arXiv:2601.21850v1 [math.RT] 29 Jan 2026

临界层上的仿射 $\mathfrak{gl}_{n|1}$ 中心与伪微分算子

DRAŽEN ADAMOVIĆ、Boris Feigin 和 Shigenori Nakatsuka

Abstract. 我们证明，临界层上仿射李代数 $\widehat{\mathfrak{gl}}_{n|1}$ 的中心由取值于卡当子代数的伪微分算子 $(\partial_z - u_1(z)) \cdots (\partial_z - u_n(z))(\partial_z + u_{n+1}(z))^{-1}$ 展开式中的系数生成。这是有限情形下 Harish-Chandra 同构的仿射类比。

证明的关键在于将中心与临界层上 $\mathfrak{gl}_{n|1}$ 的正则 $\mathcal{W}$-超代数的海森堡余集相识别，其伴随分次代数可实现为仿射超对称多项式。基于此，我们推导出中心的特征标公式，该公式与满足坑条件的平面分拆生成函数一致。我们还证明，一般水平上的海森堡余集也可用伪微分算子来作类似解释，这些算子是临界层上相应算子的变形。

1. Introduction

有限维约化李代数的泛包络代数之中心的描述，在表示论研究中起着至关重要的作用。Harish-Chandra 同构将中心 $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ 与卡当子代数$\mathfrak{h}$的对称代数中的魏尔群不变量代数等同起来。这为 BGG 范畴的结构提供了基本洞见，例如链接原理。

仿射情形下的类似结论由 Drinfeld 提出猜想，并由作者之一与 E. Frenkel 证明 [16]。更确切地说，人们考虑仿射李代数 $\widehat{\mathfrak{g}}_\kappa$在层 κ，并研究完备包络代数的中心 $U_\kappa(\widehat{\mathfrak{g}})$。这一完备化反映了如下事实：$\widehat{\mathfrak{g}}_\kappa$ 是环代数的一维中心扩张 $\mathfrak{g}((z))$，由层 κ 参数化。中心在一个特殊的层上是非平凡的，该层称为临界层 κ_c。当 $\kappa = \kappa_c$ 时，中心被等同于某些微分算子的模空间上的正则函数，这些微分算子称为 $\check{\mathfrak{g}}$-opers，位于穿孔圆盘上，其中 $\check{\mathfrak{g}}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的朗兰兹对偶。这给出了光滑 $\widehat{\mathfrak{g}}_{\kappa_c}$-表示范畴的“谱分解”，由 $\check{\mathfrak{g}}$-opers 参数化，这是几何朗兰兹纲领最早的结果之一 [21]。

光滑 $\widehat{\mathfrak{g}}_{\kappa_c}$-模范畴与仿射顶点代数 $V^{\kappa_c}(\mathfrak{g})$ 上的模范畴有典范的对应。事实上，顶点代数的表述非常适合这一语境：$U_{\kappa_c}(\widehat{\mathfrak{g}})$ 及其中心分别自然地与 $V^{\kappa_c}(\mathfrak{g})$ 的包络代数及其中心 $\mathfrak{z}(V^{\kappa_c}(\mathfrak{g}))$ 作为顶点代数相对应。在这一表述下，我们得到 Harish-Chandra 同构的仿射类比

$$\mathfrak{z}(V^{\kappa_c}(\mathfrak{g})) \simeq \mathcal{W}^{\kappa_c}(\mathfrak{g}) \subset \pi^0_{\mathfrak{h}},$$

其中，$\pi^0_{\mathfrak{h}}$ 是与层为零的卡当子代数$\mathfrak{h}$ 相关联的海森堡顶点代数，而 $\mathcal{W}^{\kappa_c}(\mathfrak{g})$是由筛选算子的联合核刻画的子代数，是有限情形下魏尔群不变量的类比。当 $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_n$时，$\mathcal{W}^{\kappa_c}(\mathfrak{gl}_n)$由以下展开式的系数生成：

微分算子

$$(\partial_z - u_1(z)) \cdots (\partial_z - u_{n-1}(z))(\partial_z - u_n(z))$$

或者用符号表示为 $(\partial - u_1) \cdots (\partial - u_{n-1})(\partial - u_n)$，在顶点代数的语言中，其中 u_i 是卡当子代数 $\mathfrak{h}$ 的基。代数 $\mathcal{W}^{\kappa_c}(\mathfrak{g})$ 称为 $\mathcal{W}$- 代数，定义为 $V^{\kappa}(\mathfrak{g})$ 的 BRST 约化

$$\mathcal{W}^{\kappa}(\mathfrak{g}) = \mathrm{H}^0_{\mathbb{O}_{\mathrm{reg}}}(V^{\kappa}(\mathfrak{g}))$$

与临界层处的正则幂零轨道 $\mathbb{O}_{\mathrm{reg}} \subset \mathfrak{g}$ 相关联 $\kappa = \kappa_c$。这是 Kostant 切片的量子仿射类比 [32], ，后者自然同构于 $\mathfrak{g}//G$ 伴随群 G 作用于 $\mathfrak{g}$所得的 GIT 商。

$\mathcal{W}$-代数具有一种称为 Feigin-Frenkel 对偶的对偶性 [16],

$$\mathcal{W}^{\kappa}(\mathfrak{g}) \simeq \mathcal{W}^{\check{\kappa}}(\check{\mathfrak{g}})$$

其中层 κ，$\check{\kappa}$ 满足对偶关系。这是临界层处情形（κ，$\check{\kappa}$）$=(\kappa_c,\ \infty)$ 的变形；它恢复了上文提到的通过 $\check{}\mathfrak{g}$-opers 对 $\mathfrak{z}(V^{\kappa_c}(\mathfrak{g}))$ 的描述，并在量子几何朗兰兹纲领中发挥重要作用，例如 [7, 24]。

虽然 $\mathcal{W}$-代数 $\mathcal{W}^{\kappa}(\mathfrak{g})$ 的表示论可作为 $\widehat{\mathfrak{g}}_{\kappa}$-模的 Whittaker 模型，但推广到与一般幂零轨道相关的 $\mathcal{W}$-代数 $\mathcal{W}^{\kappa}(\mathfrak{g},\ \mathbb{O})$，则与退化 Whittaker 模型有关。对于 $\mathcal{W}^{\kappa}(\mathfrak{g},\ \mathbb{O})$ 的 Feigin-Frenkel 对偶，或其几何/范畴类比，已在数学和物理学的各种背景下得到研究（例如[11, 13, 14, 23]）。事实证明，这些研究与和基本经典李超代数相关的 $\mathcal{W}$-超代数 $\mathcal{W}^{\kappa}(\mathfrak{g},\ \mathbb{O})$ 不谋而合。这促使我们重新审视如何通过微分算子描述中心 $\mathfrak{z}(V^{\kappa_c}(\mathfrak{g}))$ 这一问题；对于基本经典李超代数而言，该问题数十年来一直悬而未决。

下文给出的本文主要结果通过使用伪微分算子解决了这一问题，并为仿射李超代数 $\widehat{\mathfrak{gl}_{n|1}}$ 建立了相关的组合结果；它们是超情形中第一个非平凡的族。

定理 A (定理6.3/6.4/7.1)。

(1) 存在一个顶点代数嵌入

$$\mathfrak{z}(V^{\kappa_c}(\mathfrak{gl}_{n|1})) \hookrightarrow \pi^0_{\mathfrak{h}},$$

其像由伪微分算子的系数生成

$$(\partial_z - u_1(z)) \cdots (\partial_z - u_n(z))(\partial_z + u_{n+1}(z))^{-1}.$$

(2) 在 $\mathfrak{z}(V^{\kappa_c}(\mathfrak{gl}_{n|1}))$ 上存在一个滤过，其关联分次微分代数同构于仿射超对称多项式代数：

$$\operatorname{gr}\mathfrak{z}(V^{\kappa_c}(\mathfrak{gl}_{n|1})) \simeq \Lambda^{n|1}_{\mathrm{aff}}.$$

(3) 中心 $\mathfrak{z}(V^{\kappa_c}(\mathfrak{gl}_{n|1}))$ 的 q-特征标由下式给出

$$\mathrm{ch}[\mathfrak{z}(V^{\kappa_c}(\mathfrak{gl}_{n|1}))](q) = \frac{\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m q^{\frac{1}{2}m(m+1)}(q^{m+1};q)_{n-1}}{(q;q)^2_{\infty}(q,\cdots,q^{n-1};q)_{\infty}}.$$

我们注意到，Molev 和 Mukhin 曾猜想（2） [38]（已对$n = 1,\ 2$ [2, 38]成立），并且这意味着中心 $\mathfrak{z}(V^{\kappa_c}(\mathfrak{gl}_{n|1}))$ 由 Molev 和 Ragoucy 构造的高阶 Segal-Sugawara 向量强生成 [39]。（3）右端出现的q级数与满足坑条件（2的平面分拆，$n+1$）（推论 7.3）的生成函数一致。这证实了 Molev 和 Mukhin 的一个猜想，并推广了情形 $n = 1$ [1, 38]。

定理 A 证明的关键观察是对这些中心的识别

$$\mathfrak{z}(V^{\kappa_c}(\mathfrak{gl}_{n|1})) \simeq \mathfrak{z}(\mathcal{W}^{\kappa_c}(\mathfrak{gl}_{n|1}))$$

（定理 6.3）。这是对我们先前工作 [2], 中情形 $n = 2$ 的推广，该情形在将 $\mathfrak{z}(V^{\kappa_c}(\mathfrak{gl}_{2|1}))$ 与 $\mathfrak{gl}_2$ 的副费米子顶点代数 $K^\infty(\mathfrak{gl}_2)$ 的大层极限等同起来时起了主要作用。我们注意到，在非超情形中，将中心 $\mathfrak{z}(\mathcal{W}^{\kappa_c}(\mathfrak{g}, \mathbb{O}))$ 与 $\mathfrak{z}(V^{\kappa_c}(\mathfrak{g}))$ 等同在一般情形下是众所周知的 [5, 9]。中心 $\mathfrak{z}(\mathcal{W}^{\kappa_c}(\mathfrak{gl}_{n|1}))$ 可以形变到其他层，因为它是 Heisenberg 余集子代数的特化

$$C^\kappa(\mathfrak{gl}_{n|1}) = \mathrm{Com}\left(\pi_J, \mathcal{W}^\kappa(\mathfrak{gl}_{n|1})\right) \subset \mathcal{W}^\kappa(\mathfrak{gl}_{n|1})$$

在临界层（定理 3.2），详见第 3.2 节。该余集子代数C^κ（$\mathfrak{gl}_{n|1}$）在一般水平下具有若干与正则 $\mathcal{W}$-代数相似的性质，例如 Feigin-Frenkel 对偶的一个变体 [13, 18]。事实上，定理 A 中的结果可以形变到临界层之外。其中有如下由 T. Proch´azka 最初在物理学中猜想的结果（例如 [40]）。

定理 B (定理3.6)。 存在一个顶点代数嵌入

$$C^\kappa(\mathfrak{gl}_{n|1}) \hookrightarrow \pi_{\mathfrak{t}}^{k+\mathrm{h}^\vee}$$

对于 $k \neq -\mathrm{h}^\vee + 1$，其像在一般水平下由伪微分算子的系数生成

$$(\partial_z + \varepsilon t_1(z)) \cdots (\partial_z + \varepsilon t_n(z))(\partial_z - \varepsilon t_{n+1}(z))^\varepsilon,$$

其中 $\varepsilon = 1/(-1 + k + \mathrm{h}^\vee)$。

这一结果意味着，中心 $\mathfrak{z}(V^{\kappa_c}(\mathfrak{gl}_{n|1}))$ 作为定理 A (1) 中伪微分算子的正则函数实现，继承了自然的泊松顶点代数结构；该结构限制在 $\pi_{\mathfrak{h}}^0$ (命题6.5)上的标准结构。

在未来工作中，我们计划通过伪微分算子来描述基本经典（单）李超代数的中心 $\mathfrak{z}(V^{\kappa_c}(\mathfrak{g}))$（希望与超opers [42] 和 Gaudin 模型 [34, 36]有关），并将球面 $V^{\kappa_c}(\mathfrak{g})$-表示的范畴与这类算子上的拟凝聚层联系起来。

概要。本文其余部分组织如下。我们在第 2 节首先回顾仿射顶点超代数与 $\mathcal{W}$-超代数。在第 3 节中，我们研究正则 $\mathcal{W}$-超代数 $\mathcal{W}^\kappa(\mathfrak{gl}_{n|1})$ 的海森堡余集，并证明定理 B。在第 4 节中，我们基于 Feigin-Semikhatov 对偶确定 $\mathcal{W}^\kappa(\mathfrak{gl}_{n|1})$ 的强生成元，并描述临界层$\kappa = \kappa_c$处 $\mathcal{W}^\kappa(\mathfrak{gl}_{n|1})$ 的中心。在第 5 节中，我们回顾 $\mathcal{W}$-超代数的 Wakimoto 实现，并将 $\mathcal{W}^{\kappa_c}(\mathfrak{gl}_{n|1})$ 与 $V^{\kappa_c}(\mathfrak{gl}_{n|1})$ 的中心联系起来。在此基础上，我们在第 6 节和第 7 节中证明定理 A。我们提出关于临界层处正则 $\mathcal{W}$-超代数 $\mathcal{W}^\kappa(\mathfrak{gl}_{n|m})$ 结构的猜想，并在第 8 节中给出第一个非平凡例子。

致谢。 我们谨感谢 T. Arakawa 和 M. Gorelik 在整个研究过程中给予的关注。S.N. 感谢 T. Proch´azka 进行有益的讨论。D.A. 部分获得克罗地亚科学基金会项目 IP- 2022-10-9006 的资助，并获得项目“作为量子与复杂系统及李代数表示科学卓越中心一部分的前沿研究实施及其应用”的资助，该项目的资助编号为 PK.1.1.10.0004，由欧盟通过欧洲区域发展基金–竞争力与凝聚力计划共同资助。2021—2027。B.F. 部分获得 ISF 3037 2025 1 1 的资助。

2. $\mathcal{W}$-SUPERALGEBRAS

2.1.仿射顶点超代数。 令 $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_{m|n}$ 为与向量超空间 $V = \mathbb{C}^{m|n}$ 相关联的一般线性李超代数，并令 $e_{i,\ j}$ （i，j =1，……，$m+n$）为（i，j）阶初等矩阵。我们取 $\mathfrak{gl}_{m|n}$ 上的偶超对称不变双线性形式为

$$\kappa = (k + \mathrm{h}^\vee)\kappa_V - \frac{1}{2}\kappa_{\mathfrak{g}}$$

其中 $\mathrm{h}^\vee = n - m$ 是对偶 Coxeter 数，而 κ_V和 $\kappa_{\mathfrak{g}}$ 分别是 V上的超迹和 Killing 形式，即

$$\kappa_V(u, v) = \mathrm{str}_V(uv), \quad \kappa_{\mathfrak{g}} = \mathrm{str}_{\mathfrak{g}}(\mathrm{ad}_u\, \mathrm{ad}_v).$$

以下将 κ 与 k 等同。仿射李代数 $\widehat{\mathfrak{g}}$ 是环代数 $\mathfrak{g}[t^{\pm 1}]$的中心扩张

$$0 \to \mathbb{C}K \to \widehat{\mathfrak{g}} \to \mathfrak{g}[t^{\pm 1}] \to 0$$

其李括号为

$$[u_{(p)}, v_{(q)}] := [u, v]_{(p+q)} + \kappa(u, v)p\delta_{p+q,0}K, \quad [K, \widehat{\mathfrak{g}}] = 0$$

其中 $u_{(p)} = ut^p$。与 $\mathfrak{g}$ 相关、层为 κ 的（泛）仿射顶点超代数定义为抛物诱导

$$V^\kappa(\mathfrak{g}) := U(\widehat{\mathfrak{g}}) \otimes_{U(\mathfrak{g}[t] \oplus \mathbb{C}K)} \mathbb{C}$$

由 $(\mathfrak{g}[t] \oplus \mathbb{C}K)$-模 $\mathbb{C}$ 诱导而来，其中 $\mathfrak{g}[t]$ 的作用为 0，K 的作用为恒等映射，并赋予唯一的顶点代数结构，其单位元为 $\mathbf{1} = 1 \otimes 1$，平移算子 ∂ 满足 $[\partial, u_{(p)}] = -pu_{(p-1)}$，态场对应 $Y(\cdot, z)$ 满足 $Y(u, z) = \sum u_{(p)} z^{-p-1}$，其中 u 与 $u_{(-1)} \otimes \mathbf{1}$ 等同。使用 λ-括号代替对易子公式会更方便

$$[a_\lambda b] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} a_{(n)} b \lambda^n$$

而不是对易子公式

$$[Y(a, z), Y(b, w)] = \sum_{n=0}^{\infty} Y(a_{(n)}b, w) \frac{1}{n!} \partial_w^n \delta(z - w)$$

利用 δ函数 $\delta(z - w) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} z^n w^{-n-1}$。

注意，对于 $m \neq n$，除非另有说明，我们将考虑分解 $\mathfrak{gl}_{m|n} = \mathfrak{sl}_{m|n} \oplus \mathbb{C}\Omega$，其中 $\Omega = \sum e_{i,i}$ 诱导出一个顶点超代数同构

$$V^\kappa(\mathfrak{gl}_{m|n}) \simeq V^\kappa(\mathfrak{sl}_{m|n}) \otimes \pi_\Omega^\kappa. \tag{2.1}$$

这里，π_Ω^κ 是海森堡顶点代数 $V^\kappa(\mathfrak{gl}_1)$，其 $\mathfrak{gl}_1 = \mathbb{C}\Omega$满足：对于所有 $u \in \mathfrak{sl}_{m|n}$，都有 $[u_\lambda \Omega] = 0$。另一方面，

$$[u_\lambda v] = [u, v] + k\kappa_V(u, v), \quad [\Omega_\lambda \Omega] = (m - n)(k + \mathrm{h}^\vee)\lambda$$

对于 $u, v \in \mathfrak{sl}_{m|n}$成立。

层 $\kappa = -\frac{1}{2}\kappa_{\mathfrak{g}}$记作 κ_c，称为临界层；双线性形式显式地表示为

$$\kappa_c(e_{i,j}, e_{p,q}) = \delta_{i,j}\delta_{p,q}(-1)^{p(i)+p(q)} - (m - n)\delta_{i,j}\delta_{p,q}(-1)^{p(i)}$$

其中 $p(i)$表示奇偶性；若 $i \leqslant m$ 则为0（分别地，若 $i > m$则为1）。

给定顶点超代数 V和子代数 W，余集 $\mathrm{Com}(W, V)$ 是由下式定义的子代数

$$\mathrm{Com}(W, V) := \{u \in V; [Y(u, z), Y(v, w)] = 0 \ (\forall v \in W)\}.$$

特别地，余集子代数 $\mathfrak{z}(V) := \mathrm{Com}(V,\ V)$ 称为 V 的中心。对于单李代数 $\mathfrak{g}$，已知中心 $\mathfrak{z}(V^\kappa(\mathfrak{g}))$ 在 $\kappa \neq \kappa_c$ 层 $\mathbb{C}$ 是平凡的，而在临界层 $\kappa = \kappa_c$ 则非平凡。其差异源于所谓的 Segal-Sugawara 共形向量 L 的存在，该向量由下式给出

$$L = \frac{1}{k+\mathrm{h}^\vee} S, \qquad S = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\dim \mathfrak{g}} (-1)^{p(x_i)} x_i x^i$$

其中 x_i 是 $\mathfrak{g}$ 的一组基，其对偶基为 x^i，满足 $\kappa_V(x_i, x^j) = \delta_{i,j}$。而 S 对所有层均有定义，且满足

$$[S_\lambda u] = (k+\mathrm{h}^\vee)(\partial u + u\lambda)$$

对所有 $u \in \mathfrak{g}$，L 仅在临界层之外有定义。上述公式表明 S 在 $\kappa = \kappa_c$ 处位于中心，而重新标度后的 L 给出一个锥形内部分次结构，从而对所有 $\kappa \neq \kappa_c$ 蕴含 $\mathfrak{z}(V^\kappa(\mathfrak{g})) = \mathbb{C}$。

2.2. $\mathcal{W}$-超代数。 在有限情形下，基本经典单李超代数 $\mathfrak{g}$ 的中心 $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \subset U(\mathfrak{g})$ 的描述是通过 Harish-Chandra 同态得到的

$$\xi : U(\mathfrak{g}) \twoheadrightarrow U(\mathfrak{h})$$

其中 $\mathfrak{h}$ 是一个卡当子代数，并称为 Harish-Chandra 同构，见[37]。在偶情形下，它给出同构 $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \simeq U(\mathfrak{h})^W$，其中 W 是 Weyl 群。另一种方法是对 Kostant 切片进行量子化，该切片定义为利用正则（亦称主）$\mathfrak{sl}_2$-三元组 $\{e,h,f\} \subset \mathfrak{g}$得到的子簇 $\mathscr{S} = f + \mathfrak{g}^e \subset \mathfrak{g}$。这样的三元组在伴随群 G的共轭作用下唯一存在，该伴随群的李代数为 $\mathfrak{g}_0$。于是，$\mathscr{S}$ 同构于范畴商 $\mathfrak{g}//G_0$。切片 $\mathscr{S}$ 是通过对与上幂零子代数 $\mathfrak{n}_+$ 及特征标 $\chi = \kappa_V(f,-)$ 相关联的幺幂群 N_+，对 $\mathfrak{g}$ 作哈密顿约化而得到的：$\mathfrak{n}_+ \to \mathbb{C}$。该哈密顿约化被量子化为 $U(\mathfrak{g})$ 的所谓 BRST 约化，从而得到 $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$，其顶点代数类比由 [16] 引入，用以描述中心 $\mathfrak{z}(V^{\kappa_c}(\mathfrak{g}))$；按构造，它可形变到其他层，并称为正则 $\mathcal{W}$-代数 $\mathcal{W}^\kappa(\mathfrak{g})$。

更一般地，$\mathcal{W}$-超代数是顶点超代数 [30, 31]，它们由与基本经典李超代数 $\mathfrak{g}$ 相关联的仿射顶点超代数 $V^\kappa(\mathfrak{g})$，经由层为 κ 时与一个 $\mathfrak{sl}_2$-三元组 $\{e,h,f\}$及一个良好$\frac{1}{2}\mathbb{Z}$-分次 Γ相关联的 BRST 约化 $\mathfrak{g} = \oplus_d \mathfrak{g}_d$得到。为简便起见，我们考虑分次 Γ 为偶的情形，即 $\mathbb{Z}$-分次。考虑$\mathfrak{g}_+ = \bigoplus_{d>0} \mathfrak{g}_d$，并取一组（奇偶齐次）基 e_α ($\alpha \in S_+$)，其结构常数为 $c^\gamma_{\alpha\beta}$，即$[e_\alpha, e_\beta] = \sum c^\gamma_{\alpha,\ \beta} e_\gamma$。

令 $\bigwedge^\bullet(\mathfrak{g}_+)$为由 ψ_α，$\psi^*_\alpha (\alpha \in S_+)$生成的带电费米子顶点超代数，它们的奇偶性与 e_α 相反，并满足 λ-括号

$$[\psi_{\alpha\lambda}\psi^*_\beta] = \delta_{\alpha,\beta}, \quad [\psi_{\alpha\lambda}\psi_\beta] = [\psi^*_{\alpha\lambda}\varphi^*_\beta] = 0.$$

接着，我们关联 BRST复形

$$C^\bullet_f(V^\kappa(\mathfrak{g})) := V^\kappa(\mathfrak{g}) \otimes \bigwedge{}^\bullet(\mathfrak{g}_+) \tag{2.2}$$

其配备的微分为 $d = \int Y(Q,z)\mathrm{d}z$ 其中

$$Q = \sum_{\alpha\in S_+} (-1)^{p(e_\alpha)}(e_\alpha + (f|e_\alpha))\psi^*_\alpha - \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta,\gamma\in S_+} (-1)^{p(e_\alpha)p(e_\gamma)} c^\gamma_{\alpha\beta}\psi_\gamma\psi^*_\alpha\varphi^*_\beta$$

其中 $(\cdot|\cdot)$ 表示 $\mathfrak{g}$ 上的归一化不变双线性形式。

由 [31], 可得上同调消失 $\mathrm{H}^{\neq 0}(C_f^\bullet(V^\kappa(\mathfrak{g}))) = 0$，且在第零上同调处得到的顶点超代数称为 $\mathcal{W}$-超代数，相伴于（$\mathfrak{g}, f, \Gamma$）在层 κ。由于它仅依赖于轨道 $\mathbb{O}$（包含f），且通常 Γ 是清楚的，我们将它记为

$$\mathcal{W}^\kappa(\mathfrak{g}, \mathbb{O}) = \mathrm{H}^0(C_f^\bullet(V^\kappa(\mathfrak{g}))).$$

注意，将 $V^\kappa(\mathfrak{g})$ 在 (2.2) 中替换为 $V^\kappa(\mathfrak{g})$-模 M，即可得到 $\mathcal{W}^\kappa(\mathfrak{g}, \mathbb{O})$-模，从而导出一个函子

$$\mathrm{H}_{\mathbb{O}}(-)\colon V^\kappa(\mathfrak{g})\text{-mod} \to \mathcal{W}^\kappa(\mathfrak{g}, \mathbb{O})\text{-mod}, \quad M \mapsto \mathrm{H}^0(C_f^\bullet(M)).$$

3. $\mathcal{W}$-SUPERALGEBRA $\mathcal{W}^\kappa(\mathfrak{gl}_{n|1})$ AND HEISENBERG COSET

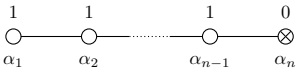
3.1. 正规 $\mathcal{W}$-超代数。令 $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_{n|1}$ 和 $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}^+ \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}^-$ 为标准三角分解。则 $\mathfrak{h}$ 由 $e_{1,1}, \cdots, e_{n+1,n+1}$ 张成； $\mathfrak{n}^+$ 由 $e_{1,2}, \cdots, e_{n,n+1}$ 生成，这些都是对应于单根 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$的根向量。我们将借助双线性形式 κ_V把 $\mathfrak{h}$与其对偶表示 $\mathfrak{h}^*$等同，因此

$$\alpha_1 = e_{1,1} - e_{2,2}, \cdots, \alpha_{n-1} = e_{n-1,n-1} - e_{n,n}, \quad \alpha_n = e_{n,n} + e_{n+1,n+1},$$

w它们自然地与余根 h_i 相对应，即对于 $i = 1, \cdots, n$，有 $h_i = \alpha_i$。令 $n > 1$，并取正则幂零元

$$f = e_{2,1} + e_{3,2} + \cdots + e_{n,n-1}$$

在 $\mathfrak{gl}_{n|1}$（分别在 $\mathfrak{sl}_{n|1}$）中，以及由加权邓肯图给出的良好分次 Γ



并将相应的 $\mathcal{W}$-超代数记为 $\mathcal{W}^\kappa(\mathfrak{gl}_{n|1})$（分别记为 $\mathcal{W}^\kappa(\mathfrak{sl}_{n|1})$）。

令 $\mathcal{A}_\psi$ 表示由奇场 ψ, ψ^* 生成的 bc-系统顶点超代数，它们满足 λ-括号关系

$$[\psi_\lambda \psi^*] = 1, \quad [\psi_\lambda \psi] = [\psi^*{}_\lambda \psi^*] = 0.$$

并令 $\pi_{\mathfrak{h}}^{k+\mathrm{h}^\vee}$ 表示与卡当子代数 $\mathfrak{h}$ 相关联的海森堡顶点代数。根据定义，它由场 $u_1, \cdots, u_{n+1}$ 生成，这些场分别对应于 $e_{1,1}, \cdots, e_{n+1,n+1}$，并满足 λ-括号关系

$$[u_{i\lambda} u_j] = (k + \mathrm{h}^\vee)\kappa_V(u_i, u_j)\lambda.$$

对于 $\lambda \in \mathfrak{h}^*$，令 $\pi_{\mathfrak{h}\,\lambda}^{k+\mathrm{h}^\vee}$, 表示 $\pi_{\mathfrak{h}}^{k+\mathrm{h}^\vee}$ 上最高权为 λ 的福克模。为方便后文，我们用 $\mathrm{e}^{\frac{1}{k+\mathrm{h}^\vee}\lambda}$ 表示一个非零最高权向量，因此它满足 ——

$$[u_{i\lambda} \mathrm{e}^{\frac{1}{k+\mathrm{h}^\vee}\lambda}] = \lambda(u_i)\mathrm{e}^{\frac{1}{k+\mathrm{h}^\vee}\lambda}.$$

引入以下筛选算子

$$S_i := \int Y(P_i \mathrm{e}^{-\frac{1}{k+\mathrm{h}^\vee}\alpha_i}, z)\mathrm{d}z\colon \mathcal{A}_\psi \otimes \pi_{\mathfrak{h}}^{k+\mathrm{h}^\vee} \to \mathcal{A}_\psi \otimes \pi_{\mathfrak{h},-\alpha_i}^{k+\mathrm{h}^\vee} \tag{3.1}$$

，其中 $P_i = \mathbf{1}$ 对应 $i = 1, \cdots, n-1$ 以及 $P_n = \psi$ 对应 $i = n$。由 [13], $\mathcal{W}^\kappa(\mathfrak{gl}_{n|1})$ 可表示如下。

定理 3.1 ([13])**.** 存在一个顶点超代数的嵌入

$$\Psi\colon \mathcal{W}^\kappa(\mathfrak{gl}_{n|1}) \hookrightarrow \mathcal{A}_\psi \otimes \pi_{\mathfrak{h}}^{k+\mathrm{h}^\vee}$$

它连续依赖于 κ，使得一般像可刻画为筛选算子的联合核

$$\mathcal{W}^{\kappa}(\mathfrak{gl}_{n|1}) \overset{\Psi}{\simeq} \bigcap_{i=1}^{n} \operatorname{Ker} S_i \subset \mathcal{A}_{\psi} \otimes \pi_{\mathfrak{h}}^{k+\mathrm{h}^{\vee}}.$$

注意到，该分解2.1自然地诱导出

$$\mathcal{W}^{\kappa}(\mathfrak{gl}_{n|1}) \simeq \mathcal{W}^{\kappa}(\mathfrak{sl}_{n|1}) \otimes \pi_{\Omega}^{\kappa}.$$

3.2. 海森堡余集。根据玻色子-费米子对应，顶点超代数 $\mathcal{A}_{\psi}$ 与格顶点超代数 $V_{\mathbb{Z}} = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \pi_{x同构nx}$，其中$\mathbb{Z} = \mathbb{Z}x$ 是配备双线性形式 $(nx,\ mx) = nm$的整格。基 x 与满足 λ-括号关系的 Heisenberg场相对应，$[x_{\lambda}x] = \lambda$且 $\pi_{x,\ nx}$ 是 π_x 上的福克模，其最高权向量 e^{nx} 满足$[x_{\lambda}\mathrm{e}^{nx}] = n\mathrm{e}^{nx}$。该同构定义为

$$\mathcal{A}_{\psi} \xrightarrow{\simeq} V_{\mathbb{Z}}, \quad \psi, \psi^{*} \mapsto \mathrm{e}^{x}, \mathrm{e}^{-x}, \tag{3.2}$$

并将 $\psi\psi^{*}$ 映射到 x。为方便起见，我们将它们视为同一个代数。

由定理3.1中的实现可知，$\mathcal{W}^{\kappa}(\mathfrak{gl}_{n|1})$包含一个 Heisenberg场

$$J = x + \varpi_n \tag{3.3}$$

其中 $\varpi_n = -u_{n+1}$ 是 $\mathfrak{gl}_{n|1}$的第 n个基本权。它满足 λ-括号关系

$$[J_{\lambda}J] = (1 - (k + \mathrm{h}^{\vee}))\,\lambda.$$

因此，当 $k \neq -\mathrm{h}^{\vee} + 1$, J 非退化时，$\mathcal{W}^{\kappa}(\mathfrak{gl}_{n|1})$ 作为海森堡顶点代数 π_J 上的模是半单的。记

$$C^{\kappa}(\mathfrak{gl}_{n|1}) = \operatorname{Com}\left(\pi_J, \mathcal{W}^{\kappa}(\mathfrak{gl}_{n|1})\right) \subset \mathcal{W}^{\kappa}(\mathfrak{gl}_{n|1}) \tag{3.4}$$

该海森堡余集子代数，并将 $\mathcal{W}^{\kappa}(\mathfrak{gl}_{n|1})$ 分解为

$$\mathcal{W}^{\kappa}(\mathfrak{gl}_{n|1}) \simeq \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} C_n^{\kappa}(\mathfrak{gl}_{n|1}) \otimes \pi_{J,n} \tag{3.5}$$

作为 $C^{\kappa}(\mathfrak{gl}_{n|1}) \otimes \pi_J$ 上的模，其中 $\pi_{J,\ n}$ 是由最高权向量 e^{n} 生成的 Fock π_J-模，该向量满足 $[J_{\lambda}\mathrm{e}^{n}] = n\mathrm{e}^{n}$。

得益于权模的半单 性，显然 that

$$C^{\kappa}(\mathfrak{gl}_{n|1}) \hookrightarrow \operatorname{Com}\left(\pi_J, \mathcal{A}_{\psi} \otimes \pi_{\mathfrak{h}}^{k+\mathrm{h}^{\vee}}\right) \simeq \pi_{\mathfrak{t}}^{k+\mathrm{h}^{\vee}}$$

其中 $\pi_{\mathfrak{t}}^{k+\mathrm{h}^{\vee}}$ 是由以下元素生成的海森堡顶点代数

$$t_1 = u_1, \cdots, t_n = u_n, t_{n+1} = u_{n+1} - (k + \mathrm{h}^{\vee})x, \tag{3.6}$$

它们满足 λ-括号关系

$$[t_{i\lambda}t_j] = 0, \quad (i \neq j), \qquad [t_{i\lambda}t_i] = \begin{cases} (k + \mathrm{h}^{\vee})\lambda, & (i \neq n+1), \\ (k + \mathrm{h}^{\vee})(k + \mathrm{h}^{\vee} - 1)\lambda, & (i = n+1). \end{cases} \tag{3.7}$$

于是，借助定理 $C^{\kappa}(\mathfrak{gl}_{n|1})$，我们得到了 3.1 的如下刻画。

定理 3.2。
(1) ([13]) 对于 $k \neq -\mathrm{h}^{\vee} + 1$，嵌入 ρ 诱导出嵌入

$$\Psi\colon C^{\kappa}(\mathfrak{gl}_{n|1}) \hookrightarrow \pi_{\mathfrak{t}}^{k+\mathrm{h}^{\vee}}$$

它连续依赖于 κ ，因此一般像可表征为筛选算子的联合核

$$C^\kappa(\mathfrak{gl}_{n|1}) \overset{\Psi}{\simeq} \bigcap_{i=1}^{n} \operatorname{Ker} S_i \subset \pi_{\mathfrak{t}}^{k+\mathrm{h}^\vee}.$$

(2) 对于临界层 $\kappa = \kappa_c$，即 $k = -\mathrm{h}^\vee$，

$$C^{\kappa_c}(\mathfrak{gl}_{n|1}) = \mathfrak{z}(\mathcal{W}^{\kappa_c}(\mathfrak{gl}_{n|1})).$$

证明。 **(1)** 由定理 3.1显然。**(2)** 根据构造，我们有 $C^{\kappa_c}(\mathfrak{gl}_{n|1}) \supset \mathfrak{z}(\mathcal{W}^{\kappa_c}(\mathfrak{gl}_{n|1}))$。在临界层 $\kappa = \kappa_c$，我们有

$$\pi_{\mathfrak{t}}^{h+\mathrm{h}^\vee} = \pi_{\mathfrak{h}}^{h+\mathrm{h}^\vee} = \mathfrak{z}\left(\mathcal{A}_\psi \otimes \pi_{\mathfrak{h}}^{k+\mathrm{h}^\vee}\right)$$

由（3.6）。因此，定理 3.1 中的嵌入推出 $C^{\kappa_c}(\mathfrak{gl}_{n|1}) \subset \mathfrak{z}(\mathcal{W}^{\kappa_c}(\mathfrak{gl}_{n|1}))$，从而 $C^{\kappa_c}(\mathfrak{gl}_{n|1}) = \mathfrak{z}(\mathcal{W}^{\kappa_c}(\mathfrak{gl}_{n|1}))$。 □

注意，玻色子-费米子对应（3.2）意味着

$$S_i = \begin{cases} \int Y(\mathrm{e}^{-\frac{1}{k+\mathrm{h}^\vee}(t_i - t_{i+1})}, z)\mathrm{d}z, & (i = 1, \cdots, n-1), \\ \int Y(\mathrm{e}^{-\frac{1}{k+\mathrm{h}^\vee}(t_n + t_{n+1})}, z)\mathrm{d}z, & (i = n). \end{cases} \tag{3.8}$$

3.3. 的情形 $\mathfrak{gl}_{1|1}$。 对于 $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_{1|1}$， $\mathcal{W}$-超代数 $\mathcal{W}^\kappa(\mathfrak{g})$ 就是仿射顶点超代数 $V^\kappa(\mathfrak{gl}_{1|1})$，其自由场实现由下式给出

$$\begin{array}{rccc} \Psi & : & V^\kappa(\mathfrak{gl}_{1|1}) & \hookrightarrow & \mathcal{A}_\psi \otimes \pi_{\mathfrak{h}}^k \\ & & e_{1,1},\ e_{1,2} & \mapsto & u_1 + x,\ \psi, \\ & & e_{2,1},\ e_{2,2} & \mapsto & \psi^*(u_1 + u_2) + k\partial\psi^*,\ u_2 - x, \end{array} \tag{3.9}$$

其在 $k \neq 0$ 处的像与筛选算子的核一致

$$S = \int Y(\psi \mathrm{e}^{-\frac{1}{k}(u+v)}, z)\mathrm{d}z.$$

因此，海森堡余集

$$C^\kappa(\mathfrak{gl}_{1|1}) = \mathrm{Com}(\pi^\kappa_{e_{2,2}}, V^\kappa(\mathfrak{gl}_{1|1}))$$

嵌入海森堡顶点代数

$$\mathrm{Com}(\pi_{e_{2,2}}, \mathcal{A}_\psi \otimes \pi_{\mathfrak{h}}^k) \simeq \pi_{t_1, t_2}$$

其中

$$t_1 = u_1, \qquad t_2 = u_2 - kx$$

其在层级 $\kappa \neq 0$,**1** 处的像可由筛选算子的核 S 描述，而该核可改写为

$$S = \int \mathrm{e}^{-\frac{1}{k}(t_1+t_2)}(z)dz.$$

由此表达式，我们可以将强生成元与系数联系起来

$$W_n = \binom{\varepsilon}{n-1} D_1 D_2^{n-1}\mathbf{1} + \binom{\varepsilon}{n} D_2^n \mathbf{1}, \qquad \varepsilon = \frac{1}{-1+k}, \tag{3.10}$$

伪微分算子的展开:

$$\mathcal{L}_k = D_1 D_2^\varepsilon = \left(\mathbf{1} + \sum_{n=1}^{\infty} W_n \partial^{-n}\right) \partial^{1+\varepsilon}$$

其中

$$D_1 = \partial + \varepsilon t_1, \quad D_2 = \partial - \varepsilon t_2.$$

命题 3.3。 对于 $k \neq 1$, 元素 $W_n\ (n \geqslant 0)$ 属于陪集 $C^{\kappa}(\mathfrak{gl}_{1|1})$。

证明。 由于 W_n 对所有 $\kappa \in \mathbb{C}$均有定义，只需由连续性证明 $k \neq 1$ 的情形，因此 $S\ W_n = 0$。由于 $W_0 = \mathbf{1}$，我们将证明 $n \geqslant 0$时的 $S\ W_{n+1} = 0$ 。记

$$Q = \mathrm{e}^{-\frac{1}{k}(t_1+t_2)} = \mathrm{e}^{\mathrm{H}}, \qquad \mathrm{H} = -\frac{1}{k}(t_1 + t_2).$$

利用恒等式

$$[Q_{(m)}, D_1] = (m+\varepsilon)Q_{(m-1)}, \qquad [Q_{(m)}, D_2] = (m+1)Q_{(m-1)}$$

我们得到

$$\begin{aligned} Q_{(0)}D_1 &= D_1Q_{(0)} + \varepsilon Q_{(-1)}, \\ D_1 &= D_2 - (\varepsilon+1)\mathrm{H}_{(-1)}, \end{aligned}$$

and

$$A_n = Q_{(0)}D_2^n = \sum_{p=0}^{n-1}(-1)^{p+1}(p+1)\binom{n}{p+1}D_2^{n-1-p}\partial^p Q, \tag{3.11}$$

$$B_n = Q_{(-1)}D_2^n = \sum_{p=0}^{n}(-1)^{p}(p+1)\binom{n}{p}D_2^{n-p}\partial^p Q, \tag{3.12}$$

$$C_n = \mathrm{H}_{(-1)}D_2^n = \sum_{p=0}^{n}(-1)^{p}(p+1)\binom{n}{p}D_2^{n-p}\partial^p \mathrm{H}. \tag{3.13}$$

由归纳法可得。由这些公式可知

$$\begin{aligned} S\ W_{n+1} &= Q_{(0)}W_{n+1} \\ &= \binom{\varepsilon}{n}Q_{(0)}D_1D_2^n\mathbf{1} + \binom{\varepsilon}{n+1}Q_{(0)}D_2^{n+1}\mathbf{1} \\ &= \binom{\varepsilon}{n}\underbrace{[Q_{(0)}, D_1]}_{\varepsilon Q_{(-1)}}D_2^n\mathbf{1} + \binom{\varepsilon}{n}D_1Q_{(0)}D_2^n\mathbf{1} + \binom{\varepsilon}{n+1}Q_{(0)}D_2^{n+1}\mathbf{1} \\ &= \varepsilon\binom{\varepsilon}{n}B_n + \binom{\varepsilon}{n}(D_2 - (\varepsilon+1)\mathrm{H}_{(-1)})A_n + \binom{\varepsilon}{n+1}A_{n+1}. \end{aligned} \tag{3.14}$$

利用（3.11）和（3.13）以及恒等式

$$(p+1)\binom{n}{p+1}\binom{n-1-p}{q} = n\binom{n-1}{p+q}\binom{p+q}{p},$$

我们将第三项 $\mathrm{H}_{(-1)}A_n$ 改写为

$$\begin{aligned} \mathrm{H}_{(-1)}A_n &= \sum_{p=0}^{n}(-1)^{p+1}(p+1)\binom{n}{p+1} \\ &\qquad \sum_{q=0}^{n-1-p-q}(-1)^q\binom{n-1-p}{q}D_2^{n-1-p-q}(\partial^q H)(\partial^p Q) \\ &= \sum_{p=0}^{n}(-1)^{p+q+1}n\binom{n-1}{p+q}\sum_{q=0}^{n-1-p-q}\binom{p+q}{p}D_2^{n-1-p-q}(\partial^q H)(\partial^p Q) \\ &= \sum_{p=1}^{n}(-1)^{p}n\binom{n-1}{p-1}D_2^{n-p}\partial^p Q. \end{aligned} \tag{3.15}$$

结合（3.14）和（3.15），我们得到

$$S\ W_{n+1} = \sum_{p=0}^{n} (-1)^p a_p D_2^{n-p} \partial^p Q$$

其中

$$\begin{aligned} a_p =& \varepsilon \binom{\varepsilon}{n}(p+1)\binom{n}{p} - \binom{\varepsilon}{n}(p+1)\binom{n}{p+1} \\ & - \delta_{p\neq 1}(\varepsilon+1)\binom{\varepsilon}{n} n \binom{n-1}{p-1} - \binom{\varepsilon}{n+1}(p+1)\binom{n+1}{p+1}. \end{aligned}$$

我们证明，对所有 p均有 $a_p = 0$。情形 $p = 0$ 直接由恒等式得出

$$\binom{\alpha}{n} = \binom{\alpha-1}{n} + \binom{\alpha-1}{n-1}.$$

情形 $p > 0$ 由以下得出

$$\begin{aligned} a_p =& \binom{\varepsilon}{n}\Big(\varepsilon(p+1)\binom{n}{p} - (p+1)\binom{n}{p+1} \\ & - (\varepsilon+1)n\binom{n-1}{p-1} - (\varepsilon-n)\frac{p+1}{n+1}\binom{n+1}{p+1}\Big) \\ =& \binom{\varepsilon}{n}\left(\varepsilon(p+1)\binom{n}{p} - (p+1)\binom{n}{p+1} - (\varepsilon+1)p\binom{n}{p} - (\varepsilon-n)\binom{n}{p}\right) \\ =& \binom{\varepsilon}{n}\left(-(p+1)\binom{n}{p+1} + (n-p)\binom{n}{p}\right) \\ =& 0. \end{aligned}$$

因此，我们对所有 $n \geqslant 0$得到 $S\ W_{n+1} = 0$。 □

现在，我们已准备好证明情形 $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_{1|1}$下的如下主要结果。

定理 3.4。对于一般的 $\kappa \notin \mathbb{Q}$ 或 $\kappa = \kappa_c$，元素 W_n $(n \geqslant 1)$ 强生成陪集 $C^\kappa(\mathfrak{gl}_{1|1})$。特别地，中心 $\mathfrak{z}(V^{\kappa_c}(\mathfrak{gl}_{1|1})) = C^{\kappa_c}(\mathfrak{gl}_{1|1})$ 由伪微分算子的系数 W_n 强生成

$$(\partial - u_1)(\partial + u_2)^{-1} = \mathbf{1} + \sum_{n=1}^{\infty} W_n \partial^{-n}.$$

证明。我们首先证明 $\kappa = \kappa_c$ 的情形，即 $k = 0$。我们考虑 $V^\kappa(\mathfrak{gl}_{1|1}$上的 PBW过滤，以及 $\mathcal{A}_\psi \otimes \pi_{\mathfrak{h}}^k$ 上由微分算子的滤过诱导的滤过，以及 $\mathcal{A}_\psi$ 上的 PBW过滤。显然， $\pi_{\mathfrak{h}}^k$ 中的嵌入 Ψ 在 (3.9) 中保持这些滤过，因此诱导出它们的分次泊松顶点超代数之间的嵌入

$$\overline{\Psi}\colon \operatorname{gr} V^\kappa(\mathfrak{gl}_{1|1}) \hookrightarrow \operatorname{gr} \mathcal{A}_\psi \otimes \operatorname{gr} \pi_{\mathfrak{h}}^k,$$

从而 $\Psi\colon \overline{\operatorname{gr}}\ C^\kappa(\mathfrak{gl}_{1|1}) \hookrightarrow \pi_{t_1,\ t_2}$。由 (3.10) 可知， W_n 在分次空间中的像 $\overline{W}_n$为

$$\overline{W}_n = (-\varepsilon)^n \left(\binom{\varepsilon}{n-1} t_1 - \binom{\varepsilon}{n} t_2\right) t_2^{n-1},$$

这些是在展开中得到的

$$(z + \varepsilon t_1)(z - \varepsilon t_2)^\varepsilon = \left(\mathbf{1} + \sum_{n=1}^{\infty} \overline{W}_n z^{-n}\right) z^{1+\varepsilon}$$

令 $\kappa = \kappa_c$，我们有

$$\overline{W}_n = (-1)^n (t_1 + t_2) t_2^{n-1} = (-1)^n (u_1 + u_2) v^{n-1}.$$

因此，它们是与超空间相关联的超对称多项式 $\mathbb{C}^{1|1}$（详见§6.2），因而生成仿射超对称多项式$\Lambda^{\mathrm{aff}}_{1|1}$ 作为一个微分代数，即

$$\langle \overline{W}_n \mid n \geqslant 0\rangle_{\partial\text{-alg}} \simeq \Lambda^{\mathrm{aff}}_{1|1} \subset \operatorname{gr} C^\kappa(\mathfrak{gl}_{1|1}).$$

由于 $\Lambda^{\mathrm{aff}}_{1|1} \simeq \operatorname{gr} C^\kappa(\mathfrak{gl}_{1|1})$ 由 [38], $\overline{W_n}\,(n \geqslant 0)$ 生成 $\operatorname{gr} C^\kappa(\mathfrak{gl}_{1|1})$。因此， W_n的生成元为 $C^\kappa(\mathfrak{gl}_{1|1})$。我们有 $t_1 = u_2, t_2 = u_2$ 在 $\kappa = \kappa_c$ 处，因此 $C^{\kappa_c}(\mathfrak{gl}_{1|1}) \subset \pi^0_{\mathfrak{h}} = \mathfrak{z}(\mathcal{A}_\psi \otimes \pi^0_{\mathfrak{h}})$，这意味着

$$\mathfrak{z}(V^{\kappa_c}(\mathfrak{gl}_{1|1})) \supset C^{\kappa_c}(\mathfrak{gl}_{1|1})$$

因此 $\mathfrak{z}(V^{\kappa_c}(\mathfrak{gl}_{1|1})) = C^{\kappa_c}(\mathfrak{gl}_{1|1})$。这就完成了关于 $\kappa = \kappa_c$ 的断言。接下来，我们证明关于 $\kappa \notin \mathbb{Q}$ 的断言。这些元素

$$\begin{aligned}
\widetilde{W}_1 &= W_1,\\
\widetilde{W}_2 &= -\frac{1}{\varepsilon(\varepsilon+1)}\left(W_2 - \frac{\varepsilon}{2(\varepsilon+1)}W_1^2 - \frac{\varepsilon}{2}\partial W_1\right),\\
\widetilde{W}_3 &= W_3 + (\varepsilon-1)\Big(\frac{1}{2}\varepsilon(\varepsilon+1)\partial W_2 - \frac{\varepsilon}{6}\partial^2 W_1 + \varepsilon W_2 W_1\\
&\qquad - \frac{\varepsilon}{2(\varepsilon+1)}W_1\partial W_1 - \frac{\varepsilon}{6(\varepsilon+1)^2}W_1^3\Big)
\end{aligned}$$

满足 λ-括号关系

$$\begin{aligned}
&[\widetilde{W}_{1\lambda}\widetilde{W}_1] = \varepsilon(\varepsilon+1)^2\lambda, \quad [\widetilde{W}_{1\lambda}\widetilde{W}_2] = [\widetilde{W}_{1\lambda}\widetilde{W}_3] = 0,\\
&[\widetilde{W}_{2\lambda}\widetilde{W}_2] = \partial\widetilde{W}_2 + 2\widetilde{W}_2\lambda - \lambda^3,\\
&[\widetilde{W}_{2\lambda}\widetilde{W}_3] = \partial\widetilde{W}_3 + 3\widetilde{W}_3.
\end{aligned}$$

因此，余集子代数 $C^\kappa(\mathfrak{gl}_{1|1})$ 由以下元素强生成

$$\widetilde{W}_1,\ \widetilde{W}_2,\ \widetilde{W}_3,\ \widetilde{W}_{n+1} = \widetilde{W}_{3(1)}\widetilde{W}_n\ (n \geqslant 3)$$

由 [14]。由于 $\kappa \notin \mathbb{Q}, \overline{W}_n \neq 0$。然后由归纳法可得

$$\overline{W}_{3(1)}\overline{W}_n = a_n\overline{W}_{n+1} + f_n(\overline{W}_1, \cdots, \overline{W}_n)$$

对于某个 $a_n \in \mathbb{Q}(k)$ 和 $f_n(z_1, \cdots, z_n)$，它们属于 $\mathbb{Q}(k)[z_1, \cdots, z_n]$。由归纳法可得

$$W_n = a_n\widetilde{W}_n + F_n(\widetilde{W}_1, \cdots, \widetilde{W}_{n-1})$$

对于某个微分多项式 $F_n(z_1, \cdots, z_{n-1})$。因此， $W_n\,(n \geqslant 1)$如所需地强生成 $C^\kappa(\mathfrak{gl}_{1|1})$。证明至此完成。□

注 3.5. 由 [14], W_1, W_2, W_3 已经强生成 $C^\kappa(\mathfrak{gl}_{1|1})$。

3.4. 一般情形。 为了一般性地描述海森堡余集 $C^\kappa(\mathfrak{gl}_{n|1})$，我们引入以下伪微分算子及其展开中的系数:

$$\mathcal{L}_k = D_1 \cdots D_n D^\varepsilon_{n+1} = \left(\mathbf{1} + \sum_{p=1}^{\infty} W_p \partial^{-p}\right)\partial^{n+\varepsilon} \tag{3.16}$$

其中

$$D_1 = \partial + \varepsilon t_1, \cdots, D_n = \partial + \varepsilon t_n,\ D_{n+1} = \partial - \varepsilon t_{n+1}, \qquad \varepsilon = \frac{1}{-1 + (k + \mathrm{h}^\vee)}.$$

定理 3.6. 对于 $k \neq -\mathrm{h}^\vee + 1$，元素 $W_p\ (p \geqslant 1)$ 位于陪集 $C^\kappa(\mathfrak{gl}_{n|1})$中。此外，它们对一般的 κ 强生成 $C^\kappa(\mathfrak{gl}_{n|1})$ 。

证明。由定理 3.2，只需证明 $S_iW_p=0$ 对于 $i=1,\ \cdots n$ 以及所有 $p\geqslant 1$在一般水平 k，这等价于 $[S_i,\mathcal{L}]=0$ 借助于 $[S_i,\partial]=0$。由于我们有 $[S_i,D_j]=0$ 对于 $j\neq i,\ i+1$ 以及

$$[S_i,\mathcal{L}]=[S_i,D_1]D_2\cdots D_nD_{n+1}^{\varepsilon}+D_1[S_i,D_2]\cdots D_nD_{n+1}^{\varepsilon}\\ +\cdots+D_1D_2\cdots D_n[S_i,D_{n+1}^{\varepsilon}],$$

我们有

$$[S_i,\mathcal{L}]=\begin{cases}D_1\cdots D_{i-1}[S_i,D_iD_{i+1}]D_{i+2}\cdots D_nD_{n+1}^{\varepsilon}, & (i\neq n),\\ D_1\cdots D_{n-1}[S_i,D_nD_{n+1}^{\varepsilon}], & (i=n).\end{cases}$$

对于 $i\neq n$, $[S_i,D_iD_{i+1}]=0$ ，这等价于系数

$$D_iD_{i+1}=\partial^2+\varepsilon(t_i+t_{i+1})\partial+\varepsilon(\varepsilon t_it_{i+1}+\partial t_{i+1})$$

是 $\mathcal{W}$-代数 $\mathcal{W}^{\kappa'}(\mathfrak{gl}_2)$ 的元素，其中 $k'+2=k+\mathrm{h}^\vee$，这是众所周知的，例如参见 [8, 15]。类似地，情形 $i=n$ 可由命题 3.3得出。

接下来，我们证明关于 $\kappa\notin\mathbb{Q}$ 的断言。这些元素

$$\widetilde{W}_1=W_1,$$
$$\widetilde{W}_2=-\frac{1}{\varepsilon(\varepsilon+1)}\left(W_2-\frac{\varepsilon+n-1}{2(\varepsilon+n)}W_1^2-\frac{\varepsilon+n-1}{2}\partial W_1\right),$$
$$\widetilde{W}_3=W_3+(\varepsilon+n-2)\Big(\frac{1}{2}\varepsilon(\varepsilon+1)\partial W_2-\frac{\varepsilon+n-1}{6}\partial^2W_1+\frac{\varepsilon(\varepsilon+1)}{\varepsilon+n}W_2W_1\\ -\frac{\varepsilon+n-1}{2(\varepsilon+n)}W_1\partial W_1-\frac{\varepsilon+n-1}{6(\varepsilon+n)^2}W_1^3\Big)$$

满足 λ-括号关系

$$[\widetilde{W}_1{}_\lambda\widetilde{W}_1]=\varepsilon(\varepsilon+1)(\varepsilon+n)\lambda,\quad [\widetilde{W}_1{}_\lambda\widetilde{W}_2]=[\widetilde{W}_1{}_\lambda\widetilde{W}_3]=0,$$
$$[\widetilde{W}_2{}_\lambda\widetilde{W}_2]=\partial\widetilde{W}_2+2\widetilde{W}_2\lambda-\frac{c_n(\varepsilon)}{2}\lambda^3,$$
$$[\widetilde{W}_2{}_\lambda\widetilde{W}_3]=\partial\widetilde{W}_3+3\widetilde{W}_3,$$

其中

$$c_n(\varepsilon)=-\frac{n(\varepsilon+n-1)(2\varepsilon+n+1)}{\varepsilon(\varepsilon+1)}.$$

因此，余集子代数 $C^\kappa(\mathfrak{gl}_{n|1})$ 由以下元素强生成：

$$\widetilde{W}_1,\ \widetilde{W}_2,\ \widetilde{W}_3,\ \widetilde{W}_{n+1}=\widetilde{W}_{3(1)}\widetilde{W}_n\ (n\geqslant 3)$$

由 [14]。沿用定理 3.4 证明中的相同归纳论证，我们得到 W_n $(n\geqslant 1)$ 如所需地强生成 $C^\kappa(\mathfrak{gl}_{n|1})$。证明至此完成。□

与 $\mathfrak{g}=\mathfrak{gl}_{1|1}$ 的情形不同，一般情形 $\mathfrak{g}=\mathfrak{gl}_{n|1}$ 在定理 3.6 中的临界层强生成性质要微妙得多，我们将在下文 §6.3 中证明。

回顾一下，给定一个顶点超代数 V，Li 滤过 $F^\bullet V$ 是一个递减滤过，定义如下：

$$F^pV=\left\{a^1_{(-n_1-1)}\cdots a^r_{(-n_r-1)}b;\ \begin{array}{l}a^1,\dots,a^r,b\in V\\ n_i\geqslant 0,\ n_1+\cdots+n_r\geqslant p\end{array}\right\}.$$

相关的分次向量（超）空间 $\mathrm{gr}\ V=\oplus_pF^pV/F^{p+1}V$具有泊松顶点（超）代数的结构，参见 [4, 33]。特别地，商 F^0V/F^1V记作 R_V，具有泊松超代数的结构，称为 C_2-代数。

此外，给定一个同态 $f\colon\ V\to W$（其中 $f\colon \operatorname{gr}V\to\operatorname{gr}W$ 是顶点超代数的同态），上述对应关系诱导出一个泊松顶点超代数的同态。我们将这一构造应用于 Ψ 定理 3.1，并得到一个嵌入

$$\overline{\Psi}\colon \operatorname{gr}\mathcal{W}^{\kappa}(\mathfrak{gl}_{n|1})\hookrightarrow \operatorname{gr}\mathcal{A}_{\psi}\otimes\operatorname{gr}\pi_{\mathfrak{h}}^{k+\mathrm{h}^{\vee}}.$$

注意

$$R_{\mathcal{A}_{\psi}\otimes\pi_{\mathfrak{h}}^{k+\mathrm{h}^{\vee}}}\simeq R_{\mathcal{A}_{\psi}}\otimes R_{\pi_{\mathfrak{h}}^{k+\mathrm{h}^{\vee}}}\simeq\bigwedge\nolimits_{\overline{\psi},\overline{\psi}^{*}}\otimes S(\mathfrak{h})$$

其中 $\bigwedge_{\overline{\psi},\,\overline{\psi}^{*}}$ 是由 $\overline{\psi}$，$\overline{\psi}^{*}$ 生成的外代数，而 $S(\mathfrak{h})$ 是与 $\mathfrak{h}$ 相伴的对称代数。

以下内容对于稍后构造 $\mathcal{W}^{\kappa}(\mathfrak{gl}_{n|1})$ 的生成元将是重要的。

命题 3.7. 对于 $k\neq-\mathrm{h}^{\vee}+1$，$\bigwedge_{\overline{\psi},\,\overline{\psi}^{*}}\otimes S(\mathfrak{h})$ 中的像 W_1、$\cdots$、W_n 是代数无关的。

证明. 只需证明在典范商之后的代数无关性

$$\pi\colon \bigwedge\nolimits_{\overline{\psi},\overline{\psi}^{*}}\otimes S(\mathfrak{h})\twoheadrightarrow S(\mathfrak{h})\twoheadrightarrow\mathbb{C}[e_{1,1},\cdots e_{n,n}].$$

由（3.6）和（3.16）显然可知

$$(z+\varepsilon e_{1,1})\cdots(z+\varepsilon e_{n,n})=z^{n}+\pi(\overline{W}_1)z^{n-1}+\cdots+\pi(\overline{W}_n)$$

其中 z 是一个不定元。因此，初等对称多项式之间的代数独立性意味着 $\pi(W_i)$ 之间也代数独立。

□

4. Duality between $\mathcal{W}^{\kappa}(\mathfrak{sl}_{n|1})$ and $\mathcal{W}^{\check{\kappa}}(\mathfrak{sl}_{n},\mathbb{O}_{\mathrm{sr}})$

为了描述 $\mathcal{W}^{\kappa}(\mathfrak{gl}_{n|1})$ 的结构，我们将利用对偶 [13, 18] 将其化归为它的对偶表示，即次正则 $\mathcal{W}$-代数 $\mathcal{W}^{\check{\kappa}}(\mathfrak{gl}_{n},\ \mathbb{O}_{\mathrm{sr}})$。

4.1. 次正则 $\mathcal{W}$-代数。 设 $\mathfrak{g}=\mathfrak{gl}_n\,(n>1)$ 和 $\mathfrak{g}=\mathfrak{n}^{+}\oplus\mathfrak{h}\oplus\mathfrak{n}^{-}$ 为标准三角分解。那么 $\mathfrak{h}$ 由 $e_{1,\,1},\ \cdots,\ e_{n,\,n}$ 张成；$\mathfrak{n}^{+}$ 由 $e_{1,\,2},\ \cdots,\ e_{n-1,\,n}$ 生成，它们是对应于单根 $\alpha_1,\ \cdots,\ \alpha_{n-1}$ 的根向量。我们将利用双线性形式 κ_V 将 $\mathfrak{h}$ 与其对偶表示 $\mathfrak{h}^{*}$ 等同，从而

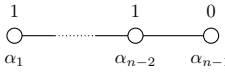
$$\alpha_1=e_{1,1}-e_{2,2},\cdots,\alpha_{n-1}=e_{n-1,n-1}-e_{n,n},$$

它们自然地与余根 h_i 等同，即对于 $i=1,\ \cdots,\ n$，有 $h_i=\alpha_i$。

取次正则幂零元

$$f=e_{2,1}+e_{3,2}+\cdots+e_{n,n-1}\tag{4.1}$$

在 $\mathfrak{gl}_n$（分别在 $\mathfrak{sl}_n$）中，以及由加权邓肯图给出的良好分次 Γ



并将相应的 $\mathcal{W}$-代数记为 $\mathcal{W}^{\kappa}(\mathfrak{gl}_{n},\ \mathbb{O}_{\mathrm{sr}})$（分别记为 $\mathcal{W}^{\kappa}(\mathfrak{sl}_{n},\ \mathbb{O}_{\mathrm{sr}})$）。它称为层为 κ 的次正则 $\mathcal{W}$-代数。

令 $\mathcal{A}$ 表示由（偶）场 $a,\ a^{*}$ 生成的 $\beta\gamma$-系统顶点代数，它们满足 λ-括号关系

$$[a_{\lambda}a^{*}]=1,\quad [a_{\lambda}a]=[a^{*}{}_{\lambda}a^{*}]=0.\tag{4.2}$$

通过取逆 a 实现的局部化 $\mathcal{A}^{\times}$ 存在于与之相关的格顶点代数 V_L 中

$$\mathcal{A}^{\times}\simeq\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}}\pi^{x,y}_{n(x+y)}\subset V_L$$

它与配备双线性形式 $(nx+my,\ n'x+m'y) = nn' - mm'$的整数格 $L = \mathbb{Z}x \oplus \mathbb{Z}y$ 相关联。嵌入 $\mathcal{A} \hookrightarrow V_L$ 具有如下刻画

$$\mathcal{A} \simeq \operatorname{Ker} S_n \subset \mathcal{A}^{\times}, \qquad S_n = \int Y(\mathrm{e}^x, z)\mathrm{d}z,$$

它将

$$a \mapsto \mathrm{e}^{x+y}, \quad a^* \mapsto -x\mathrm{e}^{x+y}.$$

设 $\pi_{\mathfrak{h}}^{k+\mathrm{h}^\vee}$ 为与 $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ 相伴的海森堡顶点代数。由定义，它由场 $u_1, \cdots, u_n$ 生成，这些场对应于 $e_{1,1}, \cdots, e_{n,n}$，并满足 λ-括号

$$[u_i{}_\lambda u_j] = (k+\mathrm{h}^\vee)\kappa_V(u_i, u_j)\lambda.$$

我们引入如下筛选算子

$$S_i := \int Y(P_i \mathrm{e}^{-\frac{1}{k+\mathrm{h}^\vee}\alpha_i}, z)\mathrm{d}z \colon \mathcal{A}^{\times} \otimes \pi_{\mathfrak{h}}^{k+\mathrm{h}^\vee} \to \mathcal{A}^{\times} \otimes \pi_{\mathfrak{h},-\alpha_i}^{k+\mathrm{h}^\vee} \tag{4.3}$$

对于 $i = 1, \cdots, n-1$，其中 $P_i = \mathbf{1}$ 对应 $i = 1, \cdots, n-2$，且 $P_{n-1} = a$ 对应 $i = n$。于是，$\mathcal{W}^\kappa(\mathfrak{gl}_n, \mathbb{O}_{\mathrm{sr}})$ 在 $\mathcal{A}^{\times} \otimes \pi_{\mathfrak{h}}^{k+\mathrm{h}^\vee}$ 中实现如下。

命题 4.1 ([13])**.** 存在一个顶点代数嵌入

$$\Psi \colon \mathcal{W}^\kappa(\mathfrak{gl}_n, \mathbb{O}_{\mathrm{sr}}) \hookrightarrow \mathcal{A}^{\times} \otimes \pi_{\mathfrak{h}}^{k+\mathrm{h}^\vee}$$

它关于 κ 连续变化，因此一般像可刻画为筛选算子的共同核

$$\mathcal{W}^\kappa(\mathfrak{gl}_n, \mathbb{O}_{\mathrm{sr}}) \overset{\Psi}{\simeq} \bigcap_{i=1}^{n} \operatorname{Ker} S_i \subset \mathcal{A}^{\times} \otimes \pi_{\mathfrak{h}}^{k+\mathrm{h}^\vee}.$$

与超情形一样，我们有如下分解

$$\mathcal{W}^\kappa(\mathfrak{gl}_n, \mathbb{O}_{\mathrm{sr}}) \simeq \mathcal{W}^\kappa(\mathfrak{sl}_n, \mathbb{O}_{\mathrm{sr}}) \otimes \pi_\Omega^\kappa.$$

让我们回顾一下 [26] 在此嵌入下的显式强生成元 $\mathcal{W}^\kappa(\mathfrak{sl}_n, \mathbb{O}_{\mathrm{sr}})$。为方便下文 §4.2 中的讨论，我们更改记号并加上符号“ˇ”，例如，将层 κ 改为$\check{\kappa}$，将海森堡顶点代数 $\pi_{\mathfrak{h}}^{k+\mathrm{h}^\vee}$ 改为 $\pi^{\check{k}+\check{\mathrm{h}}^\vee}{}_{\check{\mathfrak{h}}}$。我们引入以下元素:

$$\check{G}_+ = \mathrm{e}^{x+y}, \quad \check{H} = -y + \check{\varpi}_{n-1}, \quad \check{G}_- = \check{R}_1\check{R}_2\cdots\check{R}_n\mathrm{e}^{-(x+y)}$$

其中我们令

$$\check{R}_i = \begin{cases} \check{\varkappa}\partial - y + (\check{h}_i + \cdots + \check{h}_{n-1}), & (i = 1, \ldots, n-1), \\ \check{\varkappa}\partial + \check{\varkappa}(x+y) - x, & (i = n), \end{cases}$$

其中 $\check{\varkappa} = (\check{k} + \check{\mathrm{h}}^\vee - 1)$，且 $\check{\varpi}_{n-1} = \frac{1}{n}\check{h}_1 + \frac{2}{n}\check{h}_2 + \cdots + \frac{n-1}{n}\check{h}_{n-1}$ 是第 $(n-1)$-ˇ ˇ ˇ 个基本权，其中 $h_i = \check{u}_i - \check{u}_{i+1}$。接下来，我们通过以下公式归纳地引入 $W_1, \cdots, W_{n-1}$

$$\check{W}_m = \check{W}_m{}'' - \sum_{i=0}^{m-1}(-1)^{m-i}\binom{n-i}{m-i}\check{W}_m(\check{\varkappa}\partial + \check{H})^{m-i}\mathbf{1}$$

其中

$$\check{W}_m{}'' = \sum_{i=0}^{m}(-1)^{m+i}\left(\prod_{j=1}^{i}\frac{j(\check{\varkappa}+1)}{j\check{\varkappa}}\right)e_{m-k}(\check{R}_1, \check{R}_2, \cdots, \check{R}_n)(\check{\varkappa}\partial + \check{\varkappa}y)^i\mathbf{1}$$

且 $e_p(z_1, \cdots, z_n) = \sum_{i_1>\cdots>i_p} z_{i_1}z_{i_2}\cdots z_{i_m}$ 是第 p 个（非交换的）初等对称多项式。

定理 4.2 ([26])。 对于所有 $\check\kappa \in \mathbb{C}$， $\mathcal{W}^{\check\kappa}(\mathfrak{sl}_n, \mathbb{O}_{\mathrm{sr}})$ 在嵌入 $\check\Psi$ 下由以下元素强生成

$$\check G_{\pm}, \check H, \check W_2, \cdots, \check W_{n-1}.$$

4.2. **对偶**。 这些 $\mathcal{W}$-超代数

$$\mathcal{W}^{\check\kappa}(\mathfrak{sl}_n, \mathbb{O}_{\mathrm{sr}}), \qquad \mathcal{W}^{\kappa}(\mathfrak{sl}_{n|1}),$$

彼此重构，这称为 Kazama-Suzuki 型陪集构造 [13, 18]。当层（κ，$\check\kappa$）满足关系式时，我们回顾用 $\mathcal{W}^{\check\kappa}(\mathfrak{sl}_n, \mathbb{O}_{\mathrm{sr}})$ 表示 $\mathcal{W}^{\kappa}(\mathfrak{sl}_{n|1})$ 的重构

$$(k+\mathrm{h}^\vee)(\check k+\check{\mathrm{h}}^\vee)=1. \tag{4.4}$$

根据命题 4.1，我们有嵌入

$$\mathcal{W}^{\check\kappa}(\mathfrak{sl}_n, \mathbb{O}_{\mathrm{sr}}) \otimes V_{\mathbb{Z}} \overset{\check\Psi\otimes 1}{\hookrightarrow} (\pi_{\check{\mathfrak{h}}}^{\check k+\check{\mathrm{h}}^\vee} \otimes \mathcal{A}^{\times}) \otimes V_{\mathbb{Z}}.$$

令 $\pi_{H_\Delta} \subset \mathcal{W}^{\check\kappa}(\mathfrak{sl}_n, \mathbb{O}_{\mathrm{sr}}) \otimes V_{\mathbb{Z}}$ 为由下式生成的海森堡顶点子代数

$$H_\Delta = \check H \otimes \mathbf{1} - \mathbf{1} \otimes x = \check\varpi_{n-1} - y_1 - x_2,$$

它满足 λ-括号

$$[H_{\Delta\,\lambda} H_\Delta] = \frac{n-1}{n}(\check k+\check{\mathrm{h}}^\vee)\lambda.$$

˘˘ 此处，为清晰起见， x 和 y 的下标 i 表示张量因子。令 $k \neq -\mathrm{h}^\vee$，并考虑海森堡余集子代数：

$$\mathrm{Com}(\pi_{H_\Delta}, \mathcal{W}^{\check\kappa}(\mathfrak{sl}_n, \mathbb{O}_{\mathrm{sr}}) \otimes V_{\mathbb{Z}}) \overset{\check\Psi\otimes 1}{\hookrightarrow} \mathrm{Com}(\pi_{H_\Delta}, (\pi_{\check{\mathfrak{h}}}^{\check k+\check{\mathrm{h}}^\vee} \otimes \mathcal{A}^{\times}) \otimes V_{\mathbb{Z}}).$$

引理 4.3. 对于层 (κ,$\check\kappa$) 满足 (4.4)，存在唯一的同构

$$\sigma\colon \pi_{\mathfrak{h}}^{k+\mathrm{h}^\vee} \otimes V_{\mathbb{Z}} \xrightarrow{\simeq} \mathrm{Com}(\pi_{H_\Delta}, (\pi_{\check{\mathfrak{h}}}^{\check k+\check{\mathrm{h}}^\vee} \otimes \mathcal{A}^{\times}) \otimes V_{\mathbb{Z}}),$$

它将

$$h_i \mapsto \begin{cases} -(k+\mathrm{h}^\vee)\check h_i, & (i \neq n-1, n), \\ -(k+\mathrm{h}^\vee)\check h_{n-1} + (x_1+y_1), & (i=n-1), \\ (k+\mathrm{h}^\vee)(y_1+x_2), & (i=n), \end{cases}$$
$$x \mapsto x_1 + y_1 + x_2.$$

该同构 σ 将刻画 Heisenberg 余集子代数 $\mathrm{Com}(\pi_{H_\Delta}, \mathcal{W}^{\check\kappa}(\mathfrak{sl}_n, \mathbb{O}_{\mathrm{sr}}))$ 在命题 4.1 中的筛选算子，以及 $\mathcal{W}^{\kappa}(\mathfrak{sl}_{n|1})$ 在定理 3.1 中的那些等同起来。由此，我们得到 $\mathcal{W}^{\kappa}(\mathfrak{sl}_{n|1})$ 作为 Heisenberg 余集子代数的重构。

定理 4.4 ([13, 18]). 对于层 (κ,$\check\kappa$) 满足 (4.4)，存在顶点超代数的同构

$$\mathcal{W}^{\kappa}(\mathfrak{sl}_{n|1}) \simeq \mathrm{Com}(\pi_{H_\Delta}, \mathcal{W}^{\check\kappa}(\mathfrak{sl}_n, \mathbb{O}_{\mathrm{sr}}) \otimes V_{\mathbb{Z}}),$$

这使得下图交换：

$$\begin{array}{ccc} \pi_{\mathfrak{h}}^{k+\mathrm{h}^\vee} \otimes V_{\mathbb{Z}} & \xrightarrow{\ \sigma\ } & \mathrm{Com}(\pi_{H_\Delta}, (\pi_{\check{\mathfrak{h}}}^{\check k+\check{\mathrm{h}}^\vee} \otimes \mathcal{A}^{\times}) \otimes V_{\mathbb{Z}}) \\ \Psi \cup & & \cup \check\Psi \\ \mathcal{W}^{\kappa}(\mathfrak{sl}_{n|1}) & \xrightarrow{\ \simeq\ } & \mathrm{Com}(\pi_{H_\Delta}, \mathcal{W}^{\check\kappa}(\mathfrak{sl}_n, \mathbb{O}_{\mathrm{sr}}) \otimes V_{\mathbb{Z}}). \end{array}$$

注 4.5。 当 $n = 1$时，众所周知， $V^\kappa(\mathfrak{gl}_{1|1})$ 在非临界层级上全都同构，而定理 4.4 中的实现的类似结果由$U(1)$-轨形构造给出

$$V^\kappa(\mathfrak{gl}_{1|1}) \simeq (\mathcal{A} \otimes V_{\mathbb{Z}})^{U(1)}.$$

这意味着，海森堡余集子代数 $C^\kappa(\mathfrak{gl}_{1|1})$ 同构于轨形 $\mathcal{A}^{U(1)}$，因此是中心荷为 $W_{1+\infty}$ 的 c-代数 $c = -1$ (参见 [14, 28])。

4.3. **生成元** $\mathcal{W}^\kappa(\mathfrak{gl}_{n|1})$。 现在我们可以在定理3.1中的实现 $\mathcal{W}^\kappa(\mathfrak{gl}_{n|1})$ 下，描述 Ψ -超代数的生成元。

根据 [31]， $\mathcal{W}^\kappa(\mathfrak{gl}_{n|1})$ 在任意层级 κ 下由某些场强生成

$$w_{\mathfrak{q}_1}, \cdots, w_{\mathfrak{q}_d}$$

，这些场与中心化子 $\mathcal{B} = \{\mathfrak{q}_1, \cdots \mathfrak{q}_d\}$ 的一个（任意）基 $\mathfrak{gl}^f_{n|1} \subset \mathfrak{gl}_{n|1}$ 相关联，它们的微分单项式构成 PBW 基。此外，利用 $w_{\mathfrak{q}_i}$ 的良好分次 $1 - \Gamma(\mathfrak{q}_i)$，可得 $\Gamma(\mathfrak{q}_i)$ 的（准）共形权为 $\mathfrak{q}_i$。利用 f 和 Γ在§3.1中的显式形式，我们可以选取如下的基 $\mathcal{B}$ ：

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{q}_1^{(1)} = e_{1,1} + \cdots + e_{n+1,n+1},\\
&\mathfrak{q}_1^{(2)} = -e_{n+1,n+1},\\
&\mathfrak{q}_i = e_{i,1} + e_{i+1,2} + \cdots + e_{n,n-i+1}, \qquad (i = 2, \cdots, n)\\
&\mathfrak{q}_+ = e_{n,n+1}, \quad \mathfrak{q}_- = e_{n+1,1}.
\end{aligned}$$

$\mathcal{W}^\kappa(\mathfrak{gl}_{n|1})$ 中相应场的共形权为

$$1, 1, 2, \cdots, n, 1, n, \tag{4.5}$$

分别。事实上，与 $\mathfrak{q}_1^{(1)}, \mathfrak{q}_1^{(2)}$ 相对应的场是 Heisenberg场

$$\Omega = u_1 + \cdots + u_{n+1}, \quad J = -u_{n+1} + x$$

接下来，我们引入以下奇场

$$G_+ = \mathrm{e}^x, \quad G_- = R_1^- R_2^- \cdots R_n^- \mathrm{e}^{-x}$$

其中

$$R_i = \varkappa\partial - x + (h_i + \cdots + h_n), \quad (i = 1, \ldots, n)$$

其中 $\varkappa = (k + \mathrm{h}^\vee - 1)$。

定理 4.6。 在嵌入 Ψ, $\mathcal{W}^\kappa(\mathfrak{gl}_{n|1})$ 下，由以下元素强生成

$$\Omega, J, W_2, \cdots, W_n, G_\pm$$

对于 $k \neq -\mathrm{h}^\vee + 1$。

证明。我们首先证明 Ω $J, W_2, \cdots, W_n, G_\pm$ 属于 $\mathcal{W}^\kappa(\mathfrak{gl}_{n|1})$。由于根据命题 3.6， W_i's 属于 $\mathcal{W}^\kappa(\mathfrak{gl}_{n|1})$，因此只需验证 $G_\pm$。根据定理 3.1，通过验证 $S_i G_+ = 0$，很容易证明 G_+ 属于 $\mathcal{W}^\kappa(\mathfrak{gl}_{n|1})$。接下来，我们证明 G_- 属于 $\mathcal{W}^\kappa(\mathfrak{gl}_{n|1})$。同样根据定理 4.4，只需证明

$$\begin{aligned}
G_- &= -(-1)^n(\varkappa + 1)^n \check{G}_- \otimes \mathrm{e}^{-x}\\
&= -(-1)^n(\varkappa + 1)^n \check{R}_1 \check{R}_2 \cdots \check{R}_n \mathrm{e}^{-(x_1+y_1)} \otimes \mathrm{e}^{-x_2}
\end{aligned} \tag{4.6}$$

其中在第二行，我们写出指标 x_i 以明确张量因子。利用引理 σ 中的同构 4.3，我们得到

$$\begin{aligned}\check{R}_n \mathrm{e}^{-(x_1+y_1)} \otimes \mathrm{e}^{-x_2} &= -x_1 \mathrm{e}^{-(x_1+y_1+x_2)} = \left(\partial + \frac{1}{\varkappa+1} h_n\right) \mathrm{e}^{-x} \\ &= \frac{1}{\varkappa+1}((\varkappa+1)\partial + h_n)\mathrm{e}^{-x} = \frac{1}{\varkappa+1}(\varkappa\partial + h_n - x)\mathrm{e}^{-x} \\ &= \frac{1}{\varkappa+1} R_n \mathrm{e}^{-x}.\end{aligned}$$

对于 $i=1$、……、$n-1$,

$$\begin{aligned}\check{R}_i &= \check{\varkappa}\partial - y_1 + (\check{h}_i + \cdots + \check{h}_{n-1}) \\ &= \check{\varkappa}\partial - y_1 - \frac{1}{\varkappa+1}(h_i + \cdots + h_{n-1}) + \frac{1}{\varkappa+1}(x_1+y_1) \\ &= -\frac{1}{\varkappa+1}\left(\varkappa\partial + (\varkappa+1)y_1 + (h_i + \cdots + h_{n-1}) - (x_1+y_1)\right) \\ &= -\frac{1}{\varkappa+1}\left(\varkappa\partial + (h_i + \cdots + h_{n-1} + h_n - x) - \varkappa x_2\right).\end{aligned}$$

在表达式（4.6）中，出现在 $\check{}\, R_i$ 中的导子 ∂ 仅作用于第一个因子，即作用为 $\partial \otimes 1$。另一方面，全导数 $\partial (= \partial\otimes 1 + 1 \otimes \partial)$ 作用于 $\check{}\, R_i \cdots \check{}\, R_n \mathrm{e}^{-(x_1+y_1)} \otimes \mathrm{e}^{-x_2}$，其作用为 $\partial = \partial \otimes 1 - 1 \otimes x_2$。因此，我们有

$$\begin{aligned}\check{R}_i &= -\frac{1}{\varkappa+1}\left(\varkappa\partial \otimes 1 + (h_i + \cdots + h_{n-1} + h_n - x) - \varkappa x_2\right) \\ &= -\frac{1}{\varkappa+1}\left(\varkappa(\partial - x_2) + (h_i + \cdots + h_{n-1} + h_n - x) - \varkappa x_2\right) \\ &= -\frac{1}{\varkappa+1}\left(\varkappa\partial + (h_i + \cdots + h_{n-1} + h_n - x)\right) \\ &= -\frac{1}{\varkappa+1} R_i\end{aligned}$$

作为作用于 $\check{}\, R_{i+1} \cdots \check{}\, R_n \mathrm{e}^{-(x_1+y_1)} \otimes \mathrm{e}^{-x_2}$ 上的算子，此式成立。因此，由归纳法可得

$$\check{R}_1 \cdots \check{R}_n \mathrm{e}^{-(x_1+y_1)} \otimes \mathrm{e}^{-x_2} = -\frac{(-1)^n}{(\varkappa+1)^n} R_1 \cdots R_n \mathrm{e}^{-x},$$

从而（4.6）成立。

最后，我们证明 Ω $J, W_2, \cdots, W_n, G_\pm$ 强生成 $\mathcal{W}^\kappa(\mathfrak{gl}_{n|1})$。由于 $G_\pm$ 是奇场，且 $J_{(0)}G_\pm = \pm G_\pm$，它们代数无关。由于它们的共形权为 1，n，因此它们是对应于 $\mathfrak{q}_\pm$ 的强生成元。另一方面，由于 $W_1 = \varkappa(\Omega + (\varepsilon+1)J)$，我们可以用 $J, W_1, W_2, \cdots, W_n$ 代替 Ω $J, W_2, \cdots, W_n$。于是，命题 3.7 表明，它们的微分单项式构成的 PBW 基，与对应于 $\mathfrak{q}_1^{(1)}, \mathfrak{q}_1^{(2)}, \mathfrak{q}_2, \cdots, \mathfrak{q}_n$ 的生成元的微分单项式构成相同的 PBW 基。证明完毕。□

4.4. 临界层。 设 $\mathbb{A}^N$ 表示一个仿射概形，其正则函数构成多项式环 $\mathbb{C}[z_1, \cdots, z_N]$，而 $J_\infty \mathbb{A}^N$ 是它的喷射概形。正则函数 $\mathbb{C}[J_\infty \mathbb{A}^N]$ 的代数是一个交换顶点代数（即微分代数），并且仍是一个多项式环

$$\mathbb{C}[J_\infty \mathbb{A}^N] = \mathbb{C}[\partial^p z_1, \cdots, \partial^p z_N \mid p \geqslant 0].$$

定理 4.7. 对于临界层 $\kappa = \kappa_c$，存在同构

$$\begin{aligned}\mathcal{W}^{\kappa_c}(\mathfrak{gl}_{n|1}) &\simeq \mathbb{C}[J_\infty \mathbb{A}^{n-1}] \otimes V^{\kappa_c}(\mathfrak{gl}_{1|1}), \\ \mathcal{W}^{\kappa_c}(\mathfrak{sl}_{n|1}) &\simeq \mathbb{C}[J_\infty \mathbb{A}^{n-2}] \otimes V^{\kappa_c}(\mathfrak{gl}_{1|1}).\end{aligned}$$

证明. 只需证明该断言对于 $\mathcal{W}^{\kappa_c}(\mathfrak{gl}_{n|1})$。由命题3.6，生成元 $W_1, \cdots, W_n$ 位于中心 $\mathfrak{z}(\mathcal{W}^{\kappa_c}(\mathfrak{gl}_{n|1}))$，因此前 $(n-1)$ 个元素生成一个同构于 $\mathbb{C}[J_\infty \mathbb{A}^{n-1}]$ 的中心子代数，即存在一个嵌入

$$\mathbb{C}[J_\infty \mathbb{A}^{n-1}] \hookrightarrow \mathcal{W}^{\kappa_c}(\mathfrak{gl}_{n|1}), \quad z_i \mapsto W_i \ (i = 1, \cdots, n-1). \tag{4.7}$$

我们将证明，经过必要的修正后，$G_\pm$、J 和 W_n 生成一个与 $V^{\kappa_c}(\mathfrak{gl}_{1|1})$同构的子代数，因此

$$\mathcal{W}^{\kappa_c}(\mathfrak{gl}_{n|1}) \simeq \mathbb{C}[J_\infty \mathbb{A}^{n-1}] \otimes V^{\kappa_c}(\mathfrak{gl}_{1|1}).$$

显然可以证明

$$[J_\lambda J] = \lambda, \quad [J_\lambda G_\pm] = \pm G_\pm.$$

and

$$[G_{+\lambda} G_+] = 0, \quad [G_{-\lambda} G_-] = 0,$$

这得益于权的原因。接下来，我们计算 λ-括号 $[G_{+\lambda} G_-]$。由于我们有

$$R_i = -(\partial + x + H_i), \quad H_i = -(h_i + \cdots + h_n).$$

因此，有 $R_n \mathrm{e}^{-x} = -H_i \mathrm{e}^{-x}$。根据归纳法，可以证明

$$R_i \cdots R_n \mathrm{e}^{-x} = (-1)^{n+1-i} \big((\partial + H_i) \cdots (\partial + H_n)\mathbf{1}\big) \otimes \mathrm{e}^{-x} \in \pi_{\mathfrak{h}}^0 \otimes V_{\mathbb{Z}}$$

因为 $H_1, \ldots H_n$ 属于交换顶点代数 $\pi_{\mathfrak{h}}^0$。因此，

$$G_- = R_1 \cdots R_n \mathrm{e}^{-x} = (-1)^n \big((\partial + H_1) \cdots (\partial + H_n)\mathbf{1}\big) \otimes \mathrm{e}^{-x}$$

因此

$$\begin{aligned}[G_{+\lambda} G_-] &= (-1)^n \big((\partial + H_1) \cdots (\partial + H_n)\mathbf{1}\big)[\mathrm{e}^x{}_\lambda \mathrm{e}^{-x}] \\ &= (-1)^n (\partial + H_1) \cdots (\partial + H_n)\mathbf{1}.\end{aligned}$$

令 $\mathscr{W}_n := (-1)^n (\partial + H_1) \cdots (\partial + H_n)\mathbf{1}$。那么，显然我们有一个顶点超代数的嵌入

$$\begin{array}{ccc} V^{\kappa_c}(\mathfrak{gl}_{1|1}) & \hookrightarrow & \mathcal{W}^{\kappa_c}(\mathfrak{gl}_{n|1}) \\ e_{1,1},\ e_{2,2} & \mapsto & J,\ -J + \mathscr{W}_n, \\ e_{1,2},\ e_{2,1} & \mapsto & G_+,\ G_-. \end{array} \tag{4.8}$$

接下来，我们考虑 §3.4 中的像 $\overline{\pi}(\mathscr{W}_n)$。由于 $H_i = -(e_{i,\,i} + e_{n+1,\,n+1})$，我们有 $\overline{\pi}(H_i) = -e_{i,\,i}$

$$\overline{\pi}(\mathscr{W}_n) = e_{1,1} \cdots e_{n,n} = \varepsilon^{-n} \overline{\pi}(W_n).$$

因此，存在一个微分多项式 $F(z_1, \cdots, z_n)$，使得

$$\mathscr{W}_n = \varepsilon^{-n} W_n + F(J, W_1, \cdots, W_{n-1})$$

由定理 4.6可知。因此，我们可以将临界层的强生成元取为$\kappa = \kappa_c$为 $J, W_1, \cdots, W_{n-1}, \mathscr{W}_n, G_\pm$。因此，嵌入（4.7）和（4.8）结合起来诱导出同构

$$\mathcal{W}^{\kappa_c}(\mathfrak{sl}_{n|1}) \simeq \mathbb{C}[J_\infty \mathbb{A}^{n-2}] \otimes V^{\kappa_c}(\mathfrak{gl}_{1|1})$$

正如所需。证明至此完成。 □

推论 4.8。 存在顶点代数的同构

$$\begin{aligned}\mathfrak{z}(\mathcal{W}^{\kappa_c}(\mathfrak{gl}_{n|1})) &\simeq \mathbb{C}[J_\infty \mathbb{A}^{n-1}] \otimes \mathfrak{z}(V^{\kappa_c}(\mathfrak{gl}_{1|1})), \\ \mathfrak{z}(\mathcal{W}^{\kappa_c}(\mathfrak{sl}_{n|1})) &\simeq \mathbb{C}[J_\infty \mathbb{A}^{n-2}] \otimes \mathfrak{z}(V^{\kappa_c}(\mathfrak{gl}_{1|1})).\end{aligned}$$

我们注意到，中心 $\mathfrak{z}(V^{\kappa_c}(\mathfrak{gl}_{1|1}))$ 已在文献中得到描述 [1, 38]。

5. Wakimoto realization

5.1. **仿射情形**。本节回顾仿射顶点超代数 $V^\kappa(\mathfrak{g})$ 在 $\mathfrak{g}=\mathfrak{gl}_{n|1}$ 或 $\mathfrak{sl}_{n|1}$下的 Wakimoto 实现，它是 [21]的超类比。证明是将 [21] 中的论证修改后应用于此情形，因此我们只陈述结果。

设 G 为拟约化代数群 $GL_{n|1}$（相应地，$SL_{n|1}$），从而相伴的李超代数为 $\mathfrak{g}=\mathfrak{gl}_{n|1}$（相应地，$\mathfrak{sl}_{n|1}$）。对应于标准三角分解 $\mathfrak{g}=\mathfrak{n}_+\oplus\mathfrak{h}\oplus\mathfrak{n}_-$，我们用 N_+, H, N_- 表示 G 的闭子群。利用指数映射 $\exp:\mathfrak{n}_+\xrightarrow{\sim}N_+$，可将坐标环 $\mathbb{C}[N_+]\simeq\mathbb{C}[z_\alpha\mid\alpha\in\Delta_+]$ 等同起来，其中 z_α 是根向量 $e_\alpha\in\mathfrak{n}_+$ $(\alpha\in\Delta_+)$ 的坐标。N_+ 在自身上的左乘之逆诱导一个同态 $\rho^R:\mathfrak{n}_+\to\mathcal{D}(N_+)$，其中 $\mathcal{D}(N_+)$ 是 N_+上的微分算子环。于是，有

$$\rho^R:\mathfrak{n}_+\to\mathcal{D}(N_+),\quad e_\alpha\mapsto e_\alpha^R:=\sum_{\alpha\in\Delta_+}P_i^\alpha(z)\partial_{z_\alpha}\tag{5.1}$$

对 $\mathbb{C}[N_+]$中的某些多项式 $P_i^\alpha(z)$。另一方面，考虑如下右乘

$$N_-\backslash G\times G\to G.$$

将范围限制在开子集 $U=HN_+\subset N_-\backslash G$ 上，我们得到一个嵌入

$$\rho\colon U(\mathfrak{g})\hookrightarrow\mathcal{D}(N_+)\otimes U(\mathfrak{h}).\tag{5.2}$$

现在，令 $\mathcal{A}$ 为仿射超空间 N_+ 上的手征微分算子。具体而言，$\mathcal{A}$ 是由 a_α，a_α^* $(\alpha\in\Delta_+)$ 强生成的顶点超代数，它们的奇偶性与 $\mathfrak{g}$ 中的 e_α 相同，并满足 λ-括号

$$[a_{\alpha\lambda}a_\beta^*]=\delta_{\alpha,\beta},\quad [a_{\alpha\lambda}a_\beta]=[a_{\alpha\lambda}^*a_\beta^*]=0.$$

令 $\pi_{\mathfrak{h}}^{\kappa-\kappa_c}$为与层 $\kappa-\kappa_c$ 上的卡当子代数$\mathfrak{h}\subset\mathfrak{g}$ 相关联的海森堡顶点代数。根据定义，它由满足 λ-括号的子空间 $\mathfrak{h}$ 生成

$$[\widehat{h}_\lambda\widehat{h}']=(\kappa-\kappa_c)(h,h')\lambda,\qquad (h,h'\in\mathfrak{h}).$$

对于 $\nu\in\mathfrak{h}^*$，我们用 $\pi_{\mathfrak{h}\,\nu}^{\kappa-\kappa_c}$ 表示 $\pi^{\kappa-\kappa_c}$ 上最高权为 ν 的福克模。

作为态射 ρ (5.2) 的顶点代数升级，我们得到仿射顶点超代数 $V^\kappa(\mathfrak{g})$ 的如下实现。

命题 5.1. 存在顶点超代数的嵌入

$$\widehat{\rho}\colon V^\kappa(\mathfrak{g})\hookrightarrow\mathcal{A}\otimes\pi_{\mathfrak{h}}^{\kappa-\kappa_c}.$$

此外，该像由一般水平下筛选算子的核所刻画：

$$V^\kappa(\mathfrak{g})\simeq\bigcap\operatorname{Ker}S_i\subset\mathcal{A}\otimes\pi_{\mathfrak{h}}^{\kappa-\kappa_c}$$

$$S_i=\int Y(e_i^R\mathrm{e}^{-\frac{1}{k+n}\alpha_i},z)\mathrm{d}z\colon\mathcal{A}\otimes\pi_{\mathfrak{h}}^{\kappa-\kappa_c}\to\mathcal{A}\otimes\pi_{\mathfrak{h},-\alpha_i}^{\kappa-\kappa_c},\quad (i=1,\cdots,n).$$

由构造可知，映射 $\widehat{\rho}$是（5.2）中嵌入的手征化，其意义在于，应用 Zhu 函子可得（5.2）。

对 $V^\kappa(\mathfrak{g})$ 的实现在上述命题中称为 *Wakimoto* 实现 （参见例如 [21]）。同态 $\widehat{\rho}$ 诱导一族 $V^\kappa(\mathfrak{g})$-模

$$\mathbb{W}_\lambda^\kappa:=\mathcal{A}\otimes\pi_{\mathfrak{h},\lambda}^{\kappa-\kappa_c},\qquad(\lambda\in\mathfrak{h}^*)$$

通过限制得到，称为 $V^\kappa(\mathfrak{g})$上的*Wakimoto*表示。

同态 ρ^R 在（5.1）中诱导顶点超代数的嵌入

$$\rho^R\colon V^0(\mathfrak{n}_+) \hookrightarrow \mathcal{A}\otimes\pi_{\mathfrak{h}}^{\kappa-\kappa_c}.$$

注意到这两个嵌入

$$\widehat{\rho}\colon V^0(\mathfrak{n}_+) \hookrightarrow \mathcal{A}\otimes\pi_{\mathfrak{h}}^{\kappa-\kappa_c} \hookleftarrow V^0(\mathfrak{n}_+)\colon \rho^R \tag{5.3}$$

彼此中心化。

引理 5.2。 在临界层 $\kappa=\kappa_c$，我们有

$$\widehat{\rho}\colon \mathfrak{z}(V^{\kappa_c}(\mathfrak{g})) \hookrightarrow \pi_{\mathfrak{h}}^0 \subset \mathcal{A}\otimes\pi_{\mathfrak{h}}^0.$$

证明。 通过将 [21,引理 7。1] 针对单李代数的证明调整到我们的情形，可以证明该断言。注意，以下形式的按字典序排列的单项式

$$\prod_{p_j<0}\widehat{h}_{i_j,(p_j)}\prod_{q_j<0}e^R_{\alpha_j,(q_j)}\prod_{r_j\leqslant 0}a^*_{\alpha_j,r_j}\mathbf{1}$$

构成 $\mathcal{A}\otimes\pi_{\mathfrak{h}}^0$ 的一组基，其中我们令 $\widehat{h}_{i_j}=\widehat{\rho}(h_{i_j})$ 遍历 $\mathfrak{h}$ 的基。由于

$$\mathfrak{z}(V^{\kappa_c}(\mathfrak{g})) \subset \mathrm{Com}(V^0(\mathfrak{n}_+), V^{\kappa_c}(\mathfrak{g})),$$

命题 5.1 蕴含 $\mathfrak{z}(V^{\kappa_c}(\mathfrak{g}))$ 嵌入到由.....张成的子空间中

$$\prod_{p_j<0}\widehat{h}_{i_j,p_j}\prod_{q_j<0}e^R_{\alpha_j,q_j}\mathbf{1}.$$

由 $\mathfrak{z}(V^{\kappa_c}(\mathfrak{g})) \subset \mathrm{Com}(V^{\kappa_c}(\mathfrak{h})\ V^{\kappa_c}(\mathfrak{g}))$ 可知， $\mathfrak{z}(V^{\kappa_c}(\mathfrak{g}))$ 位于 $\mathfrak{h}$-权为 0 的子空间中。由于 e^R_α 的 $\mathfrak{h}$-权为 α，故 $\mathfrak{z}(V^{\kappa_c}(\mathfrak{g}))$ 位于由 $\prod_{p_j<0}\widehat{h}_{i_j,p_j}\mathbf{1}$ 张成的子空间中，即 $\pi_{\mathfrak{h}}^0$。至此证明完毕。□

5.2. $\mathcal{W}$**-超代数情形**。 接下来，我们将量子哈密顿约化 $\mathrm{H}_{\mathbb{O}}$ （对应于正则幂零元 f）作用于 Wakimoto 实现（命题5.1 ），并得到一个同态

$$[\widehat{\rho}]\colon \mathcal{W}^\kappa(\mathfrak{g}) \to \mathrm{H}^0_{\mathbb{O}}(\mathcal{A}\otimes\pi_{\mathfrak{h}}^{\kappa-\kappa_c}).$$

现在我们改变 $\mathbb{C}[N_+]$ 的坐标，使得

$$\mathfrak{n}_+ = \mathfrak{n}_+^0 \rtimes \mathfrak{n}_+^+ \xrightarrow{\sim} N_+^0 \rtimes N_+ \simeq N_+$$

利用良好分次，并相应地分解 $\mathcal{A}\simeq\mathcal{A}_{\mathbb{O}}\otimes\mathcal{A}_+$，其中

$$\mathcal{A}_{\mathbb{O}} = \langle a_\alpha, a^*_\alpha \mid \alpha\in\Delta_+^0\rangle, \quad \mathcal{A}^+ = \langle a_\alpha, a^*_\alpha \mid \alpha\in\Delta_+^+\rangle.$$

引理 5.3. 存在顶点超代数的一个同构

$$\mathrm{H}^n_{\mathbb{O}}(\mathcal{A}\otimes\pi_{\mathfrak{h}}^{\kappa-\kappa_c}) \simeq \delta_{n,0}(\mathcal{A}_{\mathbb{O}}\otimes\pi_{\mathfrak{h}}^{\kappa-\kappa_c}).$$

此外，

$$\mathrm{H}^n_{\mathrm{DS}}(\mathbb{W}^\kappa_\lambda) \simeq \delta_{n,0}\mathbb{W}^\kappa_{\mathbb{O},\lambda}, \qquad \mathbb{W}^\kappa_{\mathbb{O},\lambda} := \mathcal{A}_{\mathbb{O}}\otimes\pi_{\mathfrak{h},\lambda}^{\kappa-\kappa_c}$$

作为 $\mathbb{W}^\kappa_{\mathbb{O}} := \mathcal{A}_{\mathbb{O}}\otimes\pi_{\mathfrak{h}}^{\kappa-\kappa_c}$ 上的模成立。

命题 5.4. 同态

$$[\widehat{\rho}]\colon \mathcal{W}^\kappa(\mathfrak{g}) \to \mathbb{W}^\kappa_{\mathbb{O}} = \mathcal{A}_{\mathbb{O}}\otimes\pi_{\mathfrak{h}}^{\kappa-\kappa_c}$$

是一个嵌入。此外，在一般水平下，其像由筛选算子的核刻画：

$$\mathcal{W}^\kappa(\mathfrak{g}) \simeq \bigcap \mathrm{Ker}\, S_i^{\mathbb{O}} \subset \mathcal{A}_{\mathbb{O}}\otimes\pi_{\mathfrak{h}}^{\kappa-\kappa_c}$$

$$S_i^{\mathbb{O}} = \int Y([e_i^R]\mathrm{e}^{-\frac{1}{k+n}\alpha_i}, z)\mathrm{d}z\colon \mathbb{W}^\kappa_{\mathbb{O},0} \to \mathbb{W}^\kappa_{\mathbb{O},-\alpha_i}, \quad (i=1,\cdots,n).$$

with

$$[e_i^R] = \mathbf{1}, \quad (i = 1, \dots, n-1), \qquad [e_n^R] = a_{\alpha_n}.$$

证明。 证明可直接利用命题 5.1 以及 [13] 中得到的自由场实现得出。 □

注意到 $\mathcal{A}_{\mathbb{O}} = \langle a_{\alpha_n},\ a^*_{\alpha_n} \rangle$ 因此

$$\mathcal{A}_{\mathbb{O}} \simeq V_{\mathbb{Z}}, \quad a_{\alpha_n}, a^*_{\alpha_n} \mapsto \mathrm{e}^{x}, \mathrm{e}^{-x}$$

根据玻色子-费米子对应。在本文其余部分，我们将这两个实现视为相同。因此，这个实现与定理3.1中的实现一致，下面我们将它们等同起来。

由于中心

$$\mathfrak{z}(V^{\kappa_c}(\mathfrak{g})) \subset V^{\kappa_c}(\mathfrak{g}) \subset C_f^\bullet(V^{\kappa_c}(\mathfrak{g}))$$

位于 BRST复形的中心，因此特别地， $\mathfrak{z}(V^{k_c}(\mathfrak{g})) \subset \mathrm{Ker}\ \ d_\circ$ 因此，我们有自然同态

$$\iota \colon \mathfrak{z}(V^{\kappa_c}(\mathfrak{g})) \to \mathfrak{z}(\mathcal{W}^{\kappa_c}(\mathfrak{g})) \subset \mathcal{W}^{\kappa_c}(\mathfrak{g}).$$

引理 5.5。 映射 ι是单射。

证明。 由引理5.2 和定理 3.2中两侧的 Wakimoto 实现可得该断言，依据如下交换图：

$$\begin{array}{ccccc}
\mathfrak{z}(V^{\kappa_c}(\mathfrak{g})) & \xrightarrow{\ \iota\ } & \mathfrak{z}(\mathcal{W}^{\kappa_c}(\mathfrak{g})) & \subset & \mathcal{W}^{\kappa_c}(\mathfrak{g}) \\
\big\downarrow{\scriptstyle \widehat{\rho}} & & \big\downarrow{\scriptstyle [\widehat{\rho}]} & & \big\downarrow{\scriptstyle [\widehat{\rho}]} \\
\pi^0_{\mathfrak{h}} & \xrightarrow{\ \mathrm{id}\ } & \pi^0_{\mathfrak{h}} & \subset & \mathcal{A}_{\mathbb{O}} \otimes \pi^0_{\mathfrak{h}}.
\end{array}$$

□

6. Center of affine $\mathfrak{gl}_{n|1}$ at the critical level

6.1. **Segal–Sugawara向量**。 在 [39], Molev 和 Ragoucy 利用以下矩阵值微分算子构造了一族元素，它们属于 $\mathfrak{z}(V^{\kappa_c}(\mathfrak{gl}_{m|n}))$

$$\partial + \widehat{E} = \sum_{i,j} e_{i,j} \otimes (\delta_{i,j}\partial + e_{i,j(-1)})(-1)^{p(i)}$$

在 $R{:=}\mathrm{End}(\mathbb{C}^{m|n}) \otimes U(\widehat{\mathfrak{gl}}_{m|n} \rtimes \mathbb{C}\partial)$ 中。这里，第二个因子是李超代数 $\mathfrak{gl}_{m|n} \rtimes \mathbb{C}\partial$ 的包络代数$\widehat{\ }$，而 R 上的乘积由 Koszul符号规则定义：

$$(a \otimes b)(a' \otimes b') = (-1)^{p(b)p(a')} aa' \otimes bb'$$

对于齐次奇偶元 $a,\ a',\ b,\ b'$。我们考虑第一个因子上的超迹：

$$\mathrm{str} \colon R \to U(\widehat{\mathfrak{gl}}_{m|n} \rtimes \mathbb{C}\partial)$$

并将其与投影复合

$$U(\widehat{\mathfrak{gl}}_{m|n} \rtimes \mathbb{C}\partial) \simeq U(\widehat{\mathfrak{gl}}_{m|n}) \otimes \mathbb{C}[\partial] \twoheadrightarrow V^{\kappa}(\mathfrak{gl}_{m|n}) \otimes \mathbb{C}[\partial]$$

从而得到超迹

$$\mathrm{str} \colon R \to U(\widehat{\mathfrak{gl}}_{m|n} \rtimes \mathbb{C}\partial) \twoheadrightarrow V^{\kappa}(\mathfrak{gl}_{m|n}) \otimes \mathbb{C}[\partial]$$

通过记号滥用。

定理6.1 ([39])。 在临界层 $\kappa = \kappa_c$，展开式中的系数$s_{p,\ q}$

$$\mathrm{str}(\partial + \widehat{E})^p = s_{p,0}\partial^n + s_{p,1}\partial^{p-1} + \cdots + s_{p,p}$$

属于中心 $\mathfrak{z}(V^{\kappa_c}(\mathfrak{gl}_{m|n}))$。

6.2. **超对称多项式**。 中心 $\mathfrak{z}(V^{\kappa_c}(\mathfrak{gl}_{m|n}))$ 与仿射超对称多项式密切相关，正如 [38] 对 $\mathfrak{gl}_{1|1}$ 的观察所示。引入多项式环 $R^{m|n}$ ，定义如下：

$$R^{m|n} := \mathbb{C}[u_1, \ldots, u_m, v_1, \ldots, v_n],$$

其上有对称群 $\mathfrak{S}_{m+n}$ 的自然作用。超对称多项式环 $\Lambda^{m|n}$ 是子代数

$$\Lambda^{m|n} := \left\{ f; f|_{u_m=t, v_n=-t} \in R^{m-1|n-1} \right\} \subset (R^{m|n})^{\mathfrak{S}_m \times \mathfrak{S}_n} \subset R^{m|n}.$$

已知 [35]， $\Lambda^{m|n}$ 由幂和生成

$$s_p = (u_1^p + \cdots + u_m^p) - (-1)^p (v_1^p + \cdots + v_n^p) \quad (p > 0).$$

仿射超对称多项式环 $\Lambda^{m|n}{}_{\mathrm{aff}}$ 是 $\Lambda^{m|n}$ 的（交换）顶点代数扩张；我们考虑交换顶点代数

$$R_\infty^{m|n} := \mathbb{C}[\partial^N u_1, \ldots, \partial^N u_m, \partial^N v_1, \ldots, \partial^N v_n \mid N \geqslant 0] \simeq \mathbb{C}[J_\infty \mathfrak{h}]$$

并将 $\Lambda^{m|n}{}_{\mathrm{aff}}$ 引入为由 $\Lambda^{m|n}$ 生成的微分代数子代数：

$$\Lambda_{\mathrm{aff}}^{m|n} := \langle \partial^N f \mid f \in \Lambda^{m|n}, N \geqslant 0 \rangle \subset R_\infty^{m|n}.$$

现在，我们通过命题 6.1 中的 Wakimoto 实现，将仿射超对称多项式与定理 6.1中的 Segal–Sugawara向量联系起来。我们取命题 3.4中关于 Li 滤过（见 5.1）的相关分次（超）向量空间上的泊松顶点超代数，并考虑诱导的同态

$$\overline{\Psi}\colon \operatorname{gr} V^\kappa(\mathfrak{gl}_{n|1}) \to \operatorname{gr}(\mathcal{A} \otimes \pi_{\mathfrak{h}}^{k+\mathrm{h}^\vee}) \simeq \operatorname{gr}\mathcal{A} \otimes \operatorname{gr}\pi_{\mathfrak{h}}^{k+\mathrm{h}^\vee}.$$

命题 6.2。 存在一个嵌入

$$\Lambda_{\mathrm{aff}}^{n|1} \subset \operatorname{gr}\mathfrak{z}(V^{\kappa_c}(\mathfrak{gl}_{n|1})).$$

证明。 注意到存在一个同构 $R_\infty^{n|1} \xrightarrow{\simeq} \mathrm{gr}\pi_{\mathfrak{h}}^0$ ，它将

$$u_1, \ldots, u_n \mapsto e_{1,1}, \ldots, e_{n,n}, \quad v_1 \mapsto e_{n+1,n+1}.$$

因此，只需证明 $\operatorname{Im}\Psi$ 包含幂和 $\overline{s_p}(p \geqslant 0)$，因为 Ψ 是一个嵌入，且限制为

$$\overline{\Psi}\colon \operatorname{gr}\mathfrak{z}(V^{\kappa_c}(\mathfrak{gl}_{n|1})) \hookrightarrow \operatorname{gr}\pi_{\mathfrak{h}}^0$$

根据引理 5.2。由命题 5.1中的公式，Segal–Sugawara向量 $s_{p,p}$ 的像与.....一致

$$\mathrm{str}\begin{pmatrix} e_{1,1} & & & \\ & \ddots & & \\ & & e_{n,n} & \\ & & & -e_{n+1.n+1} \end{pmatrix}^p = e_{1,1}^p + \cdots + e_{n,n}^p - (-e_{n+1,n+1})^p$$

$$= u_1^p + + \cdots + u_n^p - (-1)^p v_1^p = s_p.$$

证明至此完成。 □

6.3. 中心。 现在，我们可以证明本文的主要结果了。我们从李过滤下关联分次向量空间的层上的中心开始。

定理 6.3。
(1) 同态 ι 是一个同构

$$\iota\colon \mathfrak{z}(V^{\kappa_c}(\mathfrak{gl}_{n|1})) \xrightarrow{\simeq} \mathfrak{z}(\mathcal{W}^{\kappa_c}(\mathfrak{gl}_{n|1})).$$

(2) 存在一个微分代数的同构

$$\operatorname{gr}\mathfrak{z}(V^{\kappa_c}(\mathfrak{gl}_{n|1})) \simeq \Lambda^{n|1}_{\mathrm{aff}}.$$

证明。 由定理 3.2 和引理 5.5，我们有嵌入

$$\mathfrak{z}(V^{\kappa}(\mathfrak{gl}_{n|1})) \subset \mathfrak{z}(\mathcal{W}^{\kappa}(\mathfrak{gl}_{n|1})) \subset \pi^0_{\mathfrak{h}}.$$

由于 $\Lambda^{n|1}{}_{\mathrm{aff}} \subset \operatorname{gr}\mathfrak{z}(V^{\kappa_c}(\mathfrak{gl}_{n|1}))$，根据命题 6.2，只需证明反向包含

$$\operatorname{gr}\mathfrak{z}(\mathcal{W}^{\kappa_c}(\mathfrak{gl}_{n|1})) \subset \Lambda^{n|1}_{\mathrm{aff}}. \tag{6.1}$$

由定理 4.7，我们有同构

$$\operatorname{gr}\mathcal{W}^{\kappa_c}(\mathfrak{gl}_{n|1}) \simeq \operatorname{gr}\mathbb{C}[J_\infty \mathbb{A}^{n-1}] \otimes \operatorname{gr}V^{\kappa_c}(\mathfrak{gl}_{1|1}) \tag{6.2}$$

泊松顶点超代数。由 [38], 存在一个同构 $\operatorname{gr}\mathfrak{z}(V^{\kappa_c}(\mathfrak{gl}_{1|1})) \simeq \Lambda^{1|1}{}_{\mathrm{aff}}$，且 $\operatorname{gr}\mathfrak{z}(V^{\kappa_c}(\mathfrak{gl}_{1|1}))$ 由以下元素生成

$$\overline{h}_{p,p} = e_{1,1}^{p-1}(e_{1,1}+e_{2,2}) + (p-1)e_{1,1}^{p-2}e_{2,1}e_{1,2}$$

对于 $p \geqslant 1$。我们在嵌入 $V^{\kappa_c}(\mathfrak{gl}_{1|1}) \hookrightarrow \mathcal{W}^{\kappa_c}(\mathfrak{gl}_{n|1})$中应用公式（4.8），得到

$$\begin{aligned}
\overline{h}_{p,p} &= J^{p-1}\overline{\mathscr{W}}_n + (p-1)\overline{J}^{p-2}\overline{G}_-\overline{G}_+ \\
&= (-\overline{u}_{n+1} + \overline{\psi\psi}^*)^{p-1}\overline{\mathscr{W}}_n + (p-1)(-\overline{u}_{n+1} + \overline{\psi\psi}^*)^{p-2}\overline{\mathscr{W}}_n\overline{\psi}^*\overline{\psi} \\
&= (-1)^{p-1}\overline{u}_{n+1}^{p-1}\overline{\mathscr{W}}_n
\end{aligned}$$

在 $\operatorname{gr}\mathcal{A}\otimes\operatorname{gr}\pi^0_{\mathfrak{h}}$ 中。由于 $\mathscr{W}_n = (-1)^n(\partial+H_1)\cdots(\partial+H_n)$，我们有 $\overline{\mathscr{W}}_n = H_1\cdots H_n$，因此 $h_{p,p}$ 可识别为

$$\overline{h}_{p,p} = (-1)^{p-1}v_1^{p-1}(u_1+v_1)\cdots(u_n+v_1)$$

在 $R^{n|1}_\infty$中。由于$h_{p,p}|_{u_n=t,\ v_1=-t} = 0$，$h_{p,p}$ 属于 $\Lambda^{n|1}{}_{\mathrm{aff}}$。另一方面，（$W_p$ $(p=1,\cdots,n-1)$ 中第一个因子的生成元可实现为系数6.2）

$$(z-u_1)\cdots(z-u_n)(z+u_{n+1})^{-1} = z^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty}\overline{W}_p\partial^{n-1-p}$$

取 z 为不定元，依据（3.16）。代入 $u_n = t$ 和 $u_{n+1} = -t$后，右端变为（$z-u_1$）$\cdots$（$z-u_{n-1}$），因此与 t无关。因此，系数 W_p也如此，即根据定义，它们属于 $\Lambda^{n|1}$仿射。由此得到（6.1）。□

因此，我们得到以下主要结果。

定理 6.4。 中心 $\mathfrak{z}(V^{\kappa_c}(\mathfrak{gl}_{n|1}))$ 同构于 $\pi^0_{\mathfrak{h}}$ 中由伪微分算子 $\mathcal{L}$ 的系数 W_p（$p \geqslant 1$)强生成的子代数

$$\mathcal{L} = (\partial-u_1)\cdots(\partial-u_n)(\partial+u_{n+1})^{-1} = \partial^{n-1} + \sum_{p=1}^{\infty}W_p\partial^{n-1-p}. \tag{6.3}$$

证明。由定理 6.3，我们有 $\mathfrak{z}(V^{\kappa_c}(\mathfrak{gl}_{n|1})) \simeq \mathfrak{z}(\mathcal{W}^{\kappa_c}(\mathfrak{gl}_{n|1}))$，并且根据命题 3.6，$\mathfrak{z}(\mathcal{W}^{\kappa_c}(\mathfrak{gl}_{n|1}))$ 包含一个由 W_p $(p \geqslant 1)$ 生成的子代数。取关联分次向量空间 $\operatorname{gr}\mathfrak{z}(V^{\kappa_c}(\mathfrak{gl}_{n|1})) \simeq \operatorname{gr}\mathfrak{z}(\mathcal{W}^{\kappa_c}(\mathfrak{gl}_{n|1}))$，我们在定理 6.3 的证明中已证明，像 W_p' 生成仿射超对称多项式 $\Lambda^{n|1}$ aff，因而根据定理 6.3 (2)，也生成 $\operatorname{gr}\mathfrak{z}(V^{\kappa_c}(\mathfrak{gl}_{n|1}))$。因此，$W_p$' 强生成中心 $\mathfrak{z}(V^{\kappa_c}(\mathfrak{gl}_{n|1}))$。□

我们将 $\mathrm{Fun}(\mathrm{Op}^{n|1}(D))$ 记为由 $\pi^0_{\mathfrak{h}}$ 生成的微分子代数W_p $(p \geqslant 1)$，其谱 $\mathrm{Op}^{n|1}(D)$ 参数化局部圆盘 6.3 上形如（ $D =\mathrm{Spec}\ \mathbb{C}((z))$ 的伪微分算子。

由于定理 6.4 中的嵌入是有限情形下 Harish-Chandra 映射$\iota_{\mathrm{HC}}\colon \mathfrak{z}(\mathfrak{gl}_{n|1}) \xrightarrow{\simeq} \Lambda^{n|1} \subset U(\mathfrak{h})$ 的一个类比（参见例如 [37]），而后者可通过取 Zhu 函子得到，因此我们称定理 6.4 中的嵌入为仿射 Harish-Chandra 映射：

$$\widehat{\iota}_{\mathrm{HC}}\colon \mathfrak{z}(V^{\kappa_c}(\mathfrak{gl}_{n|1})) \xrightarrow{\simeq} \mathrm{Fun}\left(\mathrm{Op}_{n|1}(D)\right) \subset \pi^0_{\mathfrak{h}}. \tag{6.4}$$

6.4. **中心上的泊松结构**。尽管定理 $\mathfrak{z}(V^{\kappa_c}(\mathfrak{gl}_{n|1}))$ 中临界层上的中心只是一个交换顶点代数（即微分代数），但它通过仿射 Harish-Chandra 映射 自然地继承了泊松顶点代数结构。注意，$\widehat{\iota}_{\mathrm{HC}}$由 $\pi^0_{\mathfrak{h}}$ 强生成 u_1、$\cdots$、u_{n+1}，并通过公式继承了标准的泊松顶点代数结构

$$\{u_{i\lambda}u_j\} = \kappa_V(u_i,u_j)\lambda, \tag{6.5}$$

例如，参见 [20, 29]，了解泊松顶点代数的详细信息。

命题 6.5。微分子代数$\mathrm{Fun}(\mathrm{Op}^{n|1}(D))$是$\pi^0_{\mathfrak{h}}$的泊松顶点子代数。通过仿射 *Harish-Chandra* 映射，这继承了 $\mathfrak{z}(V^{\kappa_c}(\mathfrak{gl}_{n|1}))$上的泊松顶点代数结构。

注意，仿射 Harish-Chandra 映射（6.4）是定理 $C^{\kappa}(\mathfrak{gl}_{n|1})$ 中海森堡陪集描述的特化3.6。回顾一下，在一般水平下，$C^{\kappa}(\mathfrak{gl}_{n|1})$由伪微分算子展开的系数强生成

$$\mathcal{L}_k = (\partial+\varepsilon t_1)\cdots(\partial+\varepsilon t_n)(\partial+\varepsilon t_{n+1})^{\varepsilon} \tag{6.6}$$

其中 $\varepsilon = \frac{1}{-1+(k+\mathrm{h}^\vee)}$，记作 $\mathrm{Fun}(\mathrm{Op}^{\kappa}_{n|1}(D))$。根据（ t_i）中3.7的定义，我们有如下图表：

$$\begin{array}{ccccc} C^{\kappa}(\mathfrak{gl}_{n|1}) & \xrightarrow{\simeq} & \mathrm{Fun}(\mathrm{Op}^{\kappa}_{n|1}(D)) & \subset & \pi^{k+\mathrm{h}^\vee}_{\mathfrak{t}} \\ \downarrow{\scriptstyle \kappa\to\kappa_c} & & \downarrow{\scriptstyle \kappa\to\kappa_c} & & \downarrow{\scriptstyle \kappa\to\kappa_c} \\ \mathfrak{z}(V^{\kappa_c}(\mathfrak{gl}_{n|1})) & \xrightarrow{\simeq} & \mathrm{Fun}(\mathrm{Op}_{n|1}(D)) & \subset & \pi^0_{\mathfrak{h}}, \end{array}$$

这概述了定理 3.6、6.3 和6.4。

命题 6.5 的证明。注意，定义在 $\mathbb{C}$ 上、依赖于 k 的顶点代数 $\pi^{k+\mathrm{h}^\vee}_{\mathfrak{t}}$ 有一个整形式，即定义在环 $\mathbf{O} = \mathbb{C}[\mathbf{x}]$ 上且为自由模的顶点代数 $\pi^{\mathbf{O}}_{\mathfrak{t}}$，它由 $\mathfrak{t}_i (i = 1,\cdots, n+1)$ 生成，并满足 λ-括号 (3.7)，其中作了如下修改：$t_i \mapsto \mathfrak{t}_i$ 和 $(k+\mathrm{h}^\vee) \mapsto \mathbf{x}$。利用 $\mathbb{C}_k = \mathbf{O}/(\mathbf{x}-(k+\mathrm{h}^\vee))$ $(k \in \mathbb{C})$，我们恢复了作为顶点代数的 $\pi^{k+\mathrm{h}^\vee}_{\mathfrak{t}} \simeq \pi^{\mathbf{O}}_{\mathfrak{t}} \otimes_{\mathbf{O}} \mathbb{C}_k$。特别地，临界层的情形恢复为 $\pi^0_{\mathfrak{h}} \simeq \pi^{\mathbf{O}}_{\mathfrak{t}} \otimes_{\mathbf{O}} \mathbb{C}_0$，它

在完备化 $\mathbf{O}^\wedge = \mathbb{C}[\![\mathbf{x}]\!] \supset \mathbf{O}$ 后成立，即 $\pi_{\mathfrak{h}}^0 \simeq \pi_{\mathfrak{t}}^{\mathbf{O}^\wedge} \otimes_{\widehat{\mathbf{O}}} \mathbb{C}_0$。由于 $\pi_{\mathfrak{h}}^0$ 是交换的，我们有

$$[\cdot_\lambda \cdot] \colon \pi_{\mathfrak{t}}^{\mathbf{O}^\wedge} \times \pi_{\mathfrak{t}}^{\mathbf{O}^\wedge} \to x \cdot \pi_{\mathfrak{t}}^{\mathbf{O}^\wedge}$$

因此，复合映射

$$\pi_{\mathfrak{t}}^{\mathbf{O}^\wedge} \times \pi_{\mathfrak{t}}^{\mathbf{O}^\wedge} \xrightarrow{[\cdot_\lambda \cdot]} \mathbf{x} \cdot \pi_{\mathfrak{t}}^{\mathbf{O}^\wedge}[\lambda] \xrightarrow{1/\mathbf{x}} \pi_{\mathfrak{t}}^{\mathbf{O}^\wedge}[\lambda] \xrightarrow{\cdot \otimes 1} (\pi_{\mathfrak{t}}^{\mathbf{O}^\wedge} \otimes_{\mathbf{O}^\wedge} \mathbb{C}_0)[\lambda] \simeq \pi_{\mathfrak{h}}^0[\lambda]$$

是良定义的，并诱导出一个双线性映射

$$\{\cdot_\lambda \cdot\} \colon \pi_{\mathfrak{h}}^0 \times \pi_{\mathfrak{h}}^0 \to \pi_{\mathfrak{h}}^0[\lambda],$$

它在 $\pi_{\mathfrak{h}}^0$ 上给出一个泊松 λ-括号，并且确实与式 (6.5) 中的括号一致。结合类似地得到的 $\pi_{\mathfrak{h}}^0$ 上的微分代数结构，特化 $\pi_{\mathfrak{h}}^0 \simeq \pi_{\mathfrak{t}}^{\mathbf{O}} \otimes_{\mathbf{O}} \mathbb{C}_0$ 给出了 $\pi_{\mathfrak{h}}^0$ 上标准的泊松顶点代数结构，详情见 [20]。现在，海森堡余集子代数 $C^\kappa(\mathfrak{gl}_{n|1}) \subset \pi_{\mathfrak{h}}^{k+\mathrm{h}^\vee}$ 是一个依赖于层 $k+\mathrm{h}^\vee \neq 1$ 的顶点子代数族；在一般水平下，它具有一组强生成元 W_p $(p \geqslant 0)$，且对所有 $k+\mathrm{h}^\vee \neq 1$ 均有统一定义。因此，对某个子集 $R \subset \mathbb{C}$，我们可以在局部化 $\mathbf{O}_{loc} = \mathbb{C}[\mathbf{x}][\frac{1}{\mathbf{x}-a} \mid a \in R]$ 上找到由 W_p 生成的顶点子代数 $\mathrm{Fun}(\mathrm{Op}_{n|1}^{\mathbf{O}_{loc}}(D)) \subset \pi_{\mathfrak{t}}^{\mathbf{O}} \otimes_{\mathbf{O}} \mathbf{O}_{loc}$；这些生成元是将 $t_i \mapsto \mathbf{t}_i$ 和 $\varepsilon \mapsto 1/(-1+\mathbf{x})$ 代入后，从式 (6.6) 中得到的系数。注意，由于定理 6.4，临界层被排除在外，即 $0 \notin R$。因此，我们可以取 $\mathrm{Fun}(\mathrm{Op}_{n|1}^{\mathbf{O}^\wedge}(D))$ 的完备化 $\mathrm{Fun}(\mathrm{Op}_{n|1}^{\mathbf{O}_{loc}}(D))$，并

$$\mathrm{Fun}(\mathrm{Op}_{n|1}(D)) \simeq \mathrm{Fun}(\mathrm{Op}_{n|1}^{\mathbf{O}^\wedge}(D)) \otimes_{\widehat{\mathbf{O}}} \mathbb{C}_0.$$

因此，$\mathrm{Fun}(\mathrm{Op}_{n|1}^{\mathbf{O}^\wedge}(D))$ 上的顶点代数结构在 $\mathrm{Fun}(\mathrm{Op}^{n|1}(D))$ 上诱导出一个泊松顶点代数结构，作为 $\pi_{\mathfrak{h}}^0$ 上标准泊松顶点代数的一个泊松顶点子代数。至此证明完成。□

6.5. **关于大层极限的附记。** 在此，我们描述海森堡余集 $C^{\kappa_c}(\mathfrak{sl}_{n|1})$（相应地，$C^{\kappa_c}(\mathfrak{gl}_{n|1})$），即通过 $\mathcal{W}$-代数 $\mathcal{W}^\infty(\mathfrak{sl}_n, \mathbb{O}_{\mathrm{sr}})$（相应地，$\mathcal{W}^\infty(\mathfrak{gl}_n, \mathbb{O}_{\mathrm{sr}})$）的大层极限加以描述，该极限等同于 Slodowy 切片 $\mathscr{S}_{\mathrm{sr}}$ 的喷射概形上的正则函数，该切片与幂零元 f 相关联（见 (4.1)。

为了表述 $\mathcal{W}^\infty(\mathfrak{gl}_n, \mathbb{O}_{\mathrm{sr}})$ 的大层极限，我们使用 Wakimoto 实现 $V^{\check\kappa}(\mathfrak{gl}_n)$，它具有整形式，从而允许取（泊松顶点代数）极限 $\check\kappa \to \infty$，遵循 [17, 21]。而 $V^{\check\kappa}(\mathfrak{gl}_n)$ 的 Wakimoto 实现则是顶点代数的一个嵌入

$$\Psi_{\mathrm{aff}} \colon V^{\check\kappa}(\mathfrak{gl}_n) \hookrightarrow \mathcal{A}_{\Delta^+} \otimes \pi_{\mathfrak{h}}^{\check\kappa+\mathrm{h}^\vee}, \tag{6.7}$$

其中 $\mathcal{A}_{\Delta^+}$ 是由正根 Δ_+ 索引的 $\beta\gamma$-系 $\mathcal{A}$ 的张量积。引入环 $\check{\mathbf{O}} = \mathbb{C}[\frac{1}{\check{\mathbf{x}}}]$，其中 $\check{\mathbf{x}}$ 是与求值 $\check{\mathbf{O}} \to \mathbb{C}_{\check\kappa}$ 后的 $\check\kappa + \mathrm{h}^\vee$ 相对应的形式变量，$\frac{1}{\check{\mathbf{x}}} \mapsto \frac{1}{\check\kappa + \check{\mathrm{h}}^\vee}$。引入以下定义在 $\mathbf{O}$ 上的 $\check{}$ 顶点代数

$$V^{\check{\mathbf{O}}}(\mathfrak{gl}_n), \quad \mathcal{A}_{\Delta^+}^{\check{\mathbf{O}}}, \quad \pi_{\mathfrak{h}}^{\check{\mathbf{O}}}, \tag{6.8}$$

$\check{}$它们是由以下元素强生成的自由 $\mathbf{O}$-代数

$$\widehat{u} = \frac{1}{\check{\mathbf{x}}} u, \quad , \widehat{a}_\alpha = \frac{1}{\check{\mathbf{x}}} a_\alpha, \ \widehat{a}_\alpha^* = a_\alpha^*, \quad \widehat{h}_i = \frac{1}{\check{\mathbf{x}}} h_i$$

对于 $u \in \mathfrak{sl}_n$、 $\alpha \in \Delta_+$ 和 $1 \leqslant i \leqslant n-1$。根据定义，它们满足 λ-括号关系

$$[\widehat{u}_\lambda \widehat{v}] = \frac{1}{\check{\mathbf{x}}}\left(\widehat{[u,v]} + \frac{\check{\mathbf{x}} - \mathrm{h}^\vee}{\check{\mathbf{x}}}\kappa_V(u,v)\lambda\right),$$
$$[\widehat{a}_{\alpha\lambda}\widehat{a}^*_\beta] = \frac{1}{\check{\mathbf{x}}}\delta_{\alpha,\beta}, \quad [\widehat{h}_{i\lambda}\widehat{h}_j] = \frac{1}{\check{\mathbf{x}}}\kappa_V(h_i,h_j)\lambda.$$

因此，我们可以取求值 $\check{\kappa} = \infty$ 为 ${}^{1}\check{}_{\mathbf{x}} = 0$，记作 $\check{}\mathbf{O} \to \mathbb{C}_\infty$。类似地，将 $V^\infty(\mathfrak{gl}_n)$ $\mathcal{A}^\infty_{\Delta^+}$， $\pi^\infty_{\mathfrak{h}}$表示式（6.8）中各项的求值。注意，通过类似于第 6.4节中的公式，这些极限下的微分代数自然具有泊松顶点代数结构。于是，（6.7）中的嵌入可提升为一个嵌入

$$\Psi^{\check{\mathbf{O}}}_{\mathrm{aff}} \colon V^{\check{\mathbf{O}}}(\mathfrak{gl}_n) \to \mathcal{A}^{\check{\mathbf{O}}}_{\Delta^+} \otimes_{\check{\mathbf{O}}} \pi^{\check{\mathbf{O}}}_{\check{\mathfrak{h}}}$$

由 [17] 给出，它通过求值还原了（6.7）。应用 BRST 约化 $\mathrm{H}^0_{\mathbb{O}_{\mathrm{sr}}}$后，我们得到一个顶点代数嵌入

$$[\Psi^{\check{\mathbf{O}}}_{\mathrm{aff}}] \colon \mathcal{W}^{\check{\mathbf{O}}}(\mathfrak{gl}_n, \mathbb{O}_{\mathrm{sr}}) \to \mathcal{A}^{\check{\mathbf{O}}} \otimes_{\check{\mathbf{O}}} \pi^{\check{\mathbf{O}}}_{\check{\mathfrak{h}}}, \tag{6.9}$$

其求值 $- \otimes_{\check{\mathbf{O}}} \mathbb{C}_{\check{\kappa}}$ 还原了命题 $\mathcal{W}$-代数$\mathcal{W}^{\check{\kappa}}(\mathfrak{gl}_n, \mathbb{O}_{\mathrm{sr}})$ 的 Wakimoto 实现，见命题 4.1，参见 [25]。下面引入大层极限

$$\mathcal{W}^\infty(\mathfrak{gl}_n, \mathbb{O}_{\mathrm{sr}}) = \mathcal{W}^{\check{\kappa}}(\mathfrak{gl}_n, \mathbb{O}_{\mathrm{sr}}) \otimes_{\check{\mathbf{O}}} \mathbb{C}_\infty.$$

由于 $\mathcal{W}^{\check{\kappa}}(\mathfrak{gl}_n, \mathbb{O}_{\mathrm{sr}})$ 包含 Heisenberg场 $\check{}\mathbf{H} = {}^{1}\check{}_{\mathbf{x}}(aa^* + \check{}\varpi_{n-1})$（见 §4.1），它满足 λ-括号 $[\check{}\mathbf{H}_\lambda \check{}\mathbf{H}] = {}^{1}_{2}\check{}_{\mathbf{x}}(1 - \frac{n-1}{n}\check{}\mathbf{x})\lambda$，因此我们得到—（非退化）海森堡顶点代数上权模的完全可约性

$$\mathcal{W}^{\check{\mathbf{O}}_{loc}}(\mathfrak{gl}_n, \mathbb{O}_{\mathrm{sr}}) \simeq \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} C_n^{\check{\mathbf{O}}_{loc}}(\mathfrak{gl}_n, \mathbb{O}_{\mathrm{sr}}) \otimes_{\check{\mathbf{O}}_{loc}} \pi^{\check{\mathbf{O}}_{loc}}_{\check{\mathbf{H}},n} \tag{6.10}$$

$\check{}$ 在局部化 $- \otimes_{\check{\mathbf{O}}} \check{}\mathrm{O}_{loc}$之后，其中 $\check{}\mathrm{O}_{loc} = \check{}\mathrm{O}[(\frac{1}{n}\check{}\mathbf{x} - \frac{n-1}{n})^{-1}]$。这里，$\pi^{\mathbf{O}_{loc}\check{}\mathrm{H}}{}_n$是 $\pi^{\check{}\mathrm{O}^{loc}\check{}\mathrm{H}}$上最高权为 $n/\check{}\mathbf{x}$ 的福克模，而 $C^{\check{}\mathrm{O}_n{}^{loc}}(\mathfrak{gl}_n, \mathbb{O}_{\mathrm{sr}})$ 是 $\mathcal{W}^{\check{\mathbf{O}}_{loc}}(\mathfrak{gl}_n, \mathbb{O}_{\mathrm{sr}})$ 的自由 $\check{}\mathrm{O}_{loc}$-子模，由 $\pi^{\check{}\mathrm{O}^{loc}\check{}\mathrm{H}}$ 的权为 $n/\check{}\mathbf{x}$ 的最高权向量组成。注意 $C_0^{\mathbf{O}_{loc}}(\mathfrak{gl}_n, \mathbb{O}_{\mathrm{sr}})$ 是一个顶点子代数，并且满足

$$C_0^{\check{\mathbf{O}}_{loc}}(\mathfrak{gl}_n, \mathbb{O}_{\mathrm{sr}}) \otimes_{\check{\mathbf{O}}_{loc}} \mathbb{C}_{\check{\kappa}} \simeq C^{\check{\kappa}}(\mathfrak{gl}_n, \mathbb{O}_{\mathrm{sr}})$$

作为顶点代数，其中右侧表示海森堡余集子代数

$$C^{\check{\kappa}}(\mathfrak{gl}_n, \mathbb{O}_{\mathrm{sr}}) = \mathrm{Com}(\pi_{\check{H}}, \mathcal{W}^{\check{\kappa}}(\mathfrak{gl}_n, \mathbb{O}_{\mathrm{sr}})).$$

我们将大层极限引入如下：

$$C^\infty(\mathfrak{gl}_n, \mathbb{O}_{\mathrm{sr}}) = C_0^{\check{\mathbf{O}}_{loc}}(\mathfrak{gl}_n, \mathbb{O}_{\mathrm{sr}}) \otimes_{\check{\mathbf{O}}_{loc}} \mathbb{C}_\infty,$$

由于……，它被视为一个重数空间

$$\mathcal{W}^\infty(\mathfrak{gl}_n, \mathbb{O}_{\mathrm{sr}}) \simeq \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} C_n^\infty(\mathfrak{gl}_n, \mathbb{O}_{\mathrm{sr}}) \otimes_{\mathbb{C}} \pi^\infty_{\check{\mathbf{H}},n} \tag{6.11}$$

通过应用 $- \otimes_{\check{\mathbf{O}}_{loc}} \mathbb{C}_{\check{\kappa}}$ 到（6.10）。

注6.6。我们有泊松顶点代数的自然同构

$$\mathcal{W}^\infty(\mathfrak{sl}_n, \mathbb{O}_{\mathrm{sr}}) \simeq \mathrm{H}^0_{\mathbb{O}_{\mathrm{sr}}}(V^\infty(\mathfrak{sl}_n)) \simeq \mathbb{C}[J_\infty \mathscr{S}_{\mathrm{sr}}],$$

其中 $J_\infty \mathscr{S}_{\mathrm{sr}}$ 是与子正则幂零元 $\mathscr{S}_{\mathrm{sr}}$ 相关的 Slodowy 切片的喷射概形 f，见 [6]。该切片 $\mathscr{S}_{\mathrm{sr}}$具有一个动量映射 $\mu\colon \ \mathscr{S}_{\mathrm{sr}} \to \mathfrak{gl}_1^*$

它在喷射概形上诱导出一个态射 $\mu_\infty\colon J_\infty\mathscr{S}_{\mathrm{sr}}\to J_\infty\mathfrak{gl}_1^*$。这对应于嵌入 $\pi^\infty_{\widetilde{\mathbf{H}}}\hookrightarrow\mathcal{W}^\infty(\mathfrak{sl}_n,\ \mathbb{O}_{\mathrm{sr}})$。因此，（6.11）蕴含一个同构

$$C^\infty(\mathfrak{gl}_n,\mathbb{O}_{\mathrm{sr}})\simeq\mathbb{C}[\mu_\infty^{-1}(0)/\!/\mathbb{C}^\times].$$

以下结果由两位作者在 [2] 中猜想。

命题 6.7。 对于 $n>1$，存在一个同构

$$C^\infty(\mathfrak{gl}_n,\mathbb{O}_{\mathrm{sr}})\simeq C^{\kappa_c}(\mathfrak{gl}_{n|1})\ (\simeq\mathfrak{z}(V^{\kappa_c}(\mathfrak{gl}_{n|1}))).$$

证明。 由于两边都具有由 $\mathfrak{gl}_{n|m}=\mathfrak{sl}_{n|m}\oplus\mathbb{C}\Omega$ 诱导的分解，只需证明 $C^\infty(\mathfrak{sl}_n,\mathbb{O}_{\mathrm{sr}})\ \simeq C^{\kappa_c}(\mathfrak{sl}_{n|1})$。通过应用定理 4.4 中的海森堡余集 $\mathsf{Com}(\pi_J,-)$，我们得到顶点代数的同构

$$\begin{array}{ccc}\pi_{\widetilde{\alpha}_1,\cdots,\widetilde{\alpha}_n} & \xrightarrow{\ \sigma\ } & \pi_{\widetilde{\beta}_1,\cdots,\widetilde{\beta}_n}\\ \Psi\cup & & \check{\Psi}\cup\\ C^\kappa(\mathfrak{sl}_{n|1}) & \xrightarrow{\ \simeq\ } & C^{\check{\kappa}}(\mathfrak{sl}_n,\mathbb{O}_{\mathrm{sr}}).\end{array}$$

这里，我们用到了同构

$$\mathrm{Com}(\pi_J,\pi_{\mathfrak{h}}^{\kappa+\mathrm{h}^\vee}\otimes V_{\mathbb{Z}})\simeq\pi_{\widetilde{\alpha}_1,\cdots,\widetilde{\alpha}_n},\quad \mathrm{Com}(\pi_{H_\Delta},(\pi_{\check{\mathfrak{h}}}^{\check{\kappa}+\check{\mathrm{h}}^\vee}\otimes\mathcal{A}^\times)\otimes V_{\mathbb{Z}})\simeq\pi_{\widetilde{\beta}_1,\cdots,\widetilde{\beta}_n}$$

令

$$\widetilde{\alpha}_i=\begin{cases}h_i & (i\neq n)\\ h_n-(\kappa+\mathrm{h}^\vee)x & (i=n),\end{cases}\qquad \widetilde{\beta}_i=\begin{cases}\check{h}_i & (i\neq n-1,n)\\ \check{h}_n-(\check{\kappa}+\check{\mathrm{h}}^\vee)(x_1+y_1) & (i=n-1)\\ x_1 & (i=n).\end{cases}$$

由引理 4.3，同构 σ 将……映为

$$\widetilde{\alpha}_i\mapsto-\frac{1}{\check{\kappa}+\check{\mathrm{h}}^\vee}\widetilde{\beta}_i,\quad (i=1,\cdots,n).\tag{6.12}$$

设 $\pi^{\mathbf{O}}_{\widetilde{\alpha}_1,\cdots,\widetilde{\alpha}_n}$ 和 $\pi^{\mathbf{O}}_{\widetilde{\beta}_1,\cdots,\widetilde{\beta}_n}$ 分别表示定义在……上的海森堡顶点代数

$$\mathbf{O}\xrightarrow{\simeq}\check{\mathbf{O}},\quad \mathbf{x}\mapsto\frac{1}{\check{\mathbf{x}}}$$

由 $\widetilde{\alpha}_i(i=1,\cdots,n)$ 和 $^1\!\cdot_{\mathbf{x}}\widetilde{\beta}_i(i=1,\cdots,n)$ 生成。于是，同构 σ 可提升为

$$\sigma^{\mathbf{O}}\colon\pi^{\mathbf{O}}_{\widetilde{\alpha}_1,\cdots,\widetilde{\alpha}_n}\xrightarrow{\simeq}\pi^{\check{\mathbf{O}}}_{\widetilde{\beta}_1,\cdots,\widetilde{\beta}_n}$$

其求值 $-\otimes_{\mathbf{O}}\mathbb{C}_\kappa$，等价地说，$-\otimes_{\check{\mathbf{O}}}\mathbb{C}_{\check{\kappa}}$，恢复了同构 σ。现在，通过应用求值 $-\otimes_{\mathbf{O}}\mathbb{C}_0$，等价地说，$-\otimes_{\check{\mathbf{O}}}\mathbb{C}_\infty$，我们得到

$$\begin{array}{ccc}\pi^0_{\mathfrak{h}} & \xrightarrow{\ \sigma\ } & \pi^\infty_{\beta_1,\cdots,\beta_n}\\ \Psi\cup & & \check{\Psi}\cup\\ C^{\kappa_c}(\mathfrak{sl}_{n|1}) & \xrightarrow{\ \simeq\ } & C^\infty(\mathfrak{sl}_n,\mathbb{O}_{\mathrm{sr}}).\end{array}$$

这里，$\pi^\infty_{\beta_1,\cdots,\beta_n}$ 是由以下求值得到的微分代数：β_i β_i 在 $\check{}$ 处的 $=\infty$，其中 $C^\infty(\mathfrak{sl}_n,\mathbb{O}_{\mathrm{sr}})$ 自然嵌入为 $\pi^\infty_{\beta_1,\cdots,\beta_n}$ 是 $(\mathcal{A}^{\mathbf{O}}\otimes_{\mathbf{O}}\pi^{\mathbf{O}}_{\check{\mathfrak{h}}})$ 的子代数，$\otimes_{\check{\mathbf{O}}}\mathbb{C}_\infty$ 在 6.9) 中通过局部化

$$\mathcal{A}^{\check{\mathbf{O}}}\hookrightarrow\mathcal{A}^{\times\check{\mathbf{O}}}$$

其中 $\mathcal{A}^{\times}{}_{\mathbf{O}}$ 由 $(^1\!\cdot_{\mathbf{x}}a)^{\pm1}$ 与 a^* 在 $\check{}\mathbf{O}$ 上生成。这就完成了证明。 □

7. Character formula and plane partitions

在本节中，我们推导中心 $\mathfrak{z}(V^{\kappa_c}(\mathfrak{gl}_{n|1}))$ 的特征标公式。引入波赫哈默符号

$$(z;q)_n = (1-z)(1-zq)\cdots(1-zq^{n-1})$$

对于 $n = 0,1,\cdots,\infty$，以及多变量形式

$$(z_1,\cdots,z_m;q)_n = (z_1;q)_n\cdots(z_m;q)_n.$$

定理 7.1. 对所有 $n \geqslant 1$，以下公式成立：

$$\mathrm{ch}[\mathfrak{z}(V^{\kappa_c}(\mathfrak{gl}_{n|1}))](q) = \frac{\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m q^{\frac{1}{2}m(m+1)}(q^{m+1};q)_{n-1}}{(q;q)_\infty^2(q,\cdots,q^{n-1};q)_\infty}.$$

证明。 根据定理 6.3 (1) 和定理 3.2 (2)，准共形（即分次）顶点代数之间存在同构

$$\mathfrak{z}(V^{\kappa_c}(\mathfrak{gl}_{n|1})) \simeq C^{\kappa_c}(\mathfrak{gl}_{n|1}).$$

根据分解 (3.5)，$C^{\kappa_c}(\mathfrak{gl}_{n|1}) \simeq C^{\kappa}(\mathfrak{gl}_{n|1})$ 作为一般水平下的分次向量空间 κ，因此

$$\mathrm{ch}[\mathfrak{z}(V^{\kappa_c}(\mathfrak{gl}_{n|1}))](q) = \mathrm{ch}[C^{\kappa_c}(\mathfrak{gl}_{n|1})](q)$$

为方便起见，我们通过对偶定理4.4来计算右边的特征标。由于

$$\mathrm{ch}[\mathcal{W}(\mathfrak{gl}_n,\mathbb{O}_{\mathrm{sr}})](q) = \frac{1}{(q,q,\cdots,q^{n-1},zq,z^{-1}q^{n-1};q)_\infty},$$

我们有

$$\begin{aligned}\mathrm{ch}[C^{\kappa_c}(\mathfrak{gl}_{n|1})](q) &= \operatorname*{Res}_{z=0}\frac{1}{(q,\cdots,q^{n-1},zq,z^{-1}q^{n-1};q)_\infty}\frac{\mathrm{d}z}{z}\\ &= \frac{1}{(q,\cdots,q^{n-1};q)_\infty}\operatorname*{Res}_{z=0}\frac{1}{(zq,z^{-1}q^{n-1};q)_\infty}\frac{\mathrm{d}z}{z},\end{aligned} \tag{7.1}$$

其中 $\operatorname*{Res}_{z=0} f(z)\frac{dz}{z} = f_0$ 表示级数的留数 $f(z) = \sum_n f_n z^n$。注意，公式（7.1）对 $n = 1$ 成立，只需使用 $\beta\gamma$- 系而非 $\mathcal{W}(\mathfrak{gl}_n,\mathbb{O}_{\mathrm{sr}})$，这要归功于 [14]。由展开式可得

$$\frac{1}{(zq,z^{-1}q;q)_\infty} = \frac{1}{(q;q)_\infty^2}\sum_{s\in\mathbb{Z}}(\Phi_s(q)-\Phi_{s-1}(q))\,z^s$$

通过一元假 theta 函数 $\Phi_s(q) = \sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m q^{\frac{1}{2}m(m+1)}q^{ms}$-[3] 以及对称函数的展开

$$(1+x_1w)\cdots(1+x_Nw) = \sum_{a=0}^{N} e_a(x_1,\cdots,x_N)w^a, \tag{7.2}$$

我们得到

$$
\begin{aligned}
&\operatorname*{Res}_{z=0}\frac{1}{(zq,z^{-1}q^{n-1};q)_\infty}\frac{\mathrm{d}z}{z}=\operatorname*{Res}_{z=0}\frac{(z^{-1}q;q)_{n-2}}{(zq,z^{-1}q;q)_\infty}\frac{\mathrm{d}z}{z}\\
&=\frac{1}{(q;q)_\infty^2}\sum_{a=0}^{n-2}(\Phi_a(q)-\Phi_{a-1}(q))(-1)^a e_a(q,\cdots,q^{n-2})\\
&=\frac{1}{(q;q)_\infty^2}\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m q^{\frac{1}{2}m(m+1)}(1-q^{-m})\sum_{a=0}^{n-2}q^{ma}(-1)^a e_a(q,\cdots,q^{n-2})\\
&\overset{(1)}{=}\frac{1}{(q;q)_\infty^2}\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m q^{\frac{1}{2}m(m+1)}(1-q^{-m})(1-q^{m+1})\cdots(1-q^{m+n-2})\\
&\overset{(2)}{=}\frac{1}{(q;q)_\infty^2}\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m q^{\frac{1}{2}m(m+1)}(1-q^{m+1})(1-q^{m+2})\cdots(1-q^{m+n-1})\\
&=\frac{1}{(q;q)_\infty^2}\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m q^{\frac{1}{2}m(m+1)}(q^{m+1};q)_{n-1}.
\end{aligned}
$$

这里，我们在 (7.2) 中使用了 (1)；我们将求和 $\sum_{m=0}^{\infty}$ 改为 $\sum_{m=1}^{\infty}$，因为项 $m=0$ 为零，随后通过在 (2) 中令 $\sum_{m'=0}^{\infty}$ 得到 $m=m'+1$。将右侧代入 (7.1)，即可得到所需公式。□

定理 q右侧出现的级数7.1 被理解为满足凹坑条件的平面分拆的生成函数，该条件见于 q对（泛） $\mathcal{W}$代数的变形理论中，这些代数称为量子环面代数﹏

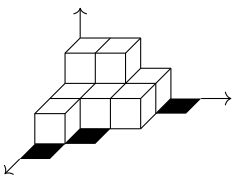
$\mathfrak{gl}_1$ [10, 19]。下面简要回顾平面分拆。非负整数 N 的一个平面分拆（或权为 N 的平面分拆）按定义是由非负整数 $\lambda=(\lambda_{i,j})_{i,j>0}$ 构成的集合，并满足以下条件

(1) $\lim \lambda_{i,j}=0$ as $i\to\infty$ or $j\to\infty$;
(2) $\lambda_{i,j}\geqslant\lambda_{i,j+1}$ and $\lambda_{i,j}\geqslant\lambda_{i+1,j}$ for all i,j.

总和 $|\lambda|=\sum_{i,j}\lambda_{i,j}$ 称为平面分拆 λ 的权。平面分拆的集合记为 PP。

注意，每个权为 N 的平面分拆 $\lambda=(\lambda_{i,j})_{i,j>0}$ 都可以用大小至多为 N 的矩阵表示，其(i,j)-元为$\lambda_{i,j}$。坑条件$(i,j)\notin\lambda$按定义是条件$a_{i,j}=0$，或等价地，由(2)对所有 $i'\geqslant i$ 和$j'\geqslant j$ 有$\lambda_{i',j'}=0$ 。从图形上看，平面分拆可以实现为三维杨图，即区域 $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid x,y,z\geqslant 0\}$ 上大小为一的方块，方法是在 xy-平面上的 $[i-1,i]\times[j-1,j]$ 处放置$a_{i,j}$ 个方块。下面我们给出一个平面分拆 λ 及相应的三维杨图。平面分拆λ 满足坑条件$(1,4)$、$(3,2)$、$(4,1)\notin\lambda$，它们在三维杨图的 xy-平面上被画成黑色阴影。

$$
\lambda=\begin{bmatrix}2&2&1&0\\1&1&1&0\\1&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}
$$



麦克马洪的经典定理（参见例如 [41, 第 7]章）断言，平面分拆的生成函数由如下公式给出：

$$\sum_{\lambda\in \mathrm{PP}} q^{|\lambda|} = \frac{1}{\prod_{n>0}(1-q^n)^n}.$$

其中一位作者 [19] 得出了满足坑条件的平面分拆的生成函数，其表达式如下。

定理 7.2 ([10, 19])。 满足坑条件$(m+1, n+1)$ 且 $n \geqslant m$ 的平面分拆的生成函数 $F_{m,\ n}(q)$ 为

$$F_{m,n}(q) = \frac{1}{(q;q)_\infty^{n+m}} \sum_{k_1\geqslant\cdots\geqslant k_m\geqslant 0} \Big((-1)^{\sum k_i} q^{\frac{1}{2}\sum k_i(k_i+2i-1)} \times \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n} (1-q^{k_i-k_j+j-i}) \prod_{1\leqslant i<j\leqslant m} (1-q^{k_i-k_j+j-i}) \Big),$$

其中我们令 $k_i = 0$，当 $i > m$ 时。

令 $m = 1$，考虑坑条件 $(2,\ n+1)$。于是有

$$F_{1,n}(q) = \frac{1}{(q;q)_\infty^{n+1}} \sum_{k_1\geqslant 0} (-1)^{k_1} q^{\frac{1}{2}k_1(k_1+1)} \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n} (1-q^{k_i-k_j+j-i}).$$

由于

$$\begin{aligned}\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n} (1-q^{k_i-k_j+j-i}) &= \prod_{1\leqslant i<n} (1-q^{k_1+j-i}) \times \prod_{2\leqslant i<j\leqslant n} (1-q^{j-i}) \\ &= (q^{k_1+1};q)_{n-1} \times (q;q)_{n-2}(q^2;q)_{n-3}\cdots(q^{n-2};q)_1,\end{aligned}$$

我们有

$$F_{1,n}(q) \frac{\sum_{k_1=0}^\infty (-1)^{k_1} q^{\frac{1}{2}k_1(k_1+1)} (q^{k_1+1};q)_{n-1}}{(q;q)_\infty^2 (q,\cdots,q^{n-1};q)_\infty},$$

这与定理 7.1 等式右边一致。因此，我们得到以下推论，将 $n = 1$ 中由 Molev 和 Mukhin 证明的情形推广至 [38]。

推论 7.3。对所有 $n \geqslant 1$,

$$\mathrm{ch}[\mathfrak{z}(V^{\kappa_c}(\mathfrak{gl}_{n|1}))](q) = \sum_{\substack{\lambda\in \mathrm{PP} \\ (2,n+1)\notin\lambda}} q^{|\lambda|}.$$

8. Regular $\mathcal{W}$-superalgebras beyond the $\mathfrak{gl}_{n|1}$ case

8.1. 猜想。 为描述中心 $\mathfrak{z}(V^{\kappa_c}(\mathfrak{gl}_{n|1}))$，正则 $\mathcal{W}$-超代数$\mathcal{W}^\kappa(\mathfrak{gl}_{n|1})$ 及其与次正则 $\mathcal{W}$-代数 $\mathcal{W}^{\check\kappa}(\mathfrak{gl}_n, \mathbb{O}_{\mathrm{sr}})$ 的对偶起着关键作用。文献 [12] 中针对其他正则 $\mathcal{W}$-超代数$\mathcal{W}^\kappa(\mathfrak{gl}_{n|m})$ 提出了更一般的对偶。我们可以假设 $n \geqslant m$，并令 $\mathcal{W}^{\check\kappa}(\mathfrak{gl}_n, \mathbb{O}_{[n-m,1^m]})$ 表示与幂零轨道 $\mathbb{O}_{[n-m,1^m]}$ 对应的 $\mathcal{W}$-代数，该幂零轨道对应于若尔当块 $[n-m, 1^m]$。

猜想 8.1 ([12])。对于满足以下关系的无理层 $\kappa,\check\kappa \notin \mathbb{Q}$

$$(\kappa+n-m)(\check\kappa+n) = 1,$$

存在一个顶点超代数的同构

$$\mathcal{W}^\kappa(\mathfrak{gl}_{n|m}) \simeq \mathrm{Com}\left(V^{\check\kappa_\circ}(\mathfrak{gl}_m), \mathcal{W}^{\check\kappa}(\mathfrak{gl}_n, \mathbb{O}_{[n-m,1^m]}) \otimes \mathcal{F}_{n|m}\right)$$

^其中 $\mathfrak{gl}_m$-作用是对角作用，且

$$\mathcal{F}_{n|m} = \begin{cases} V_{\mathbb{Z}^m}, & (n > m), \\ \mathcal{A}^m \otimes V_{\mathbb{Z}^m}, & (n = m), \end{cases} \qquad \check{\kappa}_\circ = \check{\kappa} + (n-m).$$

注意，临界层 $\kappa = \kappa_c$ 的对偶表示是$\check{\kappa} = \infty$，它可自然地解释为 $\mathcal{W}^{\check{\kappa}}(\mathfrak{gl}_n, \mathbb{O}_{[n-m,1^m]})$ 到泊松顶点超代数的极限

$$\mathcal{W}^\infty(\mathfrak{gl}_n, \mathbb{O}_{[n-m,1^m]}) = \mathbb{C}[J_\infty \mathscr{S}_\mathbb{O}].$$

这里，右侧是与轨道 $\mathbb{O} = \mathbb{O}_{[n-m,1^m]}$对应的 Slodowy 切片 $\mathscr{S}_\mathbb{O} \subset \mathfrak{gl}_n$ 的射流（超）概形上的正则函数代数。切片 $\mathscr{S}_\mathbb{O}$ 是一个泊松仿射超空间，带有由自然嵌入 $\mathfrak{gl}_m \subset \mathscr{S}_\mathbb{O}$诱导的 GL_m作用。GL_m作用将 $\mathscr{S}_\mathbb{O}$ 分解为

$$\mathscr{S}_\mathbb{O} \simeq \mathbb{A}^{n-m} \oplus \mathfrak{gl}_m \oplus \mathbb{C}^m \oplus \overline{\mathbb{C}}^m$$

其中 $\mathbb{A}^{n-m}$ 是维数为（$n-m$）的平凡表示，而 $\mathbb{C}^m$ 是自然表示，其 $\mathbb{C}^m$ 为其对偶。子空间 $\mathbb{A}^{n-m}$ 生成一个交换顶点代数 $\mathbb{C}[J_\infty \mathbb{A}^{n-m}]$ 而 $\mathbb{C}^m \oplus \mathbb{C}^m$ 则生成一个交换的 $\mathbb{C}[J_\infty(\mathbb{C}^m \oplus \mathbb{C}^m)]$，带有 GL_m作用，我们将其认作退化的 $\beta\gamma$-系统顶点代数 $\mathcal{A}^m_{\mathrm{deg}}$。在 $\mathfrak{gl}_m$的结构 $\mathbb{C}[J_\infty \mathscr{S}_\mathbb{O}]$ 启发下，我们提出以下猜想，即猜想 8.1的临界层类比。

猜想 8.2。 存在一个顶点超代数的同构

$$\mathcal{W}^{\kappa_c}(\mathfrak{gl}_{n|m}) \simeq \mathbb{C}[J_\infty \mathbb{A}^{n-m}] \otimes (\mathcal{A}^m_{\mathrm{deg}} \otimes \mathcal{F}_{n|m})^{\mathrm{GL}_m}.$$

因此，得益于 $\mathcal{W}^{\kappa_c}(\mathfrak{gl}_{n|m})$ 和 $V^{\kappa_c}(\mathfrak{gl}_{n|m}$，它们的中心应有如下描述： [1]。

猜想 8.3。 存在如下同构（交换的顶点代数）

$$\mathfrak{z}(V^{\kappa_c}(\mathfrak{gl}_{n|m})) \simeq \mathfrak{z}(\mathcal{W}^{\kappa_c}(\mathfrak{gl}_{n|m})) \simeq \mathbb{C}[J_\infty \mathbb{A}^{n-m}] \otimes \mathcal{A}^m_{\mathrm{deg}}{}^{\mathrm{GL}_m}.$$

我们注意到，这一猜想与我们先前关于 $\mathfrak{z}(V^{\kappa_c}(\mathfrak{gl}_{n|m}))$ 描述的猜想 [2] 一致。本节余下部分将证明这些猜想在小秩情形下成立。

8.2. **的情形**。 根据 [31], ，可以直接计算出由生成元和关系给出的 $\mathcal{W}^{\kappa_c}(\mathfrak{sl}_{3|2})$的如下表示。

命题 8.4. $\mathcal{W}$-超代数 $\mathcal{W}^{\kappa_c}(\mathfrak{sl}_{3|2})$ 允许由以下元素自由生成

$$J, S_2, L, S_3 \ (\text{even}), \qquad s_1^\pm, s_2^\pm \ (\text{odd})$$

其中 S_2、S_3 为中心元，并满足下列 λ-括号

$$[J_\lambda J] = 2\lambda, \quad [J_\lambda L] = 0, \quad [L_\lambda L] = \partial L + 2L\lambda + \frac{1}{12}\lambda^3,$$

$$[J_\lambda s_i^\pm] = \pm s_i^\pm \ (i = 1,2), [L_\lambda s_1^\pm] = s_2^\pm + \tfrac{1}{4} s_1^\pm \lambda,$$
$$[L_\lambda s_2^\pm] = L s_+^\pm + \tfrac{5}{4} s_1^\pm \lambda + \tfrac{1}{4} s_1^\pm \lambda^2, \qquad - \qquad -$$

$$[s_1^\pm{}_\lambda s_1^\pm] = 0, \quad [s_1^\pm{}_\lambda s_2^\pm] = 0, \quad [s_2^\pm{}_\lambda s_2^\pm] = \tfrac{1}{4} s_1^\pm \partial s_1^\pm - s_1^\pm s_2^\pm,$$
$$[s_1^+{}_\lambda s_1^-] = S_2$$
$$[s_1^+{}_\lambda s_2^-] = (\tfrac{2}{9} S_3 + \tfrac{1}{6}\partial S_2 + \tfrac{1}{2} J S_2 - \tfrac{1}{2} s_1^+ s_1^-) + \tfrac{1}{2} S_2 \lambda,$$
$$[s_2^+{}_\lambda s_1^-] = -(\tfrac{2}{9} S_3 + \tfrac{1}{6}\partial S_2 + \tfrac{1}{2} J S_2 - \tfrac{1}{2} s_1^+ s_1^-) - \tfrac{1}{2} S_2 \lambda,$$
$$[s_2^+{}_\lambda s_2^-] = (-\tfrac{1}{4} J\partial S_2 - S_2 L - \tfrac{1}{2} s_1^- s_2^+ - \tfrac{1}{2} s_1^+ s_2^- + \tfrac{1}{4} s_1^+ \partial s_1^- - \tfrac{1}{4} S_2 \partial J - \tfrac{1}{9}\partial S_3 + \tfrac{1}{24}\partial^2 S_2)$$
$$+ (-\tfrac{2}{9} S_3 - \tfrac{1}{6}\partial S_2 - \tfrac{1}{2} J S_2 + \tfrac{1}{4} s_1^+ s_1^-)\lambda - \tfrac{3}{8} S_2 \lambda^2.$$

另一方面，回顾 [1, 命题 5。2] 顶点超代数 $(\mathcal{A}^2_{\mathrm{deg}} \otimes V_{\mathbb{Z}^2})^{\mathrm{GL}_2}$ 由以下元素强生成

$$J_{0,p} = -\sum \psi_i \partial^p \psi_i^*, \quad J_{1,p} = \sum a_i \partial^p a_i^*,$$
$$J_{2,p} = -\sum \psi_i \partial^p a_i^*, \quad J_{3,p} = \sum a_i \partial^p \psi_i^*.$$

对 $0 \leqslant p < 2$，其中求和取遍 $i = 1,2$。我们通过以下公式在 $\mathcal{A}^2_{\mathrm{deg}} \otimes V_{\mathbb{Z}^2}$ 上引入（拟）共形分次

$$\Delta(a_i) = \Delta(a_i^*) = 1, \quad \Delta(\psi_i) = \Delta(\psi_i^*) = 1/2.$$

由于 GL_2 作用保持分次，它在 $(\mathcal{A}^2_{\mathrm{deg}} \otimes V_{\mathbb{Z}^2})^{\mathrm{GL}_2}$ 上诱导出一个分次。利用波赫哈默符号 $(a_1, \cdots, a_n;\ q)_\infty = \prod_{i=1}^n \prod_{p=0}^\infty (1 - a_i q^p)$，特征标由以下公式给出。

引理 8.5。

$$\mathrm{ch}[(\mathcal{A}^2_{\mathrm{deg}} \otimes V_{\mathbb{Z}^2})^{\mathrm{GL}_2}] = \frac{(-q^{3/2}, -q^{3/2}, -q^{5/2}, -q^{5/2}; q)_\infty}{(q, q^2, q^2, q^3; q)_\infty}.$$

证明。GL_2 对 $\mathcal{A}^2_{\mathrm{deg}} \otimes V_{\mathbb{Z}^2}$ 的作用的权由以下公式扩展给出

$$\mathrm{wt}(a_i) = \mathrm{wt}(\psi_i) = z_i, \quad \mathrm{wt}(a_i^*) = \mathrm{wt}(\psi_i^*) = -z_i$$

通过以下公式扩展

$$\mathrm{wt}(\partial A) = \mathrm{wt}(A), \quad \mathrm{wt}(AB) = \mathrm{wt}(A) + \mathrm{wt}(B).$$

那么，特征标 $\mathrm{ch}[(\mathcal{A}^2_{\mathrm{deg}} \otimes V_{\mathbb{Z}^2})^{\mathrm{GL}_2}]$ 可表示为

$$\mathrm{ch}[(\mathcal{A}^2_{\mathrm{deg}} \otimes V_{\mathbb{Z}^2})^{\mathrm{GL}_2}]$$
$$= \int \frac{\mathrm{d}z_1 \mathrm{d}z_2}{z_1^2 z_2^1}(z_1 - z_2) \frac{(-z_1 q^{1/2}, -z_1^{-1} q^{1/2}, -z_2 q^{1/2}, -z_2^{-1} q^{1/2}; q)_\infty}{(z_1 q, z_1^{-1} q, z_2 q, z_2^{-1} q; q)_\infty},$$

得益于舒尔正交定理。现在，通过使用三角 β积分

$$\frac{(zq^{1/2}, z^{-1}q^{1/2}; q)_\infty}{(azq^{1/2}, bz^{-1}q^{1/2}; q)_\infty} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n \frac{(aq^{n+1}, bq^{-n+1}; q)_\infty}{(q, abq; q)_\infty} q^{n^2/2} z^{-n},$$

右侧可改写如下：

$$\begin{aligned}\mathrm{ch}[(\mathcal{A}^2_{\mathrm{deg}}\otimes V_{\mathbb{Z}^2})^{\mathrm{GL}_2}] &= \frac{(-q^{3/2},-q^{3/2};q)_\infty^2}{(q,q^2;q)_\infty^2} - q\frac{(-q^{1/2},-q^{5/2};q)_\infty^2}{(q,q^2;q)_\infty^2}\\ &= \frac{(-q^{3/2},-q^{3/2},-q^{5/2},q^{5/2};q)_\infty}{(q,q^2,q^2,q^3;q)_\infty}.\end{aligned}$$

□

现在，我们准备证明 8.2 对 $\mathfrak{gl}_{3|2}$成立。

定理 8.6。 存在一个顶点超代数的同构

$$\Psi\colon \mathcal{W}^{\kappa_c}(\mathfrak{sl}_{3|2}) \quad\to\quad (\mathcal{A}^2_{\mathrm{deg}}\otimes V_{\mathbb{Z}^2})^{\mathrm{GL}_2}$$

使得

$$\begin{aligned}&J\mapsto -J_{0,0},\quad L\mapsto J_{0,1}-\tfrac{1}{4}J_{0,0}^2-\tfrac{1}{2}\partial J_{0,0},\\ &S_2\mapsto -J_{1,0},\quad S_3\mapsto -\tfrac{9}{2}J_{1,1}+\tfrac{3}{4}\partial J_{1,0}\\ &s_1^+\mapsto J_{2,0},\quad s_2^+\mapsto -J_{2,1}+\tfrac{1}{2}J_{0,0}J_{2,0}+\partial J_{2,0},\\ &s_1^-\mapsto J_{3,0},\quad s_2^-\mapsto J_{3,1}-\tfrac{1}{2}J_{0,0}J_{3,0}.\end{aligned}$$

因此， $\mathcal{W}^{\kappa_c}(\mathfrak{gl}_{3|2}) \simeq \mathbb{C}[J_\infty\mathbb{A}]\otimes(\mathcal{A}^2_{\mathrm{deg}}\otimes V_{\mathbb{Z}^2})^{\mathrm{GL}_2}$ 作为顶点超代数成立。

证明。 通过检验 λ-括号，可以直接证明 Ψ是一个顶点超代数的同态。由于 $J_{i,j}$($i=0,\cdots,3$, $j=0,1$) 强生成 $(\mathcal{A}^2_{\mathrm{deg}}\otimes V_{\mathbb{Z}^2})^{\mathrm{GL}_2}$，比较像的首项可得 Ψ 是满射。为证明 Ψ 是同构，我们按照公式在 $\mathcal{W}^k(\mathfrak{sl}_{3|2})$ 上引入（准）共形权

$$\begin{aligned}&\Delta(J)=1,\quad \Delta(S_2)=\Delta(L)=2,\quad \Delta(S_3)=3,\\ &\Delta(s_1^\pm)=3/2,\quad \Delta(s_2^\pm)=5/2.\end{aligned}$$

由于这些强生成元诱导出 PBW 基，特征标由下式给出

$$\mathrm{ch}[\mathcal{W}^k(\mathfrak{sl}_{3|2},\mathbb{O}_{[3|2]})] = \frac{(-q^{3/2},-q^{3/2},-q^{5/2},-q^{5/2};q)_\infty}{(q,q^2,q^2,q^3;q)_\infty}.$$

显然 Ψ 保持分次，因此该断言成立，因为

$$\mathrm{ch}[\mathcal{W}^k(\mathfrak{sl}_{3|2},\mathbb{O}_{[3|2]})] = \mathrm{ch}[(\mathcal{A}^2_{\mathrm{deg}}\otimes V_{\mathbb{Z}^2})^{\mathrm{GL}_2}]$$

由引理 8.5 ，且 Ψ 是满射。现在，关于 $\mathcal{W}^{\kappa_c}(\mathfrak{gl}_{3|2})$ 的断言是显然的，因为

$$\mathcal{W}^{\kappa_c}(\mathfrak{gl}_{3|2}) \simeq \mathbb{C}[J_\infty\mathbb{A}]\otimes\mathcal{W}^{\kappa_c}(\mathfrak{sl}_{3|2}).$$

至此证明完成。 □

References

[1] D. Adamovi´c, 《临界层上与 $\mathfrak{gl}(1|1)$ 相关的仿射顶点代数及其推广》的一则札记, *Rad Hrvat. Akad. Znan. Umjet. Mat. Znan.*, 21 (532): 75–87, 2017。[2] D. Adamovi´c、S. Nakatsuka, 《临界层上的仿射 $\mathfrak{sl}_{2|1}$ 的中心》, , 论文编号 rnaf。 *Int. Math. Res. Not. IMRN* 212, 18, 2025

Trans. Amer. Math. Soc. **3283** 2 451 458, 1984 G. Andrews, 《Hecke 模形式与 Kac-Peterson 恒等式》, [4] , （）：–。 C_2T. Arakawa, 《关于顶点代数的 *Math. Z.*-余有限条件的一点说明》, [5] , 270 559 575, 2012：–。 WT. Arakawa, 《临界层上的 *Contemp. Math.* **565**-代数》, 载于《代数群与量子群》, [6] , 1–13, 2012。 C_2T. Arakawa, 《Kac-Moody 代数上模的关联簇与 W-代数的余有限性》, *Int. Math. Res. Not. IMRN*, 2015年第22期, 11605–11666, 2015。

[7] T. Arakawa 和 E. Frenkel，《 $\mathcal{W}$-代数表示的量子朗兰兹对偶》， *Compos. Math.*，155年第12期，2235–2262，2019。[8] T. Arakawa、A. Molev，《矩形仿射 $\mathcal{W}$ 型 A、 *Lett. Math. Phys.* **107** 1 47 59, 2017 -代数中的显式生成元》，[9] ， （），–。

Publ. Res. Inst. Math. T. *Sci.* **57** 3 4 795 Arakawa、A. Moreau，《弧空间与手征辛核》，[10] ， （）–（），–829，2021。 *Selecta Math. (N.S.)*M. Bershtein、B. Feigin、G. Merzon，《带“坑”的平面分拆：生成函数与表示论》，[11] ，24（1），21–62，2018。 *Compos. Math.*A. Braverman、M. Finkelberg、V. Ginzburg、R. Travkin，《镜面 Satake 等价与超群》，[12] ，157（8），1724–1765，2021。 $\mathcal{W}$ T. Creutzig、J. Fasquel、A. R. Linshaw、S. Nakatsuka，《类型 A、 *Jpn. J. Math.* 中 [13] -代数的结构》，20（1），1–111，2025。 $\mathcal{W}$T. Creutzig、N. Genra、S. Nakatsuka，《次正则 $\mathcal{W}$-代数与主 *Adv. Math.*-超代数的对偶》，论文编号 107685，52，2021。[14] T. Creutzig、A. R. Linshaw，《

$\mathcal{W}$ **10** 1 69 194, -代数的三 2022 重对偶》， *Camb. J. Math.*， （）–。[15] V. Fateev、S. Lukyanov，《具有 Z_n 对称性的二维共形量子场论模型》， *Internat. J. Modern Phys. A*，3（2）：75–82，507–520，1988。[16] B. Feigin、E. Frenkel，《 $\mathcal{W}$-代数中的对偶》， *Int. Math. Res. Not.*，（6）：75–82，1991。[17] B. Feigin、E. Frenkel，《可积层级与 Wakimoto 模》，载于 *Differential topology infinite-dimensional Lie algebras and applications* 27 60, ，，，–

《美国数学会译丛》第2辑《数学科学进展》，194卷，44页，美国数学会，罗德岛州普罗维登斯。[18] B. Feigin、A. M. Semikhatov，《 $\mathcal{W}_n^{(2)}$代数》， *Nucl. Phys. B*，698，3，409–449，2004。⁀[19] B. Feigin、G. Mutafyan，《量子环面代数 $\widehat{\mathfrak{gl}_1}$：将某些表示的特征作为平面分拆生成函数进行计算》， *Funktsional. Anal.i Prilozhen.*，47，1，62–76，2013。[20] E. Frenkel 和 D. Ben-Zvi，《顶点代数与代数曲线》，《数学调查与专著》，88，美国数学会，罗德岛州普罗维登斯，2001。[21] E. Frenkel，《环群的朗兰兹对应》，《剑桥高等数学研究丛书》103，剑桥大学出版社，2007。[22] E. Frenkel、D. Gaitsgory，《局部几何朗兰兹对应：球面情形》，载于 *Algebraic analysis and around*，167–186，《纯数学高级研究》，54，日本数学会，东京。[23] D. Gaiotto 和 M. Rapˇc´ak，《角点处的顶点代数》， *J. High Energy Phys.*，2019，1，第160号，2019。[24] D. Gaitsgory，《量子朗兰兹对应》。arXiv：1601.05279 [math.AG]。[25] N. Genra，《仿射 $\mathcal{W}$ *Adv. Math.* **369** -代数的筛选算子与抛物诱导》，，，第107179号，2020。[26] N. Genra、T. Kuwabara，《次正则 $\mathcal{W}$-代数 $\mathcal{W}^{K-N}(\mathfrak{sl}_N, f_{sub})$ 的强生成元及其在临界层上的组合描述》， *Lett. Math. Phys.*，110 1 21，–41，2020。[27] V. Kac，《初学者的顶点代数》，第二版，《大学讲座丛书》10，美国数学会，罗德岛州普罗维登斯，1998。[28] V. Kac 和 A. Radul，《顶点代数 $W_{1+\infty}$ 的表示论》，《变换群》1（1996），41–70。[29] V. Kac，《顶点代数、泊松顶点代数与可积哈密顿偏微分方程导论》，载于 *Perspectives in Lie theory*，3–72，《Springer INdAM 丛书》19，Springer。[30] V. Kac、S. Roan、M. Wakimoto，《仿射超代数的量子约化》，

Comm.， (-)：–。 *Math. Phys.* **241** 2 3 307 342, 2003

[31] V. Kac、M. Wakimoto，《超共形代数的量子约化与表示论》。 *Adv. Math.*，185（2）：400–458，2004。[32] B. Kostant，《关于 Whittaker 向量与表示论》， *Invent. Math.*，48（2）：101–184，1978。[33] H. Li，《顶点代数阿贝尔化》， *Comm. Math. Phys.*，259（2）：391–411，2005。[34] K. Lu、E. Mukhin，《正交辛李超代数与自对偶超空间的 Bethe Ansatz 方程》， *Ann. Henri Poincaré*，22，4087–4130，2021。[35] I. G. Macdonald，《对称函数与 Hall 多项式》，《牛津物理科学经典文本》，第二版，克拉伦登出版社、牛津大学出版社，纽约，2015。[36] E. Mukhin、B. Vicedo、C. Young，《

$\mathfrak{gl}\ m|n$ **56** 5, （）的 051704, 30 2015 Gaudin 模型》， *J. Math. Phys.*，，第pp页，。

[37] I. Musson，《李超代数与包络代数》，《数学研究生教程》第131卷，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2012年。[38] A. Molev、E. Mukhin，与李超代数 $\mathfrak{gl}(1|1)$相关的真空模不变量，*J. Phys. A*，48，31，2015。[39] A. Molev、E. Ragoucy，右量子超代数的MacMahon主定理及 $\widehat{\mathfrak{gl}}_{m|n}$的高阶Sugawara算子，*Mosc. Math. J.*，14，1，83–119，2014年。[40] T. Proch´azka、M. Rap˘c´ak，W代数模、自由场与Gukov-Witten缺陷，*J. High Energy Phys.*，2019年，第5期，159，70页。[41] R. Stanley，《计数组合学》第2卷。《剑桥高等数学研究丛书》第62卷，剑桥大学出版社，剑桥，1999年，xii+581。[42] A. Zeitlin，重新审视超opers，载于*From representation theory to mathematical physics and back* 347 366，817，，–

《当代数学》，美国数学会，罗得岛州，。

(D.A.) Faculty of Science, Department of Mathematics, University of Zagreb, Bijenicka 30, 10 000 Zagreb, Croatia*Email address*: adamovic@math.hr

(B.F) Hebrew University of Jerusalem Einstein Institute of Mathematics Givat ,, Ram. Jerusalem 9190401 Israel
„*Email address*: borfeigin@gmail.com

(S.N.) Department Mathematik, FAU Erlangen–Nürnberg, Cauerstrasse 11, 91058,Erlangen, Germany*Email address*: shigenori.nakatsuka@fau.de