arXiv:2601.21819v1 [math.GR] 29 Jan 2026

某些数值半群环的弗罗贝尼乌斯数与第一希尔伯特系数

DO VAN KIEN 和 PHAM HUNG QUY

Abstract. 设 a, b 为正整数。本文研究数值半群$H = \langle a, a+1, b\rangle$ 以及关联数值半群环 $R = k[[H]]$。在某些条件下，我们给出 H 的弗罗贝尼乌斯数以及 R的第一希尔伯特系数的显式公式。

1. Introduction

在本文中，设 $n_1, n_2, \ldots, n_e$为满足最大公约数$(n_1, n_2, \ldots, n_e) = 1$的正整数。令

$$H = \langle n_1, n_2, \ldots, n_e\rangle = \{c_1n_1 + c_2n_2 + \cdots + c_en_e \mid c_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \forall i = 1, 2, \ldots, e\}$$

为一个数值半群。我们总是假设 $n_1 = \min\{n_1, n_2, \ldots, n_e\}$，且 H由 $\{n_i\}_{i=1}^e$最小生成。我们分别称 n_1 和 e 为 H的重数和嵌入维数 。由于最大公约数$(n_1, n_2, \ldots, n_e) = 1$, 补集 $\mathbb{N} \setminus H$是有限集。 $\mathbb{N} \setminus H$ 中的最大数称为 H 的弗罗贝尼乌斯数 , 记为 $\mathrm{F}(H)$。我们还将 H 的亏格 定义为 $g(H) = |\mathbb{N} \setminus H|$。用生成元 n_i 表示 $\mathrm{F}(H)$ 的显式公式，是数论中的一个经典且重要的问题。当嵌入维数为 $e = 2$时，众所周知 $\mathrm{F}(H) = n_1n_2 - n_1 - n_2$。然而，对于 $e \geq 3$ ，这一问题一般仍未解决。

本文的第一个目的是给出当 H由 $\{a, a+1, a+d\}$极小生成时， H的弗罗贝尼乌斯数的显式公式。

研究 H 组合性质的一种重要方法是考察其数值半群环。设 $R = k[[H]] = k[[t^{n_1}, t^{n_2}, \ldots, t^{n_e}]] \subseteq k[[t]]$ 是域 k上与 H 相关联的数值半群环。这是一个诺特局部整环，其极大理想为 $\mathfrak{m} = (t^{n_1}, t^{n_2}, \ldots\ldots, t^{n_e})$。由于 R是一个一维 Cohen-Macaulay 局部环，存在整数 $e_0(R)$和 $e_1(R)$，使得

$$\ell_R(R/\mathfrak{m}^{n+1}) = e_0(R)\binom{n+1}{1} - e_1(R)$$

对所有充分大的整数 n均成立。我们分别称 $e_0(R)$ $e_1(R)$为 R的重数和第一希尔伯特系数。尽管众所周知 $e_0(R) = n_1$，目前尚无根据 H的生成元计算 $e_1(R)$的一般公式。这自然引出了以下问题。

Q问题 1.1。 求出 R 的第一希尔伯特系数的显式公式 ?

2020数学学科分类。 20M25, 11D07, 13A15, 13D40.关键词和短语。 弗罗贝尼乌斯数，数值半群，数值半群环，定义理想，希尔伯特系数。

在 [7], 中，Kirby 为 $e_1(R)$ 建立了界。他证明了

$$n_1 - 1 \leq e_1(R) \leq \frac{1}{2}n_1(n_1 - 1).$$

本文的第二个目的是给出与 $H = \langle a, a+1, a+d\rangle$ 相关的数值半群环的第一希尔伯特系数的显式公式。对于本文的两个主要目的，令 $n_1 < n_2 < n_3$ 为满足最大公约数$(n_1, n_2, n_3) = 1$ 的正整数。令

$$H = \langle n_1, n_2, n_3\rangle := \{c_1n_1 + c_2n_2 + c_3n_3 \mid c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{N}\}$$

为一个数值半群。令 $R = k[[H]]$ 为与 H 相关的数值半群环， $S = k[[x, y, z]]$ 为形式幂级数环。我们考虑 k-代数同态φ : $S \to R$ ，其定义为 $\varphi(x) = t^{n_1}, \varphi(y) = t^{n_2}, \varphi(z) = t^{n_3}$。令 $I = \operatorname{Ker}\varphi$ ，并称其为 R 的定义理想。众所周知，若 H 不对称，则理想 I 由最少的

$$x^{\alpha+\alpha'} - y^{\beta'}z^{\gamma}, y^{\beta+\beta'} - x^{\alpha}z^{\gamma'}, z^{\gamma+\gamma'} - x^{\alpha'}y^{\beta} \tag{♯}$$

对于某些正整数 α、β、γ、α'、β'、γ'(参见 [2])。

在 [5], 中，作者给出了关于参数 α、β、γ、α'、β'、γ' 的 H 弗罗贝尼乌斯数公式。

命题 1.2 (参见 [5])。

1) If $\beta' n_2 > \alpha n_1$ *then* $\mathrm{F}(H) = \beta' n_2 + (\gamma + \gamma')n_3 - (n_1 + n_2 + n_3)$.
2) If $\beta' n_2 < \alpha n_1$ *then* $\mathrm{F}(H) = \alpha n_1 + (\gamma + \gamma')n_3 - (n_1 + n_2 + n_3)$.

然而，要用 n_1、n_2、n_3 表示六个参数 α、β、γ、α'、β'、γ'，计算起来非常困难。一般而言，除了某些特殊条件外，目前尚无这些参数的显式公式。例如，当 n_1、n_2、n_3 构成等差数列时，可以显式地计算这些参数，如 [10, 定理 **1.**1] 所示。令人颇为惊讶的是，即使 n_1 和 n_2 是两个连续整数，仍然没有确定这些参数的公式。本文将明确描述满足 $n_1 = a$、$n_2 = a + 1$ 和 $n_3 = a + d$ 条件时的参数 α、β、γ、α'、β'、γ'。本文的第一个主要结果如下所述，其中给出了 $\mathrm{F}(H)$ 以及 $e_1(R)$ 的公式。

定理 1.3 (命题 2.9+2.10+3.7). 对于 a, d 为满足 $1 < d < a$ 的正整数。设 $H = \langle a, a+1, a+d\rangle$ 为数值半群， $R = k[[H]]$ 为其数值半群环。设 $a = dq + r$ 满足 $1 \leq r \leq d - 1$。假设 $a \geq d^2 - 3d$ ，则

$$\begin{aligned}
&1)\ \mathrm{F}(H) = \max_{1<i<a}\left(i(a+1) - (d-1)a\left\lfloor\frac{i}{d}\right\rfloor\right) - a, \ \textit{and}\\
&2)\ e_1(R) = \frac{a(a-1)}{2} - (d-1)\left(d\frac{q(q-1)}{2} + rq\right).
\end{aligned}$$

特别地，对于所有 $a \geq 7$，我们有

$$\mathrm{F}(a, a+1, a+5) = \begin{cases} \lfloor\frac{a}{5}\rfloor(a+5) + 2a + 3, & \textit{if } a \equiv 4 \pmod 5,\\ \lfloor\frac{a}{5}\rfloor(a+5) + 2a - 1, & \textit{if } a \not\equiv 4 \pmod 5. \end{cases}$$

本文的第二个主要结果陈述如下。

定理 1.4 (定理2。11+命题 3.8)。 设 a, d 为满足 $a \geq 3, d \geq 2$ 且 最大公约数$(a, d) = 1$的正整数。设 $H = \langle a, a+1, a+d \rangle$ 为一个数值半群， $R = k[[H]]$ 为其数值半群环。记 $a = dq + r$ ， 其中 $1 \leq r \leq d-1.$ 。假设$q + r \geq d - 2$ 且 H 不是对称的，则下列断言成立。

1) If $1 \leq r \leq d-2$ *then* $\mathrm{F}(H) = \dfrac{1}{d}a^2 + \dfrac{d^2 - 2d - r}{d}a - (r+1)$, *and*

$$e_1(R) = \frac{1}{2d}(a^2 + d(d-2)a - r(d-1)(d-r).$$

2) If $r = d-1$ *then* $\mathrm{F}(H) = \dfrac{1}{d}a^2 + \dfrac{d^2 - 3d + 1}{d}a - 1$, *and*

$$e_1(R) = \frac{1}{2d}(a^2 + d(d-2)a - (d-1)^2).$$

本文的组织结构如下。第 2 节研究数值半群 $H = \langle a, \ a+1, \ b \rangle$ 的 Ap´ery 集和弗罗贝尼乌斯数。第 3 节专门研究与 H 相关联的数值半群环的第一希尔伯特系数。具体而言，我们给出 H 的弗罗贝尼乌斯数以及在 $b = a + d$ 且 $d < a$ 的情况下第一希尔伯特系数的显式公式。

2. The Apéry set and the Frobenius number of $\langle a, a+1, b \rangle$

设 H 是一个数值半群，且 $h \in H, \ h \neq 0$。令 $\mathrm{Ap}(H, \ h) = \{m \in H \mid m - h \notin H\}$ ，并称其为关于 h 的 H 的 $Ap´ery$ 集。根据定义，显然 $\mathrm{F}(H) = \max(\mathrm{Ap}(H, \ h)) - h$。对于每个 $0 \leq i \leq h-1$, 令 $\omega_i = \min\{m \in H \mid m \equiv i (\mathrm{mod} \ h)\}$。以下给出关于 h 的 H 的 Ap´ery 集。

引理 2.1 ([6], 引理 2.4)。 $\mathrm{Ap}(H, \ h) = \{0 = \omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_{h-1}\}$。

本节研究嵌入维数为 3 的数值半群的第一希尔伯特系数和弗罗贝尼乌斯数。设 $n_1 < n_2 < n_3$ 为正整数，满足 $\gcd(n_1, n_2, n_3) = 1$。设 $H = \langle n_1, n_2, n_3 \rangle$ 为一个数值半群。令 $R = k[[H]]$ 为与 H 相关联的数值半群环， $e_1(R)$ 为 R 的第一希尔伯特系数。设 $S = k[[x, y, z]]$ 为形式幂级数环，且 $\varphi \colon S \to R$ 为一个 k-代数同态，定义为 $\varphi(x) = t^{n_1}, \varphi(y) = t^{n_2}, \varphi(z) = t^{n_3}$。令 $I = \mathrm{Ker}\, \varphi$ 为 R 的定义理想。对于一个元素属于 S 的矩阵 M ，记由 M 的 2×2 阶子式生成的 S 的理想为 $\mathrm{I}_2(M)$。已知若 H 不对称，则理想I 由赫尔佐格矩阵的极大子式生成

$$\begin{pmatrix} y^{\beta'} & z^{\gamma'} & x^{\alpha'} \\ x^{\alpha} & y^{\beta} & z^{\gamma} \end{pmatrix}$$

对于某些正整数 α、β、γ、α'、β'、γ'（参见 [2]）。

在本节中，我们考虑数 n_1、 n_2、 n_3 彼此相差不大的情形。设 a、 b 为满足 $a + 1 < b$ 的正整数。我们考虑由 $\{a, a+1, b\}$ 极小生成的数值半群 $H = \langle a$、 $a+1$、 $b \rangle$。我们将明确计算 H 的弗罗贝尼乌斯数以及 R 的第一希尔伯特系数。记 $b = aq + r$ ， 其中 q 和 $1 \leq r \leq a - 1.$ 为某些正整数

引理 2.2. 存在不等式 $q < r$ 和 $b < r(a+1)$。

证明。 反设 $q \geq r$。则 $q - r \geq 0$，并且存在等式$b = aq + r = (q - r)a + r(a + 1)$。这与生成集$\{a, a + 1, b\}$的极小性矛盾。因此， $q < r$。于是， $aq + r < ar + r$，这意味着 $b < r(a + 1)$。□

对于每个 $0 \leq i \leq a - 1$，令 $\omega_i = \min\{h \in H \mid h \equiv i \pmod{a}\}$。根据引理 2.1，我们知道 $\mathrm{Ap}(H, a) = \{0 = \omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_{a-1}\}$。

Robles-P´erez 和 Rosales 最近得到了以下结果。

命题 2.3 （见 [9], 命题 3.6）。 假设 $\omega_0 < \omega_1 < \cdots < \omega_{a-1}$。那么对所有 $0 \leq i \leq a - 1$，我们有

$$\omega_i = i(a + 1) - \lfloor \frac{i}{r} \rfloor (r(a + 1) - b).$$

问题 2.4。 如果去掉 $\{\omega_i\}_0^a$ 是递增序列这一条件，那么 ω_i 的公式是什么?

注记 2.5。 显然， $\omega_0 = 0$。现在固定每个 $1 \leq i \leq a - 1$。有

$$\begin{aligned}\omega_i &= \min\{xa + y(a + 1) + zb \mid x, y, z \geq 0, xa + y(a + 1) + zb \equiv i \pmod{a}\} \\ &= \min\{xa + y(a + 1) + zb \mid x, y, z \geq 0, y + zr \equiv i \pmod{a}\} \\ &= \min\{y(a + 1) + zb \mid 0 \leq y, z < a, y + zr \equiv i \pmod{a}\}.\end{aligned}$$

那么存在整数 $0 \leq y_0, z_0 < a$ 满足 $y_0 + z_0 r \equiv i \pmod{a}$，使得$\omega_i = y_0(a + 1) + z_0 b$. 注意到 $i = y_0 + z_0 r - ka < a$。这意味着 $k \geq 0$。代入$b = aq + r$，得到

$$\omega_i = i(a + 1) + a\left(k(a + 1) - z_0(r - q)\right).$$

由于 $0 \leq y_0 < a$，我们得到

$$\frac{z_0 r - i}{a} \leq k = \frac{y_0 + z_0 r - i}{a} < \frac{z_0 r - i}{a} + 1.$$

因此 $k = \left\lceil \frac{z_0 r - i}{a} \right\rceil$，从而

$$\omega_i = i(a + 1) + a\left(\left\lceil \frac{z_0 r - i}{a} \right\rceil (a + 1) - z_0(r - q)\right).$$

这一观察引出以下结论。

引理 2.6. 对于每个 $1 \leq i \leq a - 1$，我们有

$$\omega_i = i(a + 1) + a. \min_{0 \leq z < a} F(z),$$

其中 $F(z) = \left\lceil \frac{zr - i}{a} \right\rceil (a + 1) - z(r - q)$.

为确定 ω_i，以下论述表明我们只需比较 r 个值，而不是 a个值。

引理 2.7。 对于每个 $1 \leq i \leq a - 1$，我们有

$$\omega_i = i(a + 1) + a. \min_{0 \leq j \leq r} \{j(a + 1) - (r - q)\lfloor \frac{ja + i}{r} \rfloor\}.$$

证明。 我们考虑函数 $F(z) = \left\lceil \frac{zr-i}{a} \right\rceil (a+1) - z(r-q)$，其中 $0 \le z < a$。注意，如果 $zr \le 0$，那么 $z \le \frac{i}{r}$ 和 $\left\lceil \frac{zr-i}{a} \right\rceil = 0$。因此，

$$(1) \qquad \min_{0 \le z < a, z \le i/r} F(z) = F(\lfloor \frac{i}{r} \rfloor) = -(r-q)\lfloor \frac{i}{r} \rfloor.$$

否则，若 $zr > 0$，则 $0 < \frac{zr-i}{a} < r$，这意味着 $\left\lceil \frac{zr-i}{a} \right\rceil \in \{1, 2, \ldots, r\}$.。另一方面，对于每个 $j \in \{1, 2, \ldots, r\}$，我们看到 $\left\lceil \frac{zr-i}{a} \right\rceil = j$ 当且仅当

$$\frac{zr-i}{a} \le j < \frac{zr-i}{a} + 1.$$

等价地，

$$\frac{a(j-1)+i}{r} < z \le \frac{ja+i}{r}.$$

因此，

$$(2) \quad \min_{0 \le z < a, \lceil \frac{zr-i}{a} \rceil = j} F(z) = j(a+1) + \min_{\frac{a(j-1)+i}{r} < z \le \frac{ja+i}{r}} (-z(r-q)). = j(a+1) - (r-q)\lfloor \frac{ja+i}{r} \rfloor.$$

结合 (1) 和 (2)，我们得到

$$\omega_i = i(a+1) + a. \min_{0 \le j \le r} \{j(a+1) - (r-q)\lfloor \frac{ja+i}{r} \rfloor\}.$$

□

推论 2.8。 设 $0 < q < a$ 为整数，且 $H = \langle a、\ a+1、\ aq+q+1 \rangle$ 构成一个数值半群。那么

$$\mathrm{F}(H) = a^2 - a - 1 - \lfloor \frac{a-1}{q+1} \rfloor .a$$

证明。 对于所有 $1 \le i, j \le a-1$，我们看到 $j(a+1) \ge ja+1 \ge \lfloor \frac{ja+i}{q+1} \rfloor$。因此，对于每个$1 \le i \le a-1$，根据引理 2.7，有

$$\begin{aligned} \omega_i &= i(a+1) + a. \min_{0 \le j \le q+1} \{j(a+1) - \lfloor \frac{ja+i}{q+1} \rfloor\} \\ &= i(a+1) + a. \min\{-\lfloor \frac{i}{q+1} \rfloor, \min_{1 \le j \le q+1} \{j(a+1) - \lfloor \frac{ja+i}{q+1} \rfloor\}\} \\ &= i(a+1) - \lfloor \frac{i}{q+1} \rfloor .a. \end{aligned}$$

显然，序列 $\{\omega_i\}_{i=1}^{a-1}$ 是严格递增序列。因此，

$$\max_{1 \le i \le a-1} \omega_i = \omega_{a-1} = a^2 - 1 - \lfloor \frac{a-1}{q+1} \rfloor .a$$

因此，

$$\mathrm{F}(H) = a^2 - a - 1 - \lfloor \frac{a-1}{q+1} \rfloor .a$$

□

命题 2.9. 对于 a, d，设其为正整数，且 $1 < d < a$ 和 $H = \langle a, a+1, a+d\rangle$为一个数值半群。假设 $a \geq d^2 - 3d$，则对于每个 $0 \leq i \leq a-1$，有

$$\omega_i = i(a+1) - (d-1)a\left\lfloor \frac{i}{d} \right\rfloor.$$

因此，

$$\mathrm{F}(H) = \max_{1<i<a}\left(i(a+1) - (d-1)a\left\lfloor \frac{i}{d}\right\rfloor\right) - a$$

.

证明。 由引理 2.7 可知

$$\omega_i = i(a+1) + a.\min_{0\leq j\leq d}\{j(a+1) - 4\lfloor\frac{ja+i}{d}\rfloor\}.$$

我们固定每个 $1 \leq j \leq d$，并注意到

$$\begin{aligned} j(a+1) - (d-1).\lfloor\frac{ja+i}{d}\rfloor + (d-1)\lfloor\frac{i}{5}\rfloor &> j(a+1) - (d-1)\left(\frac{ja+i}{d} - \frac{i}{d} + 1\right) \\ &= \frac{j(a+d) - d^2 + d}{d}. \end{aligned}$$

由此得到

$$\begin{aligned} j(a+1) - (d-1).\lfloor\frac{ja+i}{d}\rfloor + (d-1)\lfloor\frac{i}{5}\rfloor &\geq \lfloor\frac{j(a+d) - d^2 + d}{d}\rfloor + 1 \\ &= \lfloor\frac{j(a+d) - d^2 + d}{d} + 1\rfloor \\ &= \lfloor\frac{j(a+d) - d^2 + 2d}{d}\rfloor. \end{aligned}$$

因此，若 $a \geq d^2 - 3d$，则 $\lfloor\frac{j(a+d) - d^2 + 2d}{d}\rfloor \geq 0$，这意味着

$$j(a+1) - (d-1).\lfloor\frac{ja+i}{d}\rfloor \geq -(d-1)\lfloor\frac{i}{d}\rfloor.$$

因此，如果 $a \geq d^2 - 3d$ 那么

$$\omega_i = i(a+1) - (d-1)a\left\lfloor \frac{i}{d}\right\rfloor.$$

□

由命题 2.9 可得以下结论。

命题 2.10。 设 $a \geq 7$ 为整数，且 $H = \langle a、\ a+1、\ a+5\rangle$。那么对于每个$0 \leq i \leq a-1$，我们有

$$\omega_i = i(a+1) - 4a\left\lfloor \frac{i}{5}\right\rfloor.$$

此外，

$$\mathrm{F}(H) = \begin{cases} \lfloor\frac{a}{5}\rfloor(a+5) + 2a + 3, & \text{if } a \equiv 4 \pmod 5, \\ \lfloor\frac{a}{5}\rfloor(a+5) + 2a - 1, & \text{if } a \not\equiv 4 \pmod 5. \end{cases}$$

证明。 如果 $a \geq 10$ ，则由命题 2.9 我们有

$$\omega_i = i(a+1) - 4a\left\lfloor \frac{i}{5} \right\rfloor,$$

对所有的 $0 \leq i \leq a-1$。

此外，直接计算表明，对于每个 $7 \leq a \leq 9$，这个等式仍然成立。由此便得到了所需的 ω_i 个等式。

现在，为了确定 H 的弗罗贝尼乌斯数，我们需要在满足 $1 \leq i \leq a-1$ 的所有 ω_i 中找出最大值。设 $a = 5m+s$ 满足 $m > 0$， $s \in \{0,1,2,3,4\}$。对于每个 $1 \leq i \leq a-1$，设 $i = 5k+r$ 满足 $r \in \{0,1,2,3,4\}$。那么

$$\begin{aligned} w_i = (5k+r)(a+1) - 4ak &= k(a+5) + r(a+1) \\ &= \frac{i-r}{5}(a+5) + r(a+1) \leq \frac{a-1-r}{5}(a+5) + r(a+1). \end{aligned}$$

注意到 $0 \leq r$， $s \leq 4$，我们得到

$$\left\lfloor \frac{a-1-r}{5} \right\rfloor = \left\lfloor m + \frac{s-1-r}{5} \right\rfloor = \begin{cases} m, & r \leq s-1, \\ m-1, & r \geq s. \end{cases}$$

因此，

$$\omega_i \leq \begin{cases} m(a+5) + r(a+1), & \text{if } r \leq s-1, \\ (m-1)(a+5) + r(a+1), & \text{if } r \geq s. \end{cases}$$

我们考虑以下两种情况:

情形 $s = 4$: 在这种情况下，对于每个 $i = 5k+r$ ，我们有

$$\omega_i \leq \begin{cases} m(a+5) + r(a+1), & \text{if } r \leq 3, \\ (m-1)(a+5) + r(a+1), & \text{if } r = 4. \end{cases}$$

因此，对于所有 $1 \leq i \leq a-1$，我们有

$$\omega_i \leq \max_{0 \leq j \leq 3} \{m(a+5) + j(a+1), (m-1)(a+5) + 4(a+1)\} = m(a+5) + 3(a+1).$$

当 $i = 5m+3 = a-1$时，等式成立。

情形 $0 \leq s \leq 3$: 与 $s = 4$ 情形的论证类似，对于所有 $1 \leq i \leq a-1$ ，我们有

$$\omega_i \leq (m-1)(a+5) + 4(a+1).$$

当 $i = 5(m-1) + 4$时，等式成立。

因此，

$$\max_{0 \leq i \leq a-1} w_i = \begin{cases} m(a+5) + 3(a+1), & \text{if } s = 4, \\ (m-1)(a+5) + 4(a+1), & \text{if } s \neq 4, \end{cases}$$

这意味着

$$\mathrm{F}(H) = \max_{0 \leq i \leq a-1} w_i - a = \begin{cases} \lfloor \frac{a}{5} \rfloor (a+5) + 2a + 3, & \text{if } a \equiv 4 \pmod 5, \\ \lfloor \frac{a}{5} \rfloor (a+5) + 2a - 1, & \text{if } a \not\equiv 4 \pmod 5. \end{cases}$$

至此，我们完成了证明。 □

一般而言，很难确定 F(H) 的显式公式。不过，在某些条件下，我们可以推导出它的显式公式。

定理 2.11。 设 a, d 为满足 $a \geq 3, d \geq 2$ 的正整数，且 最大公约数$(a, d) = 1$。设$H = \langle a, a+1, a+d \rangle$，且 $R = k[[H]]$ 为其数值半群环。记 I 为 R 的定义理想。我们将 $a = dq + r$ 写作 $1 \leq r \leq d-1.$。假设 $q + r \geq d - 2$，则

$$I = \mathrm{I}_2 \begin{pmatrix} y^r & z & x^{q+r+2-d} \\ x^{d-1} & y^{d-r} & z^q \end{pmatrix}.$$

此外，如果 H 不是对称的，则以下断言成立。

1) If $1 \leq r \leq d-2$ *then* $\mathrm{F}(H) = \dfrac{1}{d}a^2 + \dfrac{d^2 - 2d - r}{d}a - (r+1).$

2) If $r = d-1$ *then* $\mathrm{F}(H) = \dfrac{1}{d}a^2 + \dfrac{d^2 - 3d + 1}{d}a - 1.$

证明。 我们考虑理想

$$P = \mathrm{I}_2 \begin{pmatrix} y^r & z & x^{q+r+2-d} \\ x^{d-1} & y^{d-r} & z^q \end{pmatrix} \subseteq S.$$

根据 φ的定义，显然有 $P \subseteq I$。对于反向结论，我们注意到

$$(x) + P = (x) + \mathrm{I}_2 \begin{pmatrix} y^r & z & 0 \\ 0 & y^{d-r} & z^q \end{pmatrix} = (x, y^d, y^r z^q, z^{q+1}).$$

So,

$$\begin{aligned} \ell_S\left(\frac{S}{(x)+P}\right) &= \dim_k \frac{k[[x,y,z]]}{(x, y^d, y^r z^q, z^{q+1})} \\ &= \dim_k \frac{k[[y,z]]}{(y^d, y^r z^q, z^{q+1})} \\ &= (q+1)r + q(d-r) \\ &= qd + r \\ &= a. \end{aligned}$$

此外，由于 $R \cong S/I$，我们有 $\ell_S\left(\begin{array}{c} S \\ \hline x \end{array}\right) = \ell_R\left(\begin{array}{c} R \\ \hline t^a \end{array}\right) = a.$。这意味着

$$\ell_S\left(\frac{S}{(x)+P}\right) = \ell_S\left(\frac{S}{(x)+I}\right)$$

这给出 $(x) + P = (x) + I$。因此 $I/P = x(I/P)$。因此，根据 Nakayama 引理（参见 [4, 定理 2]中 (2) $\Rightarrow$ (4) 的证明），可得 $I = P$。因此

$$(*) \qquad I = \mathrm{I}_2 \begin{pmatrix} y^r & z & x^{q+r+2-d} \\ x^{d-1} & y^{d-r} & z^q \end{pmatrix}.$$

现在假设 H 不是对称的。于是我们有 $q > 0$，使得 $a > d$。**1) 和 2) 的证明**。 根据 $(*)$ 中 I 的形式，(♮) 中的参数为

$$\alpha = d-1, \beta = d-r, \gamma = i, \alpha' = q+r+2-d, \beta' = r, \text{ and } \gamma' = 1.$$

若 $r = d-1$，则 $\beta'(a+1) = r(a+1) > (d-1)a = \alpha a$。因此，由命题 1.2 可得

$$\begin{aligned}\mathrm{F}(H) &= \beta'(a+1) + (\gamma+\gamma')(a+d) - (a+a+1+a+d)\\ &= (d-1)(a+1) + (\frac{a-(d-1)}{d}+1)(a+d) - (3a+1+d)\\ &= \frac{1}{d}a^2 + \frac{d^2-3d+1}{d}a - 1.\end{aligned}$$

若 $1 \le r \le d-2$，则由于 $a > d$，我们有 $\beta'(a+1) = r(a+1) \le (d-2)(a+1) < (d-1)a = \alpha a$。因此，再由命题 1.2 可得

$$\begin{aligned}\mathrm{F}(H) &= \alpha a + (\gamma+\gamma')(a+d) - (a+a+1+a+d)\\ &= (d-1)a + (\frac{a-r}{d}+1)(a+d) - (3a+1+d)\\ &= \frac{1}{d}a^2 + \frac{d^2-2d-r}{d}a - (r+1).\end{aligned}$$

□

推论 2.12. 假设 H 不是对称的，且以下条件之一成立：

1) $2 \le d \le 4$.
2) $d \ge 5$ *and* $d-3 \le r \le d-1$.
3) $a > d^2 - 3d$.

那么$\mathrm{F}(H)$由定理 *2.11* 给出。

证明. 注意 $q, r \ge 1$。容易看出，只要所给条件之一成立，条件 $q + r \ge d-2$ 就满足。结论得证。□

我们还看到，若 $a > d^2 - 3d$，则定理 2.11 和命题 2.9 蕴含$\omega_{a-1} = \max\{\omega_i \mid 0 \le i \le a-1\}$。

注 2.13。在剩余的情形中，即 $d \ge 5$ 且满足 $1 \le q+r \le d-3$ 时，我们尚未得到 $\mathrm{F}(H)$ 的显式公式。

在 $q = r = 1$ 的情形下，我们有如下结论。

引理 2.14。设 $H = \langle d+1,\ d+2,$ 且满足 $2d+1\rangle$，其中 $d \ge 5$，而 I 是 $R = k[[H]]$ 的定义理想。则以下断言成立。

1) *if* $d \equiv 0 \pmod 3$ *then* $I = \mathrm{I}_2\begin{pmatrix} y & z^{\frac{d}{3}} & x \\ x^2 & y^{\frac{2d}{3}} & z\end{pmatrix}$ *and* $\mathrm{F}(H) = \frac{2}{3}d^2 + \frac{1}{3}d - 1$.
2) *if* $d \equiv 1 \pmod 3$ *then* $I = \mathrm{I}_2\begin{pmatrix} y & z^{\frac{d+2}{3}} & x^3 \\ 1 & y^{\frac{2d-2}{3}} & z\end{pmatrix}$ *and* $\mathrm{F}(H) = \frac{2}{3}d^2 + \frac{2}{3}d - \frac{1}{3}$.
3) *if* $d \equiv 2 \pmod 3$ *then* $I = \mathrm{I}_2\begin{pmatrix} y & z^{\frac{d+1}{3}} & x^2 \\ x & y^{\frac{2d-1}{3}} & z\end{pmatrix}$ *and* $\mathrm{F}(H) = \frac{2}{3}d^2 - \frac{2}{3}$.

证明。论证与定理 2.11 的证明类似。□

推论 2.15。设 a、d 为正整数，$2 \leq d < a$ 且最大公约数$(a, d) = 1$。设 $H = \langle a、a+1、a+d \rangle$ 是一个数值半群，且 $R = k[[H]]$ 是 H 的数值半群环。则若 $q + r \geq d - 2$，则相伴分次环 $\mathrm{gr}_{\mathfrak{m}}(R)$ 是 *Cohen-Macaulay* 的。

证明。根据定理 2.11，$R = k[[H]]$ 的定义理想为

$$I = \mathrm{I}_2 \begin{pmatrix} y^r & z & x^{q+r+2-d} \\ x^{d-1} & y^{d-r} & z^q \end{pmatrix}.$$

这意味着 $\beta + \beta' = d = \alpha + \gamma'$。因此，由 Herzog 判据（见 [3]）可知，$\mathrm{gr}_{\mathfrak{m}}(R)$ 是 Cohen-Macaulay 的。□

我们以如下说明结束本节：若 $q + r < d - 2$，则伴随分次环 $\mathrm{gr}_{\mathfrak{m}}(R)$ 可能不是 Cohen-Macaulay 的。例如，若 $H = \langle d+1,\ d+2,\ 2d+1 \rangle$，其中$d \geq 5$，并假设 H 不是对称的，则 $\mathrm{gr}_{\mathfrak{m}}(R)$ 不是 Cohen-Macaulay 的。事实上，由引理 2.14，R 的定义理想 I 或者是

$$\mathrm{I}_2 \begin{pmatrix} y & z^{\frac{d}{3}} & x \\ x^2 & y^{\frac{2d}{3}} & z \end{pmatrix} \text{ or } \mathrm{I}_2 \begin{pmatrix} y & z^{\frac{d+1}{3}} & x^2 \\ x & y^{\frac{2d-1}{3}} & z \end{pmatrix}$$

这意味着 $\beta + \beta'$ 大于 $\alpha + \gamma'$。由此可知，$\mathrm{gr}_{\mathfrak{m}}(R)$ 不是 Cohen-Macaulay 的。

3. First Hilbert coefficients of numerical semigroup rings

设 $H = \langle n_1, n_2, \ldots, n_e \rangle$ 是一个数值半群，$R = k[[H]]$ 是其数值半群环。用 $e_1(R)$ 表示 R 的第一希尔伯特系数。本节将求出 $e_1(R)$ 的公式。为此，我们令 $H' = \{c_1 n_1 + c_2(n_2 - n_1) + c_3(n_3 - n_1) + \cdots c_n(n_e - n_1) \mid c_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \forall i = 1, 2, \ldots, e\}$。注意，由于 $\gcd(n_1, n_2 - n_1, n_3 - n_1, \ldots, n_e - n_1) = 1$，$H'$ 是由 $n_1, n_2 - n_1, n_3 - n_1, \ldots, n_e - n_1$ 生成的数值半群。我们称 H' 为 H 的膨胀。数值半群环 $k[[H']]$ 对应于 $k[[H]]$ 的膨胀。下面回顾一个关于 H 的亏格的结果。

引理 3.1 ([6, 命题 2.12])。设 a 是 H的一个非零元素。那么H 的亏格为

$$g(H) = \frac{1}{a} \left(\sum_{w \in \mathrm{Ap}(H,a)} w \right) - \frac{(a-1)}{2}.$$

R 的第一希尔伯特系数与 H 及其膨胀的亏格密切相关。

命题 3.2。存在等式

$$e_1(R) = g(H) - g(H'),$$

其中，$g(H)$ $g(H')$ 分别是 H 和 H'的亏格。

证明。我们可以假设剩余域 k 是无限的。那么，$Q = (t^{n_1})$ 是$\mathfrak{m}$的极小约化。令 $r = \mathrm{red}_Q(\mathfrak{m}) := \min\{n \in \mathbb{Z} \mid \mathfrak{m}^{n+1} = Q\mathfrak{m}^n\}$ 且 $S := R[\frac{\mathfrak{m}}{(t^{n_1})}]$ 属于全商

环 $Q(R)$ R。根据（见 [1]）可知， $S = \mathfrak{m}^r (t^{rn_1})$， ~~$R \subseteq$~~ $S \subseteq R$ 以及 $e_1 = \ell_R(S/R)$，其中 R 是 $Q(R)$ 中 R 的整闭包。注意

$$\begin{aligned} S &= R[\frac{\mathfrak{m}}{(t^{n_1})}] = R[\frac{(t^{n_1}, t^{n_2}, \ldots, t^{n_e})}{(t^{n_1})}] = R[t^{n_2-n_1}, t^{n_3-n_1}, \ldots, t^{n_e-n_1}] \\ &= k[[t^{n_1}, \ldots, t^{n_e}, t^{n_2-n_1}, t^{n_3-n_1}, \ldots, t^{n_e-n_1}]] \\ &= k[[t^{n_1}, t^{n_2-n_1}, t^{n_3-n_1}, \ldots, t^{n_e-n_1}]]. \end{aligned}$$

因此，

$$\begin{aligned} e_1(R) &= \ell_R(S/R) = \dim_k k[[H']]/k[[H]] \\ &= \dim_k k[[t]]/k[[H]] - \dim_k k[[t]]/k[[H']] \\ &= g(H) - g(H'). \end{aligned}$$

□

命题 3.2 使我们能够计算某些特殊数值半群的第一希尔伯特系数。

例 3.3. 设 $H = \langle a, b\rangle$ 是满足 $a < b$ 的数值半群。则由命题 3.2 与 [6,命题 2.13], ，我们有

$$\begin{aligned} e_1(R) &= g(\langle a, b\rangle) - g(\langle a, b-a\rangle) \\ &= \frac{ab-a-b+1}{2} - \frac{a(b-a)-a-(b-a)+1}{2} \\ &= \frac{a(a-1)}{2}. \end{aligned}$$

例 3.4. 设 a, d, n 为正整数，使得最大公约数$(a, d) = 1$。设 $H = \langle a, a+d, \ldots, a+nd\rangle$ 为由等差数列生成的数值半群。 H 的膨胀为 $H' = \langle a, d\rangle$ ，从而 $g(H') = \frac{ad-a-d+1}{2}$ 。设 $R = k[[H]]$。我们将 $a = ~~qn+r~~$ 写成满足 $0 \le r < n$。我们对所有 $1 \le i \le q$ 如下定义 H 的子集 A_i

$$A_i := \{ia + jd \mid (i-1)n + 1 \le j \le in\}.$$

于是，得益于 [8] ，我们有

(i) 若 $r = 0$，则 $\mathrm{Ap}(H, a) = \{0\} \cup A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{q-1} \cup (A_q \setminus \{qa + qnd\})$.

(ii) 若 $r = 1$，则 $\mathrm{Ap}(H, a) = \{0\} \cup A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{q-1} \cup A_q$.(iii) 若 $2 \le r \le n$，则 $\mathrm{Ap}(H, a) = \{0\} \cup A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_q \cup \{(q+1)a + jd \mid qn + 1 \le j \le qn + r - 1\}$.

因此，由引理 3.1 可得

(1) If $r = 0$ or $r = 1$, then $e_1(R) = \dfrac{nq(q+1)}{2}$.

(2) If $2 \le r \le n$, then $e_1(R) = \dfrac{nq(q+1)}{2} + \dfrac{r-1}{2}(2a(q+1) + 2qn + r)$.

注 3.5. 对于每个 $0 \le i \le n_1 - 1$，我们令 $\omega_i = \min\{h \in H \mid h \equiv i \pmod{n_1}\}$and $\omega_i' = \min\{h \in H' \mid h \equiv i \pmod{n_1}\}$。显然， $\omega_0 = \omega_0' = 0$ 且 $\mathrm{Ap}(H, n_1) = \{\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_{n_1-1}\}$，$\mathrm{Ap}(H', n_1) = \{\omega_0', \omega_1', \ldots, \omega_{n_1-1}'\}$。对于每个 $i > 0$，我们将 $\omega_i = k_i n_1 + i, \omega_i' = \ell_i n_1 + i$ 写成某些正整数 k_i, ℓ_i 的形式。首先，我们看到

$k_i-\ell_i\geq 1$对所有 $1\leq i\leq n_1-1$都成立。事实上，对于每个 $1\leq i\leq n_1-1$，令 $\omega_i=c_1n_1+\cdots+c_en_e$满足 $c_j\geq 0$。由于 $\omega_i>0$，存在 $c_j\geq 1$。因此

$$\omega_i-n_1=(c_1+\cdots+c_e-1)n_1+c_2(n_2-n_1)+\cdots+c_e(n_e-n_1)\in H'.$$

注意，$\omega_i-n_1\equiv i$（模 n_1）。这意味着 $\omega_i-n_1\geq\omega'_i$。因此，$k_i-\ell_i\geq 1$。现在注意到，根据引理 3.1，$g(H)=\sum_{i=1}^{n_1-1}k_i$ 且 $g(H')=\sum_{i=1}^{n_1-1}\ell_i$，由此可得

$$e_1(R)=\sum_{i=1}^{n_1-1}(k_i-\ell_i).$$

在数值半群具有最大嵌入维数的情形下，注 3.5 中的等式可用于有效计算 $e_1(R)$。

引理 3.6。设 $R=k[[H]]$，其中 $H=\langle n_1,n_2,\ldots,n_e\rangle$ 是一个具有最大嵌入维数的数值半群，即 $n_1=e$。则 $e_1=n_1-1$。

证明。对每个 $1\leq i\leq n_1-1$，我们写作 $\omega'_i=c'_1n_1+c'_2(n_2-n_1)\cdots+c'_e(n_e-n_1)$，其中 $c'_j\geq 0$。由于 $\omega'_i>0$ 且 $\omega'_i\neq 0$（模 n_1），存在 $c'_j\geq 1$ 使得 $j\geq 2$。不妨设 $\omega'_i=c'_1n_1+c'_2(n_2-n_1)\cdots+c'_k(n_k-n_1)$，其中对所有 $2\leq k\leq e$ 都有 $c'_j\geq 1$。于是 $(c'_1+1)n_1+c'_2(n_2-n_1)=[((c'_1+1)n_1+n_2-n_1)+n_2-n_1]+\cdots+n_2-n_1\in H$。这里注意，由于 H 具有最大嵌入维数，当 $x,y\in H\setminus\{0\}$ 时，$x+y-n_1\in H$。类似地，我们很容易得到，对所有 $2\leq k\leq e$，都有 $\omega'_i+n_1\in H$。由此可得 $\omega'_i+n_1\geq\omega_i$，进而 $k_i-\ell_i\leq 1$。结合注 3.5，我们得到 $k_i-\ell_i=1$。这就证明了

$$e_1=\sum_{i=1}^{n_1-1}1=n_1-1.$$

□

现在，令 a,d 为正整数，并假设 $2\leq d<a$。令 $n_1=a,n_2=a+1,n_3=a+d$ 和 $H=\langle a,a+1,a+d\rangle$ 为一个数值半群。令 $R=k[[H]]$ 为与 H 相关联的数值半群环，且 $e_1(R)$ 为 R的第一希尔伯特系数。令 $S=k[[x,y,z]]$ 为形式幂级数环，并令 $\varphi\colon S\to R$ 为一个由 $\varphi(x)=t^{n_1},\varphi(y)=t^{n_2},\varphi(z)=t^{n_3}$ 给出的 k-代数同态。记 $a=dq+r$，其中 $0\leq r\leq d-1$.

命题 3.7。假设 $a\geq d^2-3d$。则

$$e_1(R)=\frac{a(a-1)}{2}-(d-1)\left(\frac{dq(q-1)}{2}+rq\right).$$

证明。根据假设 $a\geq d^2-3d$ 和命题 2.9，对于每个 $i=0,1,\ldots,a-1$，我们有

$$\omega_i=i(a+1)-(d-1)a\left\lfloor\frac{i}{d}\right\rfloor.$$

因此，由引理 3.1 可得

$$g(H)=\frac{1}{a}\sum_{i=0}^{a-1}\omega_i-\frac{a-1}{2}.$$

注意到

$$\sum_{i=0}^{a-1}\omega_i=(a+1)\sum_{i=0}^{a-1}i-(d-1)a\sum_{i=0}^{a-1}\left\lfloor\frac{i}{d}\right\rfloor=(a+1)\frac{a(a-1)}{2}-(d-1)a\sum_{i=0}^{a-1}\left\lfloor\frac{i}{d}\right\rfloor.$$

另一方面，由于 $a=qd+r$，每个整数 $k=0$，1，……，$q-1$ 在 $i=0$，……，$a-1$所对应的值 $\lfloor i/d\rfloor$ 中恰好出现 d次，而值 q出现 r次。因此，

$$\sum_{i=0}^{a-1}\left\lfloor\frac{i}{d}\right\rfloor=d\sum_{k=0}^{q-1}k+rq=d\frac{q(q-1)}{2}+rq.$$

我们得到

$$\sum_{i=0}^{a-1}\omega_i=(a+1)\frac{a(a-1)}{2}-(d-1)a\left(d\frac{q(q-1)}{2}+rq\right).$$

因此，

$$e_1(R)=g(H)=\frac{a(a-1)}{2}-(d-1)\left(d\frac{q(q-1)}{2}+rq\right).$$

□

命题 3.8. 假设 $q+r\geq d-2$且 H不是对称的。则下列断言成立。

1) *If* $1\leq r\leq d-2$ *then* $e_1(R)=\dfrac{1}{2d}(a^2+d(d-2)a-r(d-1)(d-r)$.
2) *If* $r=d-1$ *then* $e_1(R)=\dfrac{1}{2d}(a^2+d(d-2)a-(d-1)^2)$.

证明. 注意，由于 $H=\langle a,\ a+1,\ a+d\rangle$，膨胀 $H'=\mathbb{N}$。因此 H'的亏格为 $g(H')=0$。由命题 3.2可知，$e_1(R)=g(H)$。现在，根据定理 2.11，(♮)中的参数由下式给出

$$\alpha=d-1,\beta=d-r,\gamma=i,\alpha'=q+r+2-d,\beta'=r,\text{ and }\gamma'=1.$$

- 如果 $r=d-1$，那么 $\beta'(a+1)=r(a+1)>(d-1)a=\alpha a$。在这种情况下，由 [5], 可得

$$g(H)=\frac{\alpha\beta\gamma+\mathrm{F}(H)+1}{2}=\frac{1}{2d}(a^2+d(d-2)a-(d-1)^2).$$

- 如果 $1\leq r\leq d-2$，那么 $\beta'(a+1)=r(a+1)<(d-1)a=\alpha a$。在这种情况下，再次由 [5],可得

$$g(H)=\frac{\alpha'\beta'\gamma'+\mathrm{F}(H)+1}{2}=\frac{1}{2d}(a^2+d(d-2)a-r(d-1)(d-r).$$

由此可得所需结论。 □

注 3.9. 如果 $d\geq 5$ 且 $a=qd+r$ 满足 $1\leq q+r\leq d-3$，我们尚未得知 $e_1(R)$ 的一般公式。下面给出 $q=r=1$ 情况下的结果。设$H=\langle d+1,d+2,2d+1\rangle$ 满足 $d\geq 5$。那么，由引理 2.14 可得

- 如果 $d\equiv 0$ （mod 3），那么且 $e_1(R)=\dfrac{1}{3}d^2+\dfrac{1}{3}d.$
- 若 $d\equiv 1$(模 3)，则 $e_1(R)=\dfrac{1}{3}d^2+\dfrac{1}{3}d+\dfrac{1}{3}.$

- 若 $d \equiv 2$ (模 3)，则 $e_1(R) = \frac{1}{3}d^2 + \frac{1}{3}d.$

Acknowledgments

我们感谢 Duong Thi Huong、Nguyen Tuan Long 和 Vu Thi Minh Phuong 的宝贵讨论。

References

[1] S. Goto, N. Matsuoka, T.T. Phuong, 近似戈伦斯坦环，《代数杂志》，**379**(2013) 355–381.[2] J. Herzog, 阿贝尔半群及半群环的生成元与关系，《数学手稿》，**3**(1970), 175–193.
[3] J. Herzog, 何时正则序列是超正则的？，《名古屋数学杂志》，**83**(1981) 183–195.[4] D. V. Kien, N. Matsuoka, 具有行列式定义理想的最大嵌入维数数值半群环，数值半群（施普林格 *INdAM* 丛书），**40** (2020), 185–196.[5] H. Nari, T. Numata and K. I. Watanabe, 由三个元素生成的数值半群的亏格，《代数杂志》，**358**(2012), 67–73.[6] J. C. Rosales and P. A. García-Sánchez, 数值半群，施普林格数学发展丛书，第**20** 卷(2009).[7] D. Kirby, 一维局部环的约化数，《伦敦数学学会杂志》，第 s2-10 卷，第 4 期，1975，471–481.[8] G. L. Matthews, 关于由广义等差数列生成的数值半群，《代数通讯》，32(9) (2004), 3459–3469.[9] A. M. Robles-P´erez 和 J. C. Rosales，具有单调 Ap´ery 集、固定重数和比率的数值半群，《巴西数学学会通报》，新系列 (2024) 55:13.[10] P. Gimenez, I. Sengupta, H. Srinivasan, 某些仿射单项式曲线的最小自由分解，载于：A. Corso、C. Polini（编），《交换代数及其与几何的联系》，PASI 2009，载于：《当代数学》，第 555 卷，美国数学会，2011，第 87–95 页。

Department of Mathematics, Hanoi Pedagogical University 2, 32 Nguyen Van Linh street, Xuan Hoa, Phu Tho, Vietnam电子邮箱地址: dovankien@hpu2.edu.vn

Department of Mathematics, FPT University, Hanoi, Vietnam电子邮箱地址: quyph@fe.edu.vn