B,C\}$。我们还用 $\mathcal{E}'$ 表示 $\mathbf{D}^b(\mathbb{P}^2)$ 中以对象 $\{\mathcal{O},\mathcal{O}(1)\ \mathcal{O}(2)\}$ 构成的全子范畴。众所周知，$(\mathcal{O},\mathcal{O}(1)\ \mathcal{O}(2))$ 是 $\mathbf{D}^b(\mathbb{P}^2)$ 中的一个满强例外序列，并且容易看出存在（$\Bbbk$-线性）函子 $\mathsf{S}:\ \mathcal{E}\to\mathcal{E}'$ 与 $\mathsf{R}:\ \mathcal{E}'\to\mathcal{E}$，使得 $\mathsf{R}\circ\mathsf{S}=\mathrm{id}_{\mathcal{E}}$。例如，可以
n
如下定义 R 与 S。设 $\{a_0,a_1,a_2\}$ 与 $\{b_0,b_1,b_2\}$ 分别是 $\mathbf{D}^b(\mathbb{P}^2)(\mathcal{O},\mathcal{O}(1))$ 与 $\mathbf{D}^b(\mathbb{P}^2)(\mathcal{O}(1)\ \mathcal{O}(2))$ 的基，其中 a_i 与 b_i 对应于乘以 x_i（将 $\mathbb{P}^2$ 视为 $\mathbf{Proj}\,\Bbbk[x_0,x_1,x_2]$）。于是我们可以令

$$\mathsf{S}(A):=\mathcal{O},\qquad \mathsf{S}(B):=\mathcal{O}(1),\qquad \mathsf{S}(C):=\mathcal{O}(2),\qquad \mathsf{S}(f):=a_0,\qquad \mathsf{S}(g):=b_0,$$

$$\mathsf{R}(\mathcal{O}):=A,\qquad \mathsf{R}(\mathcal{O}(1)):=B,\qquad \mathsf{R}(\mathcal{O}(2)):=C,\qquad \mathsf{R}(a_i):=\begin{cases}f & \text{if } i=0,\\ 0 & \text{if } i=1,2,\end{cases}\qquad \mathsf{R}(b_i):=\begin{cases}g & \text{if } i=0,\\ 0 & \text{if } i=1,2.\end{cases}$$

由引理 3.1，我们可以将 $\mathcal{S}$ 等同于 $H^0(\mathbf{Pretr}(\mathcal{E}))$，并将 $\mathbf{D}^b(\mathbb{P}^2)$ 等同于 $H^0(\mathbf{Pretr}(\mathcal{E}'))$。于是我们断言，$\mathsf{G}:=\mathsf{F}\circ H^0(\mathbf{Pretr(R)})$ 是一个没有提升的正合函子，因而由命题 1.6 可知它是非傅里叶–穆凯的。事实上，反设 $g\in\mathbf{Hqe}(\mathbf{Pretr}(\mathcal{E}')\ \mathcal{A})$（其中 $\mathcal{A}$ 是 $\mathbf{D}^b(\mathbb{P}^1)$ 的一个增强）是 G 的一个提升。由此我们得到矛盾：$g\circ\mathbf{Pretr(S)}\in\mathbf{Hqe}(\mathbf{Pretr}(\mathcal{E})\ \mathcal{A})$ 是.....的一个提升

$$\mathsf{G}\circ H^0(\mathrm{Pretr}(\mathsf{S}))=\mathsf{F}\circ H^0(\mathrm{Pretr}(\mathsf{R}))\circ H^0(\mathrm{Pretr}(\mathsf{S}))=\mathsf{F}\circ H^0(\mathrm{Pretr}(\mathsf{R})\circ\mathrm{Pretr}(\mathsf{S}))=\mathsf{F},$$

因为显然 $\mathbf{Pretr(R)}\circ\mathbf{Pretr(S)}=\mathrm{id}^{\mathrm{Pretr}(\mathcal{E})}$。

注记 5.1. 从证明中可以清楚看出，定理 A 可以推广，将 $\mathbb{P}^1$ 替换为任意包含一个 $\Bbbk$-有理点的（光滑射影）曲线。也不难证明，$\mathbb{P}^2$ 可以替换为任意（光滑射影）概形 X，使得$\mathbf{D}^b(X)$ 含有一个（不一定是全的）强例外序列 (E_1',E_2',E_3')，前提是存在函子 $\mathsf{S}:\ \mathcal{E}\to\mathcal{E}'$ 和 $\mathsf{R}:\ \mathcal{E}'\to\mathcal{E}$，使得 $\mathsf{R}\circ\mathsf{S}=\mathrm{id}_{\mathcal{E}}$（其中$\mathcal{E}'$ 表示$\mathbf{D}^b(X)$ 中以对象 $\{E_1',E_2',E_3'\}$为对象的全子范畴）。

Appendix A. Proof of Proposition 3.2

令 $\mathcal{S}'$ 为 $\mathcal{S}$ 的全子范畴，其对象是 I 中对象的（有限）平移直和（我们之后将看到 $\mathcal{S}'=\mathcal{S}$）。

首先，我们证明 Hom 空间 $\mathcal{S}(X,\ Y[n])$（其中 $X,\ Y\in I$ 和 $n\in\mathbb{Z}$）如（2）中所述。根据假设，当 $X,\ Y\in\{A,B,C\}$ 时，这一点成立。将上同调函子 $\mathcal{S}(A,\ -)$ 应用于可 distinguished 三角 (2.1)，我们得到正合列

$$\mathcal{S}(A,A[n])\xrightarrow{f[n]\circ}\mathcal{S}(A,B[n])\to\mathcal{S}(A,D[n])\to\mathcal{S}(A,A[n+1])\xrightarrow{f[n+1]\circ}\mathcal{S}(A,B[n+1]).$$

由于 $f[n]\circ$ 和 $f[n+1]\circ$ 是同构，我们推得 $\mathcal{S}(A,\ D[n])=0$。另一方面，将 $\mathcal{S}(B,\ -)$ 应用于 (2.1)，我们得到正合列

$$\mathcal{S}(B,A[n])\to\mathcal{S}(B,B[n])\xrightarrow{f'[n]\circ}\mathcal{S}(B,D[n])\to\mathcal{S}(B,A[n+1]).$$

由于 $\mathcal{S}(B,\ A[n])=\mathcal{S}(B,\ A[n+1])=0$，我们看到 $f'[n]\circ$ 是一个同构，因此

$$\mathcal{S}(B,D[n])=\begin{cases}\Bbbk f' & \text{if } n=0,\\ 0 & \text{if } n\neq 0.\end{cases}$$

类似地，将 $\mathcal{S}(-,\ A)$ 和 $\mathcal{S}(-,\ B)$ 应用于 (2.1)，我们得到

$$\mathcal{S}(D, A[n]) = \begin{cases} \Bbbk f'' & \text{if } n = 1, \\ 0 & \text{if } n \neq 1, \end{cases} \qquad \mathcal{S}((D, B[n]) = 0.$$

此外，将 $\mathcal{S}(D, -)$ 应用于 (2.1)，可得正合列

$$\mathcal{S}(D, B[n]) \to \mathcal{S}(D, D[n]) \xrightarrow{f''[n]\circ} \mathcal{S}(D, A[n+1]) \to \mathcal{S}(D, B[n+1]).$$

由于 $\mathcal{S}(D, B[n]) = \mathcal{S}(D, B[n+1]) = 0$，映射 $f''[n]\circ$ 是一个同构。根据我们已经证明的结论，可知 D 是例外的。综上，至此我们已证明，当 $X, Y \in \{A, B, D\}$ 时，$\mathcal{S}(X, Y[n])$ 如 (2) 所述。完全类似地，利用 (2.2)（分别利用 (2.3)），可以证明当 $X, Y \in \{A, C, E\}$（分别当 $X, Y \in \{B, C, F\}$）时结论同样成立。

将 $\mathcal{S}(A, -)$（分别将 $\mathcal{S}(-, C)$）应用于 (2.5)，并利用已证明的等式 $\mathcal{S}(A, D[n]) = \mathcal{S}(A, E[n]) = 0$（分别为 $\mathcal{S}(E, C[n]) = \mathcal{S}(F, C[n]) = 0$），可得 $\mathcal{S}(A, F[n]) = 0$（分别为 $\mathcal{S}(D, C[n]) = 0$）。另一方面，将 $\mathcal{S}(-, A)$ 应用于 (2.3)（分别将 $\mathcal{S}(C, -)$ 应用于 (2.1)），并利用已知等式 $\mathcal{S}(B, A[n]) = \mathcal{S}(C, A[n]) = \mathcal{S}(C, B[n]) = 0$，可得 $\mathcal{S}(F, A[n]) = 0$（分别为 $\mathcal{S}(C, D[n]) = 0$）。

将 $\mathcal{S}(B, -)$ 和 $\mathcal{S}(-, B)$ 应用于 (2.2)，并利用已知的等式 $\mathcal{S}(B, A[n]) = \mathcal{S}(C, B[n]) = 0$，我们得到

$$\mathcal{S}(B, E[n]) = \begin{cases} \Bbbk h' \circ g = \Bbbk l & \text{if } n = 0, \\ 0 & \text{if } n \neq 0, \end{cases} \qquad \mathcal{S}(E, B[n]) = \begin{cases} \Bbbk f[1] \circ h'' = \Bbbk l' & \text{if } n = 1, \\ 0 & \text{if } n \neq 1. \end{cases}$$

为了完成证明：对每个 $X, Y \in I$，$\mathcal{S}(X, Y[n])$ 如 (2) 所述这一事实的证明，还需证明当 $X, Y \in \{D, E, F\}$（其中 $X \neq Y$）时这一结论成立。现在，将 $\mathcal{S}(D, -)$ 应用于 (2.2)，并利用已证明的等式 $\mathcal{S}(D, C[n]) = 0$，可得一个正合列

$$\mathcal{S}(D, C[n]) = 0 \to \mathcal{S}(D, E[n]) \xrightarrow{h''\circ} \mathcal{S}(D, A[n+1]) \to 0 = \mathcal{S}(D, C[n+1]).$$

因此，$h''\circ$ 是一个同构，这意味着（因为 $f'' = h'' \circ k$）

$$\mathcal{S}(D, E[n]) = \begin{cases} \Bbbk k & \text{if } n = 0, \\ 0 & \text{if } n \neq 0. \end{cases}$$

我们还知道 D 和 E 是例外的。按照证明第一部分中的推理，我们得出：当 $X, Y \in \{D, E, F\}$ 时，$\mathcal{S}(X, Y[n])$ 如 (2) 所述。

由上述对 Hom 空间的描述可知，给定 $X,\ Y \in I$ 和 $m,\ n \in \mathbb{Z}$，$X[n]$ 是例外的（因而是不可分解的），并且 $X[n] \cong Y[m]$ 当且仅当 $n = m$ 和 $X = Y$。此外，(3.2) 中的每个关系要么由定义成立，要么是由于可 distinguished 三角中两个连续态射的复合为 0。直接检验表明，$\mathcal{S}'$ 的不可分解对象之间的每一个可能的态射复合，都由这些关系决定。注意，一旦我们证明 $\mathcal{S}' = \mathcal{S}$，这就证明了 (1) 和 (2)。无论如何，$\mathcal{S}'$ 是一个 Krull–施密特范畴，因为根据引理 3.1，$\mathcal{S}$也具有同样性质。

转到 (3)，我们首先注意到该八面体是良好的（这立即由注 2.1 得出），并且 $\mathbf{Mor}(\mathcal{S}')$ 是一个 Krull–施密特范畴。事实上，正如引理 3.1 的证明中所述，这是由于它是幂等完备的（这是 $\mathcal{S}'$ 幂等完备的直接推论），且每个对象的自同态环在 $\Bbbk$ 上具有有限维数。现在我们声称，$\mathcal{S}'$的一个态射在 $\mathbf{Mor}(\mathcal{S}')$ 中是不可分解的，当且仅当它在同构和平移意义下等于以下态射之一：出现在三角 (2.1)、(2.2)、(2.3)、(2.5)、(2.7)、(2.8) 之一中的态射，或 id_X，或 $X \to 0$，或对于某个 $X \in I$的 $0 \to X$。假设该断言成立，并回顾可 distinguished 三角的直和仍是可 distinguished 的，且延拓同一态射的两个可 distinguished 三角彼此同构，我们可推出 $\mathcal{S}'$ 是 $\mathcal{S}$ 的一个三角子范畴，并且 $\mathcal{S}'$ 中的三角是可 distinguished 的，当且仅当它具有 (3) 中所述的形式。由于 $\mathcal{S}$ 是 $\mathcal{E}$ 和 $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{S}'$的三角包络，因此显然 $\mathcal{S}' = \mathcal{S}$。此外，显然 $\mathcal{S}'$ 由 $\mathcal{E}$ 决定，且在$\mathbf{Ht}$中同构意义下唯一。由于 $H^0(\mathbf{Pretr}(\mathcal{E}))$ 是一个代数三角范畴，并具有 (3.1) 中的满强例外序列，我们得出 $\mathcal{S} \cong H^0(\mathbf{Pretr}(\mathcal{E}))$ 是代数的。

为了证明这一断言，我们需要以下简单结果。

引理 A.1. 考虑如下形式的态射

$$V \oplus V' \xrightarrow{u=\left(\begin{smallmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{smallmatrix}\right)} W \oplus W' \tag{A.1}$$

˜在加性范畴 $\mathcal{A}$ 中。如果 β 和 γ 都经由 α 在 $\mathcal{A}$ 中分解，那么对于某些 ˜$\delta \in \mathcal{A}(V', W')$，有 $u \cong \alpha \oplus \delta \in \mathbf{Mor}(\mathcal{A})$。

˜ ˜ ˜证明。 </*style*>设对于某个，有 ,(, V)， $\tilde{\gamma} \in \mathcal{A}(W, W')$。令 $\delta := \delta - \tilde{\gamma} \circ \alpha \circ \beta$，则有一个同构

$$\begin{array}{ccc} V \oplus V' & \xrightarrow{u} & W \oplus W' \\ {\scriptstyle \left(\begin{smallmatrix}1 & \tilde{\beta}\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\ -\tilde{\gamma} & 1\end{smallmatrix}\right)} \\ V \oplus V' & \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \tilde{\delta}\end{smallmatrix}\right)} & W \oplus W' \end{array}$$

从 u 到 $\alpha \oplus \delta$，属于 $\mathbf{Mor}(\mathcal{A})$。 □

现在证明这一断言。另一个方向显然易证，因此只需证明：若 $\mathcal{S}'$ 中的一个态射$u\colon Y \to Z$ 在 $\mathbf{Mor}(\mathcal{S}')$ 中不可分解，则它具有所需的形式。由 (1) 可假设

$$Y = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z},\, X\in I} X[n] \otimes V_{X,n}, \qquad Z = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z},\, X\in I} X[n] \otimes W_{X,n},$$

其中 $V_{X,n}$,$W_{X,n} \in \Bbbk$-模（且其中只有有限多个非零）。考虑到 (2)， u 中可能非零的分量记法如下。对每个 $n \in \mathbb{Z}$ 及每个 $X \in I$，分量 $X[n] \otimes V_{X,n} \to X[n] \otimes W_{X,n}$ 是某个 $i_{X,n} \in \Bbbk$-模($V_{X,n}$,$W_{X,n}$) 中的 $\mathrm{id}_{X[n]} \otimes i_{X,n}$。对每个 $n \in \mathbb{Z}$ 及每个 $x\colon X \to X'[m] \in J$（若 $x \in \{f'', g'', h'', k'', l'\}$，则 $m = 1$；否则为 $m = 0$），分量 $X[n] \otimes V_{X,n} \to X'[n+m] \otimes W_{X',n+m}$ 是某个 $x_n \in \Bbbk$-模($V_{X,n}$,$W_{X',n+m}$) 中的 $x[n] \otimes x_n$。

如果存在 $n \in \mathbb{Z}$ 和 $X \in I$ 使得 $i_{X,n} \neq 0$，那么我们可以找到 $v \in V_{X_n}$ 使得 $w := i_{X,n}(v) \neq 0$。选取 $Y = V \oplus V'$ 和 $Z = W \oplus W'$ 在 $\mathcal{S}'$ 中的分解，其中 $V = X[n] \otimes \langle v\rangle$ 且 $W = X[n] \otimes \langle w\rangle$，态射 u 具有形式 (A.1)，其中 α 是一个同构。显然， β 和 γ 经由 α分解，因此由引理 A.1可得 $u \cong \alpha \cong \mathrm{id}_{X[n]}$ （因为 u 不可分解）。因此，从现在起我们可以假设

$$i_{X,n} = 0 \text{ for every } n \in \mathbb{Z} \text{ and every } X \in I. \tag{A.2}$$

如果存在 $n \in \mathbb{Z}$使得 $\ker(f'_n) \not\subseteq \ker(g_n)$，那么我们可以找到 $v \in \ker(f'_n)$使得 $w := g_n(v) \neq 0$。选取满足 $V = B[n] \otimes \langle v\rangle$ 和 $W = C[n] \otimes \langle w\rangle$的 $Y = V \oplus V'$ 和 $Z = W \oplus W'$ 分解，态射 u 具有形式 (A.1)，其中 γ 到 $D[n] \otimes W_{D,n}$的分量为 0。由 (2) 和 (A.2) 可知， β 和 γ 经由 α分解，因此由引理 A.1可得 $u \cong \alpha \cong g[n]$。于是我们可以假设 $\ker(f'_n) \subseteq \ker(g_n)$，并且类似地，$\ker(g_n) \subseteq \ker(f'_n)$。现在，如果 $\ker(f'_n) = \ker(g_n) \neq V_{B,n}$，那么我们可以找到 $v \in V_{B,n}$ 使得$w := g_n(v) \neq 0$且 $w' := f'_n(v) \neq 0$。选取满足

$$V = B[n] \otimes \langle v\rangle, \qquad W = C[n] \otimes \langle w\rangle \oplus D[n] \otimes \langle w'\rangle, \qquad B[n] \otimes \ker(g_n) \subseteq V',$$
$$(g[n] \otimes g_n)\big(V' \cap (B[n] \otimes V_{B,n})\big) \subseteq W' \cap (C[n] \otimes W_{C,n}),$$
$$(f'[n] \otimes f'_n)\big(V' \cap (B[n] \otimes V_{B,n})\big) \subseteq W' \cap (D[n] \otimes W_{D,n}),$$

态射 u 具有形式(A.1)，其中 β 来自 $V' \cap (B[n] \otimes V_{B,n})$的分量为0。由(2)和(A.2)可知， β 和 γ 经由 α分解，从而由引理A.1得$u \cong \alpha \cong \left(\begin{smallmatrix}g\\ f'\end{smallmatrix}\right)[n]$。因此我们可以假设

$$f'_n = g_n = 0 \text{ for every } n \in \mathbb{Z}, \tag{A.3}$$

并且以完全类似的方式也

$$h''_n = k'_n = 0 \text{ for every } n \in \mathbb{Z}. \tag{A.4}$$

若存在 $n \in \mathbb{Z}$ 使得 $\mathrm{im}(k_n) \not\subseteq \mathrm{im}(h'_n)$，则我们可以找到$v \in V_{D、n}$，使得 $w := k_n(v) \notin \mathrm{im}(h'_n)$。取直和分解 $Y = V \oplus V'$和 $Z = W \oplus W'$，使得 $V = D[n] \otimes \langle v\rangle$、 $W = E[n] \otimes \langle w\rangle$ 且$E[n] \otimes \mathrm{im}(h'_n) \subseteq W'$，则态射 u 具有形式 (A.1)，其中 β从$C[n] \otimes V_C$到n的分量为 0。由 (2) 和 (A.2) 可知， β 和 γ 可经由 α分解，因此根据引理 A.1，$u \cong \alpha \cong k[n]$。于是我们可以假设 $\mathrm{im}(k_n) \subseteq \mathrm{im}(h'_n)$，类似地，$\mathrm{im}(h'_n) \subseteq \mathrm{im}(k_n)$。现在，若 $\mathrm{im}(h'_n) = \mathrm{im}(k_n) \neq 0$，则我们可以找到 $v \in V_{D、n}$ 以及 $v' \in V_{C、n}$，使得 $w := k_n(v) = h'_n(v') \neq 0$。取直和分解 $Y = V \oplus V'$和 $Z = W \oplus W'$，使得 $V = C[n] \otimes \langle v'\rangle \oplus D[n] \otimes \langle v\rangle$ 和 $W = E[n] \otimes \langle w\rangle$，则态射 u 具有形式

(A.1)，其中 γ到 $W'\cap(E[n]\otimes V_{E,\ n})$的分量为 0。由 (2) 和 (A.2) 可知， β和 γ可经由 α分解，因此根据引理 A.1，$u\cong\alpha\cong\begin{pmatrix}h' & -k\end{pmatrix}[n]$。所以我们可以假设

$$h'_n=k_n=0 \text{ for every } n\in\mathbb{Z}, \tag{A.5}$$

并且以完全类似的方式，也有

$$g''_n=f_n=0 \text{ for every } n\in\mathbb{Z}. \tag{A.6}$$

若 $u\neq 0$，则由 (A.2)、(A.3)、(A.4)、(A.5) 和 (A.6)，存在 $n\in\mathbb{Z}$和 $x\in\{f'',g',h,k'',l,l'\}$（记作 $x\colon X\to X'[m]$），使得 $x_n\neq 0$。因此，存在$v\in V_{X,\ n}$ 使得 $w:=x_n(v)\neq 0$。选取直和分解 $Y=V\oplus V'$和 $Z=W\oplus W'$，满足 $V=X[n]\otimes\langle v\rangle$和 $W=X'[n+m]\otimes\langle w\rangle$，则态射 u 具有 (A.1) 的形式，其中 β和 γ经由 α分解。按照惯例，由引理 A.1可得$u\cong\alpha\cong x[n]$。

最后，若 $u=0$，则显然 u 同构于某个 $n\in\mathbb{Z}$ 和某个 $X\in I$对应的 $X[n]\to 0$ 或 $0\to X[n]$。

Appendix B. Proof of Proposition 2.2

下面我们用等价的三角范畴 $\mathcal{T}:=\mathbf{K}^b(R\text{-proj})$替换$\mathbf{D}^b(R\text{-mod})$，即有限生成投射 R-模的有界同伦范畴。于是，对每个 $n\in\mathbb{N}$， R-模 R_n 可识别为如下复形

$$P_n:=(\cdots\to 0\to R\xrightarrow{x^n}R\to 0\cdots)$$

其次数为 -1 和 0。给定 $m,n\in\mathbb{N}$，我们定义 $\mathcal{T}$ 中的如下态射：

- $x^i_{m,n}$： $P_m\to P_n$，其中 $i\geq 0, n-m$ 由如下复形态射表示：

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & R & \xrightarrow{x^m} & R & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle x^{i+m-n}} & & \downarrow{\scriptstyle x^i} & & \\ 0 & \longrightarrow & R & \xrightarrow{x^n} & R & \longrightarrow & 0. \end{array} \tag{B.1}$$

  注意，对 $i\geq n$，$x^i_{m,n}=0$，因为此时 (B.1) 是零伦的。显然，$x^i_{m,n}$ 可以识别为前面记作 x^i：$R_m\to R_n$ 的态射。

- $y^i_{m,\ n}$： $P_m\to P_n[1]$，其中 $i\leq m$ 由以下复形态射表示：

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & R & \xrightarrow{x^m} & R & \longrightarrow & 0 \\ & & & & \downarrow{\scriptstyle x^{m-i}} & & & & \\ 0 & \longrightarrow & R & \xrightarrow{-x^n} & R & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0. \end{array} \tag{B.2}$$

  注意，当 $i\leq$ 为最大值时，$y^i_{m,\ n}=0$，因为此时 (B.2) 是零伦的。也容易看出，$y^m_{m,\ n}$ 可以与之前记作 y 的态射： $R_m\to R_n[1]$ 等同。

我们先证明一些引理。

引理 B.1。设 l、 m 和 n 为正整数。

(1) $\{x^i_{m,n}\,|\,0,n-m\leq i<n\}$ 是 $\mathcal{T}(P_m,\ P_n)$ 的一组基。给定 0，$m-l\leq i<m$ 和 0，$n-m\leq j<n$，我们有

$$x^j_{m,n}\circ x^i_{l,m}=\begin{cases}x^{i+j}_{l,n} & \text{if } i+j<n\\ 0 & \text{otherwise.}\end{cases}$$

(2) $\{y^i_{m,n}\,|\,0,m-n<i\leq m\}$ 是 $\mathcal{T}(P_m,\ P_n[1])$ 的一组基。给定 0，$m-l\leq i<m$ 和 0，$m-n<j\leq m$，我们有

$$y^j_{m,n}\circ x^i_{l,m}=\begin{cases}y^{j-i}_{l,n} & \text{if } j-i>0, l-n\\ 0 & \text{otherwise.}\end{cases}$$

给定0，$l-m<i\leq l$和0，$n-m\leq j<n$，我们有

$$x^j_{m,n}[1]\circ y^i_{l,m}=\begin{cases}y^{i-j}_{l,n} & \text{if } i-j>0, l-n\\ 0 & \text{otherwise.}\end{cases}$$

(3) 给定0，$n-m\le i<n$，三角

$$P_m \xrightarrow{x^i_{m,n}} P_n \xrightarrow{\begin{pmatrix} y^n_{n,m-n+i} \\ x^0_{n,i}\end{pmatrix}} P_{m-n+i}[1]\oplus P_i \xrightarrow{\begin{pmatrix} -x^{n-i}_{m-n+i,m}[1] & y^i_{i,m}\end{pmatrix}} P_m[1] \tag{B.3}$$

在 $\mathcal{T}$ 中是可 *distinguished* 的。

（*4*）这些三角形

$$P_3 \xrightarrow{\begin{pmatrix} y^2_{3,2} \\ x^1_{3,2}\end{pmatrix}} P_2[1]\oplus P_2 \xrightarrow{\begin{pmatrix} x^0_{2,1}[1] & 0 \\ 0 & x^0_{2,1} \\ x^1_{2,3}[1] & -y^2_{2,3}\end{pmatrix}} P_1[1]\oplus P_1\oplus P_3[1] \xrightarrow{\begin{pmatrix} -x^2_{1,3}[1] & y^1_{1,3} & x^1_{3,3}[1]\end{pmatrix}} P_3[1], \tag{B.4}$$

$$P_3 \xrightarrow{\begin{pmatrix} x^1_{3,3} \\ y^3_{3,1} \\ x^0_{3,1}\end{pmatrix}} P_3\oplus P_1[1]\oplus P_1 \xrightarrow{\begin{pmatrix} y^3_{3,2} & -x^1_{1,2}[1] & 0 \\ x^0_{3,2} & 0 & -x^1_{1,2}\end{pmatrix}} P_2[1]\oplus P_2 \xrightarrow{\begin{pmatrix} -x^2_{2,3}[1] & y^1_{2,3}\end{pmatrix}} P_3[1] \tag{B.5}$$

are distinguished in $\mathcal{T}$.

证明。（1）和（2）容易证明，而且可能是已知的，因此我们只对（3）和（4）的证明作简要说明。对于（3），存在一个可 distinguished 三角

$$P_m \xrightarrow{x^i_{m,n}} P_n \xrightarrow{j} \mathsf{C}(x^i_{m,n}) \xrightarrow{q} P_m[1] \tag{B.6}$$

在 $\mathcal{T}$ 中，其中 j 和 q 由以下复形之间的态射给出：

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & R & \xrightarrow{x^n} & R & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \binom{0}{1}} & & \| & & \\
0 & \longrightarrow & R & \xrightarrow{\binom{-x^m}{x^{i+m-n}}} & R\oplus R & \xrightarrow{(x^i\ x^n)} & R & \longrightarrow & 0 \\
 & & \| & & \downarrow{\scriptstyle (1\ 0)} & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & R & \xrightarrow{-x^m} & R & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0.
\end{array}$$

由于 $\mathsf{C}(x^i_{m,n})$ 通过同构

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & R & \xrightarrow{\binom{-x^m}{x^{i+m-n}}} & R\oplus R & \xrightarrow{(x^i\ x^n)} & R & \longrightarrow & 0 \\
 & & {\scriptstyle -1}\downarrow\uparrow{\scriptstyle -1} & & \binom{-x^{n-i}\ 1}{1\ \ 0}\ \downarrow\uparrow\ \binom{0\ \ 1}{1\ x^{n-i}} & & \| & & \\
0 & \longrightarrow & R & \xrightarrow[\binom{-x^{i+m-n}}{0}]{} & R\oplus R & \xrightarrow[(0\ x^i)]{} & R & \longrightarrow & 0,
\end{array}$$

很容易　由此得出，三角 (B.3) 同构于 (B.6)，因此它也是可 distinguished 三角。　l.

接下来讨论 (4)，我们只考虑 (B.4)，因为 (B.5) 的情况类似。令 $u:=\binom{y^2_{3,2}}{x^1_{3,2}}$，则有一个可 distinguished 三角

$$P_3 \xrightarrow{u} P_2[1]\oplus P_2 \xrightarrow{j} \mathsf{C}(u) \xrightarrow{q} P_3[1] \tag{B.7}$$

在 $\mathcal{T}$中，其中 j 和 q 由以下复形之间的态射给出：

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & R & \xrightarrow{\binom{-x^2}{0}} & R\oplus R & \xrightarrow{(0\ x^2)} & R & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \binom{0}{1}\binom{-x^3\ \ 0}{x\ \ -x^2}} & & \downarrow{\scriptstyle \binom{0\ 0}{1\ 0}} & & \| & & \\
0 & \longrightarrow & R\oplus R & \xrightarrow{\binom{\ x^2\ \ 0}{x^2\ \ 0}} & R\oplus R\oplus R & \xrightarrow{(x\ 0\ x^2)} & R & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle (1\ 0)} & & \downarrow{\scriptstyle (1\ 0\ 0)} & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & R & \xrightarrow{-x^3} & R & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0.
\end{array}$$

由于 C(u) 通过同构与 $P_1[1]\oplus P_1\oplus P_3[1]$ 同构

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & R\oplus R & \xrightarrow{\begin{pmatrix} -x^3 & 0\\ x & -x^2\\ x^2 & 0\end{pmatrix}} & R\oplus R\oplus R & \xrightarrow{(\,x\ 0\ x^2\,)} & R & \longrightarrow & 0\\
 & & \Big\uparrow\downarrow{\scriptstyle \begin{pmatrix}-1 & x\\ 0 & 1\end{pmatrix}} & & \Big\uparrow\downarrow{\scriptstyle \begin{pmatrix}-x^2 & 1 & x\\ 1 & 0 & 0\\ x & 0 & -1\end{pmatrix}} & & \Big\|{\scriptstyle \begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&x\\0&x&-1\end{pmatrix}} & & \\
0 & \longrightarrow & R\oplus R & \xrightarrow[\begin{pmatrix}-x & 0\\ 0 & 0\\ 0 & -x^3\end{pmatrix}]{} & R\oplus R\oplus R & \xrightarrow[(\,0\ x\ 0\,)]{} & R & \longrightarrow & 0,
\end{array}$$

很容易得　　出三角 (B.4) 与 (B.7) 同构，因此它也是特异的。 □

引理 B.2. 假设 (2.4) 是一个八面体，且存在 $\epsilon\colon\ E\to E$，使得 $\epsilon^2=0$ 且

$$\epsilon\circ l=0,\qquad l'\circ\epsilon=0,\qquad h''\circ\epsilon\circ k=0,\qquad k'\circ\epsilon\circ h'=0. \tag{B.8}$$

则 (2.4) 仍是八面体，如果我们将 k 和 k' 替换为

$$\tilde{k}:=(1+\epsilon)\circ k,\qquad \tilde{k}':=k'\circ(1-\epsilon)$$

（保持所有其 他映射不变）。此外，若原来的八面体是好的，则这个新八面体也是好的
并且存在　　两个幂零态射 $\epsilon',\epsilon''\colon\ E\to E$，使得:

$$\epsilon'\circ l=0,\qquad h''\circ\epsilon'=0,\qquad k'\circ(\epsilon'-\epsilon)=0, \tag{B.9}$$

$$l'\circ\epsilon''=0,\qquad \epsilon''\circ h'=0,\qquad (\epsilon''-\epsilon)\circ k=0. \tag{B.10}$$

证明。由于 $\epsilon^2=0$, $1+\epsilon$ 是 E 的自同构，其逆为 $1-\epsilon$。因此，三角形$D\xrightarrow{\tilde{k}}E\xrightarrow{\tilde{k}'}F\xrightarrow{k''}D[1]$ 与可 distinguished 三角 $D\xrightarrow{k}E\xrightarrow{k'}F\xrightarrow{k''}D[1]$同构，故它是 distinguished 的。由 (B.8) 可知，所有涉及的方块均交换。

接下来要证明，在附加假设下，新八面体是良好的。首先注意，由于 ϵ' 和 ϵ'' 是幂零的， $1-\epsilon'$ 和 $1+\epsilon''$ 是 E的自同构。根据 (B.9)，存在一个三角形同构

$$\begin{array}{ccccccc}
B & \xrightarrow{l} & E & \xrightarrow{\begin{pmatrix}\tilde{k}'\\ -h''\end{pmatrix}} & F\oplus A[1] & \xrightarrow{(\,g''\ f[1]\,)} & B[1]\\
\Big\| & & \Big\downarrow{\scriptstyle 1-\epsilon'} & & \Big\| & & \Big\| \\
B & \xrightarrow{l} & E & \xrightarrow{\begin{pmatrix}k'\\ -h''\end{pmatrix}} & F\oplus A[1] & \xrightarrow{(\,g''\ f[1]\,)} & B[1].
\end{array}$$

同理，根据 (B.10)，存在一个三角形同构

$$\begin{array}{ccccccc}
B & \xrightarrow{\begin{pmatrix}g\\ f'\end{pmatrix}} & C\oplus D & \xrightarrow{(\,h'\ -k\,)} & E & \xrightarrow{l'} & B[1]\\
\Big\| & & \Big\| & & \Big\downarrow{\scriptstyle 1+\epsilon''} & & \Big\| \\
B & \xrightarrow{\begin{pmatrix}g\\ f'\end{pmatrix}} & C\oplus D & \xrightarrow{(\,h'\ -\tilde{k}\,)} & E & \xrightarrow{l'} & B[1]
\end{array}$$

这样就完成了。 □

现在我们　可以着手证明命题 2.2。首先注意到，采用本节的记号，我们有

$$A=B=C=P_3,\qquad F=D=P_1[1]\oplus P_1,\qquad E=P_2[1]\oplus P_2,$$

$$f=g=x^1_{3,3},\qquad f'=\begin{pmatrix}y^3_{3,1}\\ x^0_{3,1}\end{pmatrix},\qquad h'=\begin{pmatrix}y^3_{3,2}\\ x^0_{3,2}\end{pmatrix},\qquad g''=(\,-x^2_{1,3}[1]\quad y^1_{1,3}\,),\qquad h''=(\,-x^1_{2,3}[1]\quad y^2_{2,3}\,),$$

$$k=\begin{pmatrix}x^1_{1,2}[1] & 0\\ 0 & x^1_{1,2}\end{pmatrix},\qquad k'=\begin{pmatrix}x^0_{2,1}[1] & 0\\ 0 & x^0_{2,1}\end{pmatrix},\qquad \tilde{k}=\begin{pmatrix}x^1_{1,2}[1] & y^1_{1,2}\\ 0 & x^1_{1,2}\end{pmatrix},\qquad \tilde{k}'=\begin{pmatrix}x^0_{2,1}[1] & -y^2_{2,1}\\ 0 & x^0_{2,1}\end{pmatrix}.$$

首先我们证明，(2.10) 与 (2.11) 中的态射给出一个好八面体。利用引理 B.1 的 (1) 与 (2)，立即可看出

$$f'' = \begin{pmatrix} -x^2_{1,3}[1] & y^1_{1,3} \end{pmatrix}, \qquad h = x^2_{3,3}, \qquad g' = \begin{pmatrix} y^3_{3,1} \\ x^0_{3,1} \end{pmatrix}, \qquad k'' = \begin{pmatrix} -y^1_{1,1}[1] & 0 \\ 0 & y^1_{1,1} \end{pmatrix},$$
$$l = \begin{pmatrix} y^2_{3,2} \\ x^1_{3,2} \end{pmatrix}, \qquad l' = \begin{pmatrix} -x^2_{2,3}[1] & y^1_{2,3} \end{pmatrix}.$$

因此，三角形 (2.1)、(2.2)、(2.3) 和 (2.5) 变为

$$P_3 \xrightarrow{x^1_{3,3}} P_3 \xrightarrow{\begin{pmatrix} y^3_{3,1} \\ x^0_{3,1} \end{pmatrix}} P_1[1] \oplus P_1 \xrightarrow{\begin{pmatrix} -x^2_{1,3}[1] & y^1_{1,3} \end{pmatrix}} P_3[1],$$
$$P_3 \xrightarrow{x^2_{3,3}} P_3 \xrightarrow{\begin{pmatrix} y^3_{3,2} \\ x^0_{3,2} \end{pmatrix}} P_2[1] \oplus P_2 \xrightarrow{\begin{pmatrix} -x^1_{2,3}[1] & y^2_{2,3} \end{pmatrix}} P_3[1],$$
$$P_3 \xrightarrow{x^1_{3,3}} P_3 \xrightarrow{\begin{pmatrix} y^3_{3,1} \\ x^0_{3,1} \end{pmatrix}} P_1[1] \oplus P_1 \xrightarrow{\begin{pmatrix} -x^2_{1,3}[1] & y^1_{1,3} \end{pmatrix}} P_3[1],$$
$$P_1[1] \oplus P_1 \xrightarrow{\begin{pmatrix} x^1_{1,2}[1] & 0 \\ 0 & x^1_{1,2} \end{pmatrix}} P_2[1] \oplus P_2 \xrightarrow{\begin{pmatrix} x^0_{2,1}[1] & 0 \\ 0 & x^0_{2,1} \end{pmatrix}} P_1[1] \oplus P_1 \xrightarrow{\begin{pmatrix} -y^1_{1,1}[1] & 0 \\ 0 & y^1_{1,1} \end{pmatrix}} P_1[1] \oplus P_1[1].$$

由于它们都由 (3) 区分，我们确实得到了一个八面体。此外，(2.7) 和 (2.8) 恰好变为 (B.4) 和 (B.5)。因此，(4) 直接蕴含该八面体是好八面体。

由引理 B.2 可轻易推出，态射 (2.10) 和 (2.12) 构成一个好八面体，其中取

$$\epsilon := \begin{pmatrix} 0 & y^2_{2,2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \epsilon' := \begin{pmatrix} 0 & y^2_{2,2} \\ 0 & x^1_{2,2} \end{pmatrix}, \qquad \epsilon'' := \begin{pmatrix} -x^1_{2,2}[1] & y^2_{2,2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{B.11}$$

最后，假设两个八面体之间存在一个同构 ϕ。不失一般性，这样的同构具有如下形式

$$\phi_A = \alpha_A x^0_{3,3} + \beta_A x^1_{3,3} + \gamma_A x^2_{3,3}, \qquad \phi_B = \alpha_B x^0_{3,3} + \beta_B x^1_{3,3} + \gamma_B x^2_{3,3},$$
$$\phi_C = \alpha_C x^0_{3,3} + \beta_C x^1_{3,3} + \gamma_C x^2_{3,3}, \qquad \phi_D = \begin{pmatrix} \alpha'_D x^0_{1,1}[1] & \lambda y^1_{1,1} \\ 0 & \alpha_D x^0_{1,1} \end{pmatrix},$$
$$\phi_E = \begin{pmatrix} \alpha'_E x^0_{2,2}[1] + \beta'_E x^1_{2,2}[1] & \mu y^2_{2,2} + \nu y^1_{2,2} \\ 0 & \alpha_E x^0_{2,2} + \beta_E x^1_{2,2} \end{pmatrix}, \qquad \phi_F = \begin{pmatrix} \alpha'_F x^0_{1,1}[1] & \xi y^1_{1,1} \\ 0 & \alpha_F x^0_{1,1} \end{pmatrix},$$

其中 ϕ_X：对于每个 $X \in I$，$X \to X$ α_X，$\alpha'_X \in \Bbbk^*$以及 β_X，β'_X，γ_X，λ，μ，ν，$\xi \in \Bbbk$。将所有项乘以 α_A^{-1} 后，我们可以假设 $\alpha_A = 1$。由于 $f \circ \phi_A = \phi_B \circ f$ 和 $g \circ \phi_B = \phi_C \circ g$，我们还必须有$\alpha_B = \alpha_C = 1$和 $\beta_A = \beta_B = \beta_C$:$= \beta$。条件 $\phi_D \circ f' = f' \circ \phi_B$和 $g'' \circ \phi_F = \phi_B[1] \circ g''$蕴含$\alpha_D = \alpha'_D = \alpha_F = \alpha'_F = 1$。由于 $k' \circ \phi_E = \phi_F \circ k'$，我们有 $\alpha_E = \alpha'_E = \mu = 1$。由 $h'' \circ \phi_E = \phi_A[1] \circ h''$可得 $\beta'_E = \beta$ 和 $\beta_E = \beta + 1$。但这是不可能的，因为

$$\phi_E \circ h' = \begin{pmatrix} y^3_{3,2} + (\beta+1) y^2_{3,2} \\ x^0_{3,2} + (\beta+1) x^1_{3,2} \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} y^3_{3,2} + \beta y^2_{3,2} \\ x^0_{3,2} + \beta x^1_{3,2} \end{pmatrix} = h' \circ \phi_C.$$

这意味着这两个八面体之间不存在同构，证毕。

References

[1] I. Assem、D. Simson、D. Skowro´nski，*Elements of the Representation Theory of Associative Algebras 1: Techniques of Representation Theory*，伦敦数学学会学生文本丛书，剑桥大学出版社（），**65**，2006。[2] M. Ballard、D. Deliu、D. Favero、M. U. Isik、L. Katzarkov，*On the Derived Categories of Degree d hypersurface Fibrations*，《数学年刊》**371**，（2018），337–370。[3] A.A. Be˘ılinson、J. Bernstein、P. Deligne，*Faisceaux pervers*，Ast´erisque **100**（1982），5–171。[4] A.I. Bondal、M. Larsen 和 V.A. Lunts。*Grothendieck ring of pretriangulated categories*，《国际数学研究通知》，**29**（2004），1461–1495。[5] A. Bondal、M. Van den Bergh，*Generators and representability of functors in commutative and noncommutative geometry*，《莫斯科数学杂志》**3**（2003），1–36。[6] A. Canonaco、A. Neeman、P. Stellari，*Strong uniqueness of enhancements for the dual numbers: a case study* arXiv:2505.10374，。[7] A. Canonaco、M. Ornaghi、P. Stellari，*Geometric Morita Theory*，准备中。[8] A. Canonaco、P. Stellari，*Non-uniqueness of Fourier–Mukai kernels*，《数学杂志》**272**（2012），577–588。

[9] A. Canonaco、P. Stellari, *A tour about existence and uniqueness of dg enhancements and lifts*, 《几何与物理杂志》122, （2017）28–52。[10] F. Genovese, *Quasi-functors as lifts of Fourier-Mukai functors: the uniqueness problem* https:, 博士论文, 参见: //fgenovese1987.github.io/documents/thesis_phd.pdf。[11] D. Huybrechts, *Fourier-Mukai transforms in algebraic geometry*, 牛津数学专著, 牛津科学出版物（2006）。[12] B. Keller, *On differential graded categories*, 国际数学家大会第二卷, 欧洲数学学会, 苏黎世（2006）, 151–190。[13] H. Krause, *Krull–Schmidt categories and projective covers*, 《Expo. Math.》33（2015）, 535–549。[14] M. K¨unzer, *non-isomorphic Verdier octahedra on the same base*, 《同伦与相关结构杂志》4（2009）, 7–38。[15] F. K¨ung *Twisted Hodge diamonds give rise to non-Fourier-Mukai functors*《非交换几何杂志》18（2024）, 891–952。[16] A. Lorenzin, *Some developments on existence and uniqueness of DG-enhancements* https:, 博士论文, 参见: //hdl.handle.net/10281/405257。[17] V. Lunts、O.M. Schn¨urer, *New enhancements of derived categories of coherent sheaves and applications*, 《代数杂志》446（2016）, 203–274。[18] D. Orlov, *Geometric realizations of quiver algebras*, 《斯捷克洛夫数学研究所报告》290（2015）, 70–83。[19] *Equivalences of derived categories and K3 surfaces* **84** 1997 1361 1381 D. Orlov, , 《J. [20] *New examples of non-Fourier-Mukai functors* Math. Sci.》（）, – T. Raedschelders、A. Rizzardo 和 M. Van den Bergh, , 《组合数学》158（2022）, 1254–1267。[21] A. Rizzardo、M. Van den Bergh 和 A. Neeman, *An example of a non-Fourier-Mukai functor between derived categories of coherent sheaves* **216** 2019 927 1004 ,

《数学发明》（）, –。[22] G. Tabuada, *Une structure de catégorie de modèles de Quillen sur la catégorie des dg-catégories*, 《巴黎科学院数学报告》340（2005）, 15–19。[23] B. To¨en, *The homotopy theory of dg-categories and derived Morita theory*, 《数学发明》167（2007）, 615–667。[24] V. Vologodsky, *Triangulated Endofunctors of the Derived Category of Coherent Sheaves Which Do Not Admit DG Liftings*, 《阿诺德数学杂志》5（2019）, 139–143。

A.C.: Dipartimento di Matematica “F. Casorati”, Università degli Studi di Pavia, Via Ferrata 5, 27100 Pavia, Italy*Email address*: alberto.canonaco@unipv.it

M.O.: Dipartimento di Matematica “F. Enriques”, Università degli Studi di Milano, Via Saldini 50, 20133 Milano, Italy*Email address*: mattia12.ornaghi@gmail.com*URL*: https://sites.google.com/view/mattiaornaghi