arXiv:2601.21596v1 [math.DG] 29 Jan 2026

洛伦兹遇见托勒密

Felix Rott[1], Zhe-Feng Xu[1,2], Matteo Zanardini[1]

2026年1月30日

摘要 我们研究托勒密不等式的一种洛伦兹型类比，并证明在全局双曲时空的情形下，它等价于整体类时截面曲率不大于零的上界。我们探究托勒密不等式与双曲反演之间的联系，并建立若干应用和刚性性质。

关键词： 洛伦兹几何、洛伦兹长度空间、托勒密不等式、曲率界

MSC2020： 53C23、53C50、53B30

目录

1 引言 1

2 预备知识 2

3 托勒密不等式 5

3.1 基本性质与稳定性 .5 3.2 双曲反演 .7 3.3 闵可夫斯基空间中的托勒密不等式 .9

4 托勒密性质时空 11

4.1 托勒密性质与非正曲率 .11 4.2 测地线唯一性与未来单连通性 .14 4.3 双曲反演的刚性 . 16

1 引言

众所周知，托勒密不等式指出，欧几里得平面上的任意四个点都满足以下不等式：

$$\overline{AB}\cdot\overline{CD}+\overline{BC}\cdot\overline{AD}\geq\overline{AC}\cdot\overline{BD}\,. \tag{1.1}$$

[1]SISSA，34136，意大利的里雅斯特，frott@sissa.it，zxu@sissa.it，mzanardi@sissa.it[2]中国科学技术大学数学科学学院，230026，中国合肥，xzf1998@mail.ustc.edu.cn

此外，当且仅当这四个点共圆或共线时，等号成立。该不等式以著名的希腊天文学家兼数学家克劳狄乌斯·托勒密命名，他大约在两千年前就在其著作《天文学大成》中提到了这一不等式。这个不等式可以理解为：四边形两条对角线的乘积与两组对边乘积之和之间的关系。该不等式在高维空间中也成立。

在更现代的语境中，若不局限于欧几里得空间，托勒密不等式至少可以追溯到 [31]中对它的提及。该不等式更常被用作内积空间与一般赋范空间之间的区别性刻画，这与平行四边形恒等式 [32]的精神颇为相似。

更近些时候，关于托勒密度量空间已有不少研究结果；所谓托勒密度量空间，是指度量空间中的任意四个点都满足（1.1）。托勒密不等式与（截面）曲率上界有着密切联系。其中，黎曼流形满足托勒密不等式，当且仅当该空间是 CAT(0) 空间；而具有这一性质的芬斯勒流形必然是黎曼流形 [13]。此外，已知在托勒密度量空间中，CAT(0) 与布塞曼凸这两个概念等价；而一般来说，CAT(0) 的条件严格强于布塞曼凸性[20]。

据我们所能进行的调查，目前尚未发现有人在洛伦兹背景下提及托勒密不等式。我们提出了（非光滑）托勒密洛伦兹空间的定义，并汇集了若干结果。特别是，我们证明了闵可夫斯基空间具有托勒密性质。为此，与正定号情形相似，我们采用了反演技巧。在洛伦兹号差下，这一想法已在 [16]中针对闵可夫斯基空间这一特例有所提及。更贴近物理的是，由反演生成的对称性类在共形场论中发挥着重要作用；参见例如 [18]。

我们将反演这一概念推广到更一般的洛伦兹空间，并且本着 [14], 的思路，给出了反演时间分离函数的定义。我们的主要定理探讨了托勒密不等式与类时截面曲率上界之间的相互关系。

定理 1.1. 一个全局双曲时空具有托勒密性质，当且仅当它处处具有非正曲率。

最后，我们将利用双曲反演的一些刚性性质，识别出类时截面曲率消失的空间，并给出时空中闵可夫斯基空间的刻画。

2 预备知识

本节回顾有关光滑与非光滑洛伦兹几何的一些基本信息。先从光滑情形开始。更多细节请参阅 [2, 27]。

时空是一个非紧致光滑流形 M，其上配备了洛伦兹度量张量g，其符号为（$+, -, \cdots -$），并由类时向量场 $X \in \mathfrak{X}(M)$ 定向时间。给定一个点 $p \in M$，若向量 $v \in T_pM$ 满足 $g_p(v, v) > 0$，我们称其为类时；若满足 $g_p(v, v) = 0$，则称其为零。否则，我们称 v 为类空。若向量为零或类时，我们称其为因果向量；此外，若 v 满足$g(v, X(p)) \geq 0$（分别为 ≤ 0），则称其为未来指向（分别为过去指向）。若曲线在每一点处的切向量均为未来指向类时（分别为因果），则称该曲线为未来指向类时曲线（分别为未来指向因果曲线）。未来指向因果

时空 T_pM 中的向量称为 F_pM，我们在切空间 T_pM 上定义由 g 导出的双曲范数如下：

$$\|v\|_{F_g} := \begin{cases} \sqrt{g_p(v,v)}\,, & \text{if } v \in F_pM, \\ 0\,, & \text{otherwise}\,. \end{cases}$$

关于……，请参见 [3, A 节。3] 以及 [21]，其中介绍了双曲（巴拿赫）范数。请注意，在我们的框架中，为了立即与当前关于洛伦兹预长度空间中三角形比较的文献保持一致，若 $\|v\|_{F_g} = 0$（而不是 $-\infty$）满足 v 是类空的，我们便对其作此定义。

我们定义一个双变量函数，它与黎曼度量所诱导的距离互为对偶：这就是时间分离函数 ℓ：$M \times M \to [0, +\infty]$ 其定义公式为

$$\ell(x,y) := \sup \int_0^1 \|\dot\gamma_t\|_{F_g}\, \mathrm{d}t\,, \tag{2.1}$$

其中，上确界取遍所有分段 C^1 未来指向因果曲线 $\gamma\colon [0,1] \to M$满足 $\gamma_0 = x$ 且 $\gamma_1 = y$。若不存在这样的曲线，按约定令 $\ell(x,\ y) = 0$。我们通过如下方式在 M 上定义因果关系（分别为类时关系）$\leq$（分别为 $\ll$）：若两点可由一条未来指向因果（分别为类时）曲线连接，则称这两点满足相应关系。此外，我们使用如下记号

$$y \in J^+(x) \;\Leftrightarrow\; x \leq y\,, \qquad\qquad y \in I^+(x) \;\Leftrightarrow\; x \ll y\,,$$

对这些集合的过去版本同样如此。

定义 2.1（强因果性、整体双曲性与未来单连通性）。设$(M,\ g)$ 为一个时空。

（*i*）我们称 M 是强因果的，如果类时菱形 $I(x,y) := I^+(x) \cap I^-(y)$ 构成该拓扑的一个子基。

（*ii*）我们称它是全局双曲的，如果 $\leq$ 是 M 上的一个偏序，并且因果菱形 $J(x,y) := J^+(x) \cap J^-(y)$ 在 M中是紧致的。

（*iii*）我们称它是未来单连通的，如果任意一对具有相同端点的未来指向类时曲线之间存在类时同伦。也就是说，对每一对未来指向类时光滑曲线 $\gamma, \sigma\colon [0,1] \to M$，使得 $\gamma_0 = \sigma_0$ 且 $\gamma_1 = \sigma_1$，存在一个光滑映射

$$\Gamma : [0,1] \times [0,1] \to M$$

使得 $\Gamma(0,\cdot) = \gamma$, $\Gamma(1,\cdot) = \sigma$ 以及 $\Gamma(t,\cdot)$ 是一条连接 γ_0 与 γ_1的类时曲线。

我们指出，在全局双曲时空中，ℓ 是有限且连续的 [27, 定理 4.124]，，并且任意一对因果相关的点之间都存在一条连接它们的极大测地线 [27, 定理 4.123]。在时空 (M,g) 上，黎曼张量按照通常方式通过列维-奇维塔联络定义，其公式为

$$R(X,Y)Z := \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z\,, \tag{2.2}$$

对于 $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$。给定一个点 $p \in M$ 以及 $v, w \in T_pM$，使得它们张成一个非退化平面 Π，则 Π 的截面曲率定义为

$$K(\Pi) := \frac{g(R(w,v)v,w)}{g(v,v)g(w,w) - g(v,w)^2}\,. \tag{2.3}$$

容易看出，该定义与 Π 的生成元选择无关。这样的平面$\Pi \subset T_pM$ 称为类时的，只要 $g_p|_\Pi$ 具有洛伦兹号差（$+$，$-$）。

定义 2.2（类时截面曲率界）。若一个时空 (M, g) 的类时截面曲率从上方（分别从下方）受常数 $K \in \mathbb{R}$控制，记作截面曲率张量 $\leq K$（分别为 $\geq$），则对所有 $p \in M$ 以及所有类时平面 $\Pi \subseteq T_pM$，都有 $K(\Pi) \leq K$（分别为 $\geq$）。

注 2.3（关于号差约定）。在我们的号差约定下，类时截面曲率的上界（分别为下界）对应于综合意义下的类时曲率上界（分别为下界），这一观点最早见于 [25]。此外，曲率（例如）从上方受 K 控制的空间，对所有 $K' > K$而言，其曲率也从上方受 K' 控制，正如直观上所预期的那样。德西特空间具有常曲率 $K = -1$，这强调了黎曼几何中的预期：负曲率会导致共轭点的缺失。另请参见 [22, 第 2 节。1] 其中给出了更多出于分析动机的论证，以说明我们所采用的号差约定和记号。■

接下来，我们回顾一些非光滑洛伦兹几何的基础知识。更多详情请参见 [25, 10, 7]。

定义 *2.4*（洛伦兹预长度空间）。洛伦兹预长度空间是一个五元组 $(X, \mathsf{d}, \ll, \leq, \ell)$，满足 (X, d) 是度量空间，$\leq$ 是自反且传递的关系，$\ll$ 是包含于 $\leq$ 中的传递关系，并且时间分离函数 $\ell : X \times X \to [0, +\infty]$ 满足：只要 $x \leq y \leq z$，就有 $\ell(x,z) \geq \ell(x,y) + \ell(y,z)$；此外，$\ell(x,y) > 0$ 当且仅当 $x \ll y$。

距离 d 对我们并不重要，主要是作为背景工具。关于此定义与其他非光滑时空概念之间的关系，请参见 [3,注 2.8] 和 [5, 第 4 节。1] 通常，在非光滑情形中，测地线一词指全局极大曲线；而时空上的测地线作为测地线方程的解，只是时间分离函数的局部极大者。为避免混淆，我们尽量强调使用“极大测地线”这一术语。无论如何，对于连接 x 和 y 的极大测地线，我们使用记号 $[x, y]$。

我们还要回顾余弦定理，参见 [10, 引理 2。4]，不过我们的论证只需要用到 $K = 0$这一种情况。设 $p, q, r \in \mathbb{R}^1$,[1] 构成一个容许因果三角形[1]（顺序不一定如此）。设 $a = \max\{\ell(p,q)\ \ell(q,p)\} > 0$, $b = \max\{\ell(q,r)\ \ell(r,q)\} > 0$ 和$c = \max\{\ell(p,r)\ \ell(r,p)\}$。设 $\omega = \measuredangle_q(p,r)$ 为 q 处的双曲角，σ 为其符号。那么我们有：

$$a^2 + b^2 = c^2 - 2ab\sigma\cosh(\omega)\,. \tag{2.4}$$

为完整起见，我们在此重述三角形比较的定义。对于本文中采用的其他所有等价概念，请读者参阅 [7]。常数D_K 定义为 $\frac{\pi}{\sqrt{K}}$ 若 $K > 0$，则为 $+\infty$ 若 $K \leq 0$。用 $\mathbb{L}^2(K$表示常曲率为 K的洛伦兹模型空间。

[1]这里指的是至多允许其中一条边为零的三角形。

定义 2.5 (三角形比较)。 设 X 为一个洛伦兹预长度空间。若一个开子集U 满足以下条件，则称其为三角形比较意义下的$(\leq K)$比较邻域：

(i) ℓ在 $(U\times U)\cap \ell^{-1}([0,D_K))$ 上连续，且该集合是开集；

(ii) 对于所有满足 $\ell(x,y) < D_K$ 的 $x \ll y \in U$，在 U 内存在一条连接极大测地线；

(iii) 设 $\Delta(x,y,z)$ 是 U 中的一个类时三角形， p、 q 是 $\Delta(x,y,z)$ 各边上的两个点。设 $\Delta(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$ 是 $\mathbb{L}^2(K)$ 中对应于 $\Delta(x,y,z)$ 的比较三角形，且 $\bar{p}$、 $\bar{q}$ 分别是对应于 p 和 q 的比较点。则

$$\ell(p,q)\geq \ell(\bar{p},\bar{q})\,. \tag{2.5}$$

若 X 可由 $(\leq K)$-比较邻域覆盖，则称其类时曲率从上方受 K 控制。若 X 本身是一个比较邻域，则称 X 的类时曲率在全局范围内从上方受控。

注意，在一个（$\leq K$）比较邻域内， $\bar{p}\ll\bar{q}$ 意味着 $p\ll q$。如果 $K=0$，我们可以称 X 具有非负（分别为非正）曲率，或称其为非负（分别为非正）曲率空间。对于空间 X 中的三角形，如果它对于所有比较点都相对于其欧几里得比较三角形在（2.5）中满足等式，我们也称其为平坦的。最近， [19]建立了一个关于曲率上界的整体化定理。

最后，回顾一下，由于 [24] 以及较新的 [6, 定理 3.1 和 3.2], 定义2.2和定义2.5 对于强因果时空是等价的。

3 托勒密不等式

本节给出洛伦兹预长度空间上托勒密不等式和双曲反演的定义，并讨论一些初步结果。

3.1 首批性质与稳定性

定义 3.1 （托勒密不等式）。 若洛伦兹预长度空间 X 中的所有点 $x\leq y\leq z\leq w$ 对于 X 均满足以下不等式，则称其具有托勒密性质：

$$\ell(x,z)\,\ell(y,w)\geq \ell(x,y)\,\ell(z,w)+\ell(x,w)\,\ell(y,z)\,. \tag{3.1}$$

注 3.2 （托勒密空间的基本性质）。

(i) （等距变换下的不变性）显然，托勒密不等式及其等号情形在等距变换下保持不变（在非光滑情形中，等距映射指保持 $\leq$ 和 ℓ 的映射）。

(ii)（限制与重标度）赋予相对拓扑和限制时间分离函数后，托勒密洛伦兹预长度空间的任意子集仍是托勒密洛伦兹预长度空间。此外，对于任意 $\lambda>0$，洛伦兹预长度空间 X 是托勒密性质的，当且仅当重标度空间 λX 也是托勒密性质的。

(iii)（限制到类时关系）注意，对于所考虑的四元组，不失一般性可以假设$y \ll z$ 成立（见（3.1）。事实上，否则，（3.1）可化为$\ell(x,\ z)\,\ell(y,\ w) \geq \ell(x,\ y)\,\ell(z,\ w)$，而这由反三角不等式显然成立。

(iv)（一些等号情形）显然，在任意洛伦兹预长度空间中，沿未来指向的极大因果测地线排列的四个点满足托勒密不等式的等号情形。此外，只要两个或更多点重合，等号也显然成立。

■

注 3.3（布塞曼凹性、稳定性与芬斯勒时空）。布塞曼凹性是另一种（非正）曲率概念，非常适用于芬斯勒时空。如果时空确为洛伦兹时空，那么布塞曼凹性等价于非正截面曲率（因为此时旗曲率与截面曲率一致），参见 [4]。

文献中有几种洛伦兹-格罗莫夫-豪斯多夫（简称 LGH）收敛的概念，例如参见 [28, 29]。布塞曼凹性在任何这类收敛下都不稳定。事实上，双曲 p范数族

$$\|v\|_p := \left(|v_0|^p - \sum_{i=1}^{n} |v_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

在 $\mathbb{R}^{1,n}$ 对于 $p \in (1, +\infty)$，很容易看出其具有布塞曼凹性。然而，正如 $p \to 1$，它们收敛到一个范数，而在该范数下测地线不再唯一，特别是布塞曼凹性不可能成立。■

相比之下，托勒密条件在 LGH 收敛下是稳定的，因为可以在（3.1）中取极限。这一事实表明，托勒密空间应当能够从洛伦兹-芬斯勒空间中识别出洛伦兹流形，正如 [13, 定理 1。2] 在黎曼情形中所指出的那样。下文将利用 [29]。 中引入的收敛概念给出证明。

命题 3.4（托勒密空间的稳定性）。 设(X_n, ℓ_n) 和(X, ℓ) 是洛伦兹预长度空间，并假设 ℓ 在 X上连续。假设$(X_n, \ell_n) \xrightarrow{\text{LGH}} (X, \ell)$，并且$(X_n, \ell_n)$对所有 n 都具有托勒密性质。那么(X, ℓ) 也具有托勒密性质。

证明。 如同 [29, 定理 10.4], 中那样，我们只需考虑所讨论的四个点均为收敛定义中适当选取的 ε-网的因果菱形的顶点这一情形，参见 [29, 定义 3.6]。对于一般的点，可以用此类顶点来逼近它们，然后利用 ℓ 的连续性得出结论。

为导出矛盾，假设 X 不具有托勒密性质。则存在四个点$x_1 \leq x_2 \ll x_3 \leq x_4$ 位于 X 中，使得

$$\ell(x_1, x_3)\,\ell(x_2, x_4) < \ell(x_1, x_2)\,\ell(x_3, x_4) + \ell(x_1, x_4)\,\ell(x_2, x_3)\,. \tag{3.2}$$

由于 (3.2) 是严格不等式，故存在 $0 < \delta < \min\{\ell(x_i, x_j) > 0, 1 \leq i < j \leq 4\}$ 使得不等式

$$(\ell(x_1, x_3)+\delta)\,(\ell(x_2, x_4)+\delta) < (\ell(x_1, x_2)-\delta)^+\,(\ell(x_3, x_4)-\delta)^+ + (\ell(x_1, x_4)-\delta)\,(\ell(x_2, x_3)-\delta) \tag{3.3}$$

成立，其中 $A^+ := \max\{A,\ 0\}$ 表示 A 的正部。

根据 LGH 收敛的定义，对所有充分大的 n，在 X_n 的各个 ε-网中，存在相应的顶点x_i^n，$i=1$，2，3，4，使得

$$|\tilde{\ell}_n(x_i^n,x_j^n)-\tilde{\ell}(x_i,x_j)|<\delta,\quad 1\le i<j\le 4, \tag{3.4}$$

其中

$$\tilde{\ell}(x_i,x_j):=\begin{cases}\ell(x_i,x_j), & x_i\le x_j,\\ -\infty, & \text{otherwise}\end{cases}$$

˜类似地，对于 ℓ_n。这立即推出 $x_1^n\le x_2^n\le x_3^n\le x_4^n$。结合（3.3）和（3.4），我们得到

$$\ell_n(x_1^n,x_3^n)\,\ell_n(x_2^n,x_4^n)<\ell_n(x_1^n,x_2^n)\,\ell_n(x_3^n,x_4^n)+\ell_n(x_1^n,x_4^n)\,\ell_n(x_2^n,x_3^n)\,, \tag{3.5}$$

这与 X_n 具有托勒密性质这一事实矛盾。 □

3.2 双曲反演

本节中，我们介绍双曲反演，并讨论它与时空曲率界的关系。双曲反演是一种与度量几何中的球面反演密切相关的变换。Christodoulou 的著作 [16, 第 4 节1]中讨论了闵可夫斯基时空中的双曲反演。我们给出其完全一般的定义。为此，我们先引入以下术语，参见 [23, 定义 51]。

定义 3.5 （强未来类时测地完备性）。若洛伦兹预长度空间 X 中的每条未来不可延拓类时测地线（均为极大曲线）都具有无限的 ℓ-长度，则称其（强）未来类时测地完备。

这或许是一个非常强的条件，但要使双曲反演具有明确的定义，这个条件本质上是必需的。在整体非正曲率情形下，这一条件无疑自然得多。事实上，整体非正曲率的空间本身就是唯一测地的，参见 [8, 定理 4.7], ，且任何（局部）测地线本身就是极大测地线，参见 [19, 注 2.6], ，因此，除曲率界之外，唯一的假设就是未来不可延拓的测地线具有无限的 ℓ-长度。闵可夫斯基空间和德西特空间就是整体非正曲率且强未来类时测地完备时空的例子。

定义 *3.6*（双曲反演）。设 X 是一个唯一测地且强未来类时测地完备的洛伦兹预长度空间。设 $x\in X$ 和 $r>0$。设 $p\in I^+(x)$，并用 γ_p 表示从 x 出发、经过 p的（唯一且不可延拓的）极大测地线。映射 $H_{x,r}:I^+(x)\to I^+(x)$称为以 x 为中心、半径为 r的双曲反演，定义为 $H_{x,r}(p)=q$，其中 q是 γ_p上的唯一一点，使得 $\ell(x,p)=\frac{r^2}{\ell(x,q)}$。

给定任意 $r>0$ 和 $x\in X$，根据定义显然可知 $H_{x,\,r}$ 是自身的逆变换，即 $H_{x,\,r}(H_{x,\,r}(y))=y$ 对所有 $y\in I^+(x)$ 均成立。在下一个引理中，我们将讨论闵可夫斯基空间中的双曲反演；该引理已在[16, 第 4 节命题 71], 中提及。此处我们使用如下记号

$$\measuredangle_x(y,z)=\operatorname{arcosh}\left(\frac{\langle y-x,z-x\rangle}{\|y-x\|\|z-x\|}\right)$$

用以表示 x 处介于点 y 与点 z之间的双曲角。我们将不会在非光滑情形中显式处理角，因此可以略去该定义。

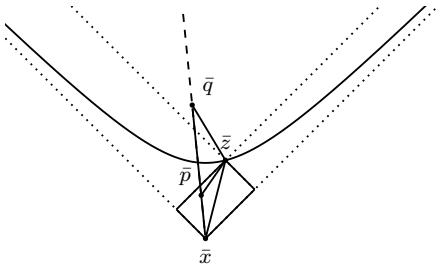


图 1: 闵可夫斯基平面中比较构型里的双曲反演 .

引理 3.7 （闵可夫斯基空间中的双曲反演）。 设 $n \geq 1$ 且设 $x \ll z$ 属于 $\mathbb{R}^{1,n}$ 满足$\ell(x, z) = r$，则 $H_{x,r}(I(x, z)) = I^+(z)$ 且 $H_{x,r}(I^+(z)) = I(x, z)$。

证明。无妨设 x 是 $\mathbb{R}^{1,n}$ 中的原点，并令 $r = 1$。设 $p \in I(x, z)$ 和 $q = H_{x,r}(p)$。记 $b = \ell(x, q)$ $c = \ell(z, q)$ $c' = \ell(p, z)$ 和 $\alpha = \measuredangle_x(z, q)$，则 $\ell(x, p) = \frac{1}{b}$。考虑三角形 $\Delta(x, z, q)$，并注意到该三角形位于由类时向量 $z - x$ 和 $p - x$ 张成的 $\mathbb{R}^{1,n}$ 内部的类时平面中。代入余弦定理，得

$$c^2 = 1 + b^2 - 2b\cosh(\alpha) = 1 + b(b - 2\cosh(\alpha)) .$$

另一方面，余弦定理还给出

$$(c')^2 = 1 + \left(\frac{1}{b}\right)^2 - 2\frac{1}{b}\cosh(\alpha) = 1 + \frac{1}{b}\left(\frac{1}{b} - 2\cosh(\alpha)\right) .$$

特别地， $c' = \frac{c}{b}$，因此 $c > 0$ 当且仅当 $c' > 0$。 □

以下命题将前述引理 3.7 推广到具有有界曲率的洛伦兹预长度空间情形。

命题 3.8 (弯曲空间中的双曲反演)。 设 X 是一个全局具有非正曲率的未来类时测地完备洛伦兹预长度空间。设 $x \in X$、$r > 0$，并设 $z \in I^+(x)$ 满足条件 $\ell(x、z) = r$。那么 $H_{x,r}(I^+(z)) \subseteq I(x、z)$。

证明。设 $q \in I^+(z)$，并设 $p = H_{x、r}(q)$。根据构造，我们有 $p \in I^+(x)$。考虑 X 中的三角形 $\Delta(x、z、q)$，以及闵可夫斯基平面中的比较三角形 $\Delta(\bar{x}、\bar{z}、\bar{q})$。由于 $p \in [x, q]$，存在 p 的比较点 $\bar{p} \in [\bar{x}, \bar{q}]$。注意，$H_{\bar{x}、r}(\bar{q}) = \bar{p}$，见图 1。根据假设，$\ell(\bar{z}、\bar{q}) = \ell(z、q) > 0$，因此由引理 3.7 也有 $\ell(\bar{p}、\bar{z}) > 0$。于是根据三角形比较，我们有 $0 < \ell(\bar{p}、\bar{z}) \leq \ell(p、z)$。这表明 $p \in I(x、z)$，因此 $H_{x、r}(I^+(z)) \subseteq I(x、z)$。 □

在欧几里得设定中，可以拉回欧几里得度量，从而在以单位球面为反演对象进行反演后，为该空间诱导出一种新的距离。这一方法已推广到度量空间 [14]。类似的构造也适用于洛伦兹号差。

定义 3.9 （反演时间分离函数）。 设 X 是一个唯一测地且强未来类时测地完备的洛伦兹预长度空间。设 $p \in X$。关于 p 的反演时间分离函数定义为 i_p： $I^+(p) \times I^+(p) \to [0, +\infty]$，其中

$$i_p(x, y) := \frac{\ell(y, x)}{\ell(p, x)\,\ell(p, y)} . \tag{3.6}$$

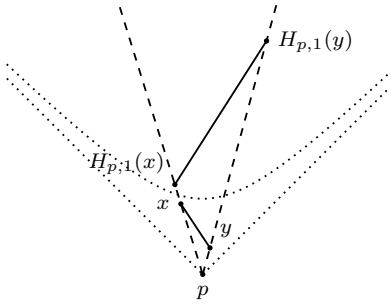


图 2：闵可夫斯基平面中的反演时间分离可通过余弦定理计算。

此外，我们通过简单地反转关系来定义与该反演相关联的洛伦兹结构：当且仅当 $y \leq x$ 时定义 $x \leq_{i_p} y$，类时关系同样如此。

简单计算可得闵可夫斯基空间中的以下恒等式：

$$i_p(y,x) = \ell(H_{p,1}(x), H_{p,1}(y)), \qquad \text{see Figure 2}\,.$$

一般而言，i_p 可能不满足反三角不等式。与正定号情形一样，原始时间分离具有托勒密性质，当且仅当反演满足反三角不等式，两者之间存在直接联系。

命题 3.10 (双曲反演与托勒密性质)。设 X 是一个唯一测地且强未来类时测地完备的洛伦兹预长度空间。那么$(I^+(p)\ d, \ll_{i_p} \leq_{i_p}, i_p)$ 是洛伦兹预长度空间，当且仅当 X 具有托勒密性质。特别地，若 X 是全局双曲的，则$(I^+(p)\ d, \ll_{i_p}, \leq_{i_p}, i_p)$也具有全局双曲性。

证明。洛伦兹预长度空间的所有性质都显然成立，唯有的反三角不等式 i_p 需要另行验证。简单计算表明，ℓ 具有托勒密性质等价于 i_p 满足反三角不等式。事实上，只需将（3.6）代入 $i_p(x,\ z)\ \geq i_p(x,\ y) + i_p(y,\ z)$，并重新整理，即可得到托勒密不等式。

显然，$\leq$ 是偏序，当且仅当 $\leq_{i_p}$ 也是如此；并且两个空间具有相同的因果菱形（在有意义的地方）。 □

3.3 闵可夫斯基空间中的托勒密不等式

在下一个引理中，我们将证明闵可夫斯基空间（记作 $\mathbb{R}^{1,n}$ 并赋予其双曲范数 $\|\cdot\|$）具有托勒密性质，并讨论托勒密不等式的刚性（3.1）。证明策略与欧几里得空间中的类似：在某个点处进行圆反演后，托勒密不等式归结为三角不等式。

引理 3.11 (闵可夫斯基空间具有托勒密性质)。设 $n \geq 1$ 和 $x \leq y \leq z \leq w$ 是$_{\mathbb{R}^{1,n}}$中的四个点。那么

$$\|z-x\|\,\|w-y\| \geq \|y-x\|\,\|w-z\| + \|w-x\|\,\|z-y\|\,. \tag{3.7}$$

此外，当且仅当至少有两个点重合，或者 x, y, z, w 位于 $\mathbb{R}^{1,n}$ 中某个类时2平面内的一条（可能退化的）矩形双曲线或一条类时直线上时，(3.7) 中的等号成立。

证明。我们先证明（3.7）。不失一般性，可以假设$x = 0 \ll y \ll z \ll w$，事实上，一般情形可通过复合一个平移并取极限得到。我们需要证明

$$\|z\| \|w - y\| \geq \|y\| \|w - z\| + \|w\| \|z - y\| .$$

注意，由于 $y \ll w$，我们可以考虑以 $x = 0$ 为中心、半径为 $r = \|w\|$的 y 的双曲反演，得到

$$H_{x,r}(y) = \frac{\|w\|^2}{\|y\|^2} y ,$$

因此，根据引理 题3.7 我们有 $H_{x,r}(y) \geq w$，特别是 $\frac{\|w\|}{\|y\|} y \geq \frac{\|y\|}{\|w\|} w$。现在注意到 t

$$\|w - y\| = \left\| \frac{\|w\|}{\|y\|} y - \frac{\|y\|}{\|w\|} w \right\| .$$

因此，托勒密不等式可由反三角不等式直接推出：

$$\begin{aligned}
\|z\| \|w - y\| &= \|z\| \left\| \frac{\|w\|}{\|y\|} y - \frac{\|y\|}{\|w\|} w \right\| \\
&= \left\| \frac{\|w\|\|z\|}{\|y\|} y - \frac{\|y\|\|w\|}{\|z\|} z + \frac{\|y\|\|w\|}{\|z\|} z - \frac{\|y\|\|z\|}{\|w\|} w \right\| \\
&\geq \left\| \frac{\|w\|\|z\|}{\|y\|} y - \frac{\|y\|\|w\|}{\|z\|} z \right\| + \left\| \frac{\|y\|\|w\|}{\|z\|} z - \frac{\|y\|\|z\|}{\|w\|} w \right\| \\
&= \|w\| \left\| \frac{\|z\|}{\|y\|} y - \frac{\|y\|}{\|z\|} z \right\| + \|y\| \left\| \frac{\|w\|}{\|z\|} z - \frac{\|z\|}{\|w\|} w \right\| \\
&= \|w\| \|z - y\| + \|y\| \|w - z\| .
\end{aligned}$$

接下来讨论等号情形。如果至少有两个点重合，那么托勒密不等式取等号，因此我们假设所有点互不相同。如果前三个点（或最后三个点）位于同一条零射线上，那么显然等号成立（注意，这种情形可以视为退化的矩形双曲线）。此外，如果所有关系都是零关系，但没有三个点位于同一条零射线上，那么很容易验证（利用推升性质）式中3.7不可能取等号。特别地，我们可以假设至少有一个关系是类时的。

我们断言，这四个点必定位于 $\mathbb{R}^{1,n}$ 内的某个类时二维平面上。由于只有四个点，我们只需考虑 $\mathbb{R}^{1,2}$。要证明它们位于同一个类时二维平面上，只需验证由这些点 Δ 张成的凸包 x、y、z和 w的体积为零。利用凯莱–门格尔行列式（参见 [11, 第 9.7 节。3],），可得

$$\mathrm{Vol}(\Delta)^2 = -\frac{1}{288} \det \begin{pmatrix}
0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 0 & \|y - x\|^2 & \|z - x\|^2 & \|w - x\|^2 \\
1 & \|y - x\|^2 & 0 & \|z - y\|^2 & \|w - y\|^2 \\
1 & \|z - x\|^2 & \|z - y\|^2 & 0 & \|w - z\|^2 \\
1 & \|w - x\|^2 & \|w - y\|^2 & \|w - z\|^2 & 0
\end{pmatrix} .$$

右边的行列式视为关于相应双曲范数的多项式时，可以分解为四项的乘积，参见 [11], ，其中一项恰好是

$\|z-x\|\,\|w-y\|-\|y-x\|\,\|w-z\|-\|w-x\|\,\|z-y\|$。因此，如果（3.7）成立为等式，那么 $\mathrm{Vol}(\Delta)=0$，如所述。

从现在起，我们考虑 $\mathbb{R}^{1,1}$ 中的四个点，不失一般性，取 $x=0$。注意，按照证明中的思路，当且仅当这些点

$$\frac{\|w\|\|z\|}{\|y\|}y \geq \frac{\|y\|\|w\|}{\|z\|}z \geq \frac{\|y\|\|z\|}{\|w\|}w\,,$$

因果相关且共线，也就是说，它们位于同一条测地线段上时，等号成立。因此，必定存在某个 $\lambda\in[0,1]$ 使得

$$\lambda\frac{\|z\|^2}{\|y\|^2}\left(\|w\|^2y-\|y\|^2w\right)=\|w\|^2z-\|z\|^2w\,. \tag{3.8}$$

如果 x,y,w 共线，那么显然 z 也必定共线。设 x,y,w 不共线。现在注意，若固定 y 和 w，再将 3.8 式中的 $z=z_\lambda$ 解出$\lambda\in[0,1]$，便可将经过 $x=0$, y 和 w 的一段（可能退化的）矩形双曲线参数化。 □

注记 3.12（双曲线的边界情形）。采用与引理 3.11 类似的论证，可以证明，任何带有洛伦兹标量积的向量空间都具有托勒密性质。

在度量为 dt^2-dx^2 的闵可夫斯基平面中，类时矩形双曲线可通过选取由方程 $t^2-x^2=-a$ 给出的集合的两个连通分支之一得到，其中某个 $a\in(0,+\infty)$。此外，请注意，退化双曲线或类时直线可分别通过矩形双曲线在 $a\to 0$ 与 $a\to+\infty$ 情形下的 LGH 收敛得到。 ■

4 托勒密时空

本节给出关于托勒密时空的若干结果。在第一小节中，我们旨在建立托勒密不等式与非正类时截面曲率之间的联系。随后我们证明托勒密空间是未来单连通的（利用测地线的唯一性），从而将曲率界全局化。

4.1 托勒密性质与非正曲率

与正定号情形一样，容易看出非正曲率空间具有托勒密性质。

命题 4.1（非正曲率蕴含托勒密性质）。设 X 是一个整体非正曲率的洛伦兹预长度空间，则 X 具有托勒密性质。

证明。不失一般性，我们只考虑 $x\leq y\ll z\leq w$ in X 的情形。分别考虑 Δ 的比较三角形[2] $\Delta(x,z,w)$ 和 $\Delta(x,y,z)$，并将它们安排为共享线段 $[\bar{x},\bar{z}]$，且在该线段的对边上实现。

[2]所讨论的三角形可能并不完全符合定义 2.5 的框架。然而，$y\ll z$ 保证它们都是容许因果三角形，而这些正是所谓因果曲率界中使用的三角形，参见 [7, 定理 4。2]。

我们首先假设 $[\bar{x},\bar{z}]$ 与 $[\bar{y},\bar{w}]$ 之间存在一个交点，记为 $\bar{p}$。令 $p\in[x,z]$，使得 $\bar{p}$ 是其比较点。由 X 的非正曲率，我们知道 $\ell(y,p)\geq\ell(\bar{y},\bar{p})$ 且 $\ell(p,w)\geq\ell(\bar{p},\bar{w})$。于是

$$\ell(\bar{y},\bar{w})=\ell(\bar{y},\bar{p})+\ell(\bar{p},\bar{w})\leq\ell(y,p)+\ell(p,w)\leq\ell(y,w)\,.$$

根据引理 3.11，我们知道（3.1）对 $\bar{x}\leq\bar{y}\leq\bar{z}\leq\bar{w}$ 成立。模型空间中所涉及的所有其他距离均等于 X 中的相应距离。

现在假设 $[\bar{x},\bar{z}]\cap[\bar{y},\bar{w}]=\emptyset$，即 $\bar{x}\leq\bar{y}\ll\bar{z}\leq\bar{w}$ 在$\mathbb{L}^2(K)$中构成一个在 $\bar{z}$ 处凹的因果四边形。按照亚历山德罗夫引理的精神将四边形拉直（参见 [9, 引理 3.4]），会使 $\ell(\bar{x},\bar{z})$ 和 $\ell(\bar{y},\bar{w})$ 减小，并保持所有其他相关距离不变。因此我们回到第一种情形（交点为 $\bar{z}$），且不等式链方向正确。更确切地说，保持 $\bar{z}$ 固定，并用 $\bar{x}'$、$\bar{y}'$ 和 $\bar{w}'$ 表示移动后的点，使得 $\ell(\bar{x},\bar{y})=\ell(\bar{x}',\bar{y}')$ $\ell(\bar{x},\bar{w})=\ell(\bar{x}',\bar{w}')$ 以及$\ell(\bar{y}',\bar{w}')=\ell(\bar{y}',\bar{z})+\ell(\bar{z},\bar{w}')=\ell(\bar{y},\bar{z})+\ell(\bar{z},\bar{w})$。于是由亚历山德罗夫引理，$\ell(x,z)=\ell(\bar{x},\bar{z})\geq\ell(\bar{x}',\bar{z})$ 且 $\ell(y,w)\geq\ell(y,z)+\ell(z,w)=\ell(\bar{y}',\bar{w}')$。因此

$$\ell(x,z)\,\ell(y,w)\geq\ell(\bar{x}',\bar{z})\,\ell(\bar{y}',\bar{w}')\geq\ell(\bar{x}',\bar{y}')\,\ell(\bar{z},\bar{w}')+\ell(\bar{x}',\bar{w}')\,\ell(\bar{y}',\bar{z})\,,\tag{4.1}$$

其中第二个不等式由引理 3.11 得出。(4.1) 右侧的所有距离都等于 X 中对应的距离，因此结论成立。□

接下来，我们将证明一个与 [13, 引理 4.3] 类似的命题。事实上，我们将证明一个更强的命题，其精神与 [12, 引理 II.1.13] 一致。

命题 *4.2*（模型空间中的严格铰链比较）。设 $K<K'$，且 (x,p,y) 是 $\mathbb{L}^2(K)$ 中的一个类时铰链[3]，满足 $p\ll x\ll y$, $\ell(p,y)<D_{K'}$，且 $\alpha=\measuredangle_p(x,y)>0$。设 $(\bar{x},\bar{p},\bar{y})$ 是 $\mathbb{L}^2(K')$ 中的一个比较铰链。那么 $\ell(\bar{x},\bar{y})>\ell(x,y)$。

证明。为提高可读性，在此证明中，我们着重说明所考虑的点的类时未来所在的空间。注意，根据标准的铰链比较 [7, 定义 3.14 与定理 5。1], 这个不等式的非严格形式自动成立。我们将引入以 r,θ为中心的极坐标（ p 和 $\bar{p}$）。通过初等计算可得，点 $p\in\mathbb{L}^2(K)$ 的（类时）未来上的度量，用统一记号表示，具有如下形式:

$$g_K=dr^2-f(r,K)^2d\theta^2\,,$$

其中 f的定义域为 $\{(r,K)\mid K\in\mathbb{R},r\in(0,D_K)\}$，并定义为

$$f(r,K):=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{-K}}\sinh(\sqrt{-K}r), & \text{if } K<0\,,\\ r, & \text{if } K=0\,,\\ \frac{1}{\sqrt{K}}\sin(\sqrt{K}r), & \text{if } K>0\,.\end{cases}$$

利用泰勒展开可以证明，$\frac{1}{\sqrt{-K}}\sinh(\sqrt{-K}r)$ 和 $\frac{1}{\sqrt{K}}\sin(\sqrt{K}r)$ 都收敛于 r as $K\to0$，即 f is 在 K 中连续。此外，f is 在 K 中严格单调递减。

[3]铰链（x,p,y）是指从 p出发的两条最大化测地线 $[p,x],[p,y]$ 及它们的内接角。

我们定义映射

$$\varphi : \{q \in I^+_{\mathbb{L}^2(K)}(p) : \ell(p,q) < D_{K'}\} \cup \{p\} \to I^+_{\mathbb{L}^2(K')}(\bar{p}) \cup \{\bar{p}\}$$

通过 $\varphi(p) = \bar{p}$，并将 $I^+_{\mathbb{L}^2(K)}(p)$ 中坐标为（r，θ）的点 q（其中 $\ell(p,q) < D_K$）映射到 $I^+_{\mathbb{L}^2(K')}(\bar{p})$ 中具有相同坐标的点。注意，根据构造，$\Delta(\bar{p}, \bar{x}, \bar{y})$ 包含在 φ 的像中。由于 φ 是径向等距，我们得到 $\varphi(x) = \bar{x}$ 和 $\varphi(y) = \bar{y}$。

设 $z = (r, \theta) \in I^+_{\mathbb{L}^2(K)}(p)$，并设 $v \in T_z\mathbb{L}^2(K)$。记

$$v = v_1\, \partial_r|_z + v_2\, \partial_\theta|_z\,,$$

因此 $g_K(v, v) = v_1^2 - f(r, K)^2 v_2^2$。我们还计算得 $g_{K'}(d_z\varphi[v], d_z\varphi[v]) = v_1^2 - f(r, K')^2 v_2^2$，其中 $d_z\varphi$ 是 φ 在 z 处的微分。显然，根据 f 的单调性，我们有

$$g_K(v, v) \geq g_{K'}(d_z\varphi[v], d_z\varphi[v]) \tag{4.2}$$

当且仅当 $v_2 = 0$ 时等号成立，即当且仅当 v 与 ∂_r成比例。

令 $\gamma : [0,1] \to \mathbb{L}^2(K)$ 为连接 x 与 y的（类时）测地线段。则$\varphi \circ \gamma : [0,1] \to \mathbb{L}^2(K')$ 是连接 $\bar{x}$与 $\bar{y}$的光滑曲线，并且根据（4.2），它是类时曲线。特别地，曲线 $\varphi\circ\gamma$位于 $I^+_{\mathbb{L}^2(K')}(\bar{p})$ 内。因此，我们得到

$$\ell(x,y) = \int_0^1 \sqrt{g_K(\dot\gamma_t, \dot\gamma_t)}\, \mathrm{d}t \leq \int_0^1 \sqrt{g_{K'}(d_{\gamma_t}\varphi[\dot\gamma_t], d_{\gamma_t}\varphi[\dot\gamma_t])}\, \mathrm{d}t \leq \ell(\bar{x}, \bar{y})\,. \tag{4.3}$$

事实上，最后一个不等式由时间分离函数作为上确界的定义得出。正如我们已经提到的，（4.3）中的第一个不等式取等号，当且仅当 $\dot\gamma_t$与 ∂_r成比例；但显然，这当且仅当三角形 $\Delta(p, x, y)$ 退化时成立，也就是说 $\alpha = 0$。 □

下一个推论与 [13,推论4。4]类似。

推论4.3（正曲率时空中的严格铰链比较）。 设(M, g) 是一个满足截面曲率张量 > 0的强因果时空。设(x, p, y) 是 M中一个具有 $x \ll y$和 $\alpha = \measuredangle_p(x, y) > 0$的类时铰链。设$(\bar{x}, \bar{p}, \bar{y})$ 是闵可夫斯基平面中的一个比较铰链。那么$\ell(x, y) > \ell(\bar{x}, \bar{y})$。

证明。由于该铰链（最初）包含在 M的一个紧区域 U 中，我们可以假设 $\mathrm{TSec}(M)|_U > c > 0$。设 $(\bar{x}', \bar{p}', \bar{y}')$ 是 $\mathbb{L}^2(c)$中的一个比较铰链，并设 $(\bar{x}, \bar{p}, \bar{y})$ 是闵可夫斯基平面中的一个比较铰链。于是，根据铰链比较和命题 4.2，我们得到 $\ell(x, y) \geq \ell(\bar{x}', \bar{y}') > \ell(\bar{x}, \bar{y})$。 □

在下面的定理中，我们证明，强因果托勒密时空具有非正的类时截面曲率。值得注意的是，在推论 M、 g 的证明中，用到（4.3）光滑性的一个关键之处，是我们假设曲率界的严格正性具有连续性。

定理 4.4（托勒密时空具有非正曲率）。 设 (M, g) 是一个强因果托勒密时空。则 截面曲率张量 ≤ 0。

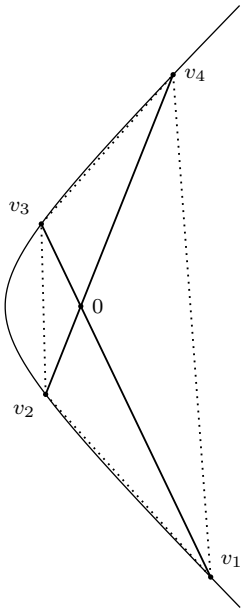


图3: 两条直线经过原点，并与双曲线相交于四个点。

证明。 反设存在一个点 $p \in M$ 和一个类时二维平面$\Pi \subseteq T_pM$，使得 $K(\Pi) > 0$。考虑受限指数映射 $\exp_p|_\Pi : \Pi \to M$，通过选取 $0 \in \Pi$的一个足够小的邻域 U，我们得到到二维（洛伦兹）子流形 $N = \exp_p(U) \to M$的一个微分同胚。我们将由 g 在 Π上得到的双曲范数记为 $\|\cdot\|$。

根据曲率张量的连续性，我们可以假设 U 足够小，使得对于所有 $y \in N$，$K(\Sigma) > \frac{S}{2}$，其中 $\Sigma \equiv \Sigma_y$ 是 T_yM 中与 N 相切的唯一平面。记 N 上的时间分离函数为 ℓ_N。再记 M 中原始的时间分离为 ℓ_M，那么显然 $\ell_N \le \ell_M$。在此，考虑一条关于 x 轴对称、但不经过 Π 中 0 点的类时矩形双曲线。此外，考虑两条经过 0 点的不同类时直线。将这两条直线与双曲线的四个交点按时间坐标顺序标记为 v_1、v_2、v_3、v_4。那么，$[v_1, v_3]$ 和 $[v_2, v_4]$ 必然构成闵可夫斯基平面 Π 中的测地线段，且这四个向量在 0 点处构成四个非零角，见图3。

根据构造，任何涉及原点和两个 v_i 的铰链，都是对应于 p 处铰链的比较铰链。对于 $i = 1$、2、3、4，设 $x_i = \exp_p(v_i) \in N$。由于 $\exp_p$ 是径向等距映射，我们有 $\ell_M(x_1, x_3) = \ell_N(x_1, x_3) = \|v_3 - v_1\|$，且 $\ell_M x_2, x_4) = \ell_N(x_2, x_4) = \|v_4 - v_2\|$。由推论4.3可得 $\ell_N(x_1, x_2) > \|v_2 - v_1\|$，以及 $\ell_N(x_3, x_4) > \|v_4 - v_3\|$。对于托勒密不等式中涉及的其他距离，根据标准铰链比较，不等式非严格，即 $\ell_N(x_2, x_3) \ge \|v_3 - v_2\|$，且 $\ell_N(x_1, x_4) \ge \|v_4 - v_1\|$。由引理 3.11，$v_i$ 满足托勒密不等式中的等式。由于 $\ell_N \le \ell_M$，由推论4.3得到的两个严格不等式与 M 中的托勒密不等式矛盾。

□

4.2 测地线唯一性与未来一点连通性

本节旨在改进上一节的结果。由于托勒密时空满足截面曲率张量 ≤ 0，每个点的类时共轭轨迹为空 [2, 命题 11。13]。

在下一个引理中，我们将证明，即使整个类时割迹也是空的。关于这一点，请参阅 [2,

第 9] 章介绍洛伦兹几何中类时割迹的定义及其基本性质。事实上，托勒密条件使我们能够将类时测地线局部极大化这一事实推广到全局。由此我们推得，托勒密时空是唯一测地的。

引理 4.5（全局极大测地线与空割迹）。设(M,g)是一个托勒密时空，则所有类时测地线都是极大测地线。特别地，任意一点的类时割迹均为空，并且连接任意两点的未来指向的最大类时测地线至多只有一条。

证明。我们着重讨论未来指向的测地线，因为过去指向的测地线证明方法相同。设$\gamma\colon [0,b)\to M$是一条以固有时为参数的未来指向类时测地线，并假设$0\le a<b$是沿着γ在$\gamma(0)=p$的（未来）类时割迹中的第一个点所对应的参数值。显然，$0<a$且对任意$0\le t\le a$，都有$\ell(\gamma_0,\gamma_t)=t$，但对所有$a<c<b$，$\ell(\gamma_0,\gamma_c)<c$。取充分小的$\varepsilon>0$，使得$a+\varepsilon<b$，并且$\gamma\colon [a-\varepsilon,a+\varepsilon]\to M$是其端点之间一条以固有时为参数的极大类时测地线。将托勒密不等式应用于$\gamma(0)\ll\gamma(a-\varepsilon)\ll\gamma(a)\ll\gamma(a+\varepsilon)$，得到

$$2a\varepsilon\ge(a-\varepsilon)\varepsilon+\varepsilon\,\ell(\gamma_0,\gamma_{a+\varepsilon})\,,$$

因此我们得到$a+\varepsilon\ge\ell(\gamma_0,\ \gamma_{a+\varepsilon})$。直接应用反三角不等式可知，实际上$a+\varepsilon=\ell(\gamma_0,\ \gamma_{a+\varepsilon})$，这与$\gamma_a$位于$\gamma_0$的类时割迹这一事实矛盾。

反设存在两条未来指向的最大类时测地线σ，γ，连接x与$y\in I^+(x)$。经过重新参数化后，我们可以假设σ，$\gamma\colon [0,1]\to M$。根据证明的第一部分，测地线γ可以延拓到区间$[0,1+\varepsilon]$，使其在某个充分小的$\varepsilon>0$下仍然是未来指向的最大类时测地线。考虑

$$\eta_t:=\begin{cases}\sigma_t, & t\in[0,1]\,,\\ \gamma_t, & t\in[1,1+\varepsilon]\,.\end{cases}$$

显然，η是连接γ_0与$\gamma_{1+\varepsilon}$的未来指向的最大类时测地线，因为$\ell(\gamma_0,\ \gamma_{1+\varepsilon})$与$\eta$的洛伦兹长度相等。特别地，$\eta$是一条光滑曲线，因此$\dot\gamma_1=\dot\sigma_1$。于是通过连续性论证可得$\gamma=\sigma$。□

定理 4.6（测地线唯一性与未来单连通性）。设(M,g)为全局双曲托勒密时空。设$x\ll y$属于M，则存在唯一的未来指向的最大类时测地线连接x与$y\in I^+(x)$。此外，$\exp_x:\mathrm{Int}(F_xM)\to I^+(x)$是微分同胚，且$(M,g)$是未来单连通的。

证明。设$x\ll y$为M中的两个点。由于$(M,\ g)$是全局双曲时空，故存在一条未来指向的最大类时测地线$\gamma:\ [0,1]\to M$连接x与y。由引理 4.5，我们得到γ是唯一的。

设$x\in M$为一个点，并考虑$\exp_x:\mathrm{Int}(F_xM)\to I^+(x)$。由整体双曲性可知，该映射显然是满射；由我们刚刚建立的测地线唯一性可知，它是单射。此外，由于x的类时割迹为空，该映射是光滑的。因此$\exp_x:\mathrm{Int}(F_xM)\to I^+(x)$是微分同胚。

利用测地线唯一性的性质，现在很容易证明未来单连通性。考虑两条光滑未来指向类时曲线α，$\beta:\ [0,1]\to M$使得$\alpha_0=\beta_0=x$

以及 $\alpha_1 = \beta_1 = y$。然后构造一个类时同伦 Γ，使其介于 α 和 $[x, y]$ 之间，并满足 $\Gamma(s, \cdot)$ 由 $[x, \alpha_s]$ 和 $\alpha|_{[s,1]}$的连接给出。按照构造，所有中间曲线都是类时的。在 $[x, y]$ 和 β之间也可以进行类似的构造，而类时同伦的复合仍然是类时同伦。

□

现在我们可以陈述主要结果了。

定理 4.7 (托勒密性质与整体曲率)。 一个全局双曲时空具有托勒密性质，当且仅当它整体非正曲率。

证明。 全局非正曲率蕴含 M 具有托勒密性质，这一点可由命题 4.1得出。反过来，定理 4.4 和定理 4.6 蕴含 M 未来单连通，且满足截面曲率张量 ≤ 0。接着，我们应用 [19, 推论 4.9] 中的整体化结果，得到所述结论。

□

4.3 双曲反演的刚性

本节将研究由双曲反演刻画的一些刚性性质。为此，我们将使用一种用于曲率上界的四点条件，该条件最近在 [9] 中得到发展。关于更多细节，特别是以下定义与经典三角形比较的等价性，请参阅该文献。

定义 4.8 （四点条件）。 设 X 是一个洛伦兹预长度空间。若一个开集 U满足以下条件，则称其为四点条件意义下的 $(\leq K)$ 比较邻域：

(i) ℓ在 $(U \times U) \cap \ell^{-1}([0, D_K))$上连续，且该集合是开集；

(ii) 对任意 $x_1 \ll x_4$属于 U, $x_2, x_3 \in I(x_1, x_4) := I^+(x_1) \cap I^-(x_4)$，构造比较三角形$\Delta(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_4)$ 和 $\Delta(\hat{x}_1, \hat{x}_3, \hat{x}_4)$，使其分别位于经过 $[\hat{x}_1, \hat{x}_4]$的直线的对边上。则$\ell(x_2, x_3) \geq \ell(\hat{x}_2, \hat{x}_3)$；

(iii) 对任意 $x_1 \ll x_2 \ll x_3 \ll x_4$属于 U，构造比较三角形 $\Delta(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3)$ 和$\Delta(\hat{x}_2, \hat{x}_3, \hat{x}_4)$，使其位于经过 $[\hat{x}_2, \hat{x}_3]$的直线的同一侧。则 $\ell(x_1, x_4) \leq \ell(\hat{x}_1, \hat{x}_4)$。

下一个命题可视为 [1, 命题 4.1]中等价性质列表的补充。

命题 4.9 （四点构形的刚性）。 设 $x \ll y \ll z \ll w$ 是洛伦兹预长度空间 X中的一个（$\leq K$）-比较邻域 U。 X假设 定义4.8 （iii）中的比较构型满足定义方程中的等号成立。则与顶点 $x \ll y \ll z \ll w$ 相关的所有四个类时三角形，在任意选取点 p 和 q时，都满足三角形比较定义方程中的等号 （2.5）。

证明。设 $\hat{x}$、$\hat{y}$、$\hat{z}$ 和$\hat{w}$ 为定义 4.8（iii）中所述四点比较构形的顶点。根据构造，对角线总是相交，即$[\hat{x}、\hat{z}] \cap [\hat{y}、\hat{w}] = \{\hat{m}\}$。此外，我们总有 $\Delta(\hat{y}、\hat{z}、\hat{w})$是$\Delta(y、z、w)$的比较三角形。

由于根据假设，我们有 $\ell(x, w) = \ell(\hat{x}, \hat{w})$，因此 $\Delta(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ 也构成 $\Delta(x, y, w)$ 的比较三角形。将满足 $\hat{m}$ 是比较点的点记为 $m \in [x, z]$。于是

将三角形比较应用于 $\Delta(x,y,z)$ 和 $\Delta(x,z,w)$，可得 $\ell(y,m) \geq \ell(\hat{y},\hat{m})$，以及 $\ell(m,w) \geq \ell(\hat{m},\hat{w})$。结合反三角不等式，我们得到

$$\ell(y,w) = \ell(\hat{y},\hat{w}) = \ell(\hat{y},\hat{m}) + \ell(\hat{m},\hat{w}) \leq \ell(y,m) + \ell(m,w) \leq \ell(y,w)\,, \tag{4.4}$$

这迫使 m 在 $\Delta(x,y,z)$ 和 $\Delta(x,z,w)$ 中的三角形比较取等号。根据命题 4.1]，这已经意味着这两个三角形在 (2.5) 中满足完全等号。事实上，利用定理 3.6] 中的第一变分公式 [1, ，可以构造一个 ℓ-等距映射，将“填充后”的三角形 $\Delta(\hat{x},\hat{y},\hat{z})$ 映回 U，并将其边映到 $\Delta(x,y,z)$ 上。对点 $m' \in [y,w]$ 也可以采用类似的方法，因为 $\hat{m}$ 同样是一个比较点，由此便可得到所讨论的四个三角形均满足该结论。 □

对于下一个命题，我们简要回顾以下术语，参见定义 3.6]。在足够正则的洛伦兹预长度空间上（例如，全局曲率上界已足够），可以构造度量空间 $(\mathcal{D}_p^+, \measuredangle_x)$：它由 $x \in X$ 处的未来指向类时方向组成（将夹角为零的两条测地线视为等价），并赋予角度度量。

定义 4.10 (闵可夫斯基锥，[10, 定义 3.16])**.** 给定度量空间 (X,d)，X 上的闵可夫斯基锥是洛伦兹预长度空间，定义为通常的度量锥 $\mathrm{Cone}(X) = ([0,+\infty) \times X)/(\{0\} \times X)$ 作为度量空间 (参见 [15, 定义 3.6.16])，并赋予

- 时间分离 $\ell_C((s,x),(t,y)) = \sqrt{s^2+t^2-2st\cosh(\mathsf{d}(x,y))}$，
- 因果关系 $(s,x) \leq_C (t,y)$ 当且仅当 $s^2+t^2-2st\cosh(\mathsf{d}(x,y)) \geq 0 \,\&\, s \leq t$，
- 类时关系 $(s,x) \ll_C (t,y)$ 当且仅当 $\ell_C((s,x),(t,y)) > 0$.

命题 4.11 (类时未来与闵可夫斯基锥等距)。 设 (X,ℓ) 是一个全局具有非正曲率的洛伦兹预长度空间，并且 $(I^+(p)\ i_p)$ 是一个测地洛伦兹预长度空间。那么 $I^+(p)$ 与 $\mathrm{Cone}(D_p^+)$ 是 ℓ-等距的，即它与以 p 处的方向空间为底的闵可夫斯基锥等距。

证明。 设 $x \ll z$ 属于 $I^+(p)$，且 y 是从 z 到 x 的 i_p-测地线上的一个点（回忆一下，i_p 上的因果序与 X 上的因果序时间对偶），也就是说，$i_p(z,x) = i_p(z,y) + i_p(y,x)$。展开定义可得

$$\ell(p,y)\,\ell(x,z) = \ell(p,z)\,\ell(x,y) + \ell(p,x)\,\ell(y,z)\,,$$

也就是说，四元组 $p \leq x \leq y \leq z$ 满足托勒密不等式中的等号。现在我们断言，该四元组也满足四点条件中的等号。为此，设 $\hat{p} \leq \hat{x} \leq \hat{y} \leq \hat{z}$是按照定义 4.8 (iii) 的思路，在闵可夫斯基平面中的一个比较构型。若反设 $\ell(p,z) < \ell(\hat{p},\hat{z})$，则

$$\begin{aligned}\ell(\hat{p},\hat{y})\,\ell(\hat{x},\hat{z}) &= \ell(p,y)\,\ell(x,z)\\ &= \ell(p,z)\,\ell(x,y) + \ell(p,x)\,\ell(y,z)\\ &< \ell(\hat{p},\hat{z})\,\ell(\hat{x},\hat{y}) + \ell(\hat{p},\hat{x})\,\ell(\hat{y},\hat{z})\,,\end{aligned}$$

违反了闵可夫斯基平面中的托勒密不等式。因此，我们得到 $\Delta(p,x,z)$是平坦的，由命题4.9。

我们断言下述映射是一个 ℓ-等距映射。设 $f:\ I^+(p)\ \to$ 锥(D_p^+)由$x\mapsto(\ell(p,x)\ v_x)$定义，其中 v_x 是D_p^+中包含 $[p,x]$的等价类。这是良定义的，因为由角度三角不等式，任意一对夹角为零的测地线与任意其他测地线所成的角相同，参见 [10, 定理3.1]。设 $x,y\in I^+(p)$，并考虑三角形 $\Delta(p,x,y)$，我们知道它是平坦的。特别地，这意味着 p处的角等于其在闵可夫斯基平面中的比较角。将该角记为 ω。比较三角形 $\Delta(\bar{p},\bar{x},\bar{y})$中关于 ω 的余弦定理为：

$$\ell(x,y)^2=\ell(p,x)^2+\ell(p,y)^2-2\ell(p,x)\ell(p,y)\cosh(\omega)\,. \tag{4.5}$$

根据定义，Cone($\mathcal{D}_p^+$) 中的时间分离为

$$\ell_C((s,v),(t,w))=\sqrt{s^2+t^2-2st\cosh(\mathsf{d}(v,w))}\,. \tag{4.6}$$

将此公式与 $f(x)$ 和 $f(y)$ 对照，我们显然有 $s=\ell(p,\ x)\ t=\ell(p,\ y)$，并且 $\mathsf{d}(v_x,\ v_y)=\omega$，因此 $\ell(x,\ y)=\ell_C(f(x)\ f(y))$。 □

定理 4.12 （测地线反演与截面曲率消失）。 设 （M、 g） 为一个时空，且 $p\in M$ 使得 （I^+（p） i_p） 是一个测地洛伦兹预长度空间。那么对于任意类时二维平面 $\Pi\subset T_pM$， K（Π） $=0$ 。

证明。 固定 M 中 p 的一个正规邻域 U。设 $\Pi\subset T_pM$ 为一个类时二维平面，并设 v、 w 为两个未来指向类时向量，使得 $v-w\in\mathsf{Int}(F_pM)$ 且 $\Pi=\mathsf{span}(v,\ w)$。在 U 中，对 $t>s$ 上的时间分离函数进行泰勒展开，可得

$$\ell(\exp_p(tv),\exp_p(sw))^2=\|tv-sw\|_{F_g}^2-\frac{1}{6}g(R(v,w)v,w)s^2t^2+o((t^2+s^2)^2) \tag{4.7}$$

如 $s^2+t^2\to 0$ 所示，参见 [26, 第 7] 页。由于 ($I^+(p)$ i_p) 是一个测地洛伦兹预长度空间，因此特别意味着 i_p 满足反三角不等式，进而可得 (M,g) 具有托勒密性质。因此，根据定理 4.4，TSec ≤ 0 。显然，命题 4.11 的局部版本给出了一个 ℓ-等距映射，将 $U\cap I^+(p)$ 映到方向空间上的闵可夫斯基锥的一个子集；在光滑情形下，该子集为 $\mathsf{Int}(F_pM)$，参见 [10, 引理 3.24]。因此，作为命题 4.11 的推论，我们发现当 t,s 足够小时， $\ell(\exp_p(tv),\exp_p(sw))^2=\|tv-sw\|_{F_g}^2$。由此显然可知 $K(\Pi)=0$。 □

事实证明，消失的类时截面曲率实际上意味着截面曲率完全消失，参见例如 [17]。因此，利用常曲率空间分类定理的标准结论，参见 [30, 推论 8。26] 我们得到以下推论。

推论 4.13 （闵可夫斯基空间的刻画）。 设 (M,g) 是一个测地完备且单连通的时空，并且对所有$p\in M$，$(I^+(p)\ i_p)$ 都是测地洛伦兹预长度空间。那么， M 与闵可夫斯基空间等距。

致谢。 我们谨感谢 Tobias Beran 和 Darius Er¨os 在本项目初期进行的有益讨论。

作者感谢欧盟通过 NextGenerationEU 在 PRIN 项目“几何与引力的当代视角”（项目代码 2022JJ8KER – CUP G53D23001810006）框架内提供的支持。文中表达的观点和意见仅代表作者本人，不一定反映欧盟的观点和意见，欧盟也不对此承担责任。

第二作者还获得了国家留学基金管理委员会项目资助（编号：202406340143）。

参考文献

[1] J. Barton, T. Beran, M. Che, S. Gieger, J. R¨ohrig 和 F. Rott。非正曲率洛伦兹空间的分裂定理，2026年。预印本： https://arxiv.org/abs/2601.14058。[2] J. K. Beem、P. E. Ehrlich 和 K. L. Easley。《整体洛伦兹几何》，《纯粹与应用数学专著和教材》第202卷。Marcel Dekker, Inc.，纽约，第二版，1996年。[3] T. Beran、M. Braun、M. Calisti、N. Gigli、R. J. McCann、A. Ohanyan、F. Rott 和 C. S¨amann。度量测度时空中的非线性达朗贝尔比较定理与因果微分演算，2024年。预印本：https://arxiv.org/abs/2408.15968。[4] T. Beran、D. Er¨os、S. Ohta 和 F. Rott。时空的凹性，2025年。预印本：https://arxiv.org/abs/2509.26196。[5] T. Beran、J. Harvey、L. Napper 和 F. Rott。洛伦兹长度空间的Toponogov整体化结果。《数学年刊》，392(3)：3447–3478，2025年。[6] T. Beran、M. Kunzinger、A. Ohanyan 和 F. Rott。类时截面曲率界的光滑与合成概念的等价性。《美国数学会会刊》，153(2)：783–797，2025年。[7] T. Beran、M. Kunzinger 和 F. Rott。论洛伦兹长度空间中的曲率界。《伦敦数学会杂志》(2)，110(2)：论文编号 e12971，共41页，2024年。[8] T. Beran、L. Napper 和 F. Rott。洛伦兹长度空间中的Alexandrov拼接定理与Bonnet-Myers定理。《美国数学会汇刊》，378(4)：2713–2743，2025年。[9] T. Beran 和 F. Rott。洛伦兹长度空间中的Reshetnyak大化与离散上曲率界，2025年。预印本：https://arxiv.org/abs/2509.05224。[10] T. Beran 和 C. S¨amann。洛伦兹长度空间中的双曲角与类时曲率界。《伦敦数学会杂志》(2)，107(5)：1823–1880，2023年。[11] M. Berger。《几何学》I。Universitext。Springer-Verlag，柏林，1987年。M. Cole 和 S. Levy 从法文译出。[12] M. R. Bridson 和 A. Haefliger。《非正曲率度量空间》，《数学科学基础丛书》第319卷。柏林：Springer，1999年。[13] S. M. Buckley、K. Falk 和 D. J. Wraith。托勒密空间与CAT(0)。《格拉斯哥数学杂志》，51(2)：301–314，2009年。[14] S. M. Buckley、D. A. Herron 和 X. Xie。度量空间反演、拟双曲距离与一致空间。《印第安纳大学数学杂志》，57(2)：837–890，2008年。[15] D. Burago、Y. Burago 和 S. Ivanov。《度量几何教程》，《数学研究生教材》第33卷。美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，2001年。

[16] D. Christodoulou. 广义相对论的数学问题. I. 苏黎世高级数学讲座. 欧洲数学学会 (EMS), Z¨urich, 2008年.[17] M. Dajczer 与 K. Nomizu. 论不定度量的截面曲率. II. 《数学年刊》, 247(3):279–282, 1980.[18] P. Di Francesco, P. Mathieu 与 D. S´en´echal. 共形场论. 当代物理学研究生教材. Springer-Verlag, 纽约, 1997.[19] D. Er¨os 与 S. Gieger. 综合洛伦兹卡坦–阿达马定理, 2025年. 预印本:https://arxiv.org/abs/2506.22197.[20] T. Foertsch, A. Lytchak 与 V. Schroeder. 非正曲率与托勒密不等式. 《国际数学研究通讯》 IMRN, (22):文章编号 rnm100, 15, 2007.[21] N. Gigli. 双曲巴拿赫空间, 2025年. 预印本: https://arxiv.org/abs/2503.10467.[22] N. Gigli, F. Rott 与 M. Zanardini. 洛伦兹背景下动态最优传输的偏微分方程方面, 2026年. 预印本: https://arxiv.org/abs/2601.13167. [23] J. D. E. Grant, M. Kunzinger 与 C. S¨amann. 时空的不可延拓性与洛伦兹长度空间. 《整体分析与几何年刊》, 55(1):133–147, 2019.[24] S. G. Harris. 洛伦兹流形的三角形比较定理. 《印第安纳大学数学杂志》, 31(3):289–308, 1982.[25] M. Kunzinger 与 C. S¨amann. 洛伦兹长度空间. 《整体分析与几何年刊》, 54(3):399–447, 2018.[26] R. J. McCann. 舍线性以换椭圆性：爱因斯坦引力理论与洛伦兹分裂定理的非光滑方法. 《2024年菲尔兹奖之后》论文集, Deirdre Haskell 与 V. Kumar Murty 编. （即将出版）, 2025年. https://arxiv.org/abs/2501.00702.[27] E. Minguzzi. 洛伦兹因果理论. 《相对论动态评论》, 22(3), 2019.[28] E. Minguzzi 与 S. Suhr. 洛伦兹度量空间及其 Gromov–Hausdorff 收敛 . 《数学物理快报》, 114(3):论文编号 73, 63, 2024年.[29]A. Mondino 与 C. S¨amann. 洛伦兹 Gromov–Hausdorff收敛与预紧性, 2025年. 预印本: https://arxiv.org/abs/2504.10380. [30] B. O’Neill. 半黎曼几何, 纯粹数学与应用数学丛书第103卷. Academic Press, Inc. [Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], 纽约, 1983. 及其在相对论中的应用.[31] I. J. Schoenberg. 论门格尔曲率消失的度量弧. 《数学纪事》（第2辑）, 41:715–726, 1940.[32] I. J. Schoenberg. 关于M. M. Day对内积空间刻画的一个注记及L. M. Blumenthal的一个猜想. 《美国数学会会刊》, 3:961–964, 1952.