关于　序列版本的各种参数化不变量　S

NAVNATH DAUNDKAR、ABHISHEK SARKAR 和 ANKUR SARKAR

摘要。本文介绍并研究若干纤维上的同伦不变量的序列版本，包括参数化拓扑复杂度、参数化（子空间）同伦距离。我们考察它们的基本性质，建立它们之间的关系，并将其与相应的经典同伦不变量进行比较。

arXiv:2601.21813v1 [math.AT] 29 Jan 2026

1. 引言

在运动规划理论中，拓扑空间通常作为构型空间，用于编码机械或机器人系统所有允许的状态。该领域的最新进展聚焦于能够刻画在这些构型空间中导航之复杂度的不变量，尤其是在涉及多个阶段或外部参数的情形下。在此背景下，序列不变量和参数化不变量已成为核心概念，尤其是 Cohen–Farber–Weinberger 引入的参数化拓扑复杂度 [2] 以及 Farber–Paul 后来将其推广到序列情形的工作 [7]。这些不变量对算法进行建模：算法必须引导系统在不断变化的外部条件下，依次经过规定的一系列状态，而这些条件由一个纤维化 $p:\ E \to B$ 其纤维 X_b 表示系统状态。量$\mathrm{TC}_r[p:\ E \to B]$ 衡量在这种参数化的序列情境下通用运动规划算法的复杂度。这些进展建立在早期的基础性不变量之上，其中最重要的是 Lusternik–Schnirelmann（LS）范畴$\mathrm{cat}(X)$ [15], Farber 拓扑复杂度$\mathrm{TC}(X)$ [5], 以及 Rudyak 针对路径连通拓扑空间提出的高阶（或序列）拓扑复杂度$\mathrm{TC}_r(X)$ [20]，这些概念揭示了代数拓扑、临界点理论与机器人运动规划之间的深刻联系 X。 [6]这些结构上的相似性促使人们沿着多个方向探索更广泛的推广。

Macías-Virgós 和 Mosquera-Lois 引入的同伦距离[16] 为经典不变量（如 cat(X) 和 TC(X)）提供了统一视角，并推动了对其序列类比的研究，该研究由 Borat 和 Vergili [1]发展而来。这些理论框架揭示了 LS 范畴、拓扑复杂度及其序列版本之间的深层结构联系。近年来，这一研究方向已拓展至参数化（纤维化）情形。在 García-Calcines 关于纤维化空间的纤维化拓扑复杂度 $\mathrm{TC}_B(X)$ 的概念基础上（X, p_X）在 B [9] 上，García- Calcines 和第一作者随后引入了参数化（纤维化）同伦距离[10]。他们获得了上同调界和连通性界，研究了复合、乘积和三角不等式等函子性质，并利用诱导纤维映射和纤维 LS 范畴给出了保纤维映射的估计。随后还发展了基点版本，并得到了相应的界和等价判据。

纤维化的经典同伦论由 James [13], 、Morries [14] 、Crabb [3], 及其他作者扩展到了纤维化情形。本文介绍

2020 数学主题分类。55M30,55S40,55R70,55U35,55P45。关键词与短语。参数化同伦距离、纤维截面范畴、纤维式无基点柳斯捷尔尼克–施尼雷尔曼范畴、序列参数化拓扑复杂度、纤维式 H-空间。

参数化同伦距离的序贯版本 [10], 将 [1] 的序贯同伦距离推广到纤维化情形，并为各种纤维同伦不变量提供了一个统一框架。特别是，我们将序列参数化拓扑复杂度的概念 [7] 推广到纤维化背景，从而得到 [9]中研究的参数化拓扑复杂度的序列类比。随后，我们将这些构造推广到相应的相对版本。在相对情形下，Macías-Virgós等人 在中引入了子空间（相对）同伦距离 [17], ，将子空间 LS 类别和 Farber 的相对拓扑复杂度 [6]一并推广。第一作者在 [4]中引入了序贯子空间拓扑复杂度的概念，随后 Mescher–Stegemeyer 在 [18]中提出了序贯子空间拓扑复杂度的参数化版本。本文介绍了 相对序贯参数化同伦距离，为统一上述所有概念提供了一个共同框架。

在此，我们引入纤维映射 f_i 的第 r 个序列参数化（或纤维化）同伦距离： $X \to Y$在基空间 B 上的纤维化空间 X 与 Y之间，对于 $i \in \{1, \dots, r\}$，记为 $D_B(f_1, \dots, f_r)$。其定义为满足以下条件的最小整数 $n \geq 0$（若不存在这样的 n，则为 ∞）：纤维化空间 X 可被 $n+1$ 个开集覆盖，并且在这些开集上， f_1、...、 f_r彼此纤维化同伦。这一概念统一并推广了早期的若干概念，包括纤维化无基点 LS 类别和序列参数化拓扑复杂度。特别地，若 X 是基于 B、带有纤维化投影 pr_i： $X_B^r \to X$的纤维化空间，则 $\mathrm{TC}_{B,r}(X) = D_B(pr_1, \dots, pr_r)$，其中 X_B^r是 X在 B上的 r 重纤维积；若 X是带有截面 s_X的纤维化带基点空间，则 $\mathrm{cat}_B^*(X) = D_B(id_X, s_X \circ p_X, \dots, s_X \circ p_X)$。当 B 为一点时，我们得到通常的序贯同伦距离。通过将参数化同伦距离与 [8], 的纤维截面范畴联系起来，我们建立了上同调下界和连通性上界，并研究了其在复合、乘积和保纤维映射下的行为。

本文结构安排如下。在第 2 节中，我们回顾纤维化同伦论中的基本概念，包括纤维化（带基点）空间、纤维化以及各种纤维化不变量。这些概念是本文其余部分的重要基础。在第 3 节中，我们在纤维化情形下引入参数化拓扑复杂度的序列类比，并证明其纤维化同伦不变性（命题 3.2）。我们还将经典的 LS 类别–拓扑复杂度不等式推广到纤维化带基点情形（命题 3.4）。3.2 比较序列纤维化参数化拓扑复杂度的基点版本与无基点版本。在第 4 节中，我们引入参数化同伦距离的序列类比，这是本文的核心主题。该概念在更广泛的框架下统一了若干数值拓扑不变量。我们给出纤维化空间上映射的上同调下界和同伦维数上界。第 5 节阐述这一不变量的关键性质，包括它与映射的纤维化 LS 类别之间的关系（命题 5.3）。5.1 研究它在纤维映射复合下的表现。我们还证明了正规空间上的三角不等式（定理 5.10），并比较它在乘积上的取值与各个纤维映射上的取值（命题 5.12）。在第 5.3 节中，我们研究这一不变量在纤维化中的情形。第 6 节针对纤维化带基点映射发展其基点版本，而 6.2 节则比较基点理论与无基点理论。最后，第 7 节在纤维化情形下引入序贯同伦距离的相对（子空间）版本，并探讨其若干性质。

2. 参数化不变量的背景

本节回顾本文将要用到的纤维化同伦论及相关不变量中的记号和标准结果。更多细节请参见[13, 3, 8]。

2.1. 纤维化同伦论。 B 上的纤维空间由一个对（X， p_X）构成，其中 X 是一个拓扑空间， p_X: $X \to B$ 是一个投影映射。上下文清楚时，我们简单地用 X 表示这样的纤维空间。纤维空间之间的纤维映射 f: $X \to Y$ 是满足 $p_Y \circ f = p_X$ 的连续映射。

对于纤维空间 X 和 Y，它们的纤维化积定义为

$$X \times_B Y = \{(x, y) \in X \times Y \mid p_X(x) = p_Y(y)\}.$$

令 $I = [0, 1]$ 为单位区间。 B 上的纤维空间 X 的纤维化圆柱是带有投影 $X \times I \xrightarrow{pr_1} X \xrightarrow{p_X} B$ 的积 $X \times I$，记作 $I_B(X)$。由此得到纤维映射之间通常所说的纤维同伦 $\simeq_B$ 以及纤维同伦等价。

对于一个在 B 上的纤维化空间 X，纤维化自由路径空间（或纤维化余圆柱）$P_B(X)$ X 由拓扑空间范畴中的拉回图定义

$$\begin{array}{ccc} P_B(X) & \longrightarrow & X^I \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p_X^I} \\ B & \xrightarrow[c]{} & B^I, \end{array} \tag{1}$$

其中， X^I 和 B^I 表示赋予紧开拓扑的自由路径空间， p_X^I 由 p_X 诱导，而 c: $B \to B^I$ 将每个点映射到其对应的常值路径。因此，

$$P_B(X) = \{(b, \alpha) \in B \times X^I \mid p_X^I \circ \alpha = c_b\},$$

配备投影 $(b,\ \alpha) \mapsto b$，其中 c_b 表示 B^I 中的常值路径。

现在回顾纤维化纤维化的概念。若纤维映射 p: $E \to Y$ 满足相对于任意纤维化空间的同伦提升性质，则称其为纤维化纤维化。也就是说，对于纤维化空间范畴中的任意交换图，都存在一个提升 $I_B(Z) \to E$，使下图交换：

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{\quad f \quad} & E \\ {\scriptstyle i_0}\downarrow & \nearrow & \downarrow{\scriptstyle p} \\ I_B(Z) & \xrightarrow[H]{} & Y. \end{array}$$

纤维映射

$$\Pi_X = (d_0, d_1)\colon P_B(X) \to X \times_B X, \tag{2}$$

由 $(b, \alpha) \mapsto (\alpha(0)\ \alpha(1))$ 定义的映射始终是一个纤维化纤维化，尽管不一定是 Hurewicz纤维化。然而，当 p_X: $X \to B$ 是一个 Hurewicz纤维化时，可以验证 Π_X 也是一个 Hurewicz纤维化。

我们现在回顾上文所评述的那些无基点概念的带基点对应物。 B 上的纤维逐点空间是一个三元组(s_X, X, p_X)，其中(X, p_X)是一个纤维化空间，而s_X： $B \to X$ 是 p_X的一个截面；若不致歧义，我们将其简记为 X。纤维基点空间 X 与 Y 之间的纤维化基点映射 f: $X \to Y$ 是满足 $f \circ s_X = s_Y$的纤维映射。

包含截面 $s_X(B)$的子空间 $A \subseteq X$ 是一个纤维逐点空间，称为 X的纤维逐点子集，其含入 $A \hookrightarrow X$ 是纤维化带基点的。

对于 B上的纤维逐点空间 X，纤维逐点圆柱定义为推出

$$\begin{array}{ccc} B \times I & \xrightarrow{pr} & B \\ {\scriptstyle s_X \times id}\downarrow & & \downarrow \\ X \times I & \longrightarrow & I_B^B(X), \end{array}$$

并且与无基点情形一样，这给出了纤维化带基点映射之间的纤维逐点同伦概念，记为 $\simeq_B^B$。纤维逐点同伦 $F\colon\ I_B^B(X) \to Y$可以等价地描述为纤维同伦 $F\prime\colon\ I_B(X) \to Y$，它对所有 $b \in B$ 和 $t \in I$满足 $F\prime(s_X(b)\ t) = s_X(b)$。相应的纤维逐点同伦等价概念按通常方式定义。

X 在 B 上的逐点纤维余圆柱是纤维化空间 $P_B(X)$连同截面$(id_B, c\circ s_X)\colon\ B \to P_B(X)$，记为 $P_B^B(X)$,它由拉回性质诱导

2.2. **纤维截面范畴与诱导不变量**。在本小节中，我们回顾与纤维化空间相关的各种数值不变量。

我们先回顾 [12]中引入的无基点纤维 LS 范畴版本。

定义 2.1。设 X 是底空间为 B的纤维化带基点空间。X的纤维化无基点 *LS* 类别记为 $\mathrm{cat}_B^*(X)$，它是满足下述条件的最小非负整数 n：存在 X 的一个开覆盖 $\{U_0, U_1, \ldots, U_n\}$，使得对于每个 $0 \le i \le n$，下图在纤维同伦意义下交换：

$$\begin{array}{ccc} U_i & \xrightarrow{i_{U_i}} & X \\ & {\scriptstyle p_X|_{U_i}}\searrow \quad \nearrow{\scriptstyle s_X} & \\ & B. & \end{array}$$

若不存在这样的整数，则令 $\mathrm{cat}_B^*(X) = \infty$。

Iwase 和 Sakai [12] 证明，对于纤维良基点空间，无基点和逐点纤维 LS 范畴相同。此外，若 B 是局部有限单纯复形，则考虑纤维化带基点空间 $d(B)$，其中 $p_{d(B)}\colon\ B \times B \to B$ 由第二投影给出，而对角映射是截面 $s_{d(B)}$。在此背景下，他们证明 Farber 拓扑复杂度 TC(B)可由 $d(B)$的纤维 LS 范畴恢复。

作为另一种扩展了无基点 LS 范畴的纤维化不变量，García–Calcines 引入了截面范畴的纤维化类比 [8, 定义 2.1]。在纤维化情形下，这一不变量有等价的 Whitehead 型和 Ganea 型描述，并衡量在底空间上为给定映射构造纤维同伦截面所需的最小复杂度。

定义 2.2. 纤维映射 $f\colon\ E \to X$ 在 B 上的纤维截面范畴，记作$\mathrm{secat}_B(f)$，是满足以下条件的最小非负整数 k：存在 X 的一个开覆盖 $\{U_0, \ldots, U_k\}$，使得对每个 U_i，都存在一个纤维同伦截面 $s_i\colon\ U_i \to E$，也就是说，

$$f \circ s_i \simeq_B i_{U_i},$$

其中 $i_{U_i}\colon\ U_i \hookrightarrow X$ 是包含映射。如果不存在这样的 k，那么 $\mathrm{secat}_B(f) = \infty$.4

纤维化带基点上同调由 Garcia-Calcines 和第一作者在 [10]中引入。现在我们回顾纤维映射的纤维化带基点截面范畴的上同调下界。

注意，存在一个分次阿贝尔群的分裂短正合序列

$$0 \longrightarrow H^*(B) \underset{s_X^*}{\overset{p_X^*}{\rightleftarrows}} H^*(X) \longrightarrow H^*(X)/\langle p_X^*(H^*(B))\rangle \longrightarrow 0$$

诱导一个同构

$$H^*(X)/\langle p_X^*(H^*(B))\rangle \cong \ker(s_X^*).$$

此外，若 $H^*(X, s_X(B))$ 表示对 $(X, s_X(B))$ 的上同调，则下列同构成立：

$$H^*(X, s_X(B)) \cong \ker(s_X^*).$$

事实上，设 $i\colon s_X(B) \to X$ 与 $j\colon (X, \emptyset) \to (X, s_X(B))$ 表示包含映射。考虑与对 $(X, s_X(B))$ 相关联的上同调长正合序列的如下片段：

$$H^*(X, s_X(B)) \xrightarrow{j^*} H^*(X) \xrightarrow{i^*} H^*(s_X(B)) \xrightarrow{\delta^*} H^{*+1}(X, s_X(B)) \xrightarrow{j^*} H^{*+1}(X).$$

由于 i^* 在所有维数上均为满射，由此可知 $\delta^* = 0$，从而 j^* 为单射。因此，

$$\ker(s_X^*) = \ker(i^*) = \operatorname{im}(j^*) \cong H^*(X, s_X(B)).$$

上述考虑导出纤维化带基点上同调的如下表述。

定义 2.3. 设 X 是一个以 B为底空间的纤维化带基点空间。X （系数取自 R）的纤维化带基点上同调定义为

$$H_B^*(X) := H^*(X, s_X(B)).$$

现在我们给出纤维化带基点截面范畴的上同调下界。考虑由下式诱导的环同态

$$\pi^*\colon H_B^*(X) \to H_B^*(E),$$

它来自对的映射 $\pi\colon (E, s_E(B)) \to (X, s_X(B))$.

定理 2.4. 设 $\pi\colon E \to X$ 是一个纤维化基点映射。那么

$$nil(\ker(\pi^*)) \leq \operatorname{secat}_B^B(\pi),$$

其中，$\operatorname{secat}_B^B(\pi)$ 表示映射 π的纤维化带基点截面范畴。

接下来，我们转向另一个在参数化运动规划中起核心作用的纤维化不变量。参数化拓扑复杂度 [2] 后来按照此处采用的表述推广到了任意纤维空间 [9, 定义 8] 。现在，我们给出以 B为底空间的纤维化空间的纤维化拓扑复杂度的精确定义。

定义 2.5。纤维化空间的纤维化拓扑复杂度(X, p_X) 在 B上的记作$\mathrm{TC}_B(X)$，是纤维化纤维化 $\Pi_X\colon P_B(X)$ ，该纤维化纤维化在 （2） 中引入。因此，

$$\mathrm{TC}_B(X) := \operatorname{secat}_B(\Pi_X).$$

3. 序列参数化拓扑复杂度的形式方面

García–Calcines 在 [9]中为纤维化空间引入了参数化拓扑复杂度的概念。本节将发展其序列类比。这一新不变量同时包含原有的纤维化参数化拓扑复杂度和序列参数化拓扑复杂度。我们还将确立这一框架下若干基本的形式性质，并以介绍带基点变体作结。

3.1. 序列纤维拓扑复杂度。 为引入序列参数化拓扑复杂度，我们首先回顾通过在指定时刻对纤维路径求值而得到的标准纤维化纤维化。

对于 E 上的纤维化空间 B，存在一个纤维化纤维化

$$\Pi_{r,E}\colon P_B(E) \longrightarrow E_B^r,$$

它在每个纤维上定义为将路径 γ 映射到其各次求值所组成的 r元组：

$$\Pi_{r,E}(b,\gamma) = \Big(\gamma(0), \gamma(\frac{1}{r-1}), \ldots, \gamma(1)\Big), \qquad (b,\gamma) \in P_B(E). \tag{3}$$

定义 3.1。 纤维化空间 E 上的序列参数化拓扑复杂度定义为

$$\mathrm{TC}_{B,r}(E) := \mathrm{secat}_B(\Pi_{r,E}).$$

当投影 $p_E\colon E \to B$ 是Hurewicz纤维化时，纤维化空间 E 称为纤维化的。在此假设下，$P_B(E)$和 E_B^r 都是纤维化的。根据 [8, 定理 2.10]，，可得 $\mathrm{TC}_{B,r}(E) = \mathrm{secat}(\Pi_{r,E})$。

此外，由 $c(e) = (P_E(e)\ c_e)$ 给出的纤维映射 $c\colon E \to P_B(E)$ 是一个纤维同伦等价（见 [9, 注 10]）。利用这一事实，我们得到以下交换图：

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\Delta_E^r} & E_B^r \\ & {\scriptstyle c}\searrow \quad \nearrow{\scriptstyle \Pi_{r,E}} & \\ & P_B(E). & \end{array} \qquad (\simeq_B)$$

因此，根据命题 [9, Proposition 5]，，$\mathrm{TC}_{B,r}(E) = \mathrm{secat}_B(\Delta_E^r)$，其中 Δ_E^r 是对角映射。现在，我们证明 $\mathrm{TC}_{B,r}(-)$ 是一个纤维同伦不变量。

命题 3.2. 设 E 和 $\widetilde{E}$ 是定义在 B 上纤维同伦等价的两个空间。那么

$$\mathrm{TC}_{B,r}(E) = \mathrm{TC}_{B,r}(\widetilde{E}).$$

证明。令 $f\colon E \to \widetilde{E}$ 为纤维同伦等价。这诱导出一个纤维同伦等价 $P_B(f)\colon P_B(E) \to P_B(E)$。令 f_B^r 为映射 f 的 r 重纤维积。因此，我们得到诱导的纤维同伦等价 $f_B^r\colon E_B^r \to \widetilde{E}_B^r$。然后将命题 5] 应用于以下交换图，即可得出结论 [9,

$$\begin{array}{ccc} P_B(E) & \xrightarrow[\simeq_B]{P_B(f)} & P_B(\widetilde{E}) \\ {\scriptstyle \Pi_{r,E}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \Pi_{r,\widetilde{E}}} \\ E_B^r & \xrightarrow[f_B^r]{\simeq_B} & \widetilde{E}_B^r. \end{array}$$

□

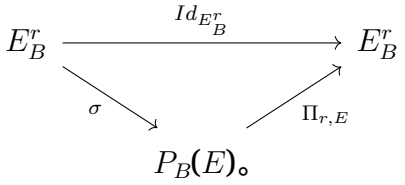
若 E 是纤维逐点空间，则可得到以下结果。

推论 3.3。设 E 是在 B 上的纤维化带基点空间。那么 $\mathrm{TC}_{B,\,r}(E) = 0$ 当且仅当 E 是纤维可缩的。

证明。假设 $E \simeq_B B$。根据命题3.2，我们得到

$$\mathrm{TC}_{B,r}(E) = \mathrm{TC}_{B,r}(B) = \mathrm{secat}_B(Id_B) = 0.$$

假设 $\mathrm{TC}_{B,\,r}(E) = 0$。则存在一个纤维映射 $\sigma\colon E_B^r \to P_B(E)$，使得下图在纤维同伦意义下交换：



这里，映射 $\sigma\colon E_B^r \to P_B(E)$ 定义为

$$\sigma(x_1,\dots,x_r) = \Big(p_E(x_1), \bar{\sigma}(x_1,\dots,x_r)\Big),$$

其中 $\bar{\sigma}(x_1,\ \dots,\ x_r)$ 是 E 中满足以下条件的路径

$$\bar{\sigma}(x_1,\dots,x_r)\left(\frac{i}{r-1}\right) = x_{i+1}, \quad p_E \circ \bar{\sigma}(x_1,\dots,x_r) = c_{p_E(x_1)}.$$

接下来，注意到纤维映射 $p = p_{P_B(E)}\colon P_B(E) \to B$ 存在一个纤维同伦逆 $q\colon B \to P_B(E)$，定义为 $q(b) = (b, c_{s_E(b)})$，其中 $s_E\colon B \to E$ 是 p_E的截面。事实上，$p \circ q = Id_B$，而 $q \circ p \simeq_B Id_{P_B(E)}$ 通过纤维同伦

$$H\colon I_B(P_B(E)) \to P_B(E),$$

定义为 $H(b,\alpha,t) = (b, H(\overline{b,}\alpha, t))$，其中

$$\overline{H}(b,\alpha,t)(s) := \bar{\sigma}\Big(\alpha(st), \underbrace{s_E(b),\dots,s_E(b)}_{(r-1)\text{-times}}\Big)(1-t).$$

因此 $P_B(E) \simeq_B B$。由 [9, 命题 10], 中的备注可知 $E \simeq_B P_B(E)$，故结论成立。 □

对于 E 上方的纤维化带基点空间 B，有

$$\mathrm{cat}_B^*(E) \le \mathrm{TC}_B(E) \le \mathrm{cat}_B^*(E \times_B E)$$

（见 [9,命题 13]）。现在我们证明这一不等式的序列类比。

命题 3.4. 设 E 是 B上方的纤维化带基点空间。则

$$\mathrm{cat}_B^*(E_B^{r-1}) \le \mathrm{TC}_{B,r}(E) \le \mathrm{cat}_B^*(E_B^r).$$

证明。不等式 $\mathrm{TC}_{B,\,r}(E) \le \mathrm{cat}_B^*(E_B^r)$ 直接由定义 3.1 和 [8,命题 23]得出。

为了证明另一个不等式，我们考虑 $U \subseteq E_B^r$ 的一个开子集，它具有纤维同伦截面 $s\colon U \to P_B(E)$，其中 $\Pi_{r,\,E}\colon P_B(E) \to E_B^r$。于是，$s$ 可表示为

$$s(x_1,\dots,x_r) = \left(p_E(x_1), \bar{s}(x_1,\dots,x_r)\right),$$

其中映射 $\bar{s}\colon U \to E^I$ 满足 $\bar{s}(x_1,\dots,x_r)\binom{i}{r-1} = x_{i+1}$ 对于 $i = 0,\dots,r-1$, 以及 $p_E \circ \bar{s}(x_1,\dots,x_r) = c_{p_E(x_1)}$ 对所有 $(x_1,\dots,x_r) \in U$ 均成立。现在，我们考虑一个开子集

$$V := \{(x_1,\dots,x_{r-1}) \mid (x_1, (s_E \circ p_E)(x_1),\dots,(s_E \circ p_E)(x_{r-1})) \in U\}$$

属于 E_B^{r-1}，并定义纤维同伦 $H\colon I_B(V) \to E_B^{r-1}$如下

$$H(x_1,\dots,x_{r-1},t) = \left(\kappa(t),\dots,\kappa(\frac{r-1-i}{r-1}t + \frac{i}{r-1}),\dots,\kappa(\frac{1}{r-1}t + \frac{r-2}{r-1})\right),$$

其中 $\kappa(t) = \bar{s}(x_1,\dots,x_{r-1},(s_E\circ p_E)(x_1))(t)$。因此，$H(x_1,\dots,x_{r-1},0) = (x_1,\dots,x_{r-1})$，并且 $H(x_1,\dots,x_{r-1},1) = ((s_E\circ p_E)(x_1)\dots,(s_E\circ p_E)(x_1))$。这表明 V是纤维化范畴的。现在利用开覆盖的这一论证即可得到结论。□

现在考虑一个连续映射 $\lambda\colon B' \to B$，以及一个以 B为底空间的纤维化空间 E。那么 λ确定了一个以 B'为底空间的纤维化空间 E'，并构成如下拉回图：

$$\begin{array}{ccc} E' & \longrightarrow & E \\ {\scriptstyle p_{E'}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p_E} \\ B' & \xrightarrow[\lambda]{} & B. \end{array}$$

因此，

$$E' = \{(b',e) \in B'\times E \mid \lambda(b') = p_E(e)\} \text{ and } p_{E'}(b',e) = b'.$$

此外，任意一个以 B为底空间的纤维映射 $f\colon E \to X$都会诱导出一个以 B'为底空间的纤维映射 $f'\colon E' \to X'$，其定义为 $f'(b',e) = (b',f(e))$，其中 $X' = \{(b',x) \in B'\times X \mid \lambda(b') = p_X(x)\}$。现在，利用 [9, 命题 14]，我们得到以下命题。

命题 3.5. 设 $\lambda\colon B' \to B$ 为一个映射，且 E 为 B上的纤维化空间。则

$$\mathrm{TC}_{B,r}(\lambda^*(E)) \le \mathrm{TC}_{B,r}(E),$$

其中 $\lambda^*(E)$ 是 E的纤维式拉回。

推论 3.6. 设 E 为 B上的纤维化空间。若 $B' \subseteq B$ 与 $E' = (p_E)^{-1}(B')$，则

$$\mathrm{TC}_{B',r}(E') \le \mathrm{TC}_{B,r}(E).$$

证明。我们注意到空间 E' 是 p_E 沿包含映射 $B' \hookrightarrow B$的拉回。该陈述随后由前述命题得出。□

我们建立序列参数化拓扑复杂度的乘积不等式。我们首先回顾 [11, 命题 3.11]的如下结论。

命题 3.7. 设 $f\colon E \to X$ 与 $f'\colon E' \to X'$ 为 B上的纤维映射。此外假设 X 与 X' 均为正规空间。则

$$max\,\{\mathrm{secat}_B(f),\ \mathrm{secat}_B(f')\} \le \mathrm{secat}_B(f\times f') \le \mathrm{secat}_B(f) + \mathrm{secat}_B(f').$$

现在陈述如下结果。

命题 3.8. 设 E 和 $\widetilde{E}$ 是 B 上的纤维化空间，且 E、$\widetilde{E}$ 和 B 均可度量化。则

$$max\,\{\mathrm{TC}_{B,r}(E),\mathrm{TC}_{B,r}(\widetilde{E})\} \le \mathrm{TC}_{B,r}(E\times_B \widetilde{E}) \le \mathrm{TC}_{B,r}(E) + \mathrm{TC}_{B,r}(\widetilde{E}).$$

证明. 设 $E'' = E\times_B E'$。注意，我们得到积等式

$$P_B(E'') = P_B(E)\times_B P_B(E'),\ \text{and}\ (E\times_B E')_B^r = E_B^r \times_B {E'}_B^r$$

并且纤维化 $\Pi_{r,\ E''}\colon P_B(E'') \to {E''}_B^r$ 等价于积纤维化

$$\Pi_{r,E}\times_B \Pi_{r,E'}\colon P_B(E)\times_B P_B(E') \to E_B^r \times_B {E'}_B^r.$$

结论随即由命题 3.7 得出。□

3.2. **序列拓扑复杂度的纤维化带基点版本**。 为了定义序列纤维逐点拓扑复杂度，我们先回顾纤维化带基点截面范畴的概念，该概念最初由 García-Calcines 引入 [8]。

定义 3.9。 ([8, 定义 3.5]) 设 $f\colon E \to X$ 是一个覆盖基空间 B的纤维映射。 f的纤维化带基点截面范畴记为 $\operatorname{secat}_B^B(f)$，它是满足以下条件的最小整数 $k \geq 0$： X有一个开覆盖 $\{U_0, \ldots, U_k\}$，使得对每个 i，都存在一个纤维化基点映射 $s_i\colon U_i \to E$ 满足 $f \circ s_i \simeq_B^B i_{U_i}$。

对于覆盖 E 的纤维逐点空间 B，考虑纤维式尖点纤维化（类似于（3））

$$\Pi_{r,E}^B\colon P_B^B(E) \to E_B^r.$$

利用纤维化带基点截面范畴的概念，我们作如下定义。

定义 3.10。 设 E 是覆盖 B的纤维逐点空间。 E 的序列纤维逐点拓扑复杂度为

$$\mathrm{TC}_{B,r}^B(E) := \operatorname{secat}_B^B(\Pi_{r,E}^B).$$

利用与讨论 $\mathrm{TC}_{B,r}(-)$ 时类似的论证，可以验证 $\mathrm{TC}_{B,r}^B(-)$满足类似的性质。

命题 3.11。 设 E 是覆盖 B的纤维逐点空间。

(i) $TC_{B,r}^B(E)$ 可以等价地定义为 $TC_{B,r}^B(E) := secat_B^B(\Delta_E^r)$。*(ii)* 如果 $E \simeq_B^B \widetilde{E}$ 在纤维逐点同伦意义下等价，那么 $TC_{B,r}^B(E) = TC_{B,r}^B(\widetilde{E})$。*(iii)* $TC_{B,r}^B(E) = 0$ 当且仅当 $E \simeq_B^B B$。*(iv)* $cat_B^B(E_B^{r-1}) \leq TC_{B,r}^B(E) \leq cat_B^B(E_B^r)$，其中 $cat_B^B(X)$ 表示 X 的纤维逐点 *LS* 范畴，其定义见 [14]。*(v)* 设 $\lambda\colon B' \to B$ 是一个连续映射，且 E 是 B上的纤维化空间。那么，拉回构造给出一个函子 $\lambda^*\colon Top(B') \to Top(B)$，使得 $TC_{B',r}^{B'}(\lambda^*(E)) \leq TC_{B,r}^B(E)$。

作为 [8, 定理 4.1],的结果，我们得到如下不等式。

推论 3.12. 设 E 是 B上的纤维逐点空间。若 E 是纤维局部等连通的，且 E_B^r 是正规空间，则 $\mathrm{TC}_{B,r}(E) \leq \mathrm{TC}_{B,r}^B(E) \leq \mathrm{TC}_{B,r}(E) + 1$.

4. 序列参数化同伦距离

在此，我们引入本研究的核心概念，即 [10]中所引入的参数化同伦距离这一概念的序列版本。当纤维映射的底空间为一个点时，我们可以恢复 [1]中引入的映射的序列同伦距离。本节将探讨其关键的初始性质，以及与 Lusternik-Schnirelman（LS）范畴和映射的序列同伦距离之纤维版本的比较。

4.1. **序列参数化同伦距离**。 我们引入序列参数化同伦距离的概念，并通过纤维截面范畴对其进行解释。特别地，我们为纤维化空间之间的纤维映射的序列参数化同伦距离建立了一个上同调下界。

定义 4.1。设 $f_i\colon X \to Y$ 是纤维空间 X 和 Y 之间定义在 B 上的纤维映射，其中 $i \in \{1, \ldots, r\}$。$f_1, \ldots, f_r$ 的序列参数化同伦距离记作 $D_B(f_1, \ldots, f_r)$，定义为满足以下条件的最小非负整数 n：存在 X 的一个开覆盖 $\{U_0, \ldots, U_n\}$，使得对于 $0 \le i \le n$ 和 $1 \le s, t \le r$，有 $f_s|_{U_i} \simeq_B f_t|_{U_i}$。若不存在这样的开覆盖，则令 $D_B(f_1, \ldots, f_r) = \infty$。

因此，序列参数化同伦距离可用来衡量有限个纤维映射彼此接近纤维化同伦的程度。

给定纤维映射 f_1、f_2、.....、f_r：$X \to Y$在 B 上，我们考虑以下拉回图

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P}_B(f_1, f_2, \ldots, f_r) & \longrightarrow & P_B(Y) \\ \downarrow{\scriptstyle \widetilde{\Pi}_{r,Y}} & & \downarrow{\scriptstyle \Pi_{r,Y}} \\ X & \xrightarrow[(f_1,\ldots,f_r)]{} & Y_B^r. \end{array} \tag{4}$$

这里，映射 $\Pi_{r、Y}$：$P_B(Y) \to Y_B^r$ 由 $\Pi_{r、Y}(b、\gamma) = \Big(\gamma(0)\ \gamma(\frac{1}{r-1})\text{.....}、\ \gamma(1)\Big)$ 以及 $(f_1、\text{.....}、f_r)(x) = (f_1(x)\text{.....}、f_r(x))$ 给出。因此，$\mathcal{P}_B(f_1、\text{.....}、f_r)$ 可表示如下

$$\mathcal{P}_B(f_1, \ldots, f_r) = \{(x, (b, \gamma)) \in X \times P_B(Y) \mid f_{i+1}(x) = \gamma(\frac{i}{r-1}),\ i = 0, \cdots, r-1\}.$$

由于 $\Pi_{r、Y}$ 是纤维化纤维化，$\Pi_{r、Y}$ 也具有这一性质，因为它们由一个拉回相连。

现在我们着手建立序列参数化同伦距离与纤维截面范畴之间的联系。

命题 4.2. 设 $f_1, f_2, \ldots, f_r\colon X \to Y$ 是 B 上的纤维映射。那么

$$D_B(f_1, \ldots, f_r) = secat_B(\widetilde{\Pi}_{r,Y}).$$

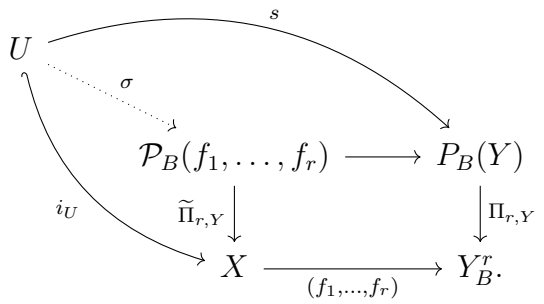
证明。设 $U \subseteq X$ 是一个开子集，使得

$$f_1|_U \simeq_B f_2|_U \simeq_B \cdots \simeq_B f_r|_U.$$

因此，存在纤维同伦 H_1：$f_1|_U \simeq_B f_2|_U, \ldots,\ H_{r-1}$：$f_{r-1}|_U \simeq_B f_r|_U$。将它们串接起来，我们得到一个纤维同伦 H：$I_B(U) \longrightarrow Y$，使得

$$H\Big(u, \tfrac{i}{r-1}\Big) = f_{i+1}(u), \quad i = 0, \ldots, r-1,$$

对所有 $u \in U$ 均成立。令 s：$U \to P_B(Y)$ 表示 H 的伴随。根据拉回的泛性质，存在唯一映射 σ：$U \to \mathcal{P}_B(f_1, \ldots, f_r)$，使得下图在纤维同伦意义下交换：



从上面的图可以看出，$\Pi_{r,Y} \circ \sigma \simeq_B i_U$。因此，对开覆盖应用这一论证，可得 $\text{secat}_B(\Pi_{r,Y}) \le D_B(f_1, \ldots, f_r)$。

~设 $\sigma\colon U \to \mathcal{P}_B(f_1,\dots,f_r)$ 是 $\Pi_{r,Y}$ 的纤维同伦截面。接下来，考虑 σ 与纤维映射 $\mathcal{P}_B(f_1,\dots,f_r) \to P_B(Y)$ 的复合。这个复合在所有 $1 \le s,t \le r$ 下产生 $f_s|_U$ 与 $f_t|_U$ 之间的纤维同伦。同样，将相同的论证应用于 X 的一个开覆盖，可得 $D_B(f_1,\dots,f_r) \le \mathrm{secat}_B(\Pi_{r,Y})$。证明完毕。□

~ ~由于$\Pi_{r,\,Y}$是Π_r的纤维式拉回，Y因此我们得到$\mathrm{secat}_B(\Pi_{r,\,Y}) \le \mathrm{secat}_B(\Pi_{r,\,Y})$。然后利用命题4.2，可得以下推论。

推论 4.3。 $D_B(f_1,\ \dots\dots,\ f_r) \le \mathrm{secat}_B(\Pi_{r,\,Y})$。

推论 4.4。设 X 是 B 上的纤维化空间。记 $pr_i\colon\ X_B^r \to X$ 为纤维逐点积空间 X_B^r 中对应于第 i 个因子的投影映射。那么

$$D_B(pr_1,\dots,pr_r) = \mathrm{secat}_B(\Pi_{r,X}\colon P_B(X) \to X_B^r) = \mathrm{TC}_{B,r}(X).$$

接下来，我们为序列参数化同伦距离推导一个上同调下界和一个同伦维数–连通性上界。

定理 4.5。设 $f_1,\ \dots\dots,\ f_r\colon\ X \to Y$ 是两个纤维化空间 X 和 Y 之间的纤维映射，它们都定义在 B 上。则对于任意环 R，我们有

(1) 设 $z_1,\dots,z_k \in H^*(Y_B^r;\ R)$ 使得对所有 $1 \le i \le k$ 都有

$$(\Delta_Y^r)^*(z_i) = 0 \ \textit{and}\ (f_1,\dots,f_r)^*(z_1 \smile \cdots \smile z_k) \ne 0,$$

其中 $(f_1,\dots,f_r)^*\colon\ H^*(Y_B^r;\ R) \to H^*(X_B;\ R)$ 是纤维映射$(f_1,\dots,f_r)\colon X_B \to Y_B^r$所诱导的映射。于是 $D_B(f_1,\dots,f_r) \ge k$。

(2) 若 $p_Y\colon Y \to B$ 是某个 $k \ge 1$ 的 k-等价，且 X 和 Y 路径连通，并且 X具有 *CW*复形的同伦型，则

$$D_B(f_1,\dots,f_r) \le \tfrac{hdim(X)}{k},$$

其中 $hdim(X)$ 表示 X的同伦维数。

证明。(1) 根据命题 4.2，我们有 $D_B(f_1,\dots,f_r) = \mathrm{secat}_B(\widetilde{\Pi}_{r,Y})$。由于 Y是纤维化的，映射 $\Pi_{r,\,Y}\colon\ P_B(Y) \to Y_B^r$ 是 Hurewicz纤维化，因此 $\Pi_{r,Y}$也是 Hurewicz纤维化。此外，因为 X 是纤维化的，空间 $\mathrm{P}_B(f_1,\dots,f_r)$ 也是纤维化的。因此$\widetilde{\Pi}_{r,Y}$是 B上纤维化空间之间的纤维映射。根据定理 2.10], , 可得 $\mathrm{secat}_B(\widetilde{\Pi}_{r,Y}) = \mathrm{secat}(\widetilde{\Pi}_{r,Y})$。由于 $\Pi_{r,Y}$是 Hurewicz纤维化， [11, 推论 1.5] 给出

$$\mathrm{secat}(\widetilde{\Pi}_{r,Y}) = \mathrm{secat}_{(f_1,\dots,f_r)}(\Pi_{r,Y}).$$

注意，对角映射 $\Delta_Y^r\colon\ Y \to Y_B^r$ 适合于以下交换图

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{\ i_Y\ } & P_B(Y) \\ & \searrow^{\Delta_Y^r} & \downarrow{\scriptstyle \Pi_{r,Y}} \\ & & Y_B^r, \end{array}$$

其中 $i_Y\colon\ Y \to P_B(Y)$ 定义为 $i_Y(y) = (p_Y(y)\ c_y)$。这意味着 $(\Delta_Y^r)^*(z_i) = 0$ 当且仅当 $(\Pi_{r,\,Y})^*(z_i) = 0$ 对所有 $z_i \in H^*(Y_B^r; R)$ 都成立。最后，应用 [11, 命题 3.1(1)],, 我们得出

$$D_B(f_1,\dots,f_r) = \mathrm{secat}_{(f_1,\dots,f_r)}(\widetilde{\Pi}_{r,Y}) \ge k.$$

(2) 由于 $p_Y\colon Y\to B$ 是一个 k-等价，$\Pi_{r,\ Y}$ 是一个 $(k-1)$-等价。现在利用 [11,命题 3.1(2)], 可得

$$\mathrm{secat}_{(f_1,\dots,f_r)}(\Pi_{r,Y})\le\frac{\mathrm{hdim}(X)}{k}.$$

如前所示，$D_B(f_1,\ \dots\dots,\ f_r)=\mathrm{secat}_{(f_1,\dots,f_r)}(\Pi_{r,\ Y})$，因此结论成立。 □

定理 4.5 与推论4.4 结合可得以下注记。

注 4.6. 设 $f_i=pr_i\colon X_B^r\to X$ 是定理 $1\le i\le r$ 中的投影 *4.5*。那么，该下界与 *Farber* 和 *Paul* 在 [7,命题 63]中给出的序列参数化拓扑复杂度的上同调下界一致。

此外，设 X 在 B上是纤维化的、路径连通的，且具有 *CW*复形的同伦型。如果 $p_X\colon X\to B$ 是一个 k-等价，那么 $\mathrm{TC}_{B,\ r}(X)\le\frac{hdim_{(X_B^r)}}{k}$。

4.2. **与纤维化无基点 LS 类别的关系**。现在，我们将用序列参数化同伦距离来描述纤维化无基点 LS 类别，并建立二者之间的联系。

注 4.7。 根据定义 *2.1*，我们注意到 $\mathrm{cat}_B^*(X)=D_B(id_X,\ \underbrace{s_X\quad p_X\ \dots\ s_X\quad p_X}_{-}\circ,\ )\circ\circ$ 1) 次

对于纤维化带基点空间 X 在 B上，我们现在考虑以下纤维映射$i_j\colon\ X_B^{r-1}\to X_B^r$ 定义为

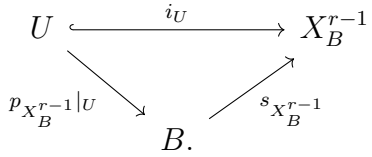
$$i_j(x_1,\dots,x_{r-1})=(x_1,\dots x_{j-1},s_X\circ p_{X^{r-1}}(x_1,\dots,x_{r-1}),x_j,\dots,x_{r-1})\,. \tag{5}$$

此外，注意到对于任意 $u\in X_B^{r-1}$，有 $p_{X^{r-1}}(u)=p_X(pr_1(u))$。采用这些记号，我们得到以下结果。

命题 4.8。 对于纤维化带基点空间 X 在 B上，我们得到 $D_B(i_1、\dots、i_r)=\mathrm{cat}_B^*(X_B^{r-1})$。

证明。 设 $U\subseteq X_B^{r-1}$为一个开子集，使得以下图在纤维同伦意义下交换：

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[rr, hook, "i_U"] \arrow[dr, "p_{X_B^{r-1}}|_U"'] & & X_B^{r-1} \\
& B. \arrow[ur, "s_{X_B^{r-1}}"'] &
\end{tikzcd}$$



因此，存在一个纤维同伦 $H\colon I_B(U)\to X_B^{r-1}$使得

$$H(u,0)=u \text{ and } H(u,1)=s_{X_B^{r-1}}\circ p_{X_B^{r-1}}(u) \text{ for all } u\in U.$$

注意，$s_{X_B^{r-1}}\circ p_{X_B^{r-1}}(u)=(s_X\circ p_X(pr_1(u))\dots,s_X\circ p_X(pr_1(u)))$。

现在，我们定义 $H'\colon I_B(U)\to X_B^r$如下

$$H'(u,t)=\begin{cases}(t_1,\dots,t_{j-1},s_X\circ p_X(pr_1(u)),t_j,\dots,t_{r-1}) & \text{if } 0\le t\le\frac{1}{2};\\ (w_1,\dots,w_j,\dots,w_{k-1},s_X\circ p_X(pr_1(u)),w_k,\dots,w_{r-1}) & \text{if } \frac{1}{2}\le t\le 1,\end{cases}$$

其中 $t_l=pr_l\circ H(u,2t)$ 和 $w_l=pr_l\circ H(u,2-2t)$。显然，对于所有 $u\in U$，$H'(u,0)=i_j(u)$，且$H'(u,1)=i_k(u)$。此外，注意到

$$p_{X_B^{r-1}}\circ H'(u,t)=\begin{cases}p_X(t_1)=p_X\circ(pr_1\circ H(u,2t)) & \text{if } 0\le t\le\frac{1}{2}\\ p_X(w_1)=p_X\circ(pr_1\circ H(u,2-2t)) & \text{if } \frac{1}{2}\le t\le 1.\end{cases}$$

由于 H 是纤维同伦，$p_{X_B^{r-1}} \circ H = p_X \circ pr_1 \circ H \simeq_B p_{I_B(X)}|_{I_B(U)}$，因此这意味着 $p_{X_B^r} \circ H'(u,t) \simeq_B p_{I_B(X)}|_{I_B(U)}$。因此，对于 $1 \le j \le k \le r$，H 是 $i_j|_U$ 与 $i_k|_U$ 之间的纤维同伦。对 X_B^{r-1} 的一个开覆盖应用相同的论证，我们得到

$$D_B(i_1, \dots, i_r) \le \mathrm{cat}_B^*(X_B^{r-1}).$$

反过来，假设存在一个纤维同伦 $F_j\colon I_B(U) \to X_B^r$，连接 $i_j|_U$ 和 $i_{j+1}|_U$，其中开子集为 $U \subseteq X_B^{r-1}$，且对所有 $1 \le j \le r-1$ 均成立。现在定义映射 $\widetilde{F}\colon I_B(U) \to X_B^{r-1}$ 如下：

$$\widetilde{F}(u,t) = \Big(pr_2(F_1(u,t)), \dots, pr_{(j+1)}(F_j(u,t)), \dots, pr_r(F_{r-1}(u,t))\Big),$$

其中，$pr_i\colon X_B^r \to X$ 表示到第 i 个因子的投影映射。显然，

$$\begin{aligned}\widetilde{F}(u,0) &= \Big(pr_2(F_1(u,0)),\ \dots,\ pr_{(j+1)}(F_j(u,0)),\ \dots,\ pr_r(F_{r-1}(u,0))\Big)\\ &= (x_1, \dots, x_{r-1})\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}\widetilde{F}(u,1) &= \Big(pr_2(F_1(u,1)),\ \dots,\ pr_{(j+1)}(F_j(u,1)),\ \dots,\ pr_r(F_{r-1}(u,1))\Big)\\ &= \Big(s_X \circ p_{X_B^{r-1}}(u),\ \dots,\ s_X \circ p_{X_B^{r-1}}(u)\Big).\end{aligned}$$

这意味着 $\mathrm{cat}_B^*(X_B^{r-1}) \le D_B(i_1、\dots\dots、i_r)$。证明完毕。 □

5. 序列参数化同伦距离的性质

本节旨在研究序列参数化同伦距离的基本性质，尤其关注它与纤维映射复合的相容性，以及它在纤维同伦下的不变性。

命题 5.1. 设 $f_i\colon X \to Y$ 是 B 上的纤维映射，其中 $i \in \{1、\dots\dots、r\}$。那么

(1) $D_B(f_i, f_j) = D_B(f_i, \overbrace{f_j, \dots, f_j}^{k})$ 对所有 $k \ge 1$ 和 $i, j \in \{1, \dots, r\}$ 都成立。
(2) 对任意 σ 对 $\{1, \dots, r\}$ 的置换，$D_B(f_1, \dots, f_r) = D_B(f_{\sigma(1)}, \dots, f_{\sigma(r)})$。(3) $D_B(f_1, \dots, f_r)$ 当且仅当对每个 $i \in \{1, \dots, r-1\}$，$f_i \simeq_B f_{i+1}$。(4) 给定纤维映射 $f_i\colon X \to Y$ 和 $g_i\colon X \to Y$，其中 $i \in \{1, \dots, n\}$。若对每个 i 都有 $f_i \simeq_B g_i$，则 $D_B(f_1, \dots, f_r) = D_B(g_1, \dots, g_r)$。(5) 若 $1 < s < r$，则 $D_B(f_1, \dots, f_s) \le D_B(f_1, \dots, f_r)$。(6) 设 $h_1\colon Y \to Z$ 和 $h_2\colon Z' \to X$ 是 B 上的纤维映射，则 (a) $D_B(h_1 \circ f_1, \dots, h_1 \circ f_r) \le D_B(f_1, \dots, f_r)$。(b) $D_B(f_1 \circ h_2, \dots, f_r \circ h_2) \le D_B(f_1, \dots, f_r)$。

证明。 断言 (1)–(5) 由定义 4.1可直接得出。

对于 (6)(a)，设 $U \subseteq X$ 是一个开子集，使得对于所有 $1 \le i, j \le r$，都有 $f_i|_U \simeq_B f_j|_U$。将 h_1 应用于每个映射，得到 $(h_1 \circ f_i)|_U \simeq_B (h_1 \circ f_j)|_U$，对于所有 i, j。因此，

$$D_B(h_1 \circ f_1, \dots, h_1 \circ f_r) \le D_B(f_1, \dots, f_r).$$

对于 (6)(b)，设 $U \subseteq X$ 是一个开子集，使得对于所有 $1 \le i, j \le r$，都有 $f_i|_U \simeq_B f_j|_U$。定义 $V := h_2^{-1}(U) \subset Z'$。那么 V 是 Z' 中的开集。记 $\bar{h}_2\colon V \to U$ 为 h_2 的限制。诱导映射 $\bar{h}_2\colon I_B(V) \to I_B(U)$ 使我们能够传递同伦，从而得到

$$(f_i \circ h_2)|_V \simeq_B (f_j \circ h_2)|_V$$

对所有 $1 \le i, j \le r$。因此，$D_B(f_1 \circ h_2, \dots, f_r \circ h_2) \le D_B(f_1, \dots, f_r)$。 □

接下来，我们证明序列参数化同伦距离的次可加性。

命题 5.2。 设 $f_1, \ldots, f_r \colon X \to Y$ 是关于 B 的纤维映射。若 $\{U_0, \ldots, U_k\}$ 是 X 的覆盖，则

$$D_B(f_1, \ldots, f_r) \leq \sum_{i=0}^{k} D_B(f_1|_{U_i}, \ldots, f_r|_{U_i}) + k.$$

证明。 对于每个 $i \in \{0, \ldots, k\}$，令 $m_i = D_B(f_1|_{U_i}, \ldots, f_r|_{U_i})$。根据定义，存在 U_i 的开覆盖 $\{U_i^0, \ldots, U_i^{m_i}\}$，使得

$$f_s|_{U_i^j} \simeq_B f_t|_{U_i^j} \quad \text{for all } j \in \{0, \ldots, m_i\}.$$

考虑集族 $\mathcal{U} = \{U_0^0, \ldots, U_0^{m_0}, U_1^0, \ldots, U_1^{m_1}, \ldots, U_k^0, \ldots, U_k^{m_k}\}$，它覆盖 X，并且对每个 $V \in \mathcal{U}$ 都满足 $f_s|_V \simeq_B f_t|_V$。因此，$D_B(f_1, \ldots, f_r) \leq (m_0 + \cdots + m_k) + (k+1) - 1$. 证明完毕。 □

为了陈述下一个结果，我们回顾映射的纤维化无基点 LS 类别。对于纤维化基点映射 $f \colon X \to Y$ over B，其纤维化无基点 LS 类别记作 $\mathrm{cat}_B^*(f)$，定义为满足以下条件的最小非负整数 k（若不存在这样的 k，则取无穷大）：存在 X 的一个开覆盖 $\{U_0, U_1, \ldots, U_k\}$，使得对每个 $0 \leq i \leq n$，$f|_{U_i} \simeq_B s_Y \circ p_X|_{U_i}$。在 [10, 推论 4.3] 中，Calcines 和第一作者证明，对于纤维化基点映射 $f, g \colon X \to Y$ over B，有 $D_B(f, g) \leq (\mathrm{cat}_B^*(f)+1)(\mathrm{cat}_B^*(g)+1) - 1$。下面的命题给出了这一结果的序列类比。

命题 5.3。 设 $f_1, \ldots, f_r \colon X \to Y$ 是 B 上的纤维化基点映射。那么

$$D_B(f_1, \ldots, f_r) \leq \prod_{i=1}^{r} (\mathrm{cat}_B^*(f_i) + 1) - 1.$$

证明。 由于 $\mathrm{cat}_B^*(f_i) = D_B(f_i, s_Y \circ p_X)$，由命题 5.1 (1)，可得

$$\mathrm{cat}_B^*(f_i) = D_B(f_i, s_Y \circ p_X, \ldots, s_Y \circ p_X).$$

假设对所有 $i = 1, \ldots, r$，均有 $\mathrm{cat}_B^*(f_i) = m_i$。那么存在一个开覆盖 $\{U_0^i, \ldots, U_{m_i}^i\}$ 覆盖 X，使得对所有 $j = 0, \ldots, m_i$，$f|_{U_j^i} \simeq_B s_Y \circ p_X|_{U_j^i}$。考虑开集 $W_{i_1 \ldots i_r} = U_{i_1}^1 \cap U_{i_2}^2 \cap \ldots U_{i_r}^r$。那么 $\{W_{i_1 \ldots i_r} \mid 0 \leq i_j \leq m_j, 1 \leq j \leq r\}$ 是 X 的一个开覆盖。此外，对所有 $1 \leq s, t \leq r$，$f_s|_{W_{i_1 \ldots i_r}} \simeq_B s_Y \circ p_X|_{W_{i_1 \ldots i_r}} \simeq_B f_t|_{W_{i_1 \ldots i_r}}$。这意味着

$$D_B(f_1, \ldots, f_r) \leq \prod_{i=1}^{r} (m_i + 1) - 1.$$

至此证明完毕。 □

5.1. 纤维映射的复合。 以下命题描述序列参数化同伦距离在复合下的表现。

命题 5.4。 设 $f_1, \ldots\ldots, f_r \colon X \to Y$ 为 B 上的纤维映射。

(a) 若 $h_1, \ldots, h_r \colon Y \to Z$ 是关于 B 的纤维映射，且对所有 $i = 1, \ldots, r-1$ 都有 $h_i \simeq_B h_{i+1}$，则 $D_B(h_1 \circ f_1, \ldots, h_r \circ f_r) \leq D_B(f_1, \ldots, f_r)$。*(b)* 若 $h_1', \ldots, h_r' \colon Z \to X$ 是关于 B 的纤维映射，且对所有 $i = 1, \ldots, r-1$ 都有 $h_i' \simeq_B h_{i+1}'$，则 $D_B(f_1 \circ h_1', \ldots, f_r \circ h_r') \leq D_B(f_1, \ldots, f_r)$。

证明。(a) 设 $U \subseteq X$ 是一个开子集，且存在纤维同伦 H_i: $f_i|_U \simeq_B f_{i+1}|_U$，对所有 $1 \leq i \leq r-1$ 都成立。设 H_i 是对每个 $i = 1.\ldots, r-1$ 而言，连接 h_i 与 h_{i+1} 的纤维同伦。利用这些同伦，我们定义

$$\mathcal{F}_i \colon I_B(U) \longrightarrow Z$$
$$(u,t) \mapsto \widetilde{H}_i\left(H_i(u,t),t\right).$$

显然，$\mathcal{F}_i$ 是 $(h_i \circ f_i)|_U$ 与 $(h_{i+1} \circ f_{i+1})|_U$之间的纤维同伦。在 X 的开覆盖上进行类似的论证可得

$$D_B(h_1 \circ f_1, \ldots, h_r \circ f_r) \leq D_B(f_1, \ldots, f_r).$$

(b) 设 $U \subseteq X$ 是一个开子集，且存在纤维同伦 $f_i|_U \simeq_B f_{i+1}|_U$。定义开集 $V := \bigcap_{i=1}^{r}(h_i')^{-1}(U) \subset Z$。令 $H_j \colon V \to U$ 为 h_j' 的限制映射。那么

$$(f_i \circ h_i)|_V = f_i|_U \circ H_i \simeq_B f_{i+1}|_U \circ H_i \simeq f_{i+1}|_U \circ H_{i+1} = (f_{i+1} \circ h_{i+1})|_V.$$

现在将这一论证应用于一个开覆盖，即可得到所需的不等式。 □

命题 5.5. 设 $h_1, \ldots, h_r \colon Z \to X$ 和 $f_1, \ldots, f_r \colon X \to Y$ 是纤维映射，满足对于所有 $1 \leq i \leq (r-1)$ 和 $2 \leq s \leq r$，$f_i \circ h_s \simeq_B f_{i+1} \circ h_s$。那么

$$D_B(f_1 \circ h_1, \ldots, f_r \circ h_1) \leq D_B(h_1, \ldots, h_r).$$

证明。设 $U \subseteq Z$ 是一个开子集，使得对于所有 $1 \leq s,t \leq r$，$h_s|_U \simeq_B h_t|_U$ 成立。这意味着 $f_i \circ h_i|_U \simeq_B f_i \circ h_{i+1}|_U$。由于 $f_i \circ h_s \simeq_B f_i \circ h_s$，因此对于所有 $1 \leq i \leq r-1$，有 $f_i \circ h_i|_U \simeq_B f_{i+1} \circ h_{i+1}|_U$。将这一论证应用于 Z 的一个开覆盖，即可得到所需的不等式。□

前面的命题推出以下推论。

推论 5.6. 设 $f_1, \ldots, f_r \colon X \to Y$是覆于 B 上的两个纤维化带基点映射。那么

$$D_B(f_1, \ldots, f_r) \leq \min\{\mathrm{cat}_B^*(X), \mathrm{TC}_{B,r}(Y)\}.$$

证明。注意到 $f_i \circ s_X \circ p_X = s_Y \circ p_X = f_{i+1} \circ s_X \circ p_X$。现在令 $h_1 = Id_X$ 且 $h_l = s_X \circ p_X$ 对所有 $2 \leq l \leq r$ 取命题 5.5中的值，得到

$$D_B(f_1, \ldots, f_r) \leq D_B(id_X, s_X \circ p_X, \ldots, s_X \circ p_X) = \mathrm{cat}_B^*(X).$$

~再由命题 4.2 以及 $\Pi_{r,Y}$ 是 $\Pi_{r,Y}$的纤维式拉回这一事实，可得

$$D_B(f_1, \ldots, f_r) = \mathrm{secat}_B(\widetilde{\Pi}_{r,Y}) \leq \mathrm{secat}_B(\Pi_{r,Y}) = \mathrm{TC}_{B,r}(Y).$$

□

注 5.7. 由于 $\mathrm{TC}_{B,r}(X) = D_B(pr_1, \ldots, pr_r)$，推论 4.5 得到了上界$\mathrm{TC}_{B,r}(X) \leq \mathrm{cat}_B^*(X_B^r)$，该上界来自命题 3.4。

现在我们证明，序列参数化同伦距离这一概念在纤维同伦下是不变量。

命题 5.8。 设 f_1、……、f_r： $X \to Y$ 是 B 上的纤维映射。

(1) 若存在一个纤维映射 h： $Y \to Y_I$，且它有一个左纤维同伦逆，则

$$D_B(h \circ f_1, \ldots, h \circ f_r) = D_B(f_1, \ldots, f_r).$$

(2) 若 存在一个纤维映射 H: $X' \to X$，且它具有右纤维同伦逆，则

$$D_B(f_1 \circ H, \ldots, f_r \circ H) = D_B(f_1, \ldots, f_r).$$

证明。设 $h'\colon Y\prime\to Y$为 h 的左纤维同伦逆。则 $h'\circ h\simeq_B Id_Y$。现应用命题5.1(6), 我们得到

$$\begin{aligned} D_B(f_1,\dots,f_r) &= D_B(h'\circ h\circ f_1,\dots,h'\circ h\circ f_r)\\ &\le D_B(h\circ f_1,\dots,h\circ f_r)\\ &\le D_B(f_1,\dots,f_r). \end{aligned}$$

这就完成了（1）的证明。类似地，我们可以证明（2）。 □

命题 5.8 表明，序列参数化同伦距离在纤维同伦下是不变量，具体如下。

推论 5.9。设 f_1、...、$f_r\colon\ X\to Y$以及 g_1、...、$g_r\colon\ \widetilde{X}\to\widetilde{Y}$是定义在 B上的纤维映射。假设存在纤维同伦等价 $\alpha\colon\ X\simeq_B X$ 和 $\eta\colon\ Y\simeq_B Y$，使得对所有 $i=1$、...、r都有$g_i\simeq_B \eta\circ f_i\circ\alpha$。那么 $D_B(f_1$、...、$f_r)=D_B(g_1$、...、$g_r)$。

5.2. **正规空间上的纤维映射**。在 [10], García-Calcines 与第一作者的工作中，当定义域为正规空间时，得到了参数化同伦距离的三角不等式。下面的定理表明，在序列框架下也成立类似的不等式。

定理 5.10. 设 X 为正规空间，并设 n、$m\in\mathbb{Z}^+$ 连同 $n\le m$。假设给定纤维映射 f_1，.....，f_n、g_1，.....，g_m、h_1，.....，$h_m\colon\ X\to Y$ 在 B 上。则

$D_B(f_1$，.....，f_n、h_1，.....，$h_m)\le D_B(f_1$，.....，f_n、$g_{\sigma(1)}$，.....，$g_{\sigma(s)})+D_B(g_{\beta(1)}$，.....，$g_{\beta(s')}$ h_1，.....，$h_m)$，其中 σ 与 β 分别是 $\{1,\dots,m\}$ 和 $\{1,\dots,n\}$ 的置换，使得对某个 $i\in\{1,\dots,m\}$ 以及 $j\in\{1,\dots,n\}$ 有 $g_{\sigma(i)}\simeq_B g_{\beta(j)}$。

证明。令 $D_B(f_1,\dots,f_n,g_{\sigma(1)},\dots,g_{\sigma(s)})=r_1$ 且 $D_B(g_{\beta(1)},\dots,g_{\beta(s')}\ h_1,\dots,h_m)=r_2$。因此，存在 X 的一个开覆盖 $\mathcal{U}=\{U_0,\dots,U_{r_1}\}$，使得对每个 $i=0,\dots,r_1$

$$f_1|_{U_i}\simeq_B\cdots\simeq_B f_n|_{U_i}\simeq_B g_{\sigma(1)}|_{U_i}\simeq_B\cdots\simeq_B g_{\sigma(s)}|_{U_i}.$$

同样，存在 X 的一个开覆盖 $\mathcal{V}=\{V_0,\dots,V_{r_2}\}$，使得对于 $j=0,\dots,r_2$

$$g_{\beta(1)}|_{V_j}\simeq_B\cdots\simeq_B g_{\beta(s')}|_{V_j}\simeq_B h_1|_{V_j}\simeq_B\cdots\simeq_B h_m|_{V_j}.$$

由于 $g_{\sigma(i)}\simeq_B g_{\beta(j)}$ 对某个 i,j 成立，由 [19, 引理 4.3] 可知，存在 X 的第三个开覆盖 $\mathcal{W}=\{W_0,\dots,W_{r_1+r_2}\}$，使得 $f_1|_{W_l}\simeq_B\cdots\simeq_B f_n|_{W_l}\simeq_B g_1|_{W_l}\simeq_B\cdots\simeq_B g_m|_{W_l}\simeq_B h_1|_{W_l}\simeq_B\cdots\simeq_B h_m|_{W_l}$对所有 $l=0,\dots,r_1+r_2$。这表明

$$D_B(f_1,\dots,f_n,h_1,\dots,h_m)\le r_1+r_2.$$

□

我们现在陈述并证明序列参数化同伦距离在复合下的加性型不等式。

命题 5.11. 设 $f_1,\dots,f_r\colon\ X\to Y$与 $g_1,\dots,g_r\colon\ Y\to Z$ 为 B上的纤维映射。假设 X 是正规空间。则

$$D_B(g_1\circ f_1,\dots,g_r\circ f_r)\le D_B(f_1,\dots,f_r)+D_B(g_1,\dots,g_r).$$

证明。假设 $D_B(f_1,\dots,f_r)=m$ 且 $D_B(g_1,\dots,g_r)=n$。则存在 X 的开覆盖$\{U_i\}_{i=0}^m$，使得对每个 $i=0,\dots,m$，$f_1|_{U_i}\simeq_B\cdots\simeq_B f_r|_{U_i}$ 成立，并且存在 Y 的开覆盖 $\{V_j\}_{j=0}^n$，使得对每个 $j=0,\dots,n$，$g_1|_{V_j}\simeq_B\cdots\simeq_B g_r|_{V_j}$ 成立。

由此可知，在每个 U_i 上，

$$(g_s\circ f_s)|_{U_i}\simeq_B(g_s\circ f_t)|_{U_i},\quad 1\le s,t\le r.$$

接下来，对每个 $j=0,\ldots,\ n$，定义

$$\widetilde{V_j} := \bigcap_{i=1}^{r} f_i^{-1}(V_j).$$

Cle ⁀地，$\{V_j\}_{j=0}^{n}$ 是 X的一个开覆盖。此外，对于每个 $1\le s,\ t\le r$ 以及每个 j，

$$(g_s\circ f_s)|_{\widetilde{V_j}} \simeq_B (g_t\circ f_s)|_{\widetilde{V_j}}.$$

应用 [19, 引理 4.3], ，我们得到覆盖 X 的一个细化$\{W_k\}_{k=0}^{m+n}$，使得对于所有 $1\le s$、$t\le r$和 $k=0$、.....、$m+n$，都有 $(g_s\circ f_s)|_{W_k}\simeq_B(g_t\circ f_s)|_{W_k}\simeq_B(g_t\circ f_t)|_{W_k}$。因此，$D_B(g_1\circ f_1,\ldots,g_r\circ f_r)\le m+n.$ □

接下来，我们描述序列参数化同伦距离在纤维映射的乘积下如何变化。设 $f_1,\ldots,f_r\colon X\to Y$和 $g\colon \widetilde{X}\to\widetilde{Y}$是定义在同一基空间 B上的纤维映射。可以构造自然乘积，并定义纤维乘积映射

$$f_i\times_B g\colon X\times_B\widetilde{X}\to Y\times_B\widetilde{Y}$$

在 B 上。如果对于某个开子集 $U\subseteq X$ 和所有 $1\le s,\ t\le r$，有 $f_s|_U\simeq_B f_t|_U$，那么

$$(f_s\times_B g)|_{(U\times\widetilde{X})\cap(X\times_B\widetilde{X})}\simeq_B (f_t\times_B g)|_{(U\times\widetilde{X})\cap(X\times_B\widetilde{X})}.$$

由此可得

$$D_B(f_1\times_B g,\ldots,f_r\times_B g)\le D_B(f_1,\ldots,f_r).$$

对称地可得 $D_B(g\times_B f_1,\ .....,\ g\times_B f_r)\le D_B(f_1,\ .....,\ f_r)$。受前面对带固定映射的纤维化积的观察启发，我们给出一个关于多个映射的纤维化积的相应不等式。

命题 5.12。设 f_1、.....、$f_r\colon X\to Y$ 和 g_1、.....、$g_r\colon\widetilde{X}\to\widetilde{Y}$ 是 B 上的纤维映射。⁀若 $X\times_B X$ 是正规空间，则

$$D_B(f_1\times_B g_1,\ldots,f_r\times_B g_r)\le D_B(f_1,\ldots,f_r)+D_B(g_1,\ldots,g_r).$$

在证明此命题之前，我们先作如下观察。若 $D_B(f_1,\ .....,\ f_r)=n$，则存在 X 的一个开覆盖 $\{U_i\}_{i=0}^{n}$，使得在每个 U_i 上都有纤维同伦

$$H_1'\colon f_1|_{U_i}\simeq_B f_2|_{U_i},\ \ldots,\ H_{r-1}'\colon f_{r-1}|_{U_i}\simeq_B f_r|_{U_i}.$$

固定这些纤维同伦中的一个，记作 H_1'，并定义 $f(x):=H_1'(x,1_2)$。由此得到新的同伦

$$H_1\colon f_1|_{U_i}\simeq_B f|_{U_i},\ \ldots,\ H_r\colon f_r|_{U_i}\simeq_B f|_{U_i}.$$

因此，$D_B(f_1,\ldots,f_r)=n$ 意味着存在 X 的一个开覆盖 $\{U_i\}_{i=0}^{n}$，以及一个固定映射 $f\colon X\to Y$，使得对于所有 $s=1,\ldots,r.$，都有 $f_s|_{U_i}\simeq_B f|_{U_i}$

命题 5.12 的证明。设 $D_B(f_1,\ldots,f_r)=n$，且 $D_B(g_1,\ldots,g_r)=m$。那么，根据前面的讨论，存在 X 的一个开覆盖 $\{U_i\}_{i=0}^{n}$，以及一个固定映射 $f\colon X\to Y$，使得对于所有 $s=1,\ldots,r$ 和 $i=0,\ldots,n$，都有 $f_s|_{U_i}\simeq_B f|_{U_i}$。类似地，存在 X 的一个开覆盖 $\{V_j\}_{j=0}^{m}$，以及一个固定映射 $g\colon X\to Y$，使得对于所有 $s=1,\ldots,r$ 和 $j=0,\ldots,m$，都有 $g_s|_{V_j}\simeq_B g|_{V_j}$。对于所有 $s=1,\ldots,r$，以下性质成立：

⁀**性质 A：** 对每个 $U_i\times_B X$，都存在纤维同伦 $f_s\times_B Id_{\widetilde{X}}\simeq_B f\times_B Id_{\widetilde{X}}$。**性质 B：** 对每个 $X\times_B V_j$，都存在纤维同伦 $Id_X\times_B g_s\simeq_B Id_X\times_B g$。

~ ~注意，覆盖 $\{U_i\times_B X\}_{i=0}^{n}$ 满足性质 A。此外，$\{X\times_B V_j\}_{j=0}^{m}$

~ ⁀覆盖了满足性质 B 的 $X\times_B X$。由于 $X\times_B X$ 是一个正规空间，由

[19, 引理 4.3] 可知，存在 $X \times_B \widetilde{X}$ 的另一个开覆盖$\{W_i\}_{i=0}^{n+m}$，同时满足性质 A 和性质 B。因此，对每个 $s = 0, \ldots, n+m$，都有纤维同伦

$$F_s \colon I_B(W_s) \to Y \times_B \widetilde{Y} \text{ and } G_s \colon I_B(W_s) \to Y \times_B \widetilde{Y}$$

使得 $F_s \colon f_s \times_B Id_{\widetilde{X}} \simeq_B f \times_B Id_{\widetilde{X}}$和 $G_s \colon Id_X \times_B g_s \simeq_B Id_X \times_B g$分别成立。对于每个 $s = 0$，1，...，r，我们通过以下方式定义 $H_s \colon I_B(W_s) \to Y \times_B Y$

$$H_s(w,t) = (pr_1 \circ F_s(w,t), pr_2 \circ G_s(w,t)),$$

其中 $pr_1 \colon Y \times_B \widetilde{Y} \to Y$和 $pr_2 \colon Y \times_B \widetilde{Y} \to \widetilde{Y}$是投影映射。显然，这是一个覆于 B 的纤维映射，并且满足

$$H_s(w,0) = (f_s \times_B g_s)(w) \text{ and } H_s(w,1) = (f \times_B g)(w).$$

因此，$D_B(f_1 \times_B g_1, \ldots, f_r \times_B g_r) \leq n+m$。证毕。 □

注 5.13。推论 *3.8* 可以作为命题 *5.12*的一个特例得到。事实上，考虑 $\widetilde{f_i} = pr_i \colon E_B^r \to E$和 $\widetilde{g_i} = pr_i \colon E_B^r \to E$。记 $Pr_i \colon (E \times_B E)_B^r \to E \times_B E$为投影映射。然后，应用命题*5.12*以及交换图

$$\begin{array}{ccc} (E \times_B \widetilde{E})_B^r & \xrightarrow{\cong} & E_B^r \times_B \widetilde{E}_B^r \\ & {\scriptstyle Pr_i} \searrow \quad \swarrow {\scriptstyle pr_i \times_B pr_i} & \\ & E \times_B \widetilde{E} & \end{array}$$

对于 $1 \leq i \leq r$，即可得到该推论的结论。

5.3. **纤维化之间的纤维映射**。本小节旨在根据各纤维上的序贯同伦距离以及底空间的纤维化无基点 LS 类别，描述纤维化纤维化之间保纤维映射的序列参数化同伦距离的界。

定理 5.14。设 X 和 X' 是在 B 上的纤维基点空间，并设有纤维化 $\pi \colon E \to X$ 和 $\pi' \colon E' \to X'$，其纤维分别为 F 和 F'。对于 $i = 1$、...、r，设 $f_i \colon E \to E'$ 是纤维映射，并将其在纤维上的诱导映射记为 $f_i^0 = f_i|_F \colon F \to F'$。则

$$D_B(f_1, \ldots, f_r) + 1 \leq \left(D_B(f_1^0, \ldots, f_r^0) + 1\right) \cdot \left(\mathrm{cat}_B^*(X) + 1\right).$$

证明。设 $\mathrm{cat}_B^*(X) = n$ 且 $D_B(f_1^0, \ldots, f_r^0) = m$。考虑 $\{U_0, \ldots, U_n\}$作为 X 的纤维范畴开覆盖，并令 $\{V_0, \ldots, V_m\}$为 F 的一个开覆盖，使得对于 $0 \leq j \leq m$ 和 $1 \leq k \leq r-1$有 $f_k^0|_{V_j} \simeq_B f_{k+1}^0|_{V_j}$。对于每个 $0 \leq j \leq m$ 和 $1 \leq k \leq r-1$，将此纤维同伦记为 $F_j^k \colon I_B(V_j) \to F'$。

对于 X的纤维化范畴开子集 U，存在纤维同伦$H \colon I_B(U) \to X$，满足 $H \colon i_U \simeq_B s_X \circ p_X|_{U}$。定义 $U\prime \colon = \pi^{-1}(U)$。然后，对 π应用纤维化同伦提升性质，我们得到一个提升同伦 $\tilde{H} \colon I_B(U') \to E$，使下图在纤维化空间范畴中交换：

$$\begin{array}{ccccc} U' & & \hookrightarrow & & E \\ {\scriptstyle i_0}\downarrow & & \overset{\tilde{H}}{\nearrow} & & \downarrow{\scriptstyle \pi} \\ I_B(U') & \xrightarrow[I_B(\pi)]{} & I_B(U) & \xrightarrow[H]{} & X. \end{array}$$

由于 $\pi \circ \tilde{H} = H \circ I_B(\pi)$，我们有 $\pi(\tilde{H}(x,1)) = H(\pi(x),1) = (s_X \circ p_X)(\pi(x)) \in s_X(B)$。换言之，$\tilde{H}(x,1) \in \pi^{-1}(s_X(B)) = F$。这定义了一个纤维映射 $\tilde{H}_1 := \tilde{H}(-,1) : U' \to F$。我们将与这样的开子集 U_i 相关联的这个映射记为 $\tilde{H}_{i,1}$。

现在，对于 $i \in \{0,1,\dots,n\}$ 和 $j \in \{0,1,\dots,m\}$，我们考虑 E 中的开集 $W_{i,j} = U'_i \cap V_{ij}$，其中 $U'_i = \pi^{-1}(U_i)$ 且 $V_{ij} = \tilde{H}_{i1}^{-1}(V_j)$。显然，集合 $\{W_{i,j} \mid 0 \le i \le n,\ 0 \le j \le m\}$ 构成了 E 的一个开覆盖。

还需验证，对于所有 $i \in \{0,1,\dots,n\}$、$j \in \{0,1,\dots,m\}$ 和 $k \in \{1,\dots,r-1\}$，均有 $f_k|_{W_{i,j}} \simeq_B f_{k+1}|_{W_{i,j}}$。为此，我们定义一个映射

$$G^k_{i,j} \colon I_B(W_{i,j}) \to E'$$

by

$$G^k_{i,j}(e,t) = \begin{cases} f_k\left(\tilde{H}(e,3t)\right), & 0 \le t \le \frac{1}{3}, \\ F^k_j\left(\tilde{H}_{i,1}(e),\ 3t-1\right), & \frac{1}{3} \le t \le \frac{2}{3}, \\ f_{k+1}\left(\tilde{H}_i(e,3-3t)\right), & \frac{2}{3} \le t \le 1. \end{cases}$$

这定义了一个覆盖 B、从 $f_k|_{W_{i,j}}$ 到 $f_{k+1}|_{W_{i,j}}$ 的纤维同伦，从而完成证明。 □

若 $\pi\colon E \to X$ 是纤维基点空间之间的纤维化纤维化 E 且 X 在 B上，则 García-Calcines 和第一作者 [10,推论 6.3]证明了不等式

$$\mathrm{TC}_B(E) + 1 \le (\mathrm{TC}_B(F) + 1)\,.(\mathrm{cat}^*_B(X \times_B X) + 1),$$

其中 F 是 π的纤维。

下面的推论给出了它的序列类比。

推论 5.15. 设 E 和 X 是 B 上的纤维基点空间，且 $\pi\colon E \to X$ 是纤维为 F的纤维化。则

$$\mathrm{TC}_{B,r}(E) + 1 \le (\mathrm{TC}_{B,r}(F) + 1) \cdot (\mathrm{cat}^*_B(X^r_B) + 1).$$

证明。 注意到投影映射 $pr_i\colon X^r_B \to X$ 满足以下交换图：

$$\begin{array}{ccc} E^r_B & \xrightarrow{pr_1,\dots,pr_r} & E \\ {\scriptstyle \pi^r_B}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi} \\ X^r_B & \xrightarrow[pr_1,\dots,pr_r]{} & X. \end{array}$$

注意到 $f^0_i = pr_i\colon F^r_B \to F$。现在，所需的不等式可由定理5.14推出。 □

6. 序列带基点参数化同伦距离及其与无基点版本的比较

本节介绍序列参数化带基点同伦距离的基点版本，并将其与无基点版本进行比较。我们首先给出序列参数化带基点同伦距离的定义。

6.1. **序列带基点参数化同伦距离。**

定义 6.1。 设 f_1、...、f_r： $X \to Y$是纤维基点空间 X与 Y之间在 B上的纤维化基点映射。序列参数化带基点同伦距离 D_B^B（f_1、...、f_r）是满足下述条件的最小整数 $n \geq 0$： 存在 X的一个开覆盖 $\{U_0$、...、$U_n\}$，使得

$$s_X(B) \subset U_i \quad \textit{and} \quad f_1|_{U_i} \simeq_B^B \cdots \simeq_B^B f_r|_{U_i}, \textit{ for all } 0 \leq i \leq n.$$

若不存在这样的覆盖，则令 $D_B^B(f_1, \ldots, f_r) = \infty$。

由定义 6.1 可知

(1) $D_B^B(f_1, \ldots, f_r) = D_B^B(f_{\sigma(1)}, \ldots, f_{\sigma(r)})$ 对任意置换 $\sigma$of $\{1, \ldots, r\}$ 均成立。(2) $D_B^B(f_1, \ldots, f_r) = 0$ 当且仅当 $f_i \simeq_B^B f_{i+1}$ 对每个 $i \in \{1, \ldots, r-1\}$ 均成立。(3) 若对每个 $i = 1, 2, \ldots, r$，都有 $f_i \simeq_B^B f'_i$，则 $D_B^B(f_1, \ldots, f_r) = D_B^B(f'1, \ldots, f'_r)$。

与无基点情形一样，序列参数化带基点同伦距离可以与纤维化带基点截面范畴联系起来。在建立这种联系之前，我们注意到，若 $f_1, \ldots, f_r$: $X \to Y$是定义在 B 上的纤维化带基点映射，那么，如图（4）所示，可得到一个映射

$$\widetilde{\Pi}_{r,Y}^B \colon \mathcal{P}_B^B(f_1, \ldots, f_r) \to X,$$

定义为 $\Pi_{r,Y}^B$: $P_B(Y) \to Y_B^r$沿 $(f_1, \ldots, f_r)$ 的拉回。由于 $\Pi_{r,Y}^B$是纤维式˜尖点纤维化，映射$\Pi_{r,Y}^B$也是纤维式尖点纤维化。

与序列参数化同伦距离的无基点版本相类比，˜基点版本也可表示为 $\Pi_{r,Y}^B$ 的纤维化带基点截面范畴，如下所述。

命题 6.2. 设 $f_1, \ldots, f_r$: $X \to Y$是 B上纤维基点空间 X 与 Y 之间的纤维化带基点映射。则

$$D_B^B(f_1, \ldots, f_r) = \operatorname{secat}_B^B(\widetilde{\Pi}_{r,Y}^B),$$

其中 $\operatorname{secat}_B^B(\widetilde{\Pi}_{r,Y}^B)$ 表示在 [8, 定义 3.5]中引入的纤维化基点映射 $\widetilde{\Pi}_{r,Y}^B$的纤维化带基点截面范畴。

证明。 该证明与命题4.2的证明相同。 □

作为命题6.2的直接推论，我们得到如下结果。

推论 6.3. 设 X 是 B 上的一个纤维化带基点空间。那么

$$D_B^B(pr_1, \ldots, pr_r) = \operatorname{TC}_{B,r}^B(X).$$

与无基点情形类似，可以定义一个数值不变量——纤维逐点 LS 范畴，它可以用序列参数化同伦距离来表示。

命题 6.4. 设 X 是 B 上的一个纤维化带基点空间。那么

$$D_B^B(i_1, \ldots, i_r) = \operatorname{cat}_B^B(X_B^{r-1}).$$

第 5 节中关于序列参数化同伦距离的所有结果在带基点情形下同样成立。证明与无基点情形类似，只需做少量修改。

现在我们给出带基点的序列参数化同伦距离的一个上同调下界。结合 [10, 定理 7。7] 与命题 6.2，可得以下结果。

命题 6.5。 设 $f_1, \ldots, f_r \colon X \to Y$ 是纤维基点空间之间的纤维化带基点映射。那么

$$nil(\ker((\widetilde{\Pi}^B_{r,Y})^*)) \leq D^B_B(f_1, \ldots, f_r).$$

作为前述命题的推论，我们得到序列纤维逐点拓扑复杂度的以下上同调下界。

推论 6.6. 设 X 是 B 上的纤维逐点空间，且 $\Delta^r_X \colon X \to X^r_B$ 是对角映射。那么

$$nil\left(\ker((\Delta^r_X)^* \colon H^*_B(X^r_B) \to H^*_B(X))\right) \leq \operatorname{secat}^B_B\left(\Pi^B_{r,X} \colon P^B_B(X) \to X^r_B\right) = \mathrm{TC}^B_{B,r}(X)。$$

证明。 由于 $\operatorname{secat}^B_B(\Pi^B_{r,X} \colon P^B_B(X) \to X^r_B) = D^B_B(pr_1, \ldots, pr_r)$，拉回 $\widetilde{\Pi}^B_{r,X}$ 与 $\Pi^B_{r,X}$ 重合。此外，存在如下交换图（在基点纤维同伦意义下）：

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\gamma_X} & P^B_B(X) \\ & \overset{\simeq^B_B}{\searrow} \quad \swarrow & \\ & X^r_B. & \end{array} \qquad \Delta^r_X, \quad \Pi^B_{r,X}$$

这里，γ_X 是如下定义的纤维逐点同伦等价：将 $x \in X$ 映射到 $(p_X(x)\ c_x)$，其中 c_x 表示 x 处的常值路径。这意味着 $\ker((\Delta^r_X)^*) = \ker((\Pi^B_{r,X})^*)$。结论直接由命题 6.5 得出。 □

6.2. **比较**。 本节旨在比较序列参数化同伦距离的两种概念。我们首先建立基点版本与无基点版本之间的一般不等式，表明基点不变量至多比无基点不变量大 1。在底空间和相关纤维化满足适当假设时，我们进一步证明这两个不变量相等。

定理 6.7。 设 $f_1, \ldots, f_r \colon X \to Y$ 是定义在 B 上、纤维化空间之间的纤维化带基点映射。此外，若 X 和 Y 是 *ANR*空间，且 B 是局部等连通的，则

$$D_B(f_1, \ldots, f_r) \leq D^B_B(f_1, \ldots, f_r) \leq D_B(f_1, \ldots, f_r) + 1.$$

证明。 不等式 $D_B(f_1, \ldots, f_r) \leq D^B_B(f_1, \ldots, f_r)$ 显然成立。

由于纤维基点空间 X 和 Y 都是纤维化的 ANR空间，由[10, 引理 8.1 和 8.4] 可知，X 和 $P^B_B(Y)$ 是纤维良基点的。此外，根据[8, 命题 3.2], , 空间 Y^r_B 也是纤维良基点的。因此，利用同一命题，我们得出 $\mathcal{P}^B_B(f_1, \ldots, f_r)$ 也是纤维良基点的。

最后，结合命题 4.2和 6.2，所需的不等式可由 [8,定理 4。1] 得出。 □

接下来，我们将确定序列参数化同伦距离的基点版本与无基点版本何时相同。

定理 6.8。 设 f_1、...、$f_r \colon X \to Y$ 是余纤维化的纤维基点空间与纤维化的纤维基点空间之间的纤维化带基点映射。此外，假设 B 是一个 *CW* 复形，映射 $p_Y \colon Y \to B$ 对于某个整数 $k \geq 1$ 是一个k-等价，并且 $\dim(B) < (D_B(f_1、\ldots、f_r) + 1) \cdot k - 1$。则

$$D_B(f_1, \ldots, f_r) = D^B_B(f_1, \ldots, f_r).$$

证明。由于 Y 是纤维化的，映射 $\Pi_{r,\,Y}$： $P_B(Y) \to Y_B^r$ 是 Hurewicz纤维化。因此，$\sim\Pi_{r,\,Y}$也是 Hurewicz纤维化。此外，由于 X 是纤维化的，空间 $\mathrm{P}_B(f_1, \ldots, f_r)$ 也是纤维化的。根据 [10, 引理 8.7 和 8.8], ， $P_B^B(Y)$ 和 Y_B^r 都是余纤维化的。另外，引理 8.8] 保证 $\mathrm{P}_B^B(f_1, \ldots, f_r)$ 也是余纤维化的。

由于 p_Y： $Y \to B$ 是一个 k-等价，映射 $\Pi_{r,\,Y}$ 和 $\Pi_{r,\,Y}^B$ 都是 $(k-1)$-等价。

$\sim$ $\sim$ $\sim$因此，$\Pi_{r,\,Y}$和 $\Pi_{r,\,Y}^B$也都是 $(k-1)$-等价。我们还注意到 $\mathrm{secat}_B(\Pi_{r,\,Y}) = \mathrm{secat}_B(\Pi_{r,\,Y}^B)$。结合前述观察和条件

$$\dim(B) < (D_B(f_1, \ldots, f_r) + 1)k - 1 \leq (\mathrm{secat}_B(\widetilde{\Pi}_{r,Y}^B) + 1)k - 1$$

以及 [8,定理 4.4] ，即可得到

$$\mathrm{secat}_B(\widetilde{\Pi}_{r,Y}^B) = \mathrm{secat}_B^B(\widetilde{\Pi}_{r,Y}^B).$$

最后，结论由命题4.2 和 6.2得出。 □

作为定理 6.8的推论，我们得到以下推论。

推论 6.9。 设 E 是 B 上的一个纤维化带基点空间，且纤维局部等连通并且是纤维化的。此外，假设 B 是一个 CW 复形，并且满足以下条件：

(a) Δ_E^r： $E \to E_B^r$ 是某个 k-等价，其中 $k \geq 1$; *(b)* $\dim(B) < (\mathrm{TC}_{B,\,r}(E) + 1).k - 1$。那么 $\mathrm{TC}_{B,\,r}(E) = \mathrm{TC}_{B\,,\,r}^B(E)$。

7. 序列参数化子空间同伦距离

本节将介绍子空间距离的概念，即相对于子空间的两个映射之间的同伦距离，作为定义4.1中给出的序列参数化同伦距离的推广，并讨论其一些基本性质。

定义 7.1。 设 f_1，……， f_r： $X \to Y$ 是在 B 上的纤维化空间之间的纤维映射，且 $A \subseteq X$ 是一个子空间。称 f_1，……， f_r 在 A 上的序列参数化子空间同伦距离为 $D_{B,\,X}$（A； f_1，……， f_r），并将其定义为限制映射 $f_1|_A$，……， $f_r|_A$ 之间的序列参数化同伦距离；即，

$$D_{B,X}(A; f_1, \ldots, f_r) := D_B(f_1|_A, \ldots, f_r|_A).$$

注意，当 $A = X$ 时，我们得到参数化距离通常的序列类比。

下一个例子可视为推论 4.4 的子空间版本。

例 7.2。 令 $A \subseteq X_B^r$，并令 pr_i： $X_B^r \to X$ 表示到 i因子的投影。则 A 的序列参数化子空间拓扑复杂度满足 $\mathrm{TC}_{r\,E,\,}^B(A) = D_{B,\,X_B^r}(A;\ pr_1,\ \ldots\ldots,\ pr_r)$。

根据序列参数化子空间同伦距离的定义，我们得到如下结果。

命题 7.3。 设 f_1、……、 f_r： $X \to Y$是关于 B 的纤维映射。设 $A \subseteq X$ 是一个子空间。则

(1) $D_{B,X}(A; f_1, \ldots, f_r) \leq D_B(f_1, \ldots, f_r)$.
(2) If $A \subseteq C \subseteq X$, *then* $D_{B,X}(A; f_1, \ldots, f_r) \leq D_{B,X}(C; f_1, \ldots, f_r)$.
(3) $D_{B,X}(A; f_1, \ldots, f_r) = D_{B,X}(A; f_{\sigma(1)}, \ldots, f_{\sigma(r)})$ *for any permutation* σ *of* $\{1, \ldots, r\}$.

(4) $D_B, x(A; f_1、\ldots\ldots、f_r) = 0$ 当且仅当对每个 $1 \le i \le r-1$都有 $f_i|_A \simeq_B f_{i+1}|_A$。 (5) 设 $g_1、\ldots\ldots、g_r: X \to Y$是关于 B 的纤维映射，且 $f_i|_A \simeq_B g_i|_A$。则$D_B, x(A; f_1、\ldots\ldots、f_r) = D_B, x(A; g_1、\ldots\ldots、g_r)$。 (6) 对所有 $1 \le s \le r$，$D_B、x(A; f_1、\ldots\ldots、f_s) \le D_B, x(A; f_1、\ldots\ldots、f_r)$。

接下来我们指出，序列参数化同伦距离的行为可以通过考察其在定义域的连通分支上的取值来加以阐明。

命题7.4. 设 $f_1, \ldots\ldots, f_r: X \to Y$为 B上的纤维映射，并设$\{A_i\}_{i=1}^n$ 为 X的连通分支。则 $D_B(f_1, \ldots\ldots, f_r) = max_i\{D_B, x(A_i; f_1, \ldots\ldots, f_r)\}$。

证明。 该证明与 [17,命题3.9]的证明以同样的方式得出。 □

现在我们证明，与序列参数化同伦距离的情形一样，其子空间版本同样是纤维同伦不变量。

命题7.5. 设 $f_1, \ldots\ldots, f_r: X \to Y$为 B上的纤维映射。假设 $i_A: A, \to X$与$i_C: C, \to X$ 为子空间包含，并设 $\alpha: A \to C$ 为纤维同伦等价，使得 $i_C \circ \alpha \simeq_B i_A$。则

$$D_{B,X}(A; f_1, \ldots, f_r) = D_{B,X}(C; f_1, \ldots, f_r).$$

证明。 根据定义，$D_B, x(C; f_1, \ldots, f_r) = D_B(f_1|_C, \ldots, f_r|_C) = D_B(f_1 \circ i_C, \ldots, f_r \circ i_C)$。由于 α 是纤维同伦等价，命题 5.8 给出

$$D_B(f_1 \circ i_C, \ldots, f_r \circ i_C) = D_B(f_1 \circ i_C \circ \alpha, \ldots, f_r \circ i_C \circ \alpha).$$

利用假设 $i_C \circ \alpha \simeq_B i_A$，由命题 5.1 可得

$$D_B(f_1 \circ i_C \circ \alpha, \ldots, f_r \circ i_C \circ \alpha) = D_B(f_1 \circ i_A, \ldots, f_r \circ i_A) = D_B(f_1|_A, \ldots, f_r|_A).$$

Hence,

$$D_{B,X}(C; f_1, \ldots, f_r) = D_{B,X}(A; f_1, \ldots, f_r).$$

□

现在我们推导序列参数化子空间同伦距离的次可加性。

命题7.6。 设 $f_1, \ldots, f_r: X \to Y$ 是 B 上的纤维映射。假设 $\{V_0, V_1, \ldots, V_k\}$ 是 X 的一个开覆盖。那么

$$D_B(f_1, \ldots, f_r) + 1 \le \sum_{i=0}^{k} \left(D_{B,X}(V_i; f_1, \ldots, f_r) + 1\right).$$

证明。 证明过程与命题 5.2的证明类似。 □

现在我们证明，序列参数化子空间同伦距离也可以用纤维截面范畴来描述。

设 $f_1, \ldots, f_r: X \to Y$是底空间为 B 的纤维映射，我们考虑映射 $\Pi_{r,Y}: \mathcal{P}_B(f_1, \ldots, f_r) \to X$在子空间 $A \subseteq X$ 的原像上的限制。也就是说，我们定义

$$\widetilde{\Pi}_{r,A} := \widetilde{\Pi}_{r,Y}|_{(\widetilde{\Pi}_{r,Y})^{-1}(A)}: (\widetilde{\Pi}_{r,Y})^{-1}(A) \to A$$

由于式（4）中的 $\Pi_{r,Y}$ 是纤维化纤维化，因此 $\widetilde{\Pi}_{r,A}$ 也是如此。在此设定下，我们得到以下结果。

命题 7.7. 设 $f_1, \ldots, f_r: X \to Y$ 是 B 上的纤维映射，且 $A \subseteq X$ 是一个子空间。则

$$D_{B,X}(A; f_1, \ldots, f_r) = \mathrm{secat}_B(\widetilde{\Pi}_{r,A}).$$

证明。 证明方法与命题 4.2 相同。 □

与定理 4.5类似，我们得到序列参数化子空间同伦距离相应的上同调下界和同伦维数—连通性上界。

定理 7.8。 设 $f_1, \dots, f_r \colon X \to Y$ 是 B 上的纤维映射，且 $A \subseteq X$ 是一个子空间。此外，假设 A 和 Y 是纤维化空间。那么

(a) 若对于 $z_1, \dots, z_k \in H^*(Y_B^r; R)$, $(\Delta_Y^r)^*(z_i) = 0$ 且 $(f_1|_A, \dots, f_r|_A)^*(z_1 \smile \cdots \smile z_k) \neq 0$，则 $D_{B,X}(A; f_1, \dots, f_r) \geq k$。*(b)* 假设 $p_Y \colon Y \to B$ 是一个 k-等价（$k \geq 1$），且 A 和 Y 都是路径连通的，并且 A 具有 CW复形的同伦型。那么 $D_{B,X}(A; f_1, \dots, f_r) \leq \overline{\dim(A)}\, k$。

证明。 (a) 结合命题 7.7与 [8, 定理 2。10] 以及 [11, 推论 1。5],可得

$$D_{B,X}(A; f_1, \dots, f_r) = \operatorname{secat}_{(f_1|_A, \dots, f_r|_A)}(\Pi_{r,Y}). \tag{6}$$

由此等式，定理 4.5 中的论证可原样套用，从而得到所需结论。

(b) 由式（6）以及 [11, 命题 3.1 (2)]可直接得到结论。 □

与命题 4.8类似，纤维无基点子空间 LS 类别也可通过序列参数化子空间同伦距离作类似描述。由于论证与命题 4.8中的基本相同，这里不再重复。

命题 7.9。 设 X 是 B上的一个纤维化空间，且 $A \subseteq X_B^{r-1}$是一个子空间。那么

$$D_{B,X_B^{r-1}}(A; i_1, \dots, i_r) = \operatorname{cat}_{B,E_B^{r-1}}(A),$$

其中 $i_j \colon \quad X_B^{r-1} \to X_B^r$ 是式 (5)中定义的映射。

接下来，我们证明序列参数化子空间同伦距离的纤维化同伦不变性。

命题 7.10. 设 $f_1, \dots, f_r \colon X \to Y$ 是关于 B 的纤维映射，且 $A \subseteq X$ 是一个子空间。

(i) 假设映射 $h \colon Y \to Y'$ 存在左纤维同伦逆。那么 $D_{B,X}(A; h \circ f_1, \dots, h \circ f_r) = D_{B,X}(A; f_1, \dots, f_r)$。*(ii)* 假设对于纤维映射 $H \colon X' \to X$，存在映射 $H' \colon X \to X'$，使得$H \circ H'|_A \simeq_B id_A$。那么 $D_{B,X}(H'(A); f_1 \circ H, \dots, f_r \circ H) = D_{B,X}(A; f_1, \dots, f_r)$。

我们注意到，定理5.10 的子空间类比对于不变量$D_{B,X}(A; \cdot)$同样成立。由于该论证是通过将所有映射和同伦限制到子空间 $A \subseteq X$而得到的，其证明与绝对情形完全平行，因此我们省略该陈述。

在下一个命题中，我们证明乘积不等式对于序列参数化同伦距离的子空间版本同样成立。

命题 7.11. 设 f_1，……，$f_r \colon X \to Y$与 g_1，……，$g_r \colon \widetilde{X} \to \widetilde{Y}$是 B~ ~上的纤维映射，且 A、$\widetilde{A}$ 分别是 X 与 $\widetilde{X}$的子空间。若 $A \times_B \widetilde{A}$ 是正规空间，则

$$D_{B,X\times_B\widetilde{X}}(A \times_B \widetilde{A}; f_1 \times_B g_1, \dots, f_r \times_B g_r) \leq D_{B,X}(A; f_1, \dots, f_r) + D_{B,\widetilde{X}}(\widetilde{A}; g_1, \dots, g_r).$$

证明。证明沿用命题5.12中的相同论证。 □

致谢：N. Daundkar 衷心感谢 DST–INSPIRE 教师奖学金（教师注册号：IFA24-MA218）以及印度理工学院马德拉斯分校工业咨询与赞助研究（IC&SR）部门提供的新教师启动基金（RF25261395MANFIG009294）。Ankur Sarkar 得到了印度政府教育部通过印度理工学院马德拉斯分校设立的算子代数、几何、物质与时空中心的支持 [项目编号 SB22231267MAETWO008573]。

参考文献

[1] A. Borat 和 T. Vergili. 高阶同伦距离。《拓扑方法与非线性分析》，57(2):525–534，2021。[2] D. C. Cohen、M. Farber 和 S. Weinberger. 参数化运动规划算法的拓扑。《SIAM 应用代数与几何杂志》，5(2):229–249，2021。[3] M. Crabb 和 I. James. 纤维化同伦论。《施普林格数学专著》。施普林格伦敦出版社有限公司，伦敦，1998。[4] Navnath Daundkar. 群作用与透镜空间的高阶拓扑复杂度。《应用计算拓扑学杂志》，8(7):2051–2067，2024。[5] M. Farber. 运动规划的拓扑复杂度。《离散与计算几何》，29(2):211–221，2003。[6] M. Farber. 拓扑机器人学导论。《苏黎世高等数学讲座》。欧洲数学学会（EMS），苏黎世，2008。[7] M. Farber 和 A. K. Paul. 序贯参数化运动规划及其复杂度。《拓扑学应用》，321:文章编号 108256，23，2022。[8] J. M. García-Calcines. 纤维截面范畴的 Whitehead 和加内亚构造。《拓扑学应用》，161:215–234，2014。[9] J. M. García-Calcines. 参数化拓扑复杂度及其基点版本的形式方面。《拓扑分析杂志》，15(4):1129–1148，2023。[10] J. M. García-Calcines 和 N. Daundkar. 参数化同伦距离。arXiv:2501.16152。[11] J.M. García-Calcines. 重新审视相对截面范畴。《数学论述》，42(5):125590，2024。[12] N. Iwase 和 M. Sakai. 拓扑复杂度是一种纤维逐点 L-S 范畴。《拓扑学应用》，157(1):10–21，2010。[13] I. M. James. 纤维逐点拓扑，剑桥数学专论第91卷。剑桥大学出版社，剑桥，1989。[14] I. M. James 和 J. R. Morris. 纤维逐点范畴。《爱丁堡皇家学会会刊 A 辑》，119(1-2):177–190，1991。[15] L. Lyusternik 和 L. Snirelman. 变分问题中的拓扑方法及其在曲面的微分几何中的应用。《数学科学进展》（新系列），2(1(17)):166–217，1947。[16] E. Macías-Virgós 和 D. Mosquera-Lois. 映射间的同伦距离。《剑桥哲学学会数学会刊》，172(1):73–93，2022。[17] E. Macías-Virgós、D. Mosquera-Lois 和 M. Pereira-Sáez. 同伦距离与广义运动规划。《地中海数学杂志》，19(6):文章编号 258，20，2022。[18] S. Mescher 和 M. Stegemeyer. 通过序贯与参数化拓扑复杂度研究临界点理论。arXiv:2411.01980。[19] J. Oprea 和 J. Strom. 混合范畴。《美国数学会会刊》，139(9):3383–3392，2011。[20] Y. B. Rudyak. 关于拓扑复杂度的高阶类比。《拓扑学应用》，157(5):916–920，2010。

数学系 , 印度理工学院马德拉斯分校 ，金奈 ，印度。
电子邮箱： navnath@iitm.ac.in

数学系、印度科学教育与研究学院浦那分校、印度电子邮箱： abhisheksarkar49@gmail.com

研究所 数学科学研究所，霍米·巴巴国家研究所的一个组成单位，印度金奈 IA
电子邮件地址： ankurimsc@gmail.com