arXiv:2601.22017v1 [math.QA] 29 Jan 2026

完全正合且完全可对偶化的模范畴

AZAT M. GAINUTDINOV 与 ROBERT LAUGWITZ

Abstract. 设 $\mathcal{C}$ 是域 $\Bbbk$上的有限编织张量范畴。我们定义 *fully exact* $\mathcal{C}$-模范畴，它是正合 $\mathcal{C}$-模范畴的一个子类，并且在 $\mathcal{C}$上的相对 Deligne 积下保持稳定。与此相反，我们通过 $\Bbbk$ 的零特征与非零特征情形中的例子表明，正合 $\mathcal{C}$-模范畴类在该积下并不稳定。我们还在例子中观察到，全正合模范畴在正合模范畴类中构成一个稠密子集。

全正合 $\mathcal{C}$-模范畴的幺半 2-范畴严格包含可逆的与可分的 $\mathcal{C}$-模范畴的幺半 2-范畴。事实上，我们证明，全正合 $\mathcal{C}$-模范畴的每个内代数都是投射可分的，这是涉及 $\mathcal{C}$的投射对象的可分代数的一种推广。若 $\mathcal{C}$ 是半单的，则一个 $\mathcal{C}$-模范畴是全正合的当且仅当它是可分的。

一般而言，完全正合的 $\mathcal{C}$-模范畴在其所在的类中并非可对偶；但如果它们是可对偶的，那么它们就是幺半 2-范畴 $\mathcal{C}$-**mod** （有限 $\mathcal{C}$-模范畴）中的完全可对偶对象。我们将这类模范畴称为 *perfect*。我们证明，完美的 $\mathcal{C}$-模范畴构成一个刚性幺半 2-子范畴 $\mathcal{C}$-**perf** ，它包含所有完全可对偶对象，并且是 $\mathcal{C}$-**mod** 的子范畴。因此，我们提出将 $\mathcal{C}$-**perf** 作为有限张量 2-范畴的模型。若 $\mathcal{C}$ 是对称的，则 $\mathcal{C}$-模范畴是完全正合的，当且仅当它们是完美的。

作为一个详细例子，我们分类了 Sweedler 四维 Hopf 代数的模所构成的对称张量范畴上的完全正合、因而也是完美的模范畴，并计算了它们的相对 Deligne 积以及 1-态射范畴。在此情形下， $\mathcal{C}$-**perf** 具有无限多个（连续统多个）不可分解对象的同构类，其 1-自同态范畴是非半单有限张量范畴；而且，只有有限多个不可分解对象的同构类对应于可分模范畴。对于一般的拟三角 Hopf 代数，我们分析了有限维向量空间范畴何时是完全正合的。我们证明，对于 Sweedler 霍普夫代数以及在 $\mathfrak{sl}_2$ 的奇数次单位根处的 Lusztig 可因子化小量子群，情况均非如此。我们猜想，对于任意单李代数的小量子群，也有类似的结论。

Contents

1. 引言 2 2. 模范畴与相对 Deligne 积 9 3. 内部代数与模范畴的构造 16 4. 正合模范畴 23 5. 全正合模范畴 30 6. 完全正合模范畴的对偶 34 7. 可逆模范畴 42 8. Hopf 代数示例 44 附录 A. 幺半范畴与带编织幺半范畴 55 附录B. 模范畴与双模范畴 57 附录 C. 幺半 2-范畴 65 参考文献 72

Date：2026年1月30日。2020 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类号：18M15；次要分类号：18N10、16T05。*Key words and phrases.* 编织张量范畴、正合模范畴、相对 Deligne 积、幺半 2-范畴、完全可对偶对象。

1. 引言

张量范畴在拓扑学中有着广泛的应用，特别是通过构造链环、三维流形和三维拓扑场论（TFTs）的不变量 [T, BK, TV, GPMT, CGPM, DRGG$^+$]。具有适当可对偶性条件的幺半 2-范畴有望将这些构造推广到维度 4 [CF, M1, M2, Cu]。一类特殊的半单幺半 2-范畴称为融合2-范畴，已在 [DR] 中引入，并被用于构造四维流形的状态和不变量。融合2-范畴具有很强的可对偶性性质：对象有左对偶与右对偶，所有1-态射都有左伴随与右伴随。融合2-范畴的研究在文献中备受关注，参见例如 [DR, KTZ, JFR, DHJF$^+$]。

然而，[Re] 指出，由半单 2-范畴得到的四维流形不变量无法检测奇异光滑结构。同样，对于三维流形，由融合 1-范畴（即有限半单张量范畴）构造的不变量无法区分某些同伦等价的三维流形（例如某些透镜空间）。然而，最近由非半单 张量范畴构造的不变量则能够区分这类流形 [CGPM, BGR]。这促使人们寻找一些非半单幺半 2-范畴的实例，它们仍满足与融合2-范畴类似的强有限性和可对偶性条件。

融合2-范畴的一个重要来源，是由编织融合范畴上的有限半单模范畴构成的幺半 2-范畴。这些融合2-范畴足以在等价意义下刻画连通融合2-范畴 [D´e1, DS]，并在 Morita 等价意义下刻画一般的融合2-范畴 [D´e3]。据我们所知，超出半单情形后，尚无已知的幺半 2-范畴实例具有类似融合2-范畴的强可对偶性。

在本文中，我们基于此处引入的完全正合与完美模范畴的概念，构造了一类新的非半单幺半 2-范畴。这些范畴是 [EO2、EGNO] 的正合模范畴类的子类。在这些幺半 2-范畴中，所有 Hom 范畴都具有左对偶与右对偶，即所有 1-态射都是可对偶的；此外，完美模范畴还具有对偶对象，因而是完全可对偶的。我们给出了若干例子，在这些例子中可以对完全正合模范畴与完美模范畴进行分类。

1.1. 张量范畴及其模范畴。 对有限张量范畴上的有限模范畴的研究，是有限维 $\Bbbk$-代数上的有限维模经典理论的自然范畴类比 [O、EO2、ENO1、ENO2、EGNO]。当 $\mathcal{C}$ 是融合范畴时，这一理论最容易理解；在此情形下，考虑半单模范畴是自然的。然而，一些特别重要的张量范畴，例如单位根处量子群的表示，并不是半单的。

O、EO2、EGNO、DSPS 表明，对有限模范畴进行分类等价于对代数进行 Morita 等价分类。因此，对所有有限模范畴进行分类是一个野问题。当 $\mathbf{vect}$ 时，这对应于对所有有限维代数进行 Morita 等价分类的问题。对于特征零域上的融合范畴，通常将范围限制在有限半单模范畴，其中在等价意义下只有有限多个不可分解对象（EGNO，第 9.1 条推论）。对于任意特征的域，则以可分模范畴取代半单模范畴（DSPS2、DR），同样只有有限多个不可分解对象。

EO 中引入的正合模范畴（另见 EGNO，第 7 节）具有与半单模范畴相似的同调性质。特别是，正合模范畴之间所有可加的模函子都有左伴随与右伴随。如果是融合范畴，那么正合模范畴对应于半单模范畴。该理论的另一亮点是，当是一个正合模范畴时，双中心化子定理成立，并蕴含张量范畴及其中心化子 Fun, 之间 Morita 等价。

在非半单情形中，正合模范畴的理论丰富得多；至少在一些例子中，会出现连续谱的不可分解正合模范畴 [Mo]。对于

例如，当 $\mathcal{C} = S$-**模**为 Sweedler 的四维 Hopf 代数 S上的有限维模时，根据 [EO2,Mo,W] 的结果，不可分解正合 $\mathcal{C}$-模范畴分为两个单参数族

$$\left\{\mathbf{vect}^{\lambda} \mid \lambda \in \mathbb{C}\right\} \quad \text{and} \quad \left\{\mathbf{svect}^{\lambda} \mid \lambda \in \mathbb{C}\right\},$$

在由有限维 $\mathbb{C}$-向量空间构成的范畴 $\mathbf{vect}$ 或由 $\mathbb{C}$-超向量空间构成的范畴 $\mathbf{svect}$ 上，以及两个非半单范畴 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{D}$。这里，参数 λ 刻画模范畴结合子；特别地，$\lambda = 0$ 对应平凡结合子。

为了构造幺半 2-范畴，我们从幺半 2-范畴 $\mathcal{C}$-$\mathbf{mod}$出发，其中 $\mathcal{C}$是带编织的有限张量范畴。 $\mathcal{C}$-$\mathbf{mod}$ 的幺半群乘积是相对 Deligne 积 $\boxtimes_{\mathcal{C}}$[ENO1、G1、DSPS1、FSS]。我们注意到，与文献中的说法相反，[1] $exact$ $\mathcal{C}$-模范畴构成的 2-子范畴在 $\boxtimes_{\mathcal{C}}$ 下并不封闭，并给出例子加以说明，见第 4.5 节。在有限特征 $\Bbbk$ 整除阿贝尔群 G的阶时，对于对称幺半范畴 $\mathcal{C} = \mathbf{vect}_G$ （由 G-分次向量空间构成），$\mathbf{vect} \boxtimes_{\mathcal{C}} \mathbf{vect}$ 并非正合，见例 4.23。我们还给出了特征零下的例子。例如，对于 Sweedler 四维 Hopf 代数上的 $\mathcal{C} = S$-$\mathbf{mod}$ ，带有平凡结合子的正合模范畴 $\mathbf{svect}$ 中，$\mathbf{svect} \boxtimes_{\mathcal{C}} \mathbf{svect}$ 并非正合，见例 4.24。

上述 $\boxtimes_{\mathcal{C}}$ 在保持正合模范畴方面的失败，促使我们引入全正合模范畴的全 2-子范畴 $\mathcal{C}$-$\mathbf{fex}$ ，它是 $\mathcal{C}$-$\mathbf{mod}$ 中最大的模范畴类，使得与 $\boxtimes_{\mathcal{C}}$ 在右侧做张量积后，仍保持在正合模范畴类中。

1.2. **全正合模范畴**。对于带编织的有限张量范畴 $\mathcal{C}$，如果对任意正合左 $\mathcal{C}$-模 $\mathcal{N}$，相对 Deligne 积 $\mathcal{N} \boxtimes_{\mathcal{C}} \mathcal{M}$ 都是正合的，我们就称左 $\mathcal{C}$-模 $\mathcal{M}$ 是全正合的。根据此定义，很容易证明其在 $\boxtimes_{\mathcal{C}}$ 下封闭。

命题 A（见命题 5.4）。 全正合 $\mathcal{C}$-模上的全2-子范畴 $\mathcal{C}$-$\mathbf{fex}$ 是 $\mathcal{C}$-$\mathbf{mod}$ 的幺半2-子范畴。

为刻画全正合模范畴，我们考虑中心化子函子$A_{\mathcal{M}}$: $\mathcal{C} \to \mathrm{Fun}_{\mathcal{C}}(\mathcal{M},\ \mathcal{M})$, $X \mapsto X \triangleright (-)$，其中利用编织结构使 $X \triangleright (-)$ 成为左 $\mathcal{C}$-模函子。这个中心化子函子是若干 α-归纳法 函子之一，在受子因子理论中的构造启发的 [DN2], 中记作 α^{+}，另见 [LR,BEK,O,FFRS]。

定理 B (见定理 5.5)。 设 $\mathcal{C}$ 是域 $\Bbbk$上的有限编织张量范畴。对于有限左 $\mathcal{C}$-模范畴 $\mathcal{M}$, 以下条件等价:

(i) $\mathcal{M}$ 是完全正合的。*(ii)* 对任意正合的 $\mathcal{C}$-模范畴 $\mathcal{N}$，左 $\mathcal{C}$-模范畴 函子$_{\mathcal{C}}(\mathcal{N}, \mathcal{M})$ 是正合的。*(iii)* 中心化子 $\mathcal{C}^{*}_{\mathcal{M}} =$ 函子$_{\mathcal{C}}(\mathcal{M}, \mathcal{M})$ 作为左 $\mathcal{C}$-模范畴是正合的。*(iv)* 中心化子函子 $A_{\mathcal{M}}$: $\mathcal{C} \to \mathcal{C}^{*}_{\mathcal{M}}$ 保投射对象。

注意，完全正合的 $\mathcal{C}$-模特别是正合的。然而，反过来一般不成立，正如我们在若干例子中所展示的那样。

任意有限左 $\mathcal{C}$-模 $\mathcal{M}$ 都等价于$\mathbf{mod}_{\mathcal{C}}$-$A$，其中 A 是 $\mathcal{C}$中的一个代数，作用由 $\mathcal{C}$ [EO2、EGNO、DSPS2]的张量积给出。若$\mathbf{mod}_{\mathcal{C}}$-$A$作为 $\mathcal{C}$-模是正合的，则这样的代数 A称为正合 代数。人们在 $\mathcal{C}$ [EO1, Con. B.6]中猜想，有限张量范畴 $\mathcal{C}$ 中的正合代数对应于 $\mathcal{C}$ [中的半单代数。该猜想在 $\mathcal{C} = H$-$\mathbf{mod}$的情形下得到验证，其中H 是同一篇论文中所述的代数闭域 $\Bbbk$ 上的有限维 Hopf 代数。关于任意域 $\Bbbk$ 上的张量范畴中这一猜想的一般性证明，见 [CSZ]。本文给出了编织有限张量范畴中半单代数的例子，其

[1]相应的双模范畴情形见 [DN1, 命题 2.10]，另见 [SY]（版本 1）以及 [JaYa，引理 2.1(ii)]（版本 2）。[2] [CSZ, 例 7.6] 中也有一个类似的例子，并且可以由 [DSPS2, 第 2 节.5]推出。

张量积并非半单，且既包括正特征也包括零特征的情形。我们还给出了这类交换代数的例子。

完全正合代数这一类具有这样的性质：与任意半单代数作张量积后，在 $\mathcal{C}$ 中会得到一个半单代数。 A 完全正合的内在条件是：对于 $\mathcal{C}$ 中至少一个投射对象 P， A-双模 $P \triangleright A$ 是诱导的 A 双模 $A \otimes P \otimes A$ 的一个直和项，参见命题 5.15。

完全正合代数 A 的另一种内在刻画是：代数 $A^{\psi} \otimes A$（其中A^{ψ} 是 A的编织相反代数）是正合的；或者根据 [CSZ], ，它在 $\mathcal{C}$ 中是一个半单代数。这种刻画类似于环论中的经典结果：交换环 R 上的有限生成代数 A 是可分的，当且仅当 $A^{\mathrm{op}} \otimes_R A$ 在 R [H 上是半单的，定理 2.5]。

一个非半单例子。令 $\mathcal{C} = S$-**模** 为 Sweedler 霍普夫代数 S 的模范畴，其对称编织由 **svect** 的对称编织给出。我们首先通过对两个 $\mathbb{C}\mathbf{P}^1$ 的拷贝重新参数化不可分解的 $\mathcal{C}$-模范畴：对 $\lambda \neq 0$，令

$$\mathcal{V}_\lambda := \mathbf{vect}^{1/\lambda}, \quad \mathcal{S}_\lambda := \mathbf{svect}^{1/\lambda}, \quad \mathcal{V}_\infty := \mathbf{vect}^{0}, \quad \mathcal{S}_\infty := \mathbf{svect}^{0}, \quad \mathcal{V}_0 := \mathcal{C}, \quad \mathcal{S}_0 := \mathcal{D}.$$

正如我们在命题 8.22 中所示， $\mathcal{V}_\lambda$ 和 $\mathcal{S}_\lambda$ 是完全正合的，当且仅当 $\lambda \neq \infty$；并且我们可以计算完全正合的 $\mathcal{C}$-模的相对 Deligne 积和函子范畴。

命题 C (见命题 8.23)。 对于 λ、 $\mu \in \mathbb{C}$，我们有左 $\mathcal{C}$-模范畴之间的等价

$$\mathcal{V}_\lambda \boxtimes_{\mathcal{C}} \mathcal{V}_\mu \simeq \mathcal{V}_{\lambda+\mu} \qquad \mathcal{S}_\lambda \boxtimes_{\mathcal{C}} \mathcal{V}_\mu \simeq \mathcal{S}_{\lambda+\mu} \simeq \mathcal{V}_\lambda \boxtimes_{\mathcal{C}} \mathcal{S}_\mu, \qquad \mathcal{S}_\lambda \boxtimes_{\mathcal{C}} \mathcal{S}_\mu \simeq \mathcal{V}_{\lambda+\mu},$$
$$\mathrm{Fun}_{\mathcal{C}}(\mathcal{V}_\lambda, \mathcal{V}_\mu) \simeq \mathcal{V}_{\mu-\lambda}, \qquad \mathrm{Fun}_{\mathcal{C}}(\mathcal{S}_\lambda, \mathcal{V}_\mu) \simeq \mathcal{S}_{\mu-\lambda} \simeq \mathrm{Fun}_{\mathcal{C}}(\mathcal{V}_\lambda, \mathcal{S}_\mu), \qquad \mathrm{Fun}_{\mathcal{C}}(\mathcal{S}_\lambda, \mathcal{S}_\mu) \simeq \mathcal{V}_{\mu-\lambda}.$$

一般而言，给定的 $\mathcal{C}$-模范畴是否完全正合，取决于编织的选择。例如，对于 $\mathcal{C} = S$-**模**，存在一个与万有 R-矩阵 R_t 对应的一参数编织族，其中 $t \in \mathbb{C}$。**svect** 的编织对应于 $t = 0$ 的情形。 $\mathcal{C}$-模**vect** $= \mathcal{V}_\infty$ 仅当 $t \neq 0$ 时才完全正合。对于由 R_t 得到的编织，其中 $t \neq 0$， $\mathcal{V}_{-2/t}$ 则不完全正合，见注 8.27。

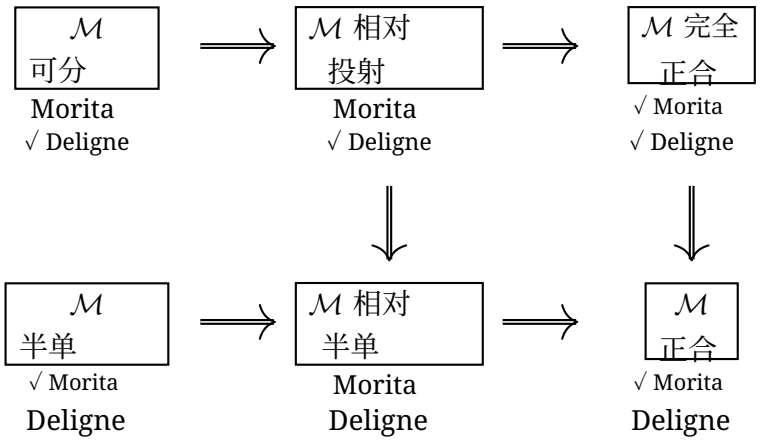


FIGURE 1. 不同的正合 $\mathcal{C}$-模范畴及其性质，在 Morita 等价下的闭性（即不依赖于代数对象的选择）或相对 Deligne 积 $\boxtimes_{\mathcal{C}}$。

图 1 对比了全正合模范畴与其他模范畴类别。这里，可分 模范畴是形如 $\mathbf{mod}_{\mathcal{C}}$-$A$ 的模范畴，其中代数A 属于 $\mathcal{C}$且为可分代数，也就是说， A 的乘法映射存在一个作为 A-双模映射的截面。当 $\mathcal{C}$是融合 [时，可分代数在 Morita 等价下保持不变（DSPS2，第 2.5] 节）。我们在例 4.16 中证明，这在非半单情形下不成立。此外，在上述 $\mathcal{C} = S$-**mod** 的例子中，只有 $\mathcal{V}_0$

以及 $\mathcal{S}_0$ 是可分的，这表明全正合模范畴这一类要大得多。此外， $\mathcal{V}_0$ 和 $\mathcal{S}_0$ 也是仅有的相对投射 $\mathcal{C}$-模范畴，也就是说，它们可以表示为 $\mathcal{C}$ 中某个代数 A 上的模，并且 A 在 $\mathcal{C}$ 中作为 A-双模是相对投射的；精确定义见定义 5.11。图 1 下方一行的蕴含关系给出了判定 $\mathcal{C}$-模范畴 $\mathcal{M}$ 正合的充分条件。这里，若存在 $\mathcal{M}$ 中的 M，使得 $\mathcal{M}$ 的任一对象都是某个 X（其中 X 属于 $\mathcal{C}$）的直和项，则称 $\mathcal{M}$ 为相对半单；参见定义 4.12。最后我们指出，全正合模范畴是图 1 中唯一在 Morita 等价和相对 Deligne 积下均保持不变的一类。

1.3. **与可分代数的关系**。应用 [DSPS2 第 2 节的结果， $\Bbbk$-线性融合范畴 $\mathcal{C}$的有限左 $\mathcal{C}$-模 $\mathcal{M}$ 完全正合，当且仅当它可分，因为这两个概念都等价于 $\mathcal{C}^*_{\mathcal{M}}$ 是半单的，见推论 5.6。此外，若 $\Bbbk$ 还是特征零的代数闭域，则图 1 中的六种概念全部等价，见推论 5.6 的第二部分。除非另有说明，本文不对域 $\Bbbk$ 作任何假设。

定理 B 中 (i) 与 (iii) 的等价性表明，对于非半单 有限编织张量范畴 $\mathcal{C}$，完全正合的 $\mathcal{C}$-模范畴是可分模范畴更自然的类比，而在这种一般性下考虑通常的可分模范畴似乎限制过于严格。事实上，由命题 5.15 可知，范畴 $\mathcal{C}$ 中的代数 A 完全正合，当且仅当对于张量单位 1 的投射盖 $P_{\mathbb{1}}$，$P_{\mathbb{1}} \otimes A$ 作为 A-双模是 $A \otimes P_{\mathbb{1}} \otimes A$ 的直和项。当 $\mathcal{C}$ 为半单时， A 完全正合等价于对 $P_{\mathbb{1}} = \mathbb{1}$满足这一直和项条件，也就是说， A 是可分代数。因此，也可以将完全正合的 $\mathcal{C}$-模范畴称为投射可分模范畴。可分代数的另一种自然推广可以是“A 作为 A-双模是投射的”。然而，根据推论 5.19，在特征 $\Bbbk = 0$ 下存在这样的非零 A 将意味着 $\mathcal{C}$ 必为半单，因此 A 按通常意义是可分的。

何时 $\mathbf{vect}$ 是完全正合的？设 $\mathcal{C} = H$-**模** 是有限维拟三角 Hopf 代数 H 上有限维模构成的编织张量范畴，其万有 R 矩阵为 $R = R^{(1)} \otimes R^{(2)}$。典范纤维函子 $F\colon \mathcal{C} \to \mathbf{vect}$ 使范畴 $\mathbf{vect}$ 成为一个左 $\mathcal{C}$-模范畴。为描述相应的 $\mathcal{C}$-作用何时完全正合，考虑 Hopf 代数同态

$$\phi_R\colon H^* \to H, \quad f \mapsto R^{(1)} f(R^{(2)}).$$

命题 D （见命题 8.5）。设 H 是任意域 $\Bbbk$ 上的有限维 *Hopf* 代数。以下条件等价。

(i) $\mathbf{vect}$ 是完全正合的。*(ii)* 限制函子 $\mathrm{Res}_{\phi_R}\colon H$-**模** $\to H^*$-**模** 保持投射对象。

若 H^* 是半单的，则 $\mathbf{vect}$ 总是完全正合的。对于可因子化 Hopf 代数$H = u_q(\mathfrak{sl}_2)$，也就是任意奇数阶 q 的 Lusztig 有限维量子 $\mathfrak{sl}_2$，我们证明 $\mathbf{vect}$ 并非完全正合，见第 8.3 节。我们猜想这一观察可推广到一般的小量子群 $u_q(\mathfrak{g})$。

1.4. **完美模范畴是完全可对偶的**。由于配边假设 [BD, L, DSPS2, BMS, DR,BJS]，高阶幺半范畴中的可对偶性是拓扑场论研究中备受关注的主题。在此背景下，若一个幺半 2-范畴中的对象属于某个幺半 2-子范畴，且该子范畴中的所有对象都可对偶（即具有左对偶与右对偶），并且所有 1-态射都具有左伴随与右伴随 [DSPS2, P]，则称该对象为完全可对偶。

我们称 $\mathcal{M}$ 是 反完全正合 的，如果对于任意正合的 $\mathcal{N}$，都有 $\mathcal{M} \boxtimes_{\mathcal{C}} \mathcal{N}$ 是正合的。由反完全正合左 $\mathcal{C}$-模范畴组成的幺半 2-范畴 $\mathcal{C}$-**opfex** 实际上等价于 $\mathcal{C}^{\otimes\mathrm{op}}$-**fex**，其中 $\mathcal{C}^{\otimes\mathrm{op}}$ 是对偶张量范畴。考虑反完全正合模范畴的关键原因在于：$\mathcal{M}$ 是反完全正合的，当且仅当右对偶 ${}^*\mathcal{M} = \mathrm{Fun}_{\mathcal{C}}(\mathcal{M}, \mathcal{C})$，或者等价地，左对偶 $\mathcal{M}^*$ 是完全正合的，见命题 6.5。我们还证明， $\mathcal{M}$ 是反完全正合的，当且仅当它作为一个

$\mathcal{C}^{\mathrm{rev}}$-模范畴，其中 $\mathcal{C}^{\mathrm{rev}}$ 是赋予逆编织的张量范畴。因此，$\mathcal{M}$ 是反完全正合的，当且仅当中心化子函子 $A^{\mathrm{rev}}_{\mathcal{M}}$（利用 $\mathcal{C}$ 的逆编织定义）保持投射对象。[3] 特别地，与上述命题 D 类似，$\mathbf{vect}$ 是反完全正合的，当且仅当函子 $\mathrm{Res}(\phi_{R_{21}^{-1}})$ 保持投射对象。

Drinfeld 中心 $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$ 上的模范畴 $\mathbf{vect}$，其中 G 是有限群，且 $\mathrm{char}\,\Bbbk$ 整除 $|G|$，提供了一个完全正合但非 op-完全正合的模范畴例子，见例 6.11。这表明一般而言，幺半 2-范畴 $\mathcal{C}$-$\mathbf{fex}$ 对偶下不封闭。不过，当 $\mathcal{C}$ 为对称时，$\mathcal{C}$-$\mathbf{fex}$ 具有对偶。

若一个 $\mathcal{C}$-模范畴 $\mathcal{M}$ 完美 满足其自身 $\mathcal{M}$ 和其对偶 $\mathcal{M}^*$ 都完全正合，我们就称其为完美。根据命题 6.5，$\mathcal{M}$ 完美当且仅当 $\mathcal{M}$ 完全正合且 op-完全正合。因此，完美的 $\mathcal{C}$-模范畴是 $\mathcal{C}$-$\mathbf{fex}$ 中的可对偶对象。此外，完全正合的 $\mathcal{C}$-模特别是正合的，因此具有所有 1-态射都存在左伴随与右伴随这一性质。这表明，按照配边假设 [L、DSPS2] 的意义，完美的 $\mathcal{C}$-模是 $\mathcal{C}$-$\mathbf{mod}$ 中的完全可对偶 对象。我们证明反过来也成立。

定理 E (见定理 6.25)。 设 $\mathcal{C}$ 是域 $\Bbbk$上的有限编织张量范畴。对象 $\mathcal{M}$属于 $\mathcal{C}$-**模**，当且仅当 $\mathcal{M}$ 是完美的，即 $\mathcal{M}$ 和 $\mathcal{M}^*$ 完全正合时，它才是完全可对偶的。

完美 $\mathcal{C}$-模这一术语源于交换环上模的完美复形（或更一般地，概形 X上的拟凝聚层）的术语。完美复形恰好是相应范畴中关于 R上的相对张量积的导出版本而言的可对偶对象，参见注 6.22。

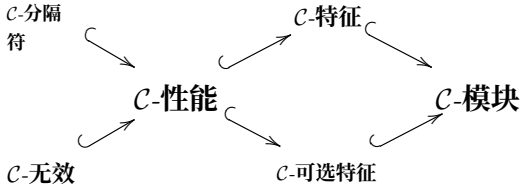
给定一个幺半 2-范畴，也可以考虑其中最大的全 2-子范畴，使得所有1-态射都有左伴随和右伴随。对于 $\mathcal{C}$-**模**而言，若 $\mathcal{C}$ 是有限编织张量范畴，则这个 2-子范畴是 $\mathcal{C}$-**正合**，即正合左 $\mathcal{C}$-模构成的 2-子范畴。本文的结果表明，这个 2-子范畴不是幺半 2-子范畴。不过，根据定义， $\mathcal{C}$-**正合** 是幺半 2-范畴 $\mathcal{C}$-**完全正合** 上的右模 2-范畴，具体而言，$\mathcal{C}$-**模** 的幺半群乘积 $\boxtimes_{\mathcal{C}}$ 限制为一个 2-函子

$$\mathcal{C}\text{-}\mathbf{ex} \times \mathcal{C}\text{-}\mathbf{fex} \xrightarrow{\boxtimes_{\mathcal{C}}} \mathcal{C}\text{-}\mathbf{ex}.$$

事实上，根据定义， $\mathcal{C}$-$\mathbf{fex}$ 是最大的全幺半2-子范畴，使得通过限制 $\boxtimes_{\mathcal{C}}$， $\mathcal{C}$-$\mathbf{ex}$ 成为一个右模 2-范畴。同样， $\mathcal{C}$-$\mathbf{ex}$ 是 $\mathcal{C}$-$\mathbf{opfex}$上的左模2-范畴。结合这些观察， $\mathcal{C}$-$\mathbf{ex}$是幺半 2-范畴 $\mathcal{C}$-$\mathbf{perf}$（完美 $\mathcal{C}$-模）的一个双模2-范畴。

1.5. **幺半2-子范畴图**。 现在我们总结本文中考察的各种幺半 2-范畴之间的关系。为此，我们用 $\mathcal{C}$-$\mathbf{inv}$ 表示 $\mathcal{C}$-$\mathbf{mod}$ 中可逆对象构成的幺半 2- 子范畴，例如， [ENO1 、 DN2] 中研究的子范畴。我们将 [ENO1 命题 4.2] 中关于可逆 $\mathcal{C}$-模范畴的刻画推广到本文所讨论的一般情形，即中心化子函子 $A_{\mathcal{M}}\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}^*_{\mathcal{M}}$为等价的情形，见定理 7.2。我们还用 $\mathcal{C}$-$\mathbf{sep}$ 表示可分左 $\mathcal{C}$-模构成的全幺半 2-子范畴；该子范畴在半单情形下由 [DSPS2]研究过。

定理 F。 设 $\mathcal{C}$ 是域 $\Bbbk$上的有限编织张量范畴。我们有以下幺半2-子范畴的包含关系



[3]该函子是 α-诱导函子 α^- 在 [DN2] 中的另一个。

这些包含关系在 1 态射和2-态射上是满的。这里，幺半2-范畴 $\mathcal{C}$-**inv**、 $\mathcal{C}$-**sep**、 $\mathcal{C}$-**perf** 以及$\mathcal{C}$-**mod** 按照定义 *6.23* 的意义是刚性的。

根据推论 6.15 和推论7.3，可分模范畴和可逆模范畴分别包含于 $\mathcal{C}$-**完美** 中。我们知道，一般而言，定理 F 中的所有包含关系都是严格的，而且 $\mathcal{C}$-**可分**与 $\mathcal{C}$-**可逆** 之间不存在包含关系。事实上，若 $\mathcal{C}$ 是特征零代数闭域上的融合范畴，则可分性等价于模范畴的半单性，见推论 5.6 或 [DSPS2, 2.5.1], ，并非所有半单模范畴都是可逆的。对于 $\mathcal{C} = \Bbbk G$-**模**，其中 G 是非平凡群， $\Bbbk$ 是任意域，**vect** 不可逆但完美，见例 7.5。相反，在第 8.4 节中，模范畴 $\mathbf{vect}^{\lambda}$ 是可逆的，但不可分，见引理 8.26。

可逆左 $\mathcal{C}$-模范畴在 [DN2] 中已有研究，并被用于定义高阶皮卡群，以及构造有限群 G 的编织张量范畴的 G-交叉编织扩张，见 [DN2，第 8.2] 节。对于 $\mathcal{C} = S$-**模**，其中 S 是 Sweedler 霍普夫代数，其 Picard 1-群 Pic($\mathcal{C}$) 已由 [Ca] 给出。它由 $\mathbb{C} \times \mathbb{Z}_2$ 给出。我们在第 8.4 节对不可分解全正合模范畴所作的分类与这一结果相符，因为在此例中，所有不可分解全正合 $\mathcal{C}$-模范畴都是可逆的。此外，我们还给出了具体的模范畴，作为该皮卡群中每个元素的代表。事实上， [DN2 的 2-范畴皮卡群 $\mathbf{Pic}(\mathcal{C})$，即式 (1.4)] ，是通过从 $\mathcal{C}$-**fex**（或等价地，从 $\mathcal{C}$-**perf**）中选取可逆对象（也就是说，在我们的 Sweedler 例子中， $\mathcal{C}$-**fex** 的所有不可分解对象）以及可逆的 1-态射和 2-态射得到的。值得注意的是，$\mathbf{Pic}(\mathcal{C})$ 不包含非简单 1-态射，因此无法反映 $\mathcal{C}$-**fex** 的非半单部分。实际上，对于一般的非半单 $\mathcal{C}$， $\mathcal{C}$-**inv** $\subset \mathcal{C}$-**fex** 中每个对象的自等价都对应于 $\mathcal{C}$ 的可逆对象，与 $\mathbf{Pic}(\mathcal{C})$ 中的情形相同；而它们的投射盖仅存在于 $\mathcal{C}$-**inv** 的 1-自同态范畴中。

1.6. **展望**。我们在此列出一些本文尚未充分探讨的有趣方向。

（1）文献 [DR，A.5] 节引入了 2-范畴的幂等完备化，并要求融合2-范畴是幂等完备的。融合 2-范畴还要求是局部半单的，即对于所有对象 $\mathcal{M}$、$\mathcal{N}$，$\mathrm{Fun}_{\mathcal{C}}(\mathcal{M},\mathcal{N})$ 都应当是半单的，而对于非半单有限张量范畴 $\mathcal{C}$，显然并非如此。不过，研究幺半 2-范畴 $\mathcal{C}$-fex 和 $\mathcal{C}$-perf 是否在此意义下幂等完备，将是有趣且重要的。（2）作为迈向（1）的第一步，一个自然的问题是：带有一个对象和 1-自同态张量范畴 $\mathcal{C}$ 的解环2-范畴 B$\mathcal{C}$ 的幂等完备化是什么？在融合情形下，它由 $\mathcal{C}$-sep [DR，命题 1.3.13] 给出；我们预计该结果对非半单有限张量范畴也成立。（3）如果存在有限非半单辫张量范畴 $\mathcal{C}$，那么找出同时满足正合与完全正合 $\mathcal{C}$-模这两类模相一致的例子，即 $\mathcal{C}$-ex $= \mathcal{C}$-fex，从而有 $\mathcal{C}$-ex $= \mathcal{C}$-opfex $= \mathcal{C}$-perf，具有根本重要性。到目前为止，我们所得到的例子更倾向于表明：对于 $\operatorname{char}\Bbbk = 0$， $\mathcal{C}$-ex $= \mathcal{C}$-fex 当且仅当 $\mathcal{C}$ 是半单的。（4）为有限张量范畴 $\mathcal{C}$ 上的完全正合（或完美）双模范畴给出定义，是一个自然的问题。在 [G1，定理 7.14], 中，概述了如何将 [EO2、EGNO] 的双等价$\mathcal{C}$-bimod $\to \mathcal{Z}(\mathcal{C})$-mod 提升为幺半 2-范畴之间的双等价，其中 $\mathcal{C}$-bimod 上的幺半结构是相对 Deligne 积 $\boxtimes_{\mathcal{C}}$，而 $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$-mod 上的幺半结构是 $\boxtimes_{\mathcal{Z}(\mathcal{C})}$，使用了 Drinfeld 中心 $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$ 的编织。由于该双等价保持正合模范畴，完全正合（或完美）的 $\mathcal{C}$-双模对应于完全正合（分别为

p完美 ）$\mathcal{Z}(\mathcal{C})$-模。

借助这一对应，我们的若干结果可直接推广到这类完全正合$\mathcal{C}$-双模。首先，由于双等价是幺半的，完全正合 $\mathcal{C}$-双模的相对 Deligne 积 $\boxtimes_{\mathcal{C}}$ 仍是完全正合的 $\mathcal{C}$-双模。接着，在 $\mathcal{C}$ 未必是编织的情况下，将定理 B（定理 5.5）应用于 $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$ 时，需要将各处的

正合 $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$-模替换为正合 $\mathcal{C}$-双模，并将 (ii) 和 (iii) 中的 $\mathrm{Fun}^{\mathcal{Z}(\mathcal{C})}$ 替换为 $\mathrm{Fun}_{\mathcal{C}}$，因为 $\mathcal{C}$-**双模** 中的相对 Deligne 积是定义在 $\mathcal{C}$ 上，而不是 $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$ 上。第 (iv) 部分必须替换为如下要求：按 (B.18)–(B.21) 中的定义，两个函子 $A^l_{\mathcal{M}}$ 和 $A^r_{\mathcal{M}}$ 都保持投射对象。

（5）当 $\mathcal{C}$ 是有限带状范畴时，对于任意有限模范畴 $\mathcal{M}$，都有等价 $\mathcal{M} \simeq \mathcal{M}^{**}$，见注 3.27。我们预计，在这种情况下，$\mathcal{C}$-**perf** 和 $\mathcal{C}$-**mod** 在适当意义下是枢纽的 幺半 2-范畴，这建立在 [BMS, DR]，的工作基础上，见注 3.27。这种刚性结构不应与 枢纽的$\mathcal{C}$-模范畴 [Sch,S3] 的概念混淆。在注 8.28 中，我们比较了 $\mathcal{C} = S$-**mod** 上的完全正合模范畴与枢纽的模范畴这两个概念，其中 S为 Sweedler 霍普夫代数。

（6）如果 G 是一个有限群，且 $\mathrm{char}\,\Bbbk$ 整除 $|G|$，那么 $\mathcal{C} = \Bbbk G$-**mod** 是一个非半单对称张量范畴。基于 [EGNO，推论 7.12.20]，对正合$\mathcal{C}$-模范畴的分类，进一步研究幺半 2-范畴$\mathcal{C}$-**perf** 将会很有意思，即对其不可分解对象进行分类，并计算它们的相对 Deligne 积。如果 G 是阿贝尔群，则还可以基于单位根在 $\mathcal{C}$ 上定义其他非对称编织，参见例如 [Ma，例 2.1.6], 这将导出不同的幺半 2-范畴。

(7) 最后，回想一下，对于我们的主要非半单例子 $\mathcal{C} = S$-模（其中 S 是 Sweedler 霍普夫代数），其 Picard 1-群 $\mathrm{Pic}(\mathcal{C}) = \mathbb{C} \times \mathbb{Z}_2$。识别 $\mathcal{C}$ 的对称 $\mathbb{C} \times \mathbb{Z}_2$-分次扩张将会很有趣。事实上，正如 [DN2, Sec. 5.4], 所指出的，对于对称 $\mathcal{C}$，对称 $\mathcal{C}$-模范畴的对称 2-范畴 Picard 群 $\mathrm{Pic}^{\mathrm{sym}}(\mathcal{C})$ 等价于通常的 Picard 2-群 $\mathrm{Pic}(\mathcal{C})$。此外，根据 [DN2, Sec. 8.4], ， $\mathcal{C}$ 的所有对称分次扩张都由 $\mathrm{Pic}^{\mathrm{sym}}(\mathcal{C}) = \mathrm{Pic}(\mathcal{C})$ 控制。 $\mathcal{C}$ 的一个对称 $\mathbb{C}$-分次扩张可由如下范畴直接给出：该范畴由无限维 Sweedler 霍普夫代数模的有限维模构成，其中该代数取商后满足 $g^2 = 1$，其中 g 是群样元，并且中心元 x^2（其中 x 是斜原始生成元）按对角方式作用。该范畴继承了来自 svect 的对称编织。因此，我们关注的是这个 $\mathcal{C}$ 的对称 $\mathbb{C}$-分次扩张的对称 $\mathbb{Z}_2$-分次扩张。我们对 $\mathrm{Pic}^{\mathrm{sym}}(\mathcal{C})$ 的显式实现，即将幺半 2-范畴$\mathcal{C}$-fex $= \mathcal{C}$-perf 的 2-范畴群作为其实现，或许能为这类有趣的对称扩张提供线索。

1.7. **内容摘要**。我们首先在第 2 节回顾有限编织张量范畴 $\mathcal{C}$ 上的幺半 2-范畴 $\mathcal{C}$-**模**。在此，我们还讨论左 $\mathcal{C}$-模函子范畴上的 $\mathcal{C}$-模范畴结构。在第 3 节，我们研究内代数、双模和双模态射构成的幺半 Morita 2-范畴 $\mathbf{Mor}_{\mathcal{C}}$，它与 $\mathcal{C}$-**模**双等价，并使用内代数描述所有所需的构造。第 4 节包含本文所需的关于正合模范畴和正合代数的结果，其中一些结果可能已为人所知，但在文献中并不容易找到。在第 4.5 节，我们解释了一般而言，正合模范畴在相对 Deligne 积下并不封闭，并给出相关例子。

关于全正合模范畴这一新类的主要定义与基本结果包含在第 5 节中。全正合模范畴的对偶性在随后的第 6 节中加以分析，完美模范畴则在第 6.4 节中引入并研究。接下来，第 7 节给出可逆模范畴的刻画，并将这一概念与完美模范畴进行比较。最后，第 8 节包含形如 $\mathcal{C} = H$-**mod** 的编织张量范畴上的全正合模范畴的若干例子类，其中 H 为一拟三角 Hopf 代数。其中包括如下结果：**vect** 在奇数次单位根 q 处对于 $H = u_q(\mathfrak{sl}_2)$ 并非完全正合，以及关于可因子化小量子群 $u_q(\mathfrak{g})$ 一般情形的一个猜想。我们以对幺半 2-范畴 $\mathcal{C}$-**fex** 的详细研究作为结语，其例子取 $\mathcal{C} = S$-**mod**，而 $H = S$ 为 Sweedler 的四维 Hopf 代数。我们附有三个附录，介绍幺半范畴、模范畴与双模范畴的基本概念，以及将 $\mathcal{C}$-**mod** （或$\mathcal{C}$-**bimod**）构造为幺半 2-范畴的若干细节，见附录 A–C。

1.8. **约定**。 在本文中，我们始终在一般域 $\Bbbk$ 上工作。关于域 $\Bbbk$ 的假设将在需要时说明。所考虑的所有范畴均为阿贝尔范畴且为 $\Bbbk$-线性的。若一个范畴等价于有限维$\Bbbk$-代数上的有限维模范畴，则称其为有限 范畴。特别地，有限范畴是 $\Bbbk$-线性的、阿贝尔的、加性的，并且有足够多的投射对象。所有函子至少是 $\Bbbk$-线性的、加性的且右正合的。我们将有限维 $\Bbbk$-向量空间范畴记为 $\mathbf{vect}$。

一个有限张量范畴 是一个有限范畴 $\mathcal{C}$，它是幺半的，具有 $\Bbbk$-双线性幺半群乘积、左对偶与右对偶，以及一个单张量单位 $\mathbb{1} = \mathbb{1}_{\mathcal{C}}$。特别地，张量积对两个变量都是正合的 [EGNO，第4节。2] 并且$\mathrm{End}_{\mathcal{C}}(\mathbb{1})$是 $\Bbbk$的有限域扩张[4] 。除非另有说明，我们假定本文所考虑的张量范畴均为有限张量范畴。此外，若 $\mathcal{C}$ 是半单的，则称 $\mathcal{C}$ 为融合范畴。此处与 [EGNO] 中定义的唯一差别在于对域 $\Bbbk$ 的假设，即我们不要求 $\Bbbk$ 是代数闭的。当证明并未使用该假设时，我们将引用 [EGNO]或其他来源中假定 $\Bbbk$为代数闭的陈述。另见 [DSPS2，定理2.3。5]其中在不对域作假设的情况下回顾了 [EGNO] 的若干关键结果 $\Bbbk$。

我们注意到， [DSPS1、DSPS2] 采用了有限张量范畴的另一种定义，其中不要求 1 是简单对象；但若要求刚性，则它必然是半单的，也就是 [EGNO] 中所称的多张量范畴。我们的结果（尤其是定理 5.5）可以推广到多张量范畴。除第 7 节中关于可逆模范畴的讨论、引理 2.16 和推论 2.17，以及推论 5.19 外，这种推广都很直接；在这些地方用到了张量单位的简单性。不过，我们相信这些结论对不可分解多张量范畴同样成立。

对于 $\mathcal{C}$ 中的代数 A，B，我们用 **模**$_{\mathcal{C}}$-A、 A-**模**$_{\mathcal{C}}$ 和 A-**双模**$_{\mathcal{C}}$-B 分别表示 $\mathcal{C}$ 中的右 A-模范畴、左 A-模范畴和 A-B-双模范畴。当 $A = B$ 时，我们将 A-A-双模简称为 A-双模，并简记为 A-**双模**$_{\mathcal{C}} = A$-**双模**$_{\mathcal{C}}$-A。

我们所说的 2-范畴 $\mathbf{C}$ 是指一个双范畴，其中 1-态射的复合严格满足结合律[5]所有讨论的 2-范畴都是 $\Bbbk$-线性的。也就是说，2-范畴是由$\mathbf{Cat}_{\Bbbk}$ （即 $\Bbbk$-线性范畴与 $\Bbbk$-线性函子的范畴）所富化的范畴。特别地，对于$\mathbf{C}$中的任意对象 X，$\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X, X)$ 都是一个严格幺半范畴。同样，2-函子是由$\mathbf{Cat}_{\Bbbk}$ 所富化的范畴之间的函子，即它严格保持 1-态射的复合。若对于满 2-子范畴$\mathbf{D}$ 中的任意对象 X, Y，都有 $\mathrm{Hom}_{\mathbf{D}}(X, Y) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X, Y)$，则称$\mathbf{D}$ 是$\mathbf{C}$ 的满 2-子范畴。

1.9. **致谢**。 作者感谢 A. Davydov 和 D. Nikshych 提供宝贵意见。我们还感谢 D. Jaklitsch、I. Runkel、K. Shimizu、M. Stroi´nski 和 H. Yadav 就本文主题进行有益讨论并提出意见。本研究由英国皇家学会国际交流资助项目 ES\R1\231027资助。本文部分内容是在帕斯卡研究所（巴黎奥赛）举办的“CFT：共形场论中的代数、拓扑与概率方法”项目期间完成的。AMG 得到了法国国家科学研究中心的支持，并获得法国国家研究署资助 NASQI3D ANR-24-CE40-7252 的部分资助。

2. Module categories and relative Deligne products

本节回顾有限编织张量范畴 $\mathcal{C}$上的有限模范畴的幺半 2-范畴 $\mathcal{C}$-**模** 。我们还将在第 2.2–2.4 节讨论模函子范畴上的 $\mathcal{C}$-模范畴结构、中心化子函子和对偶模范畴。关于（编织）幺半范畴、（双）模范畴及其函子，以及幺半 2-范畴的背景知识，分别参见附录 A、B 和 C。

[4]注意，根据 [TV，引理 1，1] 和舒尔引理，$\mathrm{End}_{\mathcal{C}}(\mathbb{1})$ 是交换的。[5]请注意，我们所考虑的 $2\text{-}categories$ 通常也具有 $monoidal\ 2\text{-}categories$，且幺半结构可能不是严格的；关于幺半 2-范畴的约定，请参见附录 C。

2.1. **模范畴的幺半 2-范畴**。对于有限张量范畴 $\mathcal{C}$， $\mathcal{C}$-**模**表示有限左 $\mathcal{C}$-模范畴 $\mathcal{M} = (\mathcal{M}, \triangleright : \mathcal{C} \times \mathcal{M} \to \mathcal{M})$ 、右正合$\mathcal{C}$-模函子 (G, s^G)： $\mathcal{M} \to \mathcal{N}$以及 $\mathcal{C}$-模自然变换构成的 2-范畴，定义见附录 B.1。类似地， $\mathcal{C}$-**双模**表示 $\mathcal{C}$-双模范畴构成的 2-范畴，见附录 B.2。

回顾有限（$\Bbbk$-线性阿贝尔）范畴的 Deligne 积 $\mathcal{N} \boxtimes \mathcal{M}$，见 [D，命题 5.13]。现在我们将回顾相对 ***Deligne*** 积 $\mathcal{N} \boxtimes_{\mathcal{C}} \mathcal{M}$，其一般定义适用于右 $\mathcal{C}$-模 $\mathcal{N}$和左 $\mathcal{C}$-模 $\mathcal{M}$，见 [ENO1、G1、G2、DSPS1、DSPS2、FSS、DN2]。我们需要以下定义。

定义 2.1。A $\mathcal{C}$-平衡函子 $B\colon \mathcal{N} \times \mathcal{M} \to \mathcal{P}$是一个以 $\mathcal{P}$为目标范畴的函子，并附带一个自然同构，称为 $\mathcal{C}$-平衡

$$\beta_{N,X,M}\colon B((N \triangleleft X), M) \xrightarrow{\sim} B(N, (X \triangleright M))$$

满足相干条件，使得图

$$\begin{array}{ccccc} B(N \triangleleft X \otimes Y, M) & & \xrightarrow{\quad\beta_{N,X\otimes Y,M}\quad} & & B(N, X \otimes Y \triangleright M) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle B(r^{-1}_{N,X,Y}, \mathrm{id}_M)} & & & & \Big\uparrow{\scriptstyle B(\mathrm{id}_N, l_{X,Y,M})} \\ B((N \triangleleft X) \triangleleft Y, M) & \xrightarrow{\beta_{N\triangleleft X,Y,M}} & B(N \triangleleft X, Y \triangleright M) & \xrightarrow{\beta_{N,X,Y\triangleright M}} & B(N, X \triangleright (Y \triangleright M)) \end{array} \tag{2.1}$$

交换，并满足三角恒等式，该恒等式在我们的假设下蕴含 $\beta_{N,\mathbb{1},M} = \mathrm{id}$，参见 [ENO1，定义 3.1]，[DSPS1，定义 3.1] 或 [FSS，定义 2.7(i)]。A $\mathcal{C}$-平衡自然变换 η: $B \to C$，其中 (B, β^B)、(C, β^C) : $\mathcal{N} \times \mathcal{M} \to \mathcal{P}$是 $\mathcal{C}$-平衡函子，是满足以下图示条件的自然变换

$$\begin{array}{ccc} B(N \triangleleft X, M) & \xrightarrow{\beta^B_{N,X,M}} & B(N, X \triangleright M) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \eta_{N\triangleleft X,M}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \eta_{N,X\triangleright M}} \\ C(N \triangleleft X, M) & \xrightarrow{\beta^C_{N,X,M}} & C(N, X \triangleright M) \end{array}$$

对所有对象 $N \in \mathcal{N}$、 $X \in \mathcal{C}$、 $M \in \mathcal{M}$，均成立，参见 [DSPS1，定义 3.1] 或 [FSS，定义 2.7(ii)]。

我们将每个分量上均为右正合的 $\mathcal{C}$-平衡函子 $\mathcal{N} \times \mathcal{M} \to \mathcal{P}$ 及其间的 $\mathcal{C}$-平衡自然变换所构成的范畴记为 $\mathrm{Fun}^{\mathrm{bal}}_{\mathcal{C}}(\mathcal{N} \times \mathcal{M}, \mathcal{P})$。

定义 2.2. 设 $\mathcal{N}$ 是一个右 $\mathcal{C}$-模， $\mathcal{M}$ 是一个左 $\mathcal{C}$-模。那么，$\mathcal{N}$ 与 $\mathcal{M}$ 在 $\mathcal{C}$ 上的相对 ***Deligne*** 积是一个范畴 $\mathcal{N} \boxtimes_{\mathcal{C}} \mathcal{M}$，并带有一个 $\mathcal{C}$-平衡函子

$$P_{\mathcal{N},\mathcal{M}} = (P, \beta^P)\colon \mathcal{N} \times \mathcal{M} \to \mathcal{N} \boxtimes_{\mathcal{C}} \mathcal{M}, \tag{2.2}$$

它在每个变量上均为右正合，并且对于任意范畴 $\mathcal{P}$，函子

$$(-) \circ P_{\mathcal{N},\mathcal{M}}\colon \mathrm{Fun}(\mathcal{N} \boxtimes_{\mathcal{C}} \mathcal{M}, \mathcal{P}) \to \mathrm{Fun}^{\mathrm{bal}}_{\mathcal{C}}(\mathcal{N} \times \mathcal{M}, \mathcal{P}), \tag{2.3}$$

由与 $P_{\mathcal{N},\ \mathcal{M}}$ 作前复合诱导的函子是范畴等价。

在 [DSPS1，定理 3.3] 中已证明（半单情形另见 [ENO1，命题 3.5] ），对于有限张量范畴 $\mathcal{C}$ 以及有限阿贝尔右（分别为左） $\mathcal{C}$-模范畴 $\mathcal{N}$ 和 $\mathcal{M}$，相对 Deligne 积 $\mathcal{N} \boxtimes_{\mathcal{C}} \mathcal{M}$ 作为有限阿贝尔范畴存在。 [DSPS1]中的证明依赖于模范畴的内部代数实现，我们将在第 3.3 节回顾这一内容。

命题 2.3. 如果 $\mathcal{N}, \mathcal{M}$ 是 $\mathcal{C}$-双模，那么 $\mathcal{N} \boxtimes_{\mathcal{C}} \mathcal{M}$ 是一个 $\mathcal{C}$-双模。

证明。 </style}这在 [DSPS2，定理 2.5 中针对可分双模且 $\mathcal{C}$ 为半单的情形得到了证明，但该证明并不依赖这些假设。□

备注 2.4。 由等价 (2.3) 可知，对于给定的 $\mathcal{C}$-平衡函子 $F\colon \mathcal{N}\times\mathcal{M}\to\mathcal{P}$，存在一个函子 $F'\colon \mathcal{N}\boxtimes_{\mathcal{C}}\mathcal{M}\to\mathcal{P}$，以及一个 $\mathcal{C}$-平衡自然同构 $e'\colon F'\circ P_{\mathcal{N},\mathcal{M}}\xrightarrow{\sim}F$，其中的泛 $\mathcal{C}$-平衡函子来自 (2.2)。在以下意义下，二元组 (F',e') 在典范同构意义下唯一。若 F'' 是另一个函子，并带有一个自然的 $\mathcal{C}$-平衡同构 $e''\colon F''\circ P_{\mathcal{N},\mathcal{M}}\xrightarrow{\sim}F$，则存在一个典范同构 $\phi\colon F'\to F''$，使得 $\phi\circ P_{\mathcal{N},\mathcal{M}}=(e'')^{-1}\circ e'$。

注 2.5. 在以下意义下，相对 Deligne 积在等价意义下唯一。假设 $\mathcal{N}\boxtimes_{\mathcal{C}}\mathcal{M}$ 和 $\mathcal{N}\boxtimes'_{\mathcal{C}}\mathcal{M}$ 均满足关于平衡函子 $P_{\mathcal{N},\mathcal{M}}$和 $P'_{\mathcal{N},\mathcal{M}}$的相对 Deligne 积的泛性质。于是，通过在 $\mathcal{P}=\mathcal{N}\boxtimes'_{\mathcal{C}}\mathcal{M}$处应用 (2.3)，存在一个等价 $E\colon \mathcal{N}\boxtimes_{\mathcal{C}}\mathcal{M}\to\mathcal{N}\boxtimes'_{\mathcal{C}}\mathcal{M}$，使得图

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{N}\times\mathcal{M} & \\ {\scriptstyle P_{\mathcal{N},\mathcal{M}}}\swarrow & & \searrow{\scriptstyle P'_{\mathcal{N},\mathcal{M}}} \\ \mathcal{N}\boxtimes_{\mathcal{C}}\mathcal{M} & \xrightarrow{\quad E\quad} & \mathcal{N}\boxtimes'_{\mathcal{C}}\mathcal{M} \end{array}$$

在 $\mathcal{C}$-平衡函子的自然同构 $e\colon E\circ P_{\mathcal{N},\mathcal{M}}\xrightarrow{\sim}P'_{\mathcal{N},\mathcal{M}}$ 意义下交换。若 E' 是另一个函子，并且有一个 $\mathcal{C}$-平衡函子的同构 $e'\colon E'\circ P_{\mathcal{N},\mathcal{M}}\to P_{\mathcal{N},\mathcal{M}}$，则根据注 2.4 的意义，存在一个典范自然同构 $\phi\colon E\xrightarrow{\sim}E'$。

文献中已广泛确立， $\mathcal{C}$-**双模** 关于相对 Deligne 积 $\boxtimes_{\mathcal{C}}$构成一个幺半 2-范畴，参见例如 [G2, 定理 1.1]，或 [G1，定理 0.2.1]，以及 [DSPS2，定理 2.2.18]。幺半 2-范畴 $\mathcal{C}$-**双模** 带有结合子

$$A_{\mathcal{M},\mathcal{N},\mathcal{P}}\colon \mathcal{M}\boxtimes_{\mathcal{C}}(\mathcal{N}\boxtimes_{\mathcal{C}}\mathcal{P})\xrightarrow{\sim}(\mathcal{M}\boxtimes_{\mathcal{C}}\mathcal{N})\boxtimes_{\mathcal{C}}\mathcal{P}, \tag{2.4}$$

和单位子

$$L_{\mathcal{M}}\colon \mathcal{C}\boxtimes_{\mathcal{C}}\mathcal{M}\xrightarrow{\sim}\mathcal{M},\qquad R_{\mathcal{M}}\colon \mathcal{M}\boxtimes_{\mathcal{C}}\mathcal{C}\xrightarrow{\sim}\mathcal{M}. \tag{2.5}$$

这些等价在选定相干自然 2-同构[6]后具有自然性。对于结合子，这些自然 2-同构记作

$$(G\boxtimes_{\mathcal{C}}H)\boxtimes_{\mathcal{C}}K)\circ A_{\mathcal{M},\mathcal{N},\mathcal{P}}\xrightarrow{a_{G,H,K}}A_{\mathcal{M}',\mathcal{N}',\mathcal{P}'}\circ(G\boxtimes_{\mathcal{C}}(H\boxtimes_{\mathcal{C}}K)), \tag{2.6}$$

对于一组三个 $\mathcal{C}$-线性函子 $\mathcal{M}\xrightarrow{G}\mathcal{M}'$、$\mathcal{N}\xrightarrow{H}\mathcal{N}'$ 和 $\mathcal{P}\xrightarrow{K}\mathcal{P}'$。结合子和单位子还带有典范同构，使得五边形图和三角形图在这些同构意义下交换；此外还有一个交换同构

$$(H\boxtimes_{\mathcal{C}}H')\circ(G\boxtimes_{\mathcal{C}}G')\xrightarrow{\phi_{H\boxtimes_{\mathcal{C}}H',G\boxtimes_{\mathcal{C}}G'}}(H\circ G)\boxtimes_{\mathcal{C}}(H'\circ G'), \tag{2.7}$$

对于 $\mathcal{C}$-双模函子 $\mathcal{M}\xrightarrow{G}\mathcal{N}\xrightarrow{H}\mathcal{P}$ 和 $\mathcal{M}'\xrightarrow{G'}\mathcal{N}'\xrightarrow{H'}\mathcal{P}'$，它刻画了相对 Deligne 积与 1-态射的复合之间的相容性。幺半 2-范畴这些结构元素的构造见附录 C.2。幺半 2-范畴结构数据的列表见 (C.1)–(C.8)。

注记 2.6. $\mathcal{C}$-**双模** 的证明（其张量积由 $\boxtimes_{\mathcal{C}}$ 给出）表明它是一个幺半 2-范畴，该证明见 [G1]。我们注意到，在这个证明中，使用了相对 Deligne 积的泛性质的一个更强版本，其中等价 (2.3) 被范畴的同构所替代。 [DSPS1] 中相对 Deligne 积的存在性证明使用的是 (2.3) 为等价而非同构。[7] 因此，由于我们未能在文献中找到相关证明，我们基于附录 C.2 中定义 2.2 的泛性质，简述 $\mathcal{C}$-**双模** 是一个幺半 2-范畴的证明。

[6]称为 *strong transformations*，见 [JY，定义 4.2。1]。[7]按照 2-范畴余极限的术语，这里以及 [D,DSPS1] 中使用的是 *bicolimit* 的泛性质，而 [G1，注 2.1。6] 或 [ENO1，注 3。4] 中使用的较严格的泛性质则是 *pseudo-colimit* 在 [K，（5.7）]中的泛性质。像 [DSPS1] 中的证明，证明的是双余极限对象的存在性。

现在假设 $\mathcal{C}$ 是编织的。给定一个左 $\mathcal{C}$-模 $\mathcal{M}$，我们可以赋予 $\mathcal{M}$ 右 $\mathcal{C}$-模的结构，记作 $\mathrm{S}_{lr}(\mathcal{M})$，其右 $\mathcal{C}$-作用定义为 $M \triangleleft X := X \triangleright M$，凝聚性在各分量上的定义为

$$\begin{array}{ccc} (M \triangleleft X) \triangleleft Y & \xrightarrow{\quad r_{M,X,Y} \quad} & M \triangleleft (X \otimes Y) \\ \| & & \| \\ Y \triangleright (X \triangleright M) & \xrightarrow{l_{Y,X,M}} (Y \otimes X) \triangleright M \xrightarrow{\psi_{Y,X} \triangleright M} & (X \otimes Y) \triangleright M. \end{array} \tag{2.8}$$

此外，我们可以赋予 $\mathcal{M}$ $\mathcal{C}$-双模结构，记为 $\mathrm{B}(\mathcal{M})$，其具有相同的左$\mathcal{C}$-模结构、右 $\mathcal{C}$-模结构$\mathrm{S}_{lr}(\mathcal{M})$，以及由下式定义的双模相干性

$$\begin{array}{ccc} Y \triangleright (X \triangleright M) = (X \triangleright M) \triangleleft Y & \xrightarrow{b_{X,M,Y}} & X \triangleright (M \triangleleft Y) = X \triangleright (Y \triangleright M) \\ {\scriptstyle l_{Y,X,M}}\downarrow & & \uparrow{\scriptstyle l^{-1}_{X,Y,M}} \\ Y \otimes X \triangleright M & \xrightarrow{\quad \psi_{Y,X} \triangleright M \quad} & X \otimes Y \triangleright M. \end{array} \tag{2.9}$$

事实上，这些构造可延拓为 2-函子

$$\mathrm{S}_{lr} \colon \mathcal{C}\text{-}\mathbf{mod} \to \mathbf{mod}\text{-}\mathcal{C}, \qquad \text{and} \qquad \mathrm{B} \colon \mathcal{C}\text{-}\mathbf{mod} \to \mathcal{C}\text{-}\mathbf{bimod}. \tag{2.10}$$

证明见附录 B.3。

定义 2.7。对于两个有限左 $\mathcal{C}$-模范畴 $\mathcal{N}$、$\mathcal{M}$，我们将 $\mathcal{N} \boxtimes_{\mathcal{C}} \mathcal{M}$ 定义为相对 Deligne 积 $\mathrm{B}(\mathcal{N}) \boxtimes_{\mathcal{C}} \mathrm{B}(\mathcal{M})$，其中的 $\mathcal{C}$-双模被视为左 $\mathcal{C}$-模。

注 2.8。我们利用 (2.8) 的右 $\mathcal{C}$-模相容性中的编织作出选择。或者，我们也可以使用逆编织，但这一选择对应于将 $\mathcal{C}$ 替换为 $\mathcal{C}^{\mathrm{rev}}$，即具有反向编织的同一个张量范畴。对于任意给定的选择，我们还可以使用逆编织来定义 (2.9) 中的双模相干性。这些替代选择会为 $\mathcal{C}$-**模**给出先验不同的幺半结构。本文聚焦于所选的结构。

本文的结果涉及左 $\mathcal{C}$-模范畴的幺半 2-范畴 $\mathcal{C}$-**mod**，这些范畴由以下广为接受的结果描述（参见 [DN2,DR]）。

定理 2.9. 相对 *Deligne* 积使 2-范畴 $\mathcal{C}$-**mod** 成为一个幺半 2-范畴。通过来自(2.10)的 B 这一2-函子，它是 $\mathcal{C}$-**bimod** 的一个幺半 2-子范畴。

证明. 现在我们将概述证明 2-函子 B: $\mathcal{C}$-**mod** $\to \mathcal{C}$-**bimod** 是幺半 2-范畴之一。对于两个左 $\mathcal{C}$-模范畴 $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ 的相对 Deligne 积 $\mathcal{N} \boxtimes_{\mathcal{C}} \mathcal{M}$，根据定义 2.7，$\mathrm{B}(\mathcal{N} \boxtimes_{\mathcal{C}} \mathcal{M}) = \mathrm{B}(\mathcal{N}) \boxtimes_{\mathcal{C}} \mathrm{B}(\mathcal{M})$ 是相同的左 $\mathcal{C}$-模范畴。因此，我们可以为 $\mathcal{C}$-**mod** 赋予与 $\mathcal{C}$-**bimod**相同的结合子和单位子，同时忘掉其分量函子 $A_{\mathcal{M},\mathcal{N},\mathcal{P}}$, $L_{\mathcal{M}}$ 和 $R_{\mathcal{M}}$ 上的右$\mathcal{C}$-线性结构。如此一来，$\mathcal{C}$-**mod** 便成为一个幺半 2-范畴。

我们将赋予 $\mathcal{N} \boxtimes_{\mathcal{C}} \mathcal{M}$ 上的恒等函子一个右 $\mathcal{C}$-模函子的结构$I_{\mathcal{N},\mathcal{M}}$: $\mathrm{B}(\mathcal{N} \boxtimes_{\mathcal{C}} \mathcal{M}) \to \mathrm{B}(\mathcal{N}) \boxtimes_{\mathcal{C}} \mathrm{B}(\mathcal{M})$。可以验证，定义2.2的泛平衡给出了一个右 $\mathcal{C}$-线性结构

$$s^{I_{\mathcal{N},\mathcal{M}}}_{N \boxtimes_{\mathcal{C}} M, X} \colon (N \triangleleft X) \boxtimes_{\mathcal{C}} M = (N \boxtimes_{\mathcal{C}} M) \triangleleft X \xrightarrow{\beta^{P}_{N,X,M}} N \boxtimes_{\mathcal{C}} (M \triangleleft X) = N \boxtimes_{\mathcal{C}} (X \triangleright M).$$

确实，这给出了 $I_{\mathcal{N},\,\mathcal{M}}$一个 $\mathcal{C}$-双模结构。现在，等价 $I_{\mathcal{N},\,\mathcal{M}}$赋予 2-函子 B: $\mathcal{C}$-**模** $\to \mathcal{C}$-**双模** 以幺半 2-函子的结构。因此，$\mathcal{C}$-**模** 是 $\mathcal{C}$-**双模**的一个幺半 2-子范畴。□

2.2. **模函子范畴的模范畴**。设 $\mathcal{C}$ 为一个编织张量范畴。我们约定如何将（右正合）$\mathcal{C}$-模函子 $\mathrm{Fun}_{\mathcal{C}}(\mathcal{M},\ \mathcal{N})$ 的范畴转化为 $\mathcal{C}$-模范畴，其中编织结构会进入相容性数据。

定义 2.10。令 $X, Y \in \mathcal{C}$ 和 (G, s^G): $\mathcal{M} \to \mathcal{N}$为一个 $\mathcal{C}$-模函子。我们定义 e

$$(X \triangleright G)(M) := X \triangleright G(M)$$

and

$$s^{X\triangleright G}_{Y,M} \colon (X \triangleright G)(Y \triangleright M) \to (Y \triangleright (X \triangleright G))(M)$$

通过交换图

$$\begin{array}{ccccc}
(X \triangleright G)(Y \triangleright M) & & \xrightarrow{\quad s^{X\triangleright G}_{Y,M} \quad} & & (Y \triangleright (X \triangleright G))(M) \\
\| & & & & \| \\
X \triangleright G(Y \triangleright M) & \xrightarrow{(s^G_{X,Y\triangleright M})^{-1}} & G(X \triangleright (Y \triangleright M)) & & Y \triangleright (X \triangleright G(M)) \\
\downarrow{\scriptstyle X\triangleright s^G_{Y,M}} & & \downarrow{\scriptstyle G(l^{\mathcal{M}}_{X,Y,M})} & & \uparrow{\scriptstyle (l^{\mathcal{N}}_{Y,X,G(M)})^{-1}} \\
X \triangleright (Y \triangleright G(M)) & \xrightarrow{l^{\mathcal{N}}_{X,Y,G(M)}} & G(X \otimes Y \triangleright M) & & \\
 & & \downarrow{\scriptstyle s^G_{X\otimes Y,M}} & & \\
 & & X \otimes Y \triangleright G(M) & \xrightarrow{\psi_{X,Y}\triangleright \mathrm{id}_{G(M)}} & Y \otimes X \triangleright G(M).
\end{array} \tag{2.11}$$

同构族 $s^{X\triangleright G}_{Y\,M}$,按构造自然地依赖于 Y 和 M。请注意，若模范畴 $\mathcal{M}$ 和 $\mathcal{N}$ 不是严格的（参见第 8.4 节，其中我们考虑由非严格幺半函子得到的模范畴），我们之后将要求上述凝聚性 $s^{X\triangleright G}$，因此会在公式中包含模结合子。

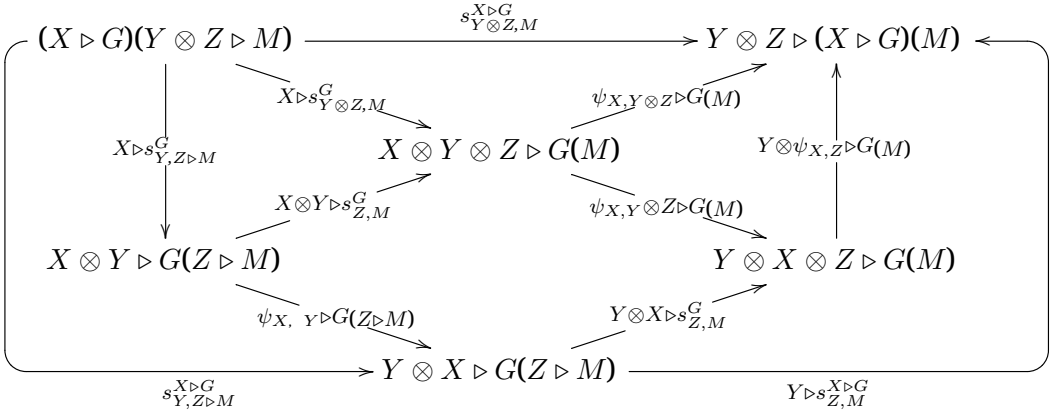
引理 2.11。定义 *2.10* 在 $\mathrm{Fun}_{\mathcal{C}}(\mathcal{M},\mathcal{N})$ 上给出了一个左 $\mathcal{C}$-模结构，其模结合子用分量表示为:

$$(l_{X,Y,G})_M \colon X \triangleright (Y \triangleright G(M)) = (X \triangleright (Y \triangleright G))(M) \xrightarrow{l^{\mathcal{N}}_{X,Y,G(M)}} (X \otimes Y \triangleright G)(M) = X \otimes Y \triangleright G(M),$$

for $G \in \mathrm{Fun}_{\mathcal{C}}(\mathcal{M},\mathcal{N})$ *and* $X, Y \in \mathcal{C}$.

证明。根据备注 3.1，模范畴 $\mathcal{M}$ 和 $\mathcal{N}$ 都等价于严格模范畴。为使证明更简洁，我们仅展示如下断言的证明：目标范畴 $\mathcal{N}$上的模结合子在 $\mathrm{Fun}_{\mathcal{C}}(\mathcal{M},\ \mathcal{N})$上诱导出一个结合子，其中 $\mathcal{M},\ \mathcal{N}$是严格左 $\mathcal{C}$-模范畴；也就是说，我们假设 $l^{\mathcal{M}}$和 $l^{\mathcal{N}}$的恒等分量分别为恒等态射。

我们首先验证这对 $(X \triangleright G,\ s^{X\triangleright G})$ 确实定义了一个 $\mathcal{C}$-线性函子，即满足凝聚性条件 (B.6)。这是由以下图中外层图的交换性得出的:



在此图中，我们使用所有模结合子都是平凡的这一事实。根据定义、 s^G的凝聚性以及严格情形下ψ_X的六边形公理，$Y\otimes Z$ 这些三角形是交换的。内部方形

显然是交换的。注意，利用 $\triangleright$ 在两个分量上都是正合的这一点，只要 G 是右正合的， $X \triangleright G$ 就是右正合的。这说明 $\mathcal{C}$对对象的作用定义良好。显然，这个作用可以扩展到 $\mathcal{C}$-线性函子的态射上。

此外，所提出的模结合子确实是 $\mathrm{Fun}_{\mathcal{C}}(\mathcal{M},\ \mathcal{N})$ 中的一个态射。根据构造，它对所有变量都自然。在严格情形下，模结合子由 $\mathcal{M}$ 中的恒等态射给出，因此只需验证 $s^{X\triangleright(Y\triangleright G)}$ 和 $s^{X\otimes Y\triangleright G}$ 是同一个态射。这可由以下计算得出:

$$\begin{aligned} s_{Z,M}^{X\triangleright(Y\triangleright G)} &= (\psi_{X,Z}\otimes Y\triangleright G(M))(X\triangleright s_{Z,M}^{Y\triangleright G}) \\ &= (\psi_{X,Z}\otimes Y\triangleright G(M))(X\otimes\psi_{Y,Z}\triangleright G(M))(X\otimes Y\triangleright s_{Z,M}^{G}) \\ &= (\psi_{X\otimes Y,Z}\triangleright G(M))(X\otimes Y\triangleright s_{Z,M}^{G}) = s_{Z,M}^{X\otimes Y\triangleright G}\ . \end{aligned}$$

这里，第一步、第二步和最后一步使用定义 2.10，第三步则使用编织 ψ 的六边形公理。□

注 2.12. 对于引理 B.6 中的 $\mathcal{C}$-双模范畴 $\mathrm{B}(\mathcal{M})$、$\mathrm{B}(\mathcal{N})$，$\mathrm{Fun}_{\mathcal{C}}(\mathrm{B}(\mathcal{M}),\mathrm{B}(\mathcal{N}))$ 根据 DSPS2 第 2.4] 节具有一个 $\mathcal{C}$-$\mathcal{C}$-双模结构。事实证明，这个 $\mathcal{C}$-双模结构等价于 $\mathrm{B}(\mathrm{Fun}_{\mathcal{C}}(\mathcal{M},\mathcal{N}))$，其中采用定义 2.10 中 $\mathrm{Fun}_{\mathcal{C}}(\mathcal{M},\mathcal{N})$ 上的左 $\mathcal{C}$-模结构。从 $\mathrm{Fun}_{\mathcal{C}}(\mathrm{B}(\mathcal{M}),\mathrm{B}(\mathcal{N}))$ 到 $\mathrm{B}(\mathrm{Fun}_{\mathcal{C}}(\mathcal{M},\mathcal{N}))$ 的左 $\mathcal{C}$-模等价由恒等函子 $\mathrm{id}\colon \mathrm{Fun}_{\mathcal{C}}(\mathcal{M},\mathcal{N}) \to \mathrm{Fun}_{\mathcal{C}}(\mathcal{M},\mathcal{N})$ 给出，其 $\mathcal{C}$-线性结构 $(s^{\mathrm{id}}_{X,G})_M := s^{G}_{X,M}$适用于任意 $\mathcal{C}$-线性函子 $(G, s^G)\colon \mathcal{M}\to\mathcal{N}$以及 $\mathcal{C}$ 中的 X。

2.3. **中心化子函子**。按照 [EGNO,EO2] ，我们将有限左 $\mathcal{C}$-模范畴 $\mathcal{M}$ 的中心化子定义为

$$\mathcal{C}^*_{\mathcal{M}} := \mathrm{Fun}_{\mathcal{C}}(\mathcal{M},\mathcal{M}),$$

这是一个严格幺半范畴，其中 $G\otimes F = G\circ F$；对于 $F,\ G\in\mathcal{C}^*_{\mathcal{M}}$，其 $\mathcal{C}$-线性结构由（B.8）定义。我们将赋予作用函子 $\triangleright\colon \mathcal{C}\to\mathrm{End}(\mathcal{M})$ 一个取值于 $\mathcal{M}$的中心化子中的幺半函子结构。在 $\mathcal{C}$-双模范畴的语境下， [ENO1 第 4 节中出现了两个这样的幺半函子，1]并在附录 B.2 中进行了回顾。

定义 2.13。设 $\mathcal{M}$ 是编织张量范畴 $\mathcal{C}$的一个左 $\mathcal{C}$-模。对于 $\mathcal{C}$中的对象 X ，我们将中心化子函子定义为函子

$$A_{\mathcal{M}}\colon \mathcal{C}\to\mathcal{C}^*_{\mathcal{M}},\quad X\mapsto X\triangleright \mathrm{id}_{\mathcal{M}},$$

其左 $\mathcal{C}$-线性结构对应于 $X\triangleright\mathrm{id}_{\mathcal{M}}$ ，由定义 2.10 引入。

引理 2.14. 给定一个 $\mathcal{C}$-模范畴 $\mathcal{M}$，函子 $A_{\mathcal{M}}$ 是一个幺半函子。引理 *2.11* 中 $\mathcal{C}$ 对 $\mathcal{C}^*_{\mathcal{M}}$ 的作用，是由此函子按照例 *B.1* 的意义诱导的。

证明. 我们使用左模相干性

$$\mu^{A_{\mathcal{M}}} := l_{X,Y,M}\colon A_{\mathcal{M}}(X)\circ A_{\mathcal{M}}(Y)(M)\xrightarrow{\sim} A_{\mathcal{M}}(X\otimes Y)(M)$$

来定义函子 $A_{\mathcal{M}}$上的幺半结构。对于 $\mu^{A_{\mathcal{M}}}$ ，相容性 (A.2) 等价于左模相干性 (B.1)，而 $\mu^{A_{\mathcal{M}}}$ 的单位公理由 (B.2) 得出。因此， $A_{\mathcal{M}}$ 是一个幺半函子。

现在我们比较 $\mathcal{C}$-作用。对于 $G\in\mathrm{Fun}_{\mathcal{C}}(\mathcal{M},\mathcal{M})$，我们有

$$(X\triangleright G)(M) = X\triangleright G(M) = ((X\triangleright\mathrm{id}_{\mathcal{M}})\circ G)(M) = (A_{\mathcal{M}}(X)\circ G)(M).$$

由此比较可知，通过复合得到的 $A_{\mathcal{M}}(X)\circ G$上的 $\mathcal{C}$-模结构，与 (2.11) 中 $X\triangleright G$ 的 $\mathcal{C}$-模结构一致。□

注记 2.15。幺半函子 $A_{\mathcal{M}}$在文献中也称为 α-归纳法 [O、FFRS、DN2]，其灵感来自子因子理论中的构造 [BEK]。与[DN2, (4.4)] 中的约定比较后，我们发现，对于来自 (A.4) 的幺半等价 I^+ ，$\alpha^+_{\mathcal{M}} = A_{\mathcal{M}}\circ I^+$。

以下引理证明见 [EGNO, Rem. 4.3.10].[8]

引理 2.16. 设 $F\colon \mathcal{C}\to\mathcal{D}$ 是一个正合幺半函子，其中 $\mathcal{C}$ 是一个张量范畴，$\mathcal{D}$ 是一个 $\Bbbk$-线性阿贝尔幺半范畴。那么 F 是忠实的。特别地，对于 $\mathcal{C}$中的对象 X，若$F(X)=0$，则 $X=0$

证明. 设 X 是 $\mathcal{C}$中的一个非零对象。非零态射余评价$_X\colon \mathbb{1}_{\mathcal{C}}\to X\otimes X^*$ 是单态射，因为 $\mathbb{1}_{\mathcal{C}}$ 是简单对象。现在

$$\mathbb{1}_{\mathcal{D}}\cong F(\mathbb{1}_{\mathcal{C}})\xrightarrow{F(\mathrm{coev}_X)}F(X\otimes X^*)\cong F(X)\otimes F(X^*)$$

是单态射，因为 F 是左正合的。因此，F(X)非零。由此可知，F 是忠实的，因为若$F(f)=0$，则有 $\mathrm{Im}\ F(f)\cong F(\mathrm{Im}\ f)=0$，这是利用了 F的左正合性和右正合性。因此，$\mathrm{Im}\ f=0$且$f=0$。□

推论 2.17. 中心化子函子 $A_{\mathcal{M}}$ 是正合且忠实的。特别地，若对于对象 X属于 $\mathcal{C}$, $A_{\mathcal{M}}(X)=0$，则 $X=0$。

证明. 首先，根据假设，对于任意模范畴 $\mathcal{M}$，$\triangleright$ 关于两个变量都是正合的，因此 $A_{\mathcal{M}}$ 是正合的。于是，由引理 2.16 可得结论。□

2.4. **对偶模范畴.** 现在我们将根据 [DSPS2，定义 2.4.4] 回顾对偶模范畴，以便将右模范畴与左模范畴联系起来。

定义 2.18. 设 $\mathcal{N}$ 是一个右 $\mathcal{C}$-模范畴。定义右对偶 $^{\#}\mathcal{N}$ 为对偶范畴 $\mathcal{N}^{\mathrm{op}}$，并赋予其左 $\mathcal{C}$-模范畴结构，该结构由下式给出

$$X\triangleright N=N\triangleleft {}^*X, \tag{2.12}$$

其中 ${}^*X$ 是 X的右 对偶。[9] 模相容性由以下态射给出

$$^{\#}l_{X,Y,N}\in\mathrm{Hom}_{\mathcal{N}^{\mathrm{op}}}(X\triangleright(Y\triangleright N),X\otimes Y\triangleright N)$$

对应于 $\mathcal{N}$中的以下态射：

$$\begin{array}{ccc} X\otimes Y\triangleright N & \xrightarrow{\quad {}^{\#}l_{X,Y,N}\quad} & X\triangleright(Y\triangleright N)\\ \| & & \| \\ N\triangleleft {}^*(X\otimes Y) & = & N\triangleleft {}^*Y\otimes {}^*X\xrightarrow{r^{-1}_{N,{}^*Y,{}^*X}}(N\triangleleft {}^*Y)\triangleleft {}^*X. \end{array} \tag{2.13}$$

这里，$r_{N,\,X,\,Y}$ 是给定的 $\mathcal{N}$ 上右 $\mathcal{C}$-模结构的相容性。类似地，给定左$\mathcal{C}$-模范畴 $\mathcal{M}$，我们可以定义右 $\mathcal{C}$-模范畴 $^{\#}\mathcal{M}$，其作用为

$$M\triangleleft X={}^*X\triangleright M. \tag{2.14}$$

定义 2.19 ([DSPS2，定义 2.4.4])。对于右 $\mathcal{C}$-模范畴 $\mathcal{N}$，我们将其左对偶$\mathcal{N}^{\#}$ 定义为对偶范畴 $\mathcal{N}_{\mathrm{op}}$，并赋予其左 $\mathcal{C}$-模范畴结构，定义如下：

$$X\triangleright N=N\triangleleft X^*, \tag{2.15}$$

其中，X^* 是 X 的左对偶。模相容性 $r^{\#}_{N\,,\,X,\,Y}$ 由 $r^{-1}_{N\,,\,X,\,Y}$ 得到，方式与定义 2.18 中由 $^{\#}l_{X,\,Y,\,N}$ 得到 $r^{-1}_{N\,,\,X,\,Y}$ 类似，但改用左对偶。同理，对于给定的右 $\mathcal{C}$-模 $\mathcal{M}$ 及其作用，我们定义左对偶右 $\mathcal{C}$-模 $\mathcal{M}^{\#}$

$$M\triangleleft X=X^*\triangleright M. \tag{2.16}$$

另请参见 [FSS，第 2 节。4] 其中在双模范畴的语境下使用了这些相反范畴。

[8]我们对目标 $\mathcal{D}$ 的假设比 [EGNO] 中的假设更一般。源 $\mathcal{C}$ 不必是有限的。[9][DSPS2] 将 X 的右对偶记为 X^*。我们关于对偶性的约定见附录 A.2。

3. Internal algebras and constructions of module categories

本节中，我们通过 $\mathcal{C}$ 中的内部代数，描述有限编织张量范畴 $\mathcal{C}$ 的幺半 2-范畴 $\mathcal{C}$-**模** 中所需的所有构造。第 3.1 节中，我们回顾左 $\mathcal{C}$-模及其函子范畴如何由 $\mathcal{C}$ 中的代数和双模实现，并最终在命题 3.5 中得到 $\mathcal{C}$-**模** 与 Morita 双范畴 $\mathbf{Mor}_{\mathcal{C}}$之间的双等价。第 3.2 节中，我们回顾 $\mathbf{Mor}_{\mathcal{C}}$ 上的幺半结构；第 3.3 节中，我们将其与 $\mathcal{C}$-**模** 的幺半结构联系起来，见命题 3.15。最后，第 3.4 节讨论 $\mathcal{C}$-**模** 中的对偶性。

3.1. **经由内部代数的模范畴与模函子**。下面我们将阐述利用内部代数研究模范畴的关键工具，依照 [O,EO2,EGNO,DSPS2]。

设 A 是 $\mathcal{C}$中的一个代数。则$\mathbf{mod}_{\mathcal{C}}$-$A$ 表示 $\mathcal{C}$ 中右 A-模所构成的左 $\mathcal{C}$-模范畴，其中 $\mathcal{C}$ 中的 X 在右 A-模（V,a^r_V）上的左 $\mathcal{C}$-作用由下式给出

$$X \triangleright (V, a^r_V) = (X \otimes V, a^r_{X\otimes V} = \mathrm{id}_X \otimes a^r_V).$$

我们常将一个 A-模（V, a^r_V）简记为 V。特别地，正则 A-模（A, m_A）简记为 A。模相容性由 $\otimes$的结合子给出；由于 $\mathcal{C}$ 是严格的，我们假定该结合子由恒等给出。类似地，可定义 $\mathcal{C}$中左 A-模的右 $\mathcal{C}$-模范畴 A-$\mathbf{mod}_{\mathcal{C}}$ 。

回顾一下，若 $\mathcal{C}$ 是有限张量范畴，则任意有限左 $\mathcal{C}$-模范畴 $\mathcal{M}$ 都等价于 **模**$_{\mathcal{C}}$-A ，其中 A 是 $\mathcal{C}$ 中的某个代数，参见 [EGNO，第 7.10] 节，或 [DSPS1，定理 2.18] ，其中对 $\Bbbk$ 没有任何假设。

注记 3.1。若 $\mathcal{C}$ 是严格幺半范畴，则 **模**$_{\mathcal{C}}$-A 是严格的 $\mathcal{C}$-模范畴。因此，等价 $\mathcal{M} \simeq$**模**$_{\mathcal{C}}$-A 可视为有限左 $\mathcal{C}$-模范畴 $\mathcal{M}$ 的一次严格化。

现在我们将用内部代数来描述 $\mathrm{Fun}_{\mathcal{C}}(\mathcal{M},\ \mathcal{N})$。为此，在范畴 A-**双模**$_{\mathcal{C}}$-B 上定义一个左 $\mathcal{C}$-作用；该范畴由 $\mathcal{C}$ 中的内部 A-B-双模构成。对于 $\mathcal{C}$ 中的一个内部 A-B-双模 V 和 X，定义 $X \triangleright V$ 为对象 $X \otimes V$，其带有右 B-作用

$$a^r_{X\otimes V} \colon X \otimes V \otimes B \xrightarrow{\mathrm{id}_X \otimes a^r_V} X \otimes V \tag{3.1}$$

以及左 A-作用

$$a^l_{X\otimes V} \colon A \otimes X \otimes V \xrightarrow{\psi^{-1}_{A,X}\otimes \mathrm{id}_V} X \otimes A \otimes V \xrightarrow{\mathrm{id}_X \otimes a^l_V} X \otimes V. \tag{3.2}$$

利用逆编织的自然性和六边形公理，可以验证这是一个左 A-作用。 A-**双模**$_{\mathcal{C}}$-B 的 $\mathcal{C}$-模相容性由 $\mathcal{C}$ 的结合约束给出；根据我们对严格性的假设，这一约束是平凡的。

下面的命题将范畴等价从 [EGNO，命题7.11.1] 或[DSPS2，命题 2.4.10] 提升为 $\mathcal{C}$-模范畴的等价。

命题 3.2. 设 A、B 为 $\mathcal{C}$ 中的代数，且 $\mathcal{M} = \mathbf{mod}_{\mathcal{C}}$-$A$、 $\mathcal{N} = \mathbf{mod}_{\mathcal{C}}$-$B$。我们有如下左 $\mathcal{C}$-模范畴的范畴等价

$$E \colon \mathrm{Fun}_{\mathcal{C}}(\mathcal{M},\mathcal{N}) \to A\text{-}\mathbf{bimod}_{\mathcal{C}}\text{-}B, \quad (G, s^G) \mapsto G(A),$$

其中右 B-模 $G(A)$ 配备有左 A-作用

$$a^l_{E(G)} := \left(A \otimes G(A) = A \triangleright G(A) \xrightarrow{(s^G_{A,A})^{-1}} G(A \triangleright A) \xrightarrow{G(m_A)} G(A) \right). \tag{3.3}$$

左侧的 $\mathcal{C}$-线性结构由恒等态射给出

$$s^E_{X,G} = \mathrm{id} \colon E(X \triangleright G) = X \otimes G(A) \to X \otimes G(A) = X \triangleright E(G).$$

证明。 对于一个 $\mathcal{C}$-模函子 (G, s^G)，注意到 $G(A) \in \mathcal{N} =$ **模**$_{\mathcal{C}}$-B，且 $a^l_{E(G)}$ 与右侧的 B-作用可交换，因为按构造， $a^l_{E(G)}$ 是**模**$_{\mathcal{C}}$-B中的一个态射。因此， $E(G)$ 是一个良定义的 A-B-双模。众所周知， E 给出了范畴等价，参见[EGNO，命题 7.11.1] 或 [DSPS2，命题 2.4.10]。 E 的一个逆等价将一个内部A-B-双模 V 映到函子

$$G_V = (-) \otimes_A V \colon \mathcal{M} \to \mathcal{N}, \quad M \mapsto M \otimes_A V.$$

利用 $\mathcal{C}$ 是严格幺半的，右 B-模 $(X \triangleright M) \otimes_A V$ 和 $X \triangleright (M \otimes_A V)$ 都是同一图的余等化子。因此， G_V 成为一个 $\mathcal{C}$-线性函子，其相干条件由恒等态射诱导。

还需证明 E 是左 $\mathcal{C}$-模的函子。回顾上文在 (3.1)–(3.2) 中定义的左 $\mathcal{C}$-模结构A-**双模**$_{\mathcal{C}}$-B，以及定义 2.10 中 $\mathrm{Fun}_{\mathcal{C}}(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ 上的作用。注意到

$$E(X \triangleright G) = (X \triangleright G)(A) = X \otimes G(A) = X \triangleright E(G)$$

作为 $\mathcal{N} =$**模**$_{\mathcal{C}}$-B 中的对象。左 A-作用相同，这可由外层图的交换性推出，见

$$\begin{tikzcd}
A \triangleright (X \triangleright G)(A) \arrow[r, equal] \arrow[d, "(s^{X\triangleright G}_{A,A})^{-1}"'] \arrow[dd, bend right=60, "a^l_{E(X\triangleright G)}"'] & A \otimes X \otimes G(A) \arrow[r, equal] \arrow[d, "\psi^{-1}_{A,X} \otimes A"] & A \otimes (X \triangleright G(A)) \arrow[dd, "a^l_{X\otimes G(A)}"] \\
(X \triangleright G)(A \triangleright A) \arrow[r, "X \otimes s^G_{A,A}"] \arrow[d, "(X\triangleright G)(m_A)"', "= X \otimes G(m_A)"] & X \otimes A \otimes G(A) \arrow[d, "X \otimes a^l_{E(G)}"] & \\
(X \triangleright G)(A) \arrow[r, equal] & X \otimes G(A) \arrow[r, equal] & X \triangleright G(A)
\end{tikzcd}$$

最左侧的竖直箭头是 (3.3) 中定义的左 A-作用，其中 $s^{X\triangleright G}$ 在定义 2.10 中定义；最右侧的竖直箭头是 (3.2) 中的 A-作用。中间下方的方块也由 (3.3) 交换。由于 E 的 $\mathcal{C}$-线性结构由恒等态射给出，相干条件 (B.6) 显然成立，因此 E 是 $\mathcal{C}$-模范畴之间的等价。□

注记 3.3. 在定义 2.10 中，我们通过在定义 $\mathcal{C}$-线性结构 $s^{X\triangleright G}$时使用编织 ψ，固定了一种约定。这一选择对应于在 (3.2) 中使用逆编织 ψ^{-1}。另一种做法是在定义 2.10 中使用逆编织，从而在同一范畴上得到另一种左 $\mathcal{C}$-模结构 $\mathrm{Fun}'_{\mathcal{C}}(\mathcal{M}, \mathcal{N})$。相应地，在 (3.2) 中应以编织替换逆编织，从而按照这一约定得到命题 3.2 的类似结果。我们在注记 3.23 中将说明选择这一约定的理由。

定义 3.4. 对于具有右正合张量积的阿贝尔幺半范畴 $\mathcal{C}$，我们将*Morita*双范畴 $\mathbf{Mor}_{\mathcal{C}}$ 定义为如下 2-范畴：其对象是 $\mathcal{C}$ 中的代数，态射 $A \to B$是 A-B-双模，2-态射则是双模态射。$\mathbf{Mor}_{\mathcal{C}}$ 中 1-态射的复合由相对张量积定义

$$M \otimes_A N = \operatorname{coker}\Big(M \otimes A \otimes N \xrightarrow{a^r_M \otimes N - M \otimes a^l_N} M \otimes N \Big).$$

这个相对张量积并非严格满足结合律。不过，存在典范同构

$$M \otimes_A (N \otimes_A P) \xrightarrow{\sim} (M \otimes_A N) \otimes_A P$$

co与余极限图表相容。此外，还存在典范同构 s

$$M \otimes_A A \cong A, \qquad A \otimes_A M \cong M.$$

命题 3.2，连同 [EGNO，第 7.10] 节或 [DSPS1，定理 2.18],，给出了以下广为人知的结果，它使我们能够描述有限 $\mathcal{C}$-模的 2-范畴 $\mathcal{C}$-**模**。

命题 3.5。 设 $\mathcal{C}$ 为一个有限张量范畴。映射

$$\mathbf{mod}\colon \mathbf{Mor}_{\mathcal{C}} \to \mathcal{C}\text{-}\mathbf{mod}, \quad A \mapsto \mathbf{mod}_{\mathcal{C}}\text{-}A$$

扩展为双范畴的等价。

3.2. **编织张量范畴中的内代数运算**。 如果 $\mathcal{C}$ 是编织的，我们可以在 $\mathcal{C}$中定义反代数和代数的张量积。对于编织反代数和张量积代数，我们采用以下记号。

定义 3.6 (A^{ψ})。 设代数 A 属于 $\mathcal{C}$，其乘法为 $m_A\colon A\otimes A\to A$，我们用 A^{ψ} 表示 A 的 ψ-反代数。它定义在同一对象 A 上，其乘法为 ψ-反乘法

$$m_A^{\psi} := m_A\psi_{A,A}\colon A\otimes A\to A.$$

定义 3.7 ($A\otimes^{\psi} B$)。 设两个代数 A，B 属于 $\mathcal{C}$，其乘法分别为 m_A，m_B，我们用 $A\otimes^{\psi} B$ 表示由 $A\otimes B$ 给出的代数，其乘法为

$$m_{A\otimes^{\psi}B} := (m_A\otimes m_B)(\mathrm{id}_A\otimes\psi_{B,A}\otimes\mathrm{id}_B)\colon (A\otimes B)\otimes(A\otimes B)\to A\otimes B.$$

同样地，我们使用逆编织 ψ^{-1} 而非编织来定义 $A^{\psi^{-1}}$ 和 $A\otimes^{\psi^{-1}} B$。为简便起见，我们通常将 $A\otimes^{\psi} B$ 简记为 $A\otimes B$。代数的这个张量为$\mathbf{Mor}_{\mathcal{C}}$ 赋予了幺半结构。

命题 3.8. 对于 $\mathcal{C}$ 编织的情形，如定义 *3.7* 中的内部代数的张量积 $A\otimes B$，连同相应的双模及双模态射的张量积，使$\mathbf{Mor}_{\mathcal{C}}$ 成为一个幺半双范畴。

注意，$\mathbf{Mor}_{\mathcal{C}}$ 的张量积满足严格结合律。这是因为 $\mathcal{C}$的张量积满足严格结合律。因此，我们可以说$\mathbf{Mor}_{\mathcal{C}}$ 是一个半严格 幺半双范畴，参见注 C.1。

接下来，我们汇总一些关于内部代数张量积的事实。这些事实不难验证，这里省略证明。

引理 3.9. 设 A和 B 是 $\mathcal{C}$ 中的代数，则

$$\psi^{-1}_{A,B}\colon (A\otimes^{\psi} B)^{\psi}\to B^{\psi}\otimes^{\psi} A^{\psi}, \qquad and \qquad \psi_{A,B}\colon (A\otimes^{\psi} B)^{\psi^{-1}}\to B^{\psi^{-1}}\otimes^{\psi} A^{\psi^{-1}}$$

定义了 $\mathcal{C}$中的代数同构。

引理 3.10. 设 A和 B 是 $\mathcal{C}$ 中的代数，则$\psi_A^{-1}{}_{,B}\colon\ A\otimes^{\psi} B\to B\otimes^{\psi^{-1}} A$ 定义了 $\mathcal{C}$中的代数同构。

3.3. **相对 Deligne 积**。 现在我们将用有限编织张量范畴 $\mathcal{C}$ 中的内部代数来描述相对 Deligne 积。对于 $\mathcal{C}$ 中的代数 A，B，考虑右 $\mathcal{C}$-模$\mathcal{N}=A$-**模**$_{\mathcal{C}}$ 与左 $\mathcal{C}$-模 $\mathcal{M}=$ **模**$_{\mathcal{C}}$-B。下文中，我们将把定义 2.2 的相对 Deligne 积 $\mathcal{N}\boxtimes_{\mathcal{C}}\mathcal{M}$ 等同于如下实现

$$A\text{-}\mathbf{mod}_{\mathcal{C}}\boxtimes_{\mathcal{C}}\mathbf{mod}_{\mathcal{C}}\text{-}B = A\text{-}\mathbf{bimod}_{\mathcal{C}}\text{-}B \tag{3.4}$$

由 [DSPS1 定理 3.3] 给出。典范平衡函子由下式显式给出

$$P_{\mathcal{N},\mathcal{M}}\colon A\text{-}\mathbf{mod}_{\mathcal{C}}\times\mathbf{mod}_{\mathcal{C}}\text{-}B\to A\text{-}\mathbf{bimod}_{\mathcal{C}}\text{-}B, \quad (V,W)\mapsto V\otimes W. \tag{3.5}$$

左 A-作用与右 B-作用由下式给出

$$a^l_{V\otimes W} = a^l_V\otimes W, \qquad a^r_{V\otimes W} = V\otimes a^r_W,$$

其中，a^l_V 和 a^r_W 分别表示 V 上的左 A-作用和 W上的右 B-作用。$\mathcal{C}$-平衡性由以下恒等式给出。

根据 A-**模**$_{\mathcal{C}} = A$-**双模**$_{\mathcal{C}}$-**1**这一识别，我们由(3.1)–(3.2)在 A-**模**$_{\mathcal{C}}$上得到一个左 $\mathcal{C}$-模结构。左 $\mathcal{C}$-作用定义为

$$X \triangleright (V, a^l_V) = (X \otimes V, a^l_{X\otimes V}), \quad \text{where} \quad a^l_{X\otimes V} = (X \otimes a^l_V) \circ (\psi^{-1}_{A,X} \otimes V) \colon A \otimes X \otimes V \to X \otimes V, \tag{3.6}$$

具有平凡的左 $\mathcal{C}$-模相容性。这样， A-**模**$_{\mathcal{C}}$ 是一个 $\mathcal{C}$-双模，带有自然的右$\mathcal{C}$-作用和平凡的双模相干性。类似地，**模**$_{\mathcal{C}}$-$B = \mathbb{1}$-**双模**$_{\mathcal{C}}$-B 成为一个 $\mathcal{C}$-双模。

命题 3.11. 设 A、 B 为 $\mathcal{C}$ 中的代数。则作为左 $\mathcal{C}$-模，来自命题 *2.3* 的 $\mathcal{C}$-双模的相对 ***Deligne*** 积 A-**模**$_{\mathcal{C}} \boxtimes_{\mathcal{C}}$ **模**$_{\mathcal{C}}$-B 等价于 A-**双模**$_{\mathcal{C}}$-B，其左$\mathcal{C}$-作用由 (3.1)–(3.2) 定义。

证明。左 $\mathcal{C}$-作用 (3.6) 依命题 2.3 在 A-模$_{\mathcal{C}} \boxtimes_{\mathcal{C}}$ 模$_{\mathcal{C}}$-B 上诱导出一个左 $\mathcal{C}$-模结构。对这一左 $\mathcal{C}$-作用的描述已在 [DSPS2，定理 2.5.5] 证明的第二段中给出。在我们关于 (3.6) 附近所描述的双模 $\mathcal{M} = A$-模$_{\mathcal{C}}$ 的语境中，该左 $\mathcal{C}$-作用构造如下。考虑单子 $T = (-) \triangleleft B\colon \ \mathcal{M} \to \mathcal{M}$。我们可以将$A$-双模$_{\mathcal{C}}$-$B$等同于单子 T 上的模范畴 T-模$_{\mathcal{M}}$。单子 T是右 $\mathcal{C}$-模范畴之一，由于 $\mathcal{M}$ 的双模相干性是严格的，因而具有平凡的 $\mathcal{C}$-线性结构。若 $\big(M、\ a^T_M\colon \ T(M) \to M\big)$ 是 T-模$_{\mathcal{M}}$的一个对象，定义

$$X \triangleright \big(M, a^T_M\big) = \Big(X \triangleright M, a^T_{X\triangleright M} := \Big(T(X \triangleright M) = X \triangleright T(M) \xrightarrow{X\triangleright a^T_M} X \triangleright M\Big)\Big),$$

具有平凡的 $\mathcal{C}$-模相容性。在标识 A-**双模**$_{\mathcal{C}}$-$B = T$-**模**$_{\mathcal{M}}$ 下，(M, a^T_M) 对应于一个右 B-模 $\big(M,$ $a^r_M\colon \ M \otimes B \to M\big)$ 而上述左 $\mathcal{C}$-作用变为

$$X \triangleright \big(M, a^r_M\big) = \Big(X \triangleright M, a^r_{X\triangleright M} := \Big((X \triangleright M) \otimes B = X \triangleright (M \otimes B) \xrightarrow{X\triangleright a^r_M} X \triangleright M\Big)\Big), \tag{3.7}$$

其中，左 A-模 $X \triangleright M$ 在 (3.6) 中定义。这个左 $\mathcal{C}$-作用与 (3.1)–(3.2) 中定义的 A-**双模**$_{\mathcal{C}}$-B 上的左$\mathcal{C}$-模结构一致。因此我们看到，(3.4) 将相对 Deligne 积实现为一个左 $\mathcal{C}$-模，而不仅仅是一个范畴。□

对于下一个预备引理，回顾引理B.5中的 2-函子 S_{lr},S_{rl}。

引理 3.12。 设 A 是 $\mathcal{C}$中的一个代数。

(i) 存在右 $\mathcal{C}$-模的一个等价 $\Phi_r\colon \mathsf{S}_{lr}($**模**$_{\mathcal{C}}$-$A) \xrightarrow{\sim} A^{\psi^{-1}}$-**模**$_{\mathcal{C}}$。*(ii)* 存在左 $\mathcal{C}$-模的一个等价 $\Phi_l\colon \mathsf{S}_{rl}(A$-**模**$_{\mathcal{C}}) \xrightarrow{\sim}$ **模**$_{\mathcal{C}}$-A^{ψ}。

证明。 我们证明第 (i) 部分，而第 (ii) 部分由 $\otimes^{\mathrm{op}}$-对偶性推出，这里用到了涉及 (B.17) 中逆编织的模相容性。

我们定义一个函子 $\Phi_r\colon \mathsf{S}_{lr}$**(模**$_{\mathcal{C}}$-$A)$ $\to A^{\psi^{-1}}$-**模**$_{\mathcal{C}}$，它将右 A-模 (V, a^r_V) 映为左 $A^{\psi^{-1}}$-模 (V, a^l_V)，其中 $a^l_V := a^r_V \psi^{-1}_{A,V}$。显然，该函子可扩展为一个范畴等价，并在态射上作用为恒等映射。

接下来，我们注意到

$$s^{\Phi_r}_{V,X}\colon \Phi_r(V \triangleleft X) = X \otimes V \xrightarrow{\psi_{X,V}} V \otimes X = \Phi_r(V) \triangleleft X \tag{3.8}$$

是左 $A^{\psi^{-1}}$-模的一个同构。回忆 (2.8) 中的右 $\mathcal{C}$-模相容性。对于 $\mathcal{M} =$**模**$_{\mathcal{C}}$-A，它具体为

$$r_{V,X,Y}\colon (V \triangleleft X) \triangleleft Y = Y \otimes X \otimes V \xrightarrow{\psi_{Y,X}\otimes \mathrm{id}_V} X \otimes Y \otimes V = V \triangleleft (X \otimes Y).$$

可以验证，自然性 的编织蕴含 (Φ_r, s^{Φ_r}) 是右 $\mathcal{C}$-模的一个函子。 □

回顾（2.10）中的 2-函子 B 和引理 B.6。

引理 3.13。 设 A 是 $\mathcal{C}$中的一个代数。存在 $\mathcal{C}$-双模 Φ_r: B(**模**$_{\mathcal{C}}$-A) $\xrightarrow{\sim} A^{\psi^{-1}}$-**模**$_{\mathcal{C}}$之间的一个等价，其中目标是带有左 $\mathcal{C}$-作用的 $\mathcal{C}$-双模，该左作用定义于 (3.6)中。

证明。 我们将引理 3.12(i) 中右 $\mathcal{C}$-模范畴之间的等价 Φ_r: S$_{lr}$(**模**$_{\mathcal{C}}$-A) $\xrightarrow{\sim} A^{\psi^{-1}}$-**模**$_{\mathcal{C}}$ 提升为所述的 $\mathcal{C}$-双模之间的等价。回忆 (3.8) 中定义的Φ_r 的右 $\mathcal{C}$-线性结构。函子 Φ_r 还具有左 $\mathcal{C}$-线性结构

$$s^{\Phi_r}_{X,V}\colon \Phi_r(X\triangleright V)\xrightarrow{\sim} X\triangleright\Phi_r(V)$$

由恒等分量组成。事实上，恒等映射显然满足相容性 (B.6)，并且由于恒等映射，它是右 $A^{\psi^{-1}}$-模的一个态射

$$a^l_{X\otimes V}=(X\otimes a^l_V)\circ(\psi^{-1}_{A,X}\otimes V)=a^r_{X\otimes V}\psi^{-1}_{A,X\otimes Y}.$$

还需验证相干条件 (B.16)。对于右 A-模 V和 X， Y在 $\mathcal{C}$中，这由下式得出

$$\begin{aligned}(X\triangleright s^{\Phi_r}_{V,Y})\circ s^{\Phi_r}_{X,V\triangleleft Y}\circ\Phi_r(b_{X,V,Y})&=(X\otimes\psi_{Y,V})\circ(\psi_{Y,X}\otimes V)\\&=\psi_{Y,X\otimes V}\\&=b_{X,\Phi_r(V),Y}\circ(s^{\Phi_r}_{X,V}\triangleleft Y)\circ s^{\Phi_r}_{X\triangleright V,Y},\end{aligned}$$

其中我们使用了以下事实：目标双模 $A^{\psi^{-1}}$-**模**$_{\mathcal{C}}$ 的双模相干性，以及 Φ_r 的左$\mathcal{C}$-线性结构，都具有恒等分量；还使用了编织的右六边形公理。□

我们回顾定义 2.7 中左 $\mathcal{C}$-模范畴的相对 Deligne 积。

命题 3.14。 对于 $\mathcal{C}$ 中的代数 A、 B， 存在左 $\mathcal{C}$-模范畴的一个等价

$$\mathbf{mod}_{\mathcal{C}}\text{-}A\boxtimes_{\mathcal{C}}\mathbf{mod}_{\mathcal{C}}\text{-}B\simeq A^{\psi^{-1}}\text{-}\mathbf{bimod}_{\mathcal{C}}\text{-}B.$$

证明。 引理 3.13 中 $\mathcal{C}$-双模 Φ_r 的等价诱导出左 $\mathcal{C}$-模的一个等价

$$\Phi_r\boxtimes_{\mathcal{C}}\mathbf{mod}_{\mathcal{C}}\text{-}B\colon\quad\mathbf{mod}_{\mathcal{C}}\text{-}A\boxtimes_{\mathcal{C}}\mathbf{mod}_{\mathcal{C}}\text{-}B\xrightarrow{\sim}A^{\psi^{-1}}\text{-}\mathbf{mod}_{\mathcal{C}}\boxtimes_{\mathcal{C}}\mathbf{mod}_{\mathcal{C}}\text{-}B.$$

根据命题 3. 11，目标 $\mathcal{C}$-模由 $A^{\psi^{-1}}$-**双模**$_{\mathcal{C}}$-B 实现。这证明了该结论 . □

下面的等价通过定义 3.7 中内代数的张量积描述了相对 Deligne 积，该等价已在 [DN1，命题 3.4] 中得到观察。

命题 3.15. 对于 $\mathcal{C}$ 中的代数 A, B， 存在左 $\mathcal{C}$-模范畴的一个等价 es

$$\mathbf{mod}_{\mathcal{C}}\text{-}A\boxtimes_{\mathcal{C}}\mathbf{mod}_{\mathcal{C}}\text{-}B\simeq\mathbf{mod}_{\mathcal{C}}\text{-}A\otimes B.$$

证明。 考虑函子

$$G\colon A\text{-}\mathbf{bimod}_{\mathcal{C}}\text{-}B\to\mathbf{mod}_{\mathcal{C}}\text{-}A^{\psi}\otimes B$$

它将一个 A-B-双模 $(M, a^l\colon A\otimes M\to M, a^r\colon M\otimes B\to M)$ 映射到 $A^{\psi}\otimes B$-模 (M, a)，其右 $A^{\psi}\otimes B$-作用定义为

$$a:=\Big(M\otimes A^{\psi}\otimes B\xrightarrow{\psi_{M,A^{\psi}}\otimes\mathrm{id}_B}A^{\psi}\otimes M\otimes B\xrightarrow{a^l\otimes\mathrm{id}}M\otimes B\xrightarrow{a^r}M\Big).$$

容易验证，这确实定义了一个右 $A^{\psi}\otimes B$-模，并可扩展为一个在态射上作用为恒等的函子。回顾在 (3.1)–(3.2) 中定义的 A-**双模**$_{\mathcal{C}}$-B 上的左 $\mathcal{C}$-模结构。函子 G 具有左 $\mathcal{C}$-模范畴函子的结构，其凝聚性为恒等。由命题 3.14，结合 $(A^{\psi^{-1}})^{\psi}=A$，结论得证。□

命题 3.16. 对于编织张量范畴 $\mathcal{C}$ 中的代数 A、 B， 存在左$\mathcal{C}$-模范畴的等价

$$\mathrm{Fun}_{\mathcal{C}}(\mathbf{mod}_{\mathcal{C}}\text{-}A,\mathbf{mod}_{\mathcal{C}}\text{-}B)\simeq\mathbf{mod}_{\mathcal{C}}\text{-}A^{\psi}\otimes B.$$

证明. 该结果由命题3.2以及命题 3.15 的证明中所给出的左 $\mathcal{C}$-模范畴等价 A-**双模**$_{\mathcal{C}}$-$B \simeq$**模**$_{\mathcal{C}}$-$A^{\psi} \otimes B$ 得出。□

注记 3.17。 根据命题 3.15，可以将 $\mathcal{C}$-**模** 与**态射**$_{\mathcal{C}}$ 之间由命题3.5给出的双等价扩展为幺半双等价。因此，我们可以将内部代数用作研究幺半 2-范畴 $\mathcal{C}$-**模**的工具。

以下结果表明，函子范畴上的 $\mathcal{C}$-模结构使它们成为相对于相对 Deligne 积的内部Hom范畴。

命题 3.18。 设 $\mathcal{M}$、$\mathcal{N}$、$\mathcal{P}$ 是左 $\mathcal{C}$-模范畴。那么存在一个$\mathcal{C}$-模范畴等价

$$\mathrm{Fun}_{\mathcal{C}}(\mathcal{M} \boxtimes_{\mathcal{C}} \mathcal{N}, \mathcal{P}) \simeq \mathrm{Fun}_{\mathcal{C}}(\mathcal{N}, \mathrm{Fun}_{\mathcal{C}}(\mathcal{M}, \mathcal{P})).$$

证明。 我们利用命题 3.15 和命题 3.16，注意到相对 Deligne 积和右正合函子范畴都由张量积代数上的内部双模给出，而 $\mathcal{C}$ 的（平凡）结合子则为左 $\mathcal{C}$-作用提供相干同构。事实上，对于 $\mathcal{M} =$**模**$_{\mathcal{C}}$-A、$\mathcal{M} =$ **模**$_{\mathcal{C}}$-B和 $\mathcal{N} =$**模**$_{\mathcal{C}}$-C，我们有左 $\mathcal{C}$-模范畴之间的等价

$$\begin{aligned}
\mathrm{Fun}_{\mathcal{C}}(\mathcal{M} \boxtimes_{\mathcal{C}} \mathcal{N}, \mathcal{P}) &\simeq \mathrm{Fun}_{\mathcal{C}}(\mathbf{mod}_{\mathcal{C}}\text{-}A \otimes B, \mathbf{mod}_{\mathcal{C}}\text{-}C) \\
&\simeq \mathbf{mod}_{\mathcal{C}}\text{-}(A \otimes B)^{\psi} \otimes C \\
&\simeq \mathbf{mod}_{\mathcal{C}}\text{-}B^{\psi} \otimes A^{\psi} \otimes C \\
&\simeq B\text{-}\mathbf{bimod}_{\mathcal{C}}\text{-}A^{\psi} \otimes C \\
&\simeq \mathrm{Fun}_{\mathcal{C}}(\mathbf{mod}_{\mathcal{C}}\text{-}B, \mathbf{mod}_{\mathcal{C}}\text{-}A^{\psi} \otimes C) \\
&\simeq \mathrm{Fun}_{\mathcal{C}}(\mathcal{N}, \mathrm{Fun}_{\mathcal{C}}(\mathcal{M}, \mathcal{P})).
\end{aligned}$$

第三个等价由引理3.9中的第一个代数同构得出。 □

例 3.19. 存在一个左 $\mathcal{C}$-模范畴等价 $\mathrm{Fun}_{\mathcal{C}}(\mathcal{C}, \mathcal{M}) \simeq \mathcal{M}$，其定义为将 $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{M}$ 作用于张量单位 1 上。反过来，对于 $\mathcal{M}$ 中的一个对象 M，我们关联模函子 $F_M = X \triangleright (-)$，其凝聚性同构为

$$s^{F_M}(Y, X) = (l^{\mathcal{M}}_{Y,X,M})^{-1}\colon F_M(Y \otimes X) = Y \otimes X \triangleright M \longrightarrow Y \triangleright F_M(X) = Y \triangleright (X \triangleright M)。$$

3.4. **对偶模范畴**。 本节中，对于 $\mathcal{C}$ 编织的情形，我们定义对偶 $\mathcal{C}$-模范畴，并证明与这些对偶作相对张量积，等价于配备了定义 2.10 中的 $\mathcal{C}$-模结构的 $\mathcal{C}$-模函子范畴

首先，我们结合引理B.5中将左 $\mathcal{C}$-模转化为右 $\mathcal{C}$-模的构造，以及定义2.18和2.19中的对偶模范畴，来定义对偶模范畴。

定义3.20。 对于左 $\mathcal{C}$-模范畴 $\mathcal{M}$，我们称 $\mathcal{M}^* := {}^{\#}\mathrm{S}_{lr}(\mathcal{M})$为其左对偶 $\mathcal{C}$-模范畴，并称 ${}^*\mathcal{M} := \mathrm{S}_{rl}(\mathcal{M}^{\#})$为其右对偶。

我们现在通过内部代数来描述定义 2.19 中的 $\mathcal{C}$-模范畴 $\mathcal{M}^{\#}$ 和 ${}_{\#}\mathcal{N}$，这遵循 [DSPS2，推论 2.4.14] 中关于双模范畴的一个类似结果。

引理 3.21. 设 A 是 $\mathcal{C}$ 中的一个代数。

(i) 右对偶函子

$$\mathrm{D}_r\colon (\mathbf{mod}_{\mathcal{C}}\text{-}A)^{\#} \to A\text{-}\mathbf{mod}_{\mathcal{C}}, \quad (V, a^r_V) \mapsto ({}^*V, a^l_{{}^*V}),$$

其中左 A-作用由下式给出

$$a^l_{{}^*V} := (\mathrm{id}_{{}^*V} \otimes \mathrm{ev}^r_V)(\mathrm{id}_{{}^*V} \otimes a^r_V \otimes \mathrm{id}_{{}^*V})(\mathrm{coev}^r_V \otimes \mathrm{id}_{A \otimes {}^*V}),$$

定义了右 $\mathcal{C}$-模范畴之间的等价。

(ii) 左对偶函子

$$\mathrm{D}_l\colon {}^{\#}(A\text{-}\mathbf{mod}_{\mathcal{C}}) \to \mathbf{mod}_{\mathcal{C}}\text{-}A, \quad (V, a^l_V) \mapsto (V^*, a^r_V),$$

其中左 A-作用定义为

$$a^r_V := (\mathrm{ev}^l_V \otimes \mathrm{id}_{V^*})(\mathrm{id}_{V^*} \otimes a^l_V \otimes \mathrm{id}_{V^*})(\mathrm{id}_{V^*\otimes A} \otimes \mathrm{coev}^l_V),$$

定义了左 $\mathcal{C}$-模范畴之间的一个等价。

证明。 我们首先证明第 (i) 部分。由 $\mathcal{C}$ 的刚性，函子 D_r 是一个等价。回顾一下，$\mathbf{mod}_{\mathcal{C}}\text{-}A^{\#}$ 上的右 $\mathcal{C}$-作用定义为

$$V \triangleleft X := X^* \otimes V.$$

利用幺半同构 $\eta_X\colon {}^*(X^*) \xrightarrow{\sim} X$，我们看到同构

$$\mathrm{D}_r(V \triangleleft X) = {}^*(X^* \otimes V) = {}^*V \otimes {}^*(X^*) \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes\eta_X} {}^*V \otimes X = \mathrm{D}_r(V) \triangleleft X,$$

满足相干条件 (B.6)，从而使 D_r 成为一个 $\mathcal{C}$-线性函子。第 (ii) 部分通过将第 (i) 部分中的 $\mathcal{C}$ 替换为 $\mathcal{C}^{\otimes\mathrm{op}}$ 即可得到。□

现在我们将通过内代数上的模来描述定义 3.20 中 $\mathcal{M}^*$ 和 ${}^*\mathcal{M}$ 的对偶。

命题 3.22. 设 A 是编织张量范畴 $\mathcal{C}$中的一个代数。存在左 $\mathcal{C}$-模范畴之间的等价

(i) ${}^*\mathrm{D}\colon {}^*(\mathbf{mod}_{\mathcal{C}}\text{-}A) \xrightarrow{\sim} \mathbf{mod}_{\mathcal{C}}\text{-}A^{\psi}, \quad (V, a^r_V) \mapsto ({}^*V, a^r_{{}^*V})$, *where the right* A^{ψ}*-action is defined by*

$$a^r_{{}^*V} := (\mathrm{id}_{{}^*V} \otimes \mathrm{ev}^r_V)(\mathrm{id}_{{}^*V} \otimes a^r_V \otimes \mathrm{id}_{{}^*V})(\mathrm{coev}^r_V \otimes \mathrm{id}_{A\otimes{}^*V})\psi_{{}^*V,A},$$

(ii) $\mathrm{D}^*\colon (\mathbf{模}_{\mathcal{C}}\text{-}A)^* \xrightarrow{\sim} \mathbf{模}_{\mathcal{C}}\text{-}A^{\psi^{-1}}$, $(V, a^r_V) \mapsto (V^*, a^r_{V^*})$，其中右 $A^{\psi^{-1}}$-作用定义为

$$a^r_{V^*} := (\mathrm{ev}^l_V \otimes \mathrm{id}_{V^*})(\mathrm{id}_{V^*} \otimes a^r_V \otimes \mathrm{id}_{V^*})(\mathrm{id}_{V^*\otimes V} \otimes \psi_{V^*,A})(\mathrm{id}_{V^*} \otimes \mathrm{coev}^l_V \otimes \mathrm{id}_A).$$

证明。 我们将 ${}^*\mathrm{D}$ 定义为以下等价的复合

$${}^*(\mathbf{mod}_{\mathcal{C}}\text{-}A) = \mathrm{S}_{rl}(\mathbf{mod}_{\mathcal{C}}\text{-}A^{\#}) \xrightarrow{\mathrm{S}_{rl}(\mathrm{D}_r)} \mathrm{S}_{rl}(A\text{-}\mathbf{mod}_{\mathcal{C}}) \xrightarrow{\Phi_l} \mathbf{mod}_{\mathcal{C}}\text{-}A^{\psi},$$

这些等价来自引理 3.12 和 3.21。于是，${}^*\mathrm{D}(V, a^r_V)$ 是定义在其上的右 A^{ψ}-模 ${}^*V$，其作用由 (i) 的陈述中 $a^r_{{}^*V}$ 的公式给出。同样，将 ${}^*\mathrm{D}$ 定义为以下复合

$$(\mathbf{mod}_{\mathcal{C}}\text{-}A)^* = {}^{\#}\mathrm{S}_{lr}(\mathbf{mod}_{\mathcal{C}}\text{-}A) \xrightarrow{{}^{\#}(\Phi_r)} {}^{\#}(A^{\psi^{-1}}\text{-}\mathbf{mod}_{\mathcal{C}}) \xrightarrow{\mathrm{D}_l} \mathbf{mod}_{\mathcal{C}}\text{-}A^{\psi^{-1}}.$$

则 $\mathrm{D}^*(V, a^r_V) = (V^*, a^r_{V^*})$。□

注记 3.23. 由注记 3.3 可知，我们选择了一种约定来定义 $X \triangleright G$ 上的 $\mathcal{C}$-线性结构，该约定针对 $G \in \mathrm{Fun}_{\mathcal{C}}(\mathcal{M}, \mathcal{N})$，并使用编织 ψ。选择逆编织这一替代方案则给出一个 $\mathcal{C}$-模范畴 $\mathrm{Fun}'_{\mathcal{C}}(\mathcal{M}, \mathcal{N})$。在此约定下，命题 3.16 的类似结果给出 $\mathcal{C}$-模范畴的一个等价

$$\mathrm{Fun}'_{\mathcal{C}}(\mathcal{M}, \mathcal{N}) \simeq \mathbf{mod}_{\mathcal{C}}\text{-}A^{\psi^{-1}} \otimes^{\psi^{-1}} B \simeq \mathbf{mod}_{\mathcal{C}}\text{-}B \otimes A^{\psi^{-1}} \simeq \mathbf{mod}_{\mathcal{C}}\text{-}(A \otimes B^{\psi})^{\psi^{-1}},$$

其中最后一个等价来自引理 3.10 中的代数同构。这表明 $\mathrm{Fun}'_{\mathcal{C}}(\mathcal{M}, \mathcal{N}) \simeq \mathrm{Fun}_{\mathcal{C}}(\mathcal{N}, \mathcal{M})^*$ 是等价的左 $\mathcal{C}$-模。

推论 3.24. 存在左 $\mathcal{C}$-模的等价 ${}^*(\mathcal{M}^*) \simeq \mathcal{M}$ 与 $({}^*\mathcal{M})^* \simeq \mathcal{M}$。

证明。 我们可以选择一个代数 A 使得 $\mathcal{M} \simeq \mathbf{模}_{\mathcal{C}}\text{-}A$。现在，根据命题3.22，利用代数的等式 $(A^{\psi})^{\psi^{-1}} = A = (A^{\psi^{-1}})^{\psi}$. □即可得到这些结论

结合引理3.9和命题 3.15，我们发现，对偶与相对 Deligne 积以下述方式相容。

推论 3.25. 存在左 $\mathcal{C}$-模范畴的等价

$$(\mathcal{M}\boxtimes_{\mathcal{C}}\mathcal{N})^*\simeq\mathcal{N}^*\boxtimes_{\mathcal{C}}\mathcal{M}^* \qquad and \qquad {}^*(\mathcal{M}\boxtimes_{\mathcal{C}}\mathcal{N})\simeq{}^*\mathcal{N}\boxtimes_{\mathcal{C}}{}^*\mathcal{M}.$$

这些结果可用于描述函子范畴的对偶。

推论 3.26. 存在左 $\mathcal{C}$-模范畴的等价

$$\mathrm{Fun}_{\mathcal{C}}(\mathcal{M},\mathcal{N})^*\simeq\mathrm{Fun}_{\mathcal{C}}(\mathcal{N}^{**},\mathcal{M}) \qquad and \qquad {}^*\mathrm{Fun}_{\mathcal{C}}(\mathcal{M},\mathcal{N})\simeq\mathrm{Fun}_{\mathcal{C}}({}^{**}\mathcal{N},\mathcal{M}).$$

证明。取 $\mathcal{C}$ 中的代数 A、B，使得 $\mathcal{M}=$**模**$_{\mathcal{C}}$-A 且 $\mathcal{N}=$**模**$_{\mathcal{C}}$-B。我们有左 $\mathcal{C}$-模范畴的等价

$$\mathrm{Fun}_{\mathcal{C}}(\mathcal{M},\mathcal{N})^*\simeq(\mathbf{mod}_{\mathcal{C}}\text{-}A^{\psi}\otimes B)^*\simeq\mathbf{mod}_{\mathcal{C}}\text{-}(A^{\psi}\otimes B)^{\psi^{-1}}\simeq\mathbf{mod}_{\mathcal{C}}\text{-}B^{\psi^{-1}}\otimes A,$$

由命题 3.16 和 3.22 得出。这与引理3.9所述的 $\mathrm{Fun}_{\mathcal{C}}(\mathcal{N}^{**},\ \mathcal{M})$ 等价。另一个等价的证明类似。□

注记 3.27. 若 $\mathcal{C}$ 是缎带范畴 [EGNO, Def. 8.10.1]（例如，当 $\mathcal{C}$ 是枢纽的且对称时），那么 $\mathcal{M}^{**}\simeq\mathcal{M}$ 作为 $\mathcal{C}$-模范畴。这由命题 3.22 得出，并注意到对于 $\mathcal{C}$中的代数 A，缎带扭结 θ_A 给出一个代数同构 $A\cong A^{\psi^{-2}}$。因此，我们可以在上述推论 3.26 中去掉双星号。我们预计，只要 $\mathcal{C}$ 是有限带状范畴，幺半 2-范畴 $\mathcal{C}$-**模** 就是枢纽的，参见 [BMS, Cor. 4.9] 和 [DR, Rem. 2.2.8]。

命题 3.28. 设 $\mathcal{C}$ 是有限编织张量范畴，且 $\mathcal{M}$、$\mathcal{N}$ 是左 $\mathcal{C}$-模范畴。存在 $\mathcal{C}$-模范畴的等价

(i) $\mathcal{M}\boxtimes_{\mathcal{C}}\mathcal{N}\simeq\mathrm{Fun}_{\mathcal{C}}(\mathcal{M}^*,\mathcal{N})$,
(ii) $\mathrm{Fun}_{\mathcal{C}}(\mathcal{M},\mathcal{N})\simeq{}^*\mathcal{M}\boxtimes_{\mathcal{C}}\mathcal{N}$.

证明. 等价 (i) 由 [DSPS2, Cor. 2.4.11] 得出。或者，也可以结合命题 3.15、3.16 和 3.22 得出该结论。利用推论 3.24 中的 ${}^*(\mathcal{M}^*)\simeq\mathcal{M}$，由 (i) 可得等价 (ii)。□

例 3.29。设 $\mathcal{M}$ 是一个左 $\mathcal{C}$-模范畴。作为命题 3.28 的特例，我们得到左 $\mathcal{C}$-模范畴 $\mathrm{Fun}_{\mathcal{C}}(\mathcal{M},\ \mathcal{C})\simeq{}^*\mathcal{M}$ 与 ${}^*\mathcal{M}\boxtimes_{\mathcal{C}}\mathcal{M}\simeq\mathcal{C}^*_{\mathcal{M}}$ 之间的等价。

4. Exact module categories

本节首先在第 4.1 节回顾正合模范畴和正合代数的定义及一些基本性质。接下来的第 4.2–4.4 节包含以下结果：相对半单性是左 $\mathcal{C}$-模范畴 $\mathcal{M}$ 正合性的必要条件；编织相反代数的正合性；以及中心化子 $\mathcal{C}^*_{\mathcal{M}}$ 作为 $\mathcal{C}$-模的正合性。特别地，我们证明了图 1 中下方一行的蕴含关系。这些结果要么是新的，要么在文献中并不易于找到。最后，在第 4.5 节，我们在零特征和非零特征下分别给出正合模范畴的例子，其相对 Deligne 积并非正合 $\mathcal{C}$-模；这促使我们提出本文的主要概念——完全正合 模范畴，该概念在第 5 节中引入。

4.1. **正合模范畴与正合代数**。

定义 4.1. 左 $\mathcal{C}$-模范畴 $\mathcal{M}$ 是正合的，如果对于 $\mathcal{C}$ 中的任意投射对象 P 和 $\mathcal{M}$中的任意对象 M，$P\triangleright M$ 在 $\mathcal{M}$ 中是投射的。

我们将 $\mathcal{C}$-**模** 中正合模范畴的全 2-子范畴记为 $\mathcal{C}$-**正合**。

例 4.2。

(i) 若 $\mathcal{C}$ 是任意域上的融合范畴，则有限模范畴 $\mathcal{M}$ 正合当且仅当它是半单的。事实上，$\mathbb{1}_{\mathcal{C}}$ 是一个投射对象，因此，为使 $\mathcal{M}$ 正合， $\mathcal{M}$ 中的任意对象 M 都必须满足 $\mathbb{1}_{\mathcal{C}} \triangleright M \cong M$ 是投射对象。(ii) 正则左 $\mathcal{C}$-模范畴 $\mathcal{C}$ 中， $\mathcal{C}$ 通过张量积作用；根据 [EGNO，例 7.5.5]，它是正合的。(iii) 设 $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 是有限张量范畴之间的正合幺半函子。考虑将 $\mathcal{D}$ 视为左 $\mathcal{C}$-模范畴，如例 B.1 所示。则 $\mathcal{D}$ 是正合模范畴，当且仅当 F 保持投射对象。由 $\mathcal{D}$ 的刚性可知正合性成立，因为投射对象构成一个张量理想，参见引理 A.1。特别地，当 $\mathcal{D}$ 是半单范畴时，此结论成立，例如 $\mathcal{D} = \mathbf{vect}$ 且 F 是纤维函子。反过来，若 $\mathcal{D}$ 是正合的，且 $\mathcal{C}$ 中的 P 是投射对象，则 $P \triangleright \mathbb{1} \cong F(P)$ 必须是投射对象。

以下结果引自 [EGNO，命题 7.6.9 和 7.9.7]，它用 $\mathcal{C}$-模函子刻画正合模范畴。对于一般的基域 $\Bbbk$，参见 [DSPS2，定理 2.3.5]。

命题 4.3. 设 $\mathcal{C}$ 是一个有限张量范畴。若一个左 $\mathcal{C}$-模 $\mathcal{M}$ 是正合的，则对于左 $\mathcal{C}$-模范畴 $\mathcal{N}$，任意加性的$\mathcal{C}$-线性函子 $G\colon \mathcal{M} \to \mathcal{N}$都是正合的。此外， $\mathcal{M}$ 正合，当且仅当每个加性的 $\mathcal{C}$-模函子 $\mathcal{M} \to \mathcal{M}$ 都是正合的。

特别地，若 $\mathcal{M}$ 是正合的，则任意 $\mathcal{C}$-线性函子 $G\colon \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ 都有左伴随和右伴随。

若代数 A 属于 $\mathcal{C}$，且正合，则称其为**模**$_{\mathcal{C}}$-A 是一个正合的左 $\mathcal{C}$-模范畴。以下结果（其成立不要求 $\mathcal{C}$ 是编织的）为这一术语提供了依据。

引理 4.4. 设 $\mathcal{C}$ 是一个有限张量范畴。代数 A 属于 $\mathcal{C}$，当且仅当 A-**模**$_{\mathcal{C}}$ 作为右 $\mathcal{C}$-模范畴是正合的。

证明。 回顾引理3.21中的右 $\mathcal{C}$-模范畴等价

$$A\text{-}\mathbf{mod}_{\mathcal{C}} \simeq (\mathbf{mod}_{\mathcal{C}}\text{-}A)^{\#}$$

。我们需要证明，当且仅当 $\mathcal{M}^{\#}$ 作为右$\mathcal{C}$-模范畴是正合的， $\mathcal{M}$ 作为左 $\mathcal{C}$-模才是正合的。但这由 [EGNO，推论7.6.4、命题6.1.3] 得出，因为正合 $\mathcal{C}$-模范畴中的对象是单射对象，当且仅当它是投射对象；并且$\mathcal{C}$ 中投射对象的对偶也是投射对象。□

由此引理可直接得出，取对偶模范畴（定义见第2.4节）保持正合性。

推论4.5。 $\mathcal{M} \mapsto \mathcal{M}^{\#}$ 和 $\mathcal{M} \mapsto {}^{\#}\mathcal{M}$ 这两个赋值在 $\mathcal{C}$-模范畴的等价意义下互为逆，并且保持正合模范畴。

证明。 例如，由引理3.21可知，当 $\mathcal{M}$ 是左（分别地，右） $\mathcal{C}$-模范畴时，${}_{\#}(\mathcal{M}^{\#}) \simeq \mathcal{M}$ 。根据引理4.4，选取 $\mathcal{C}$ 中的一个代数 A，使得 $\mathcal{M} = $**模**$_{\mathcal{C}}$-$A$，即可得出这些赋值保持正合模范畴。□

4.2. **相对半单代数与模范畴**。 设 $\mathcal{C}$ 是一个有限张量范畴。设 A 是 $\mathcal{C}$ 中的一个代数，其乘法映射为 $m_A\colon A \otimes A \to A$。本节给出 A 的一些条件，这些条件可推出相关 $\mathcal{C}$-模范畴 $\mathcal{M} = $ **模**$_{\mathcal{C}}$-A的正合性。这些条件将在第 5.3 节中使用。我们考虑诱导函子

$$I\colon \mathcal{C} \to \mathbf{mod}_{\mathcal{C}}\text{-}A, \quad X \mapsto (X \otimes A, a^r_{I(X)} = \mathrm{id}_X \otimes m_A)\ , \tag{4.1}$$

它是左 $\mathcal{C}$-模的函子，并将 $\mathcal{C}$ 中的投射对象映射为**模**$_{\mathcal{C}}$-A中的投射对象。与**vect**中通常代数的证明类似，可以证明，**模**$_{\mathcal{C}}$-A中的任意投射对象都是 $I(P)$ 的直和项，其中 P 是 $\mathcal{C}$ 中的一个投射对象。

定义 4.6. $\mathcal{C}$ 中的代数 A 称为相对半单，如果其中的任意 A-模都是某个诱导模 $I(X)$ 的直和项，$X \in \mathcal{C}$。

引理 4.7. 任意相对半单代数 A都是正合的。

证明。 假设 A 是相对半单的。那么， $\mathcal{M}$ =**模**$_{\mathcal{C}}$-A 中的任意对象 M 都是某个对象 X 在 $\mathcal{C}$中的 $I(X)$ 的直和项。对于 $\mathcal{C}$中的任意投射对象 P，由作用函子的可加性， $P \triangleright M$ 是投射右 A-模 $P \triangleright I(X)$ 的直和项，而后者作为右 A-模同构于 $I(P \otimes X)$。右 A-模 $I(P \otimes X)$ 是投射的，因此其直和项也都是投射的。因此， $P \triangleright M$ 是投射的，并且 $\mathcal{M}$ 作为左 $\mathcal{C}$-模是正合的。这说明 A 是一个正合代数。□

代数相对半单的一个充分条件是它可分。

定义 4.8. 如果乘法映射 $m\colon A \otimes A \to A$ 在 $\mathcal{C}$中作为 A-双模的态射有一个截面，则称 A 为可分。

引理 4.9. 若 A 是可分代数，则它相对半单，因此正合。

证明. 回顾定义 3.4 中的相对张量积 $\otimes_A$。对于任意右 A-模 M，我们有 $M \otimes_A (–)\colon A$-**双模**$_{\mathcal{C}} \to$ **模**$_{\mathcal{C}}$-A 是一个加性函子。因此，若 A 是可分的，则 $M \cong M \otimes_A A$ 是 $M \otimes_A (A \otimes A)$ $\cong M \otimes A = I(M)$ 的一个直和项，作为右 A-模。于是， A 相对半单。□

注 4.10. 当 $\mathcal{C}$ 半单时，代数 A 的相对半单性等价于<style>模$_{\mathcal{C}}$-A半单。事实上，任一对象都是形如 $I(X) = X \triangleright A$ 的对象的直和项，而该对象是投射的。因此，相对半单和可分都是在 Morita 不变性下保持不变的代数性质。半单情形参见 [DSPS2，第 2 节。5]

回顾 内部Hom对象 $\underline{\mathrm{Hom}}(M, N) \in \mathcal{C}$ 由以下自然同构定义

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}}(X \triangleright M, N) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \underline{\mathrm{Hom}}(M, N)) \ ,$$

对于 X 中的 $\mathcal{C}$。于是，内部自同态对象 $\underline{\mathrm{End}}(M)$ 是 $\mathcal{C}$ 中的一个代数，且内部Hom扩展为一个 $\mathcal{C}$-线性函子

$$\underline{\mathrm{Hom}}(M, -)\colon \mathcal{M} \to \mathbf{mod}_{\mathcal{C}}\text{-}\underline{\mathrm{End}}(M), \quad N \mapsto \underline{\mathrm{Hom}}(M, N),$$

参见 [EGNO，第 7.9–7.10] 节。若 $\mathcal{M}$ 是正合的，则对任意 M，$\underline{\mathrm{Hom}}(M, –)$ 都是一个等价。

对于自同态 代数 $\underline{\mathrm{End}}(M)$，我们有以下相对半单性的判据 .

引理 4.11. 设 $\mathcal{M}$ 是一个左 $\mathcal{C}$-模范畴，且 M 是 $\mathcal{M}$ 中的一个对象，使得 $\mathrm{Hom}(M, –)$ 右正合。则代数 $\underline{\mathrm{End}}(M)$ 是相对半单的，当且仅当 $\mathcal{M}$ 的每个对象 N 对于 $\mathcal{C}$中的某个 X 都是 $X \triangleright M$ 的直和项。特别地， $\mathcal{M}$ 是正合的。

证明. 记 $A = \underline{\mathrm{End}}(M)$。在我们的假设下，$\underline{\mathrm{Hom}}(M, –)\colon \mathcal{M} \to \mathbf{mod}_{\mathcal{C}}$-$A$是一个等价[EGNO，定理 7.10.1]。利用内部 Hom 的可加性， $\mathcal{M}$ 中的 N 是 $X \triangleright M$ 的直和项，当且仅当

$$\underline{\mathrm{Hom}}(M, N) \underset{\oplus}{\leq} \underline{\mathrm{Hom}}(M, X \triangleright M) \cong X \triangleright \underline{\mathrm{Hom}}(M, M) = X \otimes A,$$

是 $\mathbf{mod}_{\mathcal{C}}$-$A$中的一个直和项，其中对于该同构，我们使用 [EGNO，引理 7.9.4]。由于 $\underline{\mathrm{Hom}}(M, –)$ 是本质满的，我们看到 A 是相对半单的，当且仅当每个对象N都作为某个对象 $X \triangleright M$的直和项出现。由于 $\mathcal{M} \simeq \mathbf{mod}_{\mathcal{C}}$-$A$ ，并且我们已经证明 A 是相对半单的，由引理 4.7 可知 $\mathcal{M}$ 是正合的。□

定义 4.12. 如果存在对象 M，使得范畴 $\mathcal{M}$ 中的每个对象 N 都是某个 $X \triangleright M$ 的直和项，其中 X 属于 $\mathcal{C}$，则称正合左 $\mathcal{C}$-模范畴 $\mathcal{M}$ 相对半单 。

等价地，根据引理 4.11， $\mathcal{M}$ 是相对半单的，当且仅当存在一个 $\mathcal{C}$ 中的相对半单代数 A ，使得 $\mathcal{M} \simeq$**模**$_{\mathcal{C}}$-A 作为左 $\mathcal{C}$-模范畴。

定义 4.13。 如果左 $\mathcal{C}$-模范畴 $\mathcal{M}$ 作为左$\mathcal{C}$-模范畴等价于**模**$_{\mathcal{C}}$-A ，其中 $\mathcal{C}$中的代数 A 是可分代数，我们就称其为可分 。

根据引理 4.7，相对半单模范畴是正合的。此外，根据引理 4.9，可分模范畴是相对半单的，因而也是正合的。

例 4.14. 正则 $\mathcal{C}$-模 $\mathcal{C}$ 总是可分且相对半单，因为 $\mathcal{C} \simeq$**模**$_{\mathcal{C}}$-1，但可能不是半单。

注记 4.15. 在半单情形中，可分代数的定义见 [DSPS2, Def. 2.5.1] ，并且已证明，若 $\mathcal{M}$ 是可分的，则 $\mathcal{M}$ 是半单的 [DSPS2, Prop. 2.5.3]„ 因此由例 4.2(i)可知它是正合的。反向结论一般并不成立，参见推论 5.6 及其后的讨论。

如果 $\mathcal{C}$ 是非半单的，那么可分或相对半单的性质并不在代数的 Morita 等价下保持不变。以下示例对此作了说明。

例 4.16。 假设 $\mathcal{C}$ 是非半单的。考虑左 $\mathcal{C}$-模 $\mathcal{M} = \mathcal{C}$ 以及两个实现此 $\mathcal{C}$-模范畴 $\mathcal{M}$的 Morita 等价代数：张量单位 1，以及投射对象 P在 $\mathcal{C}$中的代数$A_P = \mathrm{End}(P) = P \otimes P^*$ 。$\mathrm{mod}_{\mathcal{C}}$-$A_P \simeq \mathcal{C}$ 这一事实是因为 $\mathcal{C}$ 是一个正合 $\mathcal{C}$-模范畴。 $\mathcal{C}$ 中的平凡代数 1 是可分的，因此相对半单。然而， A_P 并非相对半单，因为否则根据引理 4.11， $\mathcal{C}$ 中的每个对象 N 都是某个 $X \triangleright P = X \otimes P$的直和项，其中 $X \in \mathcal{C}$是投射的，因此 $\mathcal{C}$ 将是半单的，这与假设矛盾。特别地， A_P 也不是可分代数，否则根据引理 4.9，它将是相对半单的。

4.3. **编织反代数的正合性**。 若 $\mathcal{C}$ 是编织的，则可等价地通过相应的编织反代数来检验代数的正合性，这些反代数在定义 3.6 中给出。

命题 4.17. 设 A 是 $\mathcal{C}$中的一个代数。下列陈述等价。

(1) A is exact. *(2) A^{ψ} is exact.* *(3) $A^{\psi^{-1}}$ is exact.*

证明。 存在一个范畴等价

$$\mathbf{mod}_{\mathcal{C}}\text{-}A \xrightarrow{\sim} A^{\psi}\text{-}\mathbf{mod}_{\mathcal{C}}, \tag{4.2}$$

它将带有作用 $a^r_M\colon M \otimes A \to M$ 的右 A-模 M映到带有左 A^{ψ}-作用的左 A^{ψ}-模 M

$$a^l_M = a^r_M \psi_{A,M}\colon A \otimes M \to M, \tag{4.3}$$

注意到 $A = A^{\psi}$作为 $\mathcal{C}$中的对象。对于 $X \in \mathcal{C}$，该函子将右 A-模 $X \triangleright M = X \otimes M$映到 A^{ψ}-模 $X \otimes M$ ，其左 A^{ψ}-作用由态射给出

$$(\mathrm{id}_X \otimes a^r_M)\psi_{A,X\otimes M}\colon A \otimes (X \otimes M) \to X \otimes M.$$

这个左 A^{ψ}-模同构于 $M \triangleleft X$，其中 M 上带有左 A^{ψ}-作用(4.3)， A^{ψ}-**模**$_{\mathcal{C}}$上带有标准右 $\mathcal{C}$-作用，经由同构$\psi^{-1}_{X,M}\colon X \otimes M \to M \otimes X$。因此，若 A 是正合的，且$P \in \mathcal{C}$ 是一个投射对象，则 $P \triangleright M$ 作为右 A-模是投射的。于是 $P \triangleright M$在等价(4.2)下的像作为左 A^{ψ}-模是投射的。由上述左 A^{ψ}-模的同构$\psi^{-1}_{P,M}$ ， $M \triangleleft P$ 作为左 A^{ψ}-模也是投射的。这表明 A^{ψ}-**模**$_{\mathcal{C}}$ 作为右 $\mathcal{C}$-模是正合的。由引理4.4，这蕴含**模**$_{\mathcal{C}}$-A^{ψ} 作为左 $\mathcal{C}$-模范畴是正合的。因此，代数 A^{ψ} 是正合的。这表明(1)蕴含(2)。

现在，我们可以利用逆编织证明 (1) 蕴含 (3)。由于 $(A^{\psi})^{\psi^{-1}} = A = (A^{\psi^{-1}})^{\psi}$，可知 (2) 蕴含 (1)，且 (3) 蕴含 (1)。□

我们立即得到以下结果，参见 [DSPS2，推论 2.4。7]。

推论 **4.18.** 对于 $\mathcal{M}$ 左 $\mathcal{C}$-模范畴，以下陈述等价 .

(1) $\mathcal{M}$ *is exact* *(2)* $\mathcal{M}^*$ *is exact* *(3)* ${}^*\mathcal{M}$ *is exact.*

证明。在 $\mathcal{C}$ 中找到一个代数 A ，使得 $\mathcal{M} \simeq$ **模**$_{\mathcal{C}}$-A，则我们有 $\mathcal{M}^* \simeq$ **模**$_{\mathcal{C}}$-$A^{\psi^{-1}}$ 以及 ${}^*\mathcal{M} \simeq$ **模**$_{\mathcal{C}}$-A^{ψ}，这由命题 3.22 得到。现在该结果由命题 4.17 推出。□

4.4. 中心化子的正合性。 我们现在将证明，对于有限 $\mathcal{C}$-模范畴，$\mathcal{C}^*_{\mathcal{M}}$ 的正合性蕴含 $\mathcal{M}$的正合性。为此，对于 $\mathcal{C}$中的一个代数 A ，我们定义函子

$$I^b\colon \mathcal{C} \to A\text{-}\mathbf{bimod}_{\mathcal{C}}, \quad X \mapsto I^b(X) = A \otimes X \otimes A, \tag{4.4}$$

其中左、右 A-作用由 A的乘法给出。由(3.1)–(3.2)可知，当 $\mathcal{C}$ 是编织的且 A 是 $\mathcal{C}$中的代数时，内部 A-双模的范畴 A-**双模**$_{\mathcal{C}}$ 成为一个 $\mathcal{C}$-模范畴。此时，函子 I^b 成为一个左 $\mathcal{C}$-模函子，其 $\mathcal{C}$-模结构由 A-双模的同构给出

$$\begin{array}{ccc} I^b(X \triangleright Y) & \xrightarrow{s^{I_b}_{X,Y}} & X \triangleright I^b(Y) \\ \| & & \| \\ A \otimes X \otimes Y \otimes A & \xrightarrow{\psi^{-1}_{A,X} \otimes \mathrm{id}} & X \otimes A \otimes Y \otimes A. \end{array}$$

A-**双模**$_{\mathcal{C}}$ 中的任意投射对象，都是某个诱导双模 $I^b(Q)$ 中对象的直和项，其中 Q 是 $\mathcal{C}$中的投射对象，参见 [EGNO，第 7.8]节。

引理 4.19. 设 $\mathcal{M},\mathcal{N}$ 为左 $\mathcal{C}$-模范畴。设 $F\colon \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ 是$\mathrm{Fun}_{\mathcal{C}}(\mathcal{M},\mathcal{N})$中的投射对象。那么，对每个 $M \in \mathcal{M}$， $F(M)$ 都是投射的。

证明。 根据 [EGNO，推论 7.10.5] 或 [DSPS1，定理 2.18], ，我们可以假设存在代数 A和 B ，它们属于 $\mathcal{C}$，且 $\mathcal{M} =$**模**$_{\mathcal{C}}$-A 和 $\mathcal{N} =$**模**$_{\mathcal{C}}$-B。利用命题 3.2 中的等价 A-**双模**$_{\mathcal{C}}$-$B \xrightarrow{\sim}$Fun$_{\mathcal{C}}$(**模**$_{\mathcal{C}}$-A，**模**$_{\mathcal{C}}$-B) $V \mapsto G_V$，只需考虑如下形式的 $\mathcal{C}$-线性函子

$$G_V : \mathbf{mod}_{\mathcal{C}}\text{-}A \to \mathbf{mod}_{\mathcal{C}}\text{-}B, \quad M \mapsto M \otimes_A V,$$

对于 $\mathcal{C}$ 中的 A-B-双模 V。首先假设 $V = A \otimes P \otimes B$，其中 P 是 $\mathcal{C}$ 中的投射对象，且 A和 B的作用分别由左乘和右乘给出。回顾一下，任意投射 A-B-双模都是此类双模的直和项。于是，对于任意 M ，若其属于 mod$_{\mathcal{C}}$-A，则作为 $\mathcal{C}$ 中的右 B-模，有 $G_V(M) \cong I(M \otimes P)$；这里的函子 I 是在 (4.1) 中将 A 替换为 B 所定义的。由于 $M \otimes P$ 是 $\mathcal{C}$ 中的投射对象，因此 $G_V(M)$ 是 mod$_{\mathcal{C}}$-$B \simeq \mathcal{N}$ 中的投射对象。由于 $\otimes_A$ 是双加性的，它保持直和。若 W 只是投射双模 $V = A \otimes P \otimes B$ 的直和项，则对任意 M， $G_W(M)$ 都是 $G_V(M)$ 的直和项，而后者同样是 mod$_{\mathcal{C}}$-B 中的投射对象。这就证明了该断言。□

对于下一个引理，回顾定义 2.13 中的中心化子函子。若对任意投射对象 P，都有 $F(P)$ 是投射的，我们就称函子 F 保投射对象。

引理 4.20。设 $\mathcal{M}$ 是一个左 $\mathcal{C}$-模范畴。若 $A_{\mathcal{M}}\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}^*_{\mathcal{M}}$ 保投射对象，则 $\mathcal{M}$ 作为左 $\mathcal{C}$-模范畴是正合的。

证明。假设 $A_{\mathcal{M}}$ 保投射对象。那么 $A_{\mathcal{M}}(P) = P \triangleright \mathrm{id}_{\mathcal{M}}$ 是 Fun$_{\mathcal{C}}(\mathcal{M},\mathcal{M})$ 中的投射对象。现在，由引理 4.19， $A_{\mathcal{M}}(P)$ 将 $\mathcal{M}$ 中任意对象映到 $\mathcal{M}$ 中的投射对象。因此，对于 $\mathcal{M}$ 的任意对象 M， $A_{\mathcal{M}}(P)(M) = P \triangleright M$ 是 $\mathcal{M}$ 中的投射对象。这说明 $\mathcal{M}$ 作为左 $\mathcal{C}$-模范畴是正合的。□

命题 4.21。 设 $\mathcal{M}$ 是一个左 $\mathcal{C}$-模范畴。当且仅当函子 $A_{\mathcal{M}}\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}^*_{\mathcal{M}}$ 保持投射对象时， $\mathcal{C}^*_{\mathcal{M}}$ 作为左 $\mathcal{C}$-模范畴是正合的。

证明。 正向蕴含是显然的，因为根据定义 2.10， $A_{\mathcal{M}}(X) = X \triangleright \mathrm{id}_{\mathcal{M}}$。因此，如果 $\mathcal{C}^*_{\mathcal{M}}$ 是正合的，则对于 $\mathcal{C}$ 中的任意投射对象 P， $A_{\mathcal{M}}(P)$ 都是投射的。反之，假设 $A_{\mathcal{M}}$ 保持投射对象。由引理 4.20，这意味着 $\mathcal{M}$ 是一个正合的左 $\mathcal{C}$-模范畴。因此，根据 [DSPS2 的定理 2.3，5], 另见 [EGNO，第 7 节，12]，$\mathcal{M}$ 的任意 $\Bbbk$-线性加性 $\mathcal{C}$-模自函子都是正合的，并且 $\mathcal{C}^*_{\mathcal{M}}$ 具有左对偶与右对偶。因此， $\mathcal{C}^*_{\mathcal{M}}$ 中的投射对象构成一个（右）张量理想，见引理 A.1。于是，对于任意 $F \in \mathcal{C}^*_{\mathcal{M}}$，张量积 $A_{\mathcal{M}}(P) \circ F$ 是投射的。因此，由引理 2.14， $P \triangleright F = A_{\mathcal{M}}(P) \circ F$ 是投射的，且 $\mathcal{C}^*_{\mathcal{M}}$ 是正合的。□

注记 4.22。 张量函子 $A_{\mathcal{M}}$ 保持投射对象的条件有若干等价刻画，见 [S1, 引理 4.3]。此条件等价于 $A_{\mathcal{M}}$ 的右伴随是正合的，或者等价于它存在进一步的右伴随。文献中也将这类张量函子称为完美，见 [BrNa, S1, JaYa]。考虑由 (B.3) 中的作用函子 $\rho_{\mathcal{M}}\colon \mathcal{C} \to \mathrm{End}(\mathcal{M})$ 得到的下列函子交换图：

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{Z}(\mathcal{C}) & \xrightarrow{\mathcal{Z}(\rho_{\mathcal{M}})} & \mathrm{End}_{\mathcal{C}}(\mathcal{M})。 \\ \downarrow{\scriptstyle F} & \nearrow{\scriptstyle A_{\mathcal{M}}} & \downarrow{\scriptstyle U} \\ \mathcal{C} & \xrightarrow{\rho_{\mathcal{M}}} & \mathrm{End}(\mathcal{M}) \end{array} \tag{4.5}$$

这里， $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$ 是 $\mathcal{C}$ 的 Drinfeld 中心，其遗忘函子为 F；函子 U 则遗忘$\mathcal{C}$-线性结构。函子 $\mathcal{Z}(\rho_{\mathcal{M}})$ 出现在 [S2, 定理 3.11] 中。对于 $\mathcal{M}$ 正合函子，函子 $\rho_{\mathcal{M}}$ 是完美的，见 [S2, 定理 3.4]。因此， $\mathcal{Z}(\rho_{\mathcal{M}})$ 也是完美的。根据 [S1, 引理 4.3] 对完美函子的刻画，并利用 [W, 引理 3.14–3.15]，即可看出这一点。因此，(4.5) 中的水平函子$\rho_{\mathcal{M}}$ 和 $\mathcal{Z}(\rho_{\mathcal{M}})$ 保持投射对象，而一般而言 $A_{\mathcal{M}}$ 并非如此。那些 $A_{\mathcal{M}}$ 为完美函子的正合 $\mathcal{M}$构成一个特殊类别，我们将在第 5 节讨论。

4.5. **正合模范畴在相对 Deligne 积下不封闭**。 正合 $\mathcal{C}$-模范畴在（关于 $\mathbf{vect}$ 的）Deligne 张量积 $\boxtimes$ 下封闭，见 [DSPS2，第 3.3 节2]。然而，若 $\mathcal{C}$ 为非半单，或 $\mathcal{C}$ 为半单但 $\Bbbk$ 不是特征零，则正合有限 $\mathcal{C}$-模范畴一般在相对 Deligne 张量积$\boxtimes_{\mathcal{C}}$ 下不封闭，因此 $\mathcal{C}$-$\mathbf{ex}$ 不是 $\mathcal{C}$-$\mathbf{mod}$的幺半 2-子范畴。我们用两个例子说明这一点：第一个在有限特征域上，第二个在 $\mathbb{C}$上。

例 4.23. 设 $\mathrm{char}\,\Bbbk$ 整除有限阿贝尔群 G的阶。范畴 $\mathcal{C} = \mathbf{vect}_G$是 G-分次 $\Bbbk$-向量空间范畴，带有从$\mathbf{vect}$继承的标准幺半结构与对称编织。在此情形下，我们有 $\mathcal{C}$-模的一个等价$\mathbf{vect} \simeq {}^*\mathbf{vect}$，并且

$$\mathbf{vect} \boxtimes_{\mathbf{vect}_G} \mathbf{vect} \simeq \mathcal{C}^*_{\mathbf{vect}} \simeq \Bbbk G\text{-}\mathbf{mod},$$

应用命题 3.28 和 [EGNO，例 7.12，19] 可得第二个等价，它是幺半的。在此等价下，中心化子函子 $A_{\mathbf{vect}}$ 对应于一个幺半函子 $\mathbf{vect}_G \to \Bbbk G$-**模**。这样的函子不可能保持投射对象，因为 $\mathbf{vect}_G$ 的张量单位由半单性可知是投射的，而 $\Bbbk G$-**模** 的张量单位不是投射的。由命题 4.21， $\mathcal{C}^*_{\mathbf{vect}}$ 不是正合的，因此 $\mathbf{vect} \boxtimes_{\mathcal{C}} \mathbf{vect}$ 不是正合的。

例 4.24。 考虑 Sweedler 四维 Hopf 代数 S 的 $\mathcal{C} = S$-**模**，它同构于玻色化 Hopf 代数 $B \rtimes \mathbb{C}C_2$, 其中 $B = \mathbb{C}[x]/(x^2)$ 是 $\mathbf{svect}$ 中的交换且余交换 Hopf 代数，参见第 8.4 节。因此，$\mathbf{svect}$ 通过张量函子 $F\colon \mathcal{C} \to \mathbf{svect}$ 获得左 $\mathcal{C}$-模结构；该函子遗忘了 B-作用。根据 Hopf 模基本定理（在$\mathbf{svect}$中），我们得到左 $\mathcal{C}$-模范畴的等价 $\mathbf{svect} \simeq$**模**$_{\mathcal{C}}$-B^*, 其中 $B^* = \mathbb{C}[y]/(y^2)$。$\mathbf{svect}$ 的编织 ψ 在 $\mathcal{C}$ 上诱导出编织，并且相对于此编织， B^* 是 $\mathcal{C}$ 中的交换正合代数。因此，$(B^*)^{\psi} = B^* = (B^*)^{\psi^{-1}}$ 作为 $\mathcal{C}$ 中的代数

并且，应用引理 3.13，我们得到 $\mathcal{C}$-双模范畴的等价

$$\mathrm{B}(\mathbf{svect}) \simeq \mathrm{B}(\mathbf{mod}_{\mathcal{C}}\text{-}B^*) \simeq (B^*)^{\psi^{-1}}\text{-}\mathbf{mod}_{\mathcal{C}} = B^*\text{-}\mathbf{mod}_{\mathcal{C}},$$

其中，B($\mathcal{M}$) 是与左 $\mathcal{C}$-模 $\mathcal{M}$ 相关联的 $\mathcal{C}$-双模，见 (2.10)。再次利用霍普夫模基本定理，后一个范畴等价于作为右 $\mathcal{C}$-模范畴的 $\mathbf{svect}$ 。因此，B(svect) 等价于由张量函子 F 定义的 $\mathcal{C}$-双模（参见例 B.4），我们将其简单记作 $\mathbf{svect}$。

回顾命题 3.11 的证明，左 $\mathcal{C}$-模 $\mathbf{svect} \boxtimes_{\mathcal{C}} \mathbf{svect}$ 可以视为单子上的模范畴

$$T = (-) \triangleleft B^* \cong (-) \otimes F(B^*) \colon \quad \mathbf{svect} \to \mathbf{svect}.$$

因此，我们有左 $\mathcal{C}$-模范畴 $\mathbf{svect} \boxtimes_{\mathcal{C}} \mathbf{svect} \simeq \mathbf{mod}_{\mathbf{svect}}\text{-}B^*$ 之间的等价。$\mathbf{mod}_{\mathbf{svect}}\text{-}B^*$ 上的左 $\mathcal{C}$-作用继承自 $\mathbf{svect}$ 上的左 $\mathcal{C}$-作用。因此，对于右 B^*-模 V 以及 $\mathcal{C}$ 中的对象 X，我们有 $X \triangleright V = F(X) \otimes V$，其中右 B^*-作用定义为

$$(x \otimes v) \cdot f = x \otimes vf,$$

对于 $x \in X$、$v \in V$ 和 $f \in B^*$。考虑右 B^*-模 $\mathbb{1}$，它由 $\mathbf{svect}$ 的张量单位给出，其中 y 的作用为零。于是，对于 $\mathcal{C}$ 中的任意对象 X，y 在 $X \triangleright \mathbb{1} = F(X) \otimes \mathbb{1}$ 上的作用仍为零。因此，$X \triangleright \mathbb{1}$ 不是投射的，且 $\mathbf{svect} \boxtimes_{\mathcal{C}} \mathbf{svect}$ 不是正合的。

另一个例子见推论 8.16，其中我们证明 ${}^*\mathbf{vect} \boxtimes_{\mathcal{C}} \mathbf{vect}$ 不是正合的，其中 $\mathcal{C} = u_q(\mathfrak{sl}_2)$-**模** 是由 $\mathfrak{sl}_2$ 的可因子化小量子群在奇数阶单位根 q 处的有限维模构成的非退化编织张量范畴。

上述例子表明，在零特征与非零特征下，以及对称编织和非退化编织两种情形中，正合 $\mathcal{C}$-模范畴都不构成 $\mathcal{C}$-**模**的幺半 2-子范畴。等价地，A、B 是正合代数，一般不意味着 $A \otimes B$ 是正合代数。例 4.24 还表明，交换正合代数的张量积一般并非正合代数。

注4.25。在更一般的 $\mathcal{C}$-双模范畴设定中，结果 [DN1, 命题 2.10]（该结果表明，如果 $\mathcal{M}$ 和 $\mathcal{N}$ 是正合的 $\mathcal{C}$-双模范畴，那么 $\mathcal{M} \boxtimes_{\mathcal{C}} \mathcal{N}$ 是正合的 $\mathcal{C}$-双模范畴）是错误的。[10] 利用定理 2.9 中的幺半 2-函子 B: $\mathcal{C}$-**模** $\to$ $\mathcal{C}$-**双模**，例 4.23 和 4.24 给出了这一说法的反例。

作为一个不需要编织假设的反例，考虑通过纤维函子 $F\colon \mathcal{C} \to \mathbf{vect}$，如例 B.4 中所述，将$\mathbf{vect}$ 视为一个 $\mathcal{C}$-双模。于是 $\mathcal{C} = H$-**模**和 $F\colon \mathcal{C} \to \mathbf{vect}$，如例 B.4 中所述。于是

$$\mathcal{C}^*_{\mathbf{vect}} = \mathrm{Fun}_{\mathcal{C}}(\mathbf{vect}, \mathbf{vect}) \simeq H^*\text{-}\mathbf{mod},$$

参见 [EGNO，例 7.12。26] 或第 8.1 节。根据 [DSPS2，推论 2.4。11], $\mathbf{vect} \boxtimes_{\mathcal{C}} \mathbf{vect} \simeq \mathcal{C}^*_{\mathbf{vect}}$ 作为 $\mathcal{C}$-双模。$\mathbf{vect} \boxtimes_{\mathcal{C}} \mathbf{vect}$ 上的左、右 $\mathcal{C}$-作用继承自$\mathbf{vect}$。因此，$\mathbf{vect} \boxtimes_{\mathcal{C}} \mathbf{vect} \simeq \mathcal{C}^*_{\mathbf{vect}}$不是正合的 $\mathcal{C}$-双模，前提是 H^* 不是半单的；特别是，当 $\mathrm{char}\,\Bbbk = 0$ 且 H是非半单的时。

[DN1，命题 2.10] 的证明中的漏洞在于：尽管 $\mathrm{Fun}_{\mathcal{C}}(\mathcal{M},\ \mathcal{N})$ 作为 $\mathcal{C}^*_{\mathcal{N}}$-$\mathcal{C}^*_{\mathcal{M}}$-双模范畴是正合的，但除非附录 B.4 中的函子 $A^r_{\mathcal{M}}\colon \mathcal{C}^{\otimes \mathrm{op}} \to \mathcal{C}^*_{\mathcal{M}}$ 和 $A^r_{\mathcal{N}}\colon \mathcal{C}^{\otimes \mathrm{op}} \to \mathcal{C}^*_{\mathcal{N}}$ 保持投射对象，否则这并不意味着它作为 $\mathcal{C}$-双模范畴是正合的。

相对 Deligne 积无法保持正合模范畴，这促使我们提出完全正合模范畴的概念，并将在下一节第 5 节中介绍。完全正合模范畴具有一项重要性质：公式 (B.18) 中提到的函子 $A^r_{\mathcal{M}}\colon \mathcal{C}^{\otimes \mathrm{op}} \to \mathcal{C}^*_{\mathcal{M}}$ 确实保持投射对象。因此，这一类在相对 Deligne 积下封闭，从而构成 $\mathcal{C}$-**模**的一个幺半 2-子范畴。如果 $\mathcal{C}$ 是一个编织融合范畴且 $\mathrm{char}\,\Bbbk = 0$，那么正合与完全正合 $\mathcal{C}$-模的这些 2-子范畴相同。

[10] 不过，这并不影响 [DN1] 的主要结果。

5. Fully exact module categories

在本节中，我们始终假设 $\mathcal{C}$ 是任意域 $\Bbbk$上的有限编织张量范畴。在第 5.1 节中，我们定义完全正合 $\mathcal{C}$-模范畴，并证明它们构成 $\mathcal{C}$-**模**的一个幺半 2-子范畴。第 5.2 节定义完全正合代数，第 5.3 节则证明，作为双模相对投射的代数——这是可分代数这一类的推广——是完全正合的。

5.1. **全正合模范畴**。

定义 5.1. 我们称一个 $\mathcal{C}$-模范畴 $\mathcal{M}$ 是完全正合 的，如果对任意正合 $\mathcal{C}$-模范畴 $\mathcal{N}$， $\mathcal{N}\boxtimes_{\mathcal{C}}\mathcal{M}$ 作为左 $\mathcal{C}$-模范畴是正合的。

我们记 将 $\mathcal{C}$-**mod** 中完全正合 $\mathcal{C}$-模范畴的全 2-子范畴记为 $\mathcal{C}$-**fex** .

引理 5.2. 如果左 $\mathcal{C}$-模范畴 $\mathcal{M}$ 是完全正合的，那么 $\mathcal{M}$ 是正合的

证明. 在定义 5.1 中令 $\mathcal{N}=\mathcal{C}$，对于正则 $\mathcal{C}$-模范畴 $\mathcal{C}$， $\mathcal{C}\boxtimes_{\mathcal{C}}\mathcal{M}\simeq\mathcal{M}$ 是正合的。 □

例 5.3。

(i) 正则 $\mathcal{C}$-模范畴 $\mathcal{C}$，即 $\mathcal{C}$-**模** 的幺半群单位，由于等价关系 $\mathcal{N}\boxtimes_{\mathcal{C}}\mathcal{C}\simeq\mathcal{N}.$，它是完全正合的。(ii) 正如我们将在下文命题 5.16 中证明的，如果左 $\mathcal{C}$-模范畴 $\mathcal{M}$ 是可分的（见定义 4.8），那么 $\mathcal{M}$ 是完全正合的。(iii) 回忆例 4.23：在特征整除群 G 的阶的域 $\Bbbk$ 上，对于 $\mathcal{C}=\mathbf{vect}_G$ 和正合的 $\mathcal{C}$-模 $\mathcal{M}=\mathbf{vect}$，相对 Deligne 积 $\mathbf{vect}\boxtimes_{\mathcal{C}}\mathbf{vect}$ 不是正合的 $\mathcal{C}$-模。因此，在这种情况下，$\mathbf{vect}$ 不是完全正合的。(iv) 即使 $\operatorname{char}\Bbbk=0$，模范畴 $\mathbf{vect}$ 通常也不是完全正合的。我们稍后将以对称张量范畴 S-**模** 为例进行讨论，其中 S 是 Sweedler 四维 Hopf 代数（见第 8.4 节）；以及 $u_q(\mathfrak{sl}_2)$-**模**，其中 Hopf 代数 $u_q(\mathfrak{sl}_2)$ 是可因子化的（见第 8.3 节）。

我们定义全正合模范畴的动机在于它们在相对 Deligne 积下保持封闭。

命题 5.4。 如果 $\mathcal{M}_1$ 和 $\mathcal{M}_2$ 是全正合 $\mathcal{C}$-模范畴，那么它们的相对 *Deligne* 积 $\mathcal{M}_1\boxtimes_{\mathcal{C}}\mathcal{M}_2$ 也是如此。因此， $\mathcal{C}$-**fex** 是 $\mathcal{C}$-**mod** 的一个幺半2-子范畴。

证明。 设 $\mathcal{M}_1$ 和 $\mathcal{M}_2$ 是全正合 $\mathcal{C}$-模范畴。令 $\mathcal{N}$ 为一个正合 $\mathcal{C}$-模范畴。现在，利用 $\mathcal{M}_1$ 是全正合的，可知 $\mathcal{N}\boxtimes_{\mathcal{C}}\mathcal{M}_1$ 是正合的；又由于 $\mathcal{M}_2$ 是全正合的，故 $(\mathcal{N}\boxtimes_{\mathcal{C}}\mathcal{M}_1)\boxtimes_{\mathcal{C}}\mathcal{M}_2$ 是正合的。因此，等价范畴

$$\mathcal{N}\boxtimes_{\mathcal{C}}(\mathcal{M}_1\boxtimes_{\mathcal{C}}\mathcal{M}_2)\simeq(\mathcal{N}\boxtimes_{\mathcal{C}}\mathcal{M}_1)\boxtimes_{\mathcal{C}}\mathcal{M}_2,$$

通过公式 (C.12) 中构造的结合子，也是正合的，这意味着 $\mathcal{M}_1\boxtimes_{\mathcal{C}}\mathcal{M}_2$ 是全正合的。□

现在我们可以推导出全正合 $\mathcal{C}$-模范畴的等价条件 .

定理 5.5。 设 $\mathcal{C}$ 是任意域 $\Bbbk$ 上的带编织的有限张量范畴。对于有限左 $\mathcal{C}$-模范畴 $\mathcal{M}$，以下条件等价：

(i) $\mathcal{M}$ 是完全正合的。*(ii)* 对于任意正合的 $\mathcal{C}$-模 $\mathcal{N}$，定义 *2.10* 中的左 $\mathcal{C}$-模范畴 $\mathrm{Fun}_{\mathcal{C}}(\mathcal{N},\mathcal{M})$ 是正合的。*(iii)* 中心化子 $\mathcal{C}^*_{\mathcal{M}}=\mathrm{Fun}_{\mathcal{C}}(\mathcal{M},\mathcal{M})\simeq{}^*\mathcal{M}\boxtimes_{\mathcal{C}}\mathcal{M}$ 作为左 $\mathcal{C}$-模范畴是正合的。*(iv)* 函子 $A_{\mathcal{M}}$ 保投射对象。

证明。 由推论 4.18 可得 (i) 与 (ii) 等价，该推论表明 $\mathcal{N}$ 是正合的当且仅当 ${}^*\mathcal{N}$ 是正合的；此外，根据命题 3.28， $\mathcal{C}$-模范畴 ${}^*\mathcal{N}\boxtimes_{\mathcal{C}}\mathcal{M}\simeq\mathrm{Fun}_{\mathcal{C}}(\mathcal{N},\ \mathcal{M})$ 也等价。显然，取 $\mathcal{N}=\mathcal{M}$，将 $\mathcal{C}^*_{\mathcal{M}}=\mathrm{Fun}_{\mathcal{C}}(\mathcal{M},\ \mathcal{M})$ 特化，即可由 (ii) 推出 (iii)。

(iii) 与 (iv) 的等价性已在命题 4.21 中证明。

最后，我们证明 (iv) 蕴含 (ii)。由引理 4.20， $\mathcal{M}$ 是正合的，因此对于任意正合的 $\mathcal{N}$，根据 [EGNO, 命题 7.12.14]，$\mathrm{Fun}_{\mathcal{C}}(\mathcal{N},\ \mathcal{M})$ 作为左 $\mathcal{C}^*_{\mathcal{M}}$-模范畴是正合的。因此，由于幺半函子 $A_{\mathcal{M}}$ 保持投射对象，按照例 B.1 中通过幺半函子 $A_{\mathcal{M}}$ 限制作用，$\mathrm{Fun}_{\mathcal{C}}(\mathcal{N},\ \mathcal{M})$ 作为左 $\mathcal{C}$-模范畴也正合。如引理 2.14 所示，该作用与定义 2.10 中定义的作用一致。□

推论 5.6。 假设 $\mathcal{C}$ 是域 $\Bbbk$ 上的编织融合范畴。那么，对于左 $\mathcal{C}$-模范畴 $\mathcal{M}$，以下条件等价：

(i) $\mathcal{M}$ 是可分的，
(ii) $\mathcal{M}$ 是完全正合的，
(iii) $\mathcal{C}^*_{\mathcal{M}}$ 是半单的。

此外，若 $\Bbbk$ 是代数闭的，且 $\mathcal{C}$ 具有非零维数（例如，当特征$\Bbbk = 0$时），则 *(i)–(iii)* 还分别等价于以下各条件：

(iv) $\mathcal{M}$是正合的，*(*
v) $\mathcal{M}$是半单的。

证明。 由 [DSPS2，定理 2.5.4], 可知 (i) 与 (iii) 等价。由例 4.2(i)，(iii) 等价于$\mathcal{C}^*_{\mathcal{M}}$ 是正合的；而根据定理 5.5，这又等价于 (ii)。由同一例子可知，(iv) 与 (v) 等价。由 [DSPS2，命题 2.5.3], 可知，若 $\mathcal{M}$ 是可分的，则它是半单的，因此 (i) 蕴含 (v)。在更强的假设下，即 $\Bbbk$ 是代数闭的且 $\dim \mathcal{C} \neq 0$，例如当 $\mathrm{char}\ \Bbbk = 0$时，(v) 蕴含 (i)。事实上，在这些假设下，融合范畴$\mathcal{C}$的 Drinfeld 中心 $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$是半单的，参见 [EGNO，定理 9.3.2]。因此，由 [DSPS2，推论 2.5.9 和命题 2.5.10], 可知，任意半单左 $\mathcal{C}$-模范畴 $\mathcal{M}$ 都是可分的。□

注意，推论 5.6 中所有条件 (i)–(v) 等价所需的域 $\Bbbk$ 上的假设是必要的。例 5.3(iii) 给出了代数闭域上一个特征为 $p > 0$ 的融合范畴 $\mathcal{C}$ 上的模范畴 $\mathcal{M}$，它是正合（半单）的，但不是完全正合的。特别地，根据推论 5.6， $\mathcal{M}$ 不可分。推论 5.6 的第二部分中，或许可以将 $\Bbbk$ 代数闭这一假设放宽为假设 $\Bbbk$ 是完美域，参见 [DSPS2，注 2.6。10], 当然还要保留 $\dim \mathcal{C} \neq 0$ 这一假设。例如，对于 $\mathcal{C} = \mathbf{vect}$，推论 5.6 的第二部分蕴含，$\mathbf{vect}$ 中两个单代数的乘法在任意代数闭域上都是半单的。然而，众所周知，这一半单性结论实际上对任意完美域都成立。

注记 5.7。 若 $\mathcal{C}$ 是任意域 $\Bbbk$上的融合范畴，则 [DSPS2，定理 2.5.4] 表明， $\mathcal{C}^*_{\mathcal{M}}$是半单的，当且仅当 $\mathcal{M}$ 是可分的。当 $\mathcal{C}$ 是编织融合范畴时，利用例 4.2(i)，这表明 $\mathcal{M}$ 是可分的左 $\mathcal{C}$-模，当且仅当 $\mathcal{C}^*_{\mathcal{M}}$ 是正合左 $\mathcal{C}$-模。上文定理 5.5 中 (i) 与 (iii) 的等价性，是这一结论在非半单张量范畴 $\mathcal{C}$ 中的类比。这表明，对于非半单的 $\mathcal{C}$，全正合模范畴是可分模范畴的良好类比。在下文命题 5.15 中，我们将给出完全正合代数的一种刻画，其形式类似于可分代数的定义。

命题 5.8。 对于有限带编织结构的张量范畴之间的等价 $F\colon\ \mathcal{C} \to \mathcal{D}$，由命题 *C.7* 给出的幺半2-函子 $\mathrm{Res}_F\colon\ \mathcal{D}$-**模** $\to \mathcal{C}$-**模** 保全正合模范畴。

证明。 事实上，任何保全正合模范畴的幺半2-等价 R: $\mathcal{D}$-**模** $\to \mathcal{C}$-**模** 也会保全全正合模范畴。若 $\mathcal{M}$ 是全正合的，且 $\mathcal{N}$ 是正合的，则

$$R(\mathcal{N} \boxtimes_{\mathcal{D}} \mathcal{M}) \simeq R(\mathcal{N}) \boxtimes_{\mathcal{C}} R(\mathcal{M}),$$

且 $R(\mathcal{N} \boxtimes_{\mathcal{D}} \mathcal{M})$ 是正合的。由于任意正合的 $\mathcal{C}$-模范畴都等价于 $R(\mathcal{N})$ 这种形式，$R(\mathcal{M})$ 是完全正合的。□

5.2. **完全正合代数**。 现在我们回到这样的情形： $\mathcal{C}$ 是任意域 $\Bbbk$ 上的一般带编织的有限张量范畴。

定义 5.9 （完全正合代数）。我们称代数 A 属于 $\mathcal{C}$ 为完全正合，如果**模**$_{\mathcal{C}}$-A 作为左 $\mathcal{C}$-模范畴是完全正合的。

完全正合代数满足以下等价条件。

推论 5.10。对于代数 A 属于 $\mathcal{C}$，以下陈述等价。

(i) A是完全正合代数。*(ii)* $A^{\psi}\otimes A$ 是正合代数。*(iii)* $A^{\psi^{-1}}\otimes A$ 是正合代数。*(iv)* 对任意正合代数 B 属于 $\mathcal{C}$, $B\otimes A$ 都是正合代数。

证明。考虑左 $\mathcal{C}$-模范畴 $\mathcal{M}=$ **模**$_{\mathcal{C}}$-A 和 $\mathcal{N}=$ **模**$_{\mathcal{C}}$-B ，并回顾来自命题 3.16 和命题 3.15 的$\mathcal{C}$-线性等价 $\mathcal{C}^{*}_{\mathcal{M}}=\mathrm{Fun}_{\mathcal{C}}(\mathcal{M},\mathcal{M})\simeq$ **模**$_{\mathcal{C}}$-$A^{\psi}\otimes A$ 和 $\mathcal{N}\boxtimes_{\mathcal{C}}\mathcal{M}\simeq$ **模**$_{\mathcal{C}}$-$B\otimes A$ 。由定理 5.5 可得 (i)、(ii)、(iv) 等价。

(iv) 推出 (iii) 的蕴含关系是显然的，令 $B=A^{\psi^{-1}}$。我们证明 (iii) 推出 (ii)。假设 $A^{\psi^{-1}}\otimes A$ 是正合的。那么，根据命题 4.17,

$$(A^{\psi^{-1}}\otimes A)^{\psi}\cong A^{\psi}\otimes A$$

是正合的，其中代数同构取自引理3.9。证明完毕。 □

5.3. **相对投射代数**。对于代数 A 属于 $\mathcal{C}$，我们回顾在 (4.4) 中引入的诱导 A-双模$I^{b}(X)=A\otimes X\otimes A$, 其中 $X\in\mathcal{C}$。

定义 5.11。如果A-双模 A 是某个诱导双模 $I^{b}(X)=A\otimes X\otimes A$的直和项，其中存在某个 $X\in\mathcal{C}$，则称代数 A 属于 $\mathcal{C}$ 作为双模是相对投射的。

文献中考虑的一个特殊情形（参见 [DSPS2，第 2.5] 节）是可分代数的情形，参见定义 4.8。在这种情况下，可以在定义 5.11 中选取 $X=\mathbb{1}$，从而看到任意可分代数都是相对投射的。

我们来说明定义 5.11 中的术语。函子 $I^{b}\colon\mathcal{C}\to A$-**双模**$_{\mathcal{C}}$ 是遗忘双模结构的函子 $U\colon A$-**双模**$_{\mathcal{C}}\to\mathcal{C}$ 的左伴随。注意，函子 U 是加性的、正合的、忠实的，因此 $I^{b}\dashv U$ 是 ML1, Sec. IX.6] 中的消解对 [。回顾 ML1, Ch. IX] 中消解对的相对投射 对象的定义 [。根据 FGS, Lem. 2.1], ，消解对 $I^{b}\dashv U$ 的相对投射对象恰好对应于这样的 A-双模：它是某个对象 X 在 $\mathcal{C}$中的 $I^{b}(X)$ 的直和项。

定义 5.12. 如果左 $\mathcal{C}$-模 $\mathcal{M}$ 作为$\mathcal{C}$-模范畴等价于**模**$_{\mathcal{C}}$-A ，其中代数 A 属于 $\mathcal{C}$ ，且作为 A-双模是相对投射的，那么我们称 $\mathcal{M}$ 是相对投射 的。

引理 5.13. 若 $\mathcal{M}$ 是相对投射的，则按照定义 *4.12* 的意义， $\mathcal{M}$ 是相对半单的。

证明. 对于任意 X 中的 $\mathcal{C}$，将式 (4.4) 中双模 $I^{b}(X)$ 的左 A-作用遗忘后，我们得到式 (4.1) 中的右 A-模 $I(A\otimes X)$。因此，如果 $\mathcal{M}=$ **模**$_{\mathcal{C}}$-A 对于作为双模的 A 是相对投射的，那么 A 是右 A-模 $I(A\otimes X)$ 的一个直和项，因为遗忘函子是可加的。这意味着 A 作为 A 中的代数是相对半单的，见定义 4.6，因此 $\mathcal{M}$ 是相对半单的。□

代数作为双模的相对投射性在定义 3.7 中的张量积 $A\otimes B=A\otimes^{\psi}B$ 下保持不变。

命题 5.14. 假设 $\mathcal{C}$ 是编织的。如果 A 和 B 作为双模都是相对投射的，那么$A\otimes B$ 作为双模也是相对投射的。

证明. 假设 A 和 B 作为双模都是相对投射的。因此，我们可以在 $\mathcal{C}$ 中找到对象 X和 Y 以及双模映射

$$\iota_A\colon A \hookrightarrow A\otimes X\otimes A, \qquad \pi_A\colon A\otimes X\otimes A \twoheadrightarrow A,$$
$$\iota_B\colon B \hookrightarrow B\otimes Y\otimes B, \qquad \pi_B\colon B\otimes Y\otimes B \twoheadrightarrow B,$$

分别是 A 上的双模和 B 上的双模，使得

$$\pi_A\iota_A = \mathrm{id}_A, \qquad \pi_B\iota_B = \mathrm{id}_B.$$

现在考虑以下映射

$$\begin{aligned}\iota_{A\otimes B} =&(\mathrm{id}_A\otimes\psi^{-1}_{X,B}\otimes\psi^{-1}_{A,Y}\otimes\mathrm{id}_B)(\mathrm{id}_{A\otimes X}\otimes\psi^{-1}_{A,B}\otimes\mathrm{id}_{Y\otimes B})(\iota_A\otimes\iota_B)\colon\\ &A\otimes B\hookrightarrow A\otimes B\otimes X\otimes Y\otimes A\otimes B,\\ \pi_{A\otimes B} =&(\pi_A\otimes\pi_B)(\mathrm{id}_{A\otimes X}\otimes\psi_{B,A}\otimes\mathrm{id}_{Y\otimes B})(\mathrm{id}_A\otimes\psi_{B,X}\otimes\psi_{Y,A}\otimes\mathrm{id}_B)\colon\\ &A\otimes B\otimes X\otimes Y\otimes A\otimes B\twoheadrightarrow A\otimes B.\end{aligned}$$

可以验证， $\iota_{A\otimes B}$ 和 $\pi_{A\otimes B}$ 确实是 $A\otimes B$-双模的态射，其中作用由该张量积代数的正则左作用与右作用给出。根据构造可直接得到$\pi_{A\otimes B}\iota_{A\otimes B}=\mathrm{id}_{A\otimes B}$. 因此， $A\otimes B$ 作为双模是相对投射的。□

我们得到完全正合代数的以下等价刻画。为此，回顾一下式 (3.1)–(3.2) 中 $\mathcal{C}$ 对 A 中双模的 $\mathcal{C}$-作用。

命题 5.15。设 A 是 $\mathcal{C}$ 中的一个代数，其乘积映射为 m_A： $A\otimes A\to A$，且 P 是 $\mathcal{C}$ 中的某个投射对象。那么以下条件等价：

(1) A 是完全正合的。*(2)* 映射 $P\triangleright m_A$ 在 A-**双模**$_{\mathcal{C}}$中分裂为一个态射。*(3)* $P\triangleright A$ 是 A-**双模**$_{\mathcal{C}}$中的投射对象。

证明。 回忆一下， A-**双模**$_{\mathcal{C}}$ 中的任意投射对象都是一个诱导双模$I^b(Q)$的直和项，其中 Q 是 $\mathcal{C}$中的投射对象，参见 [EGNO，第 7.8]节。我们在第 4.4 节看到，函子 I^b是$\mathcal{C}$-线性的。特别地，我们有 A-双模之间的同构 $Q\triangleright I^b(X)\cong I^b(Q\otimes X)$，其中对象$Q$， X属于 $\mathcal{C}$。根据命题 4.21，**模**$_{\mathcal{C}}$-A 完全正合，当且仅当复合

$$\mathcal{C}\xrightarrow{A_{\mathcal{M}}}\mathcal{C}^*_{\mathcal{M}}\xrightarrow{E}A\text{-}\mathbf{bimod}_{\mathcal{C}},$$

其中 E是命题3.2中的等价函子，并保持投射对象。因此，应用引理 2.14， A 完全正合，当且仅当对于任意投射对象 P,

$$(E\circ A_{\mathcal{M}})(P)=E(P\triangleright\mathrm{id}_{\mathcal{M}})=P\triangleright A, \tag{5.1}$$

是某个投射 Q 的 $I^b(Q)$ 的直和项。等价地， $P\triangleright A$ 在 A-**双模**$_{\mathcal{C}}$ 中是投射的。由于 m_A: $A\otimes A\to A$ 是左 $\mathcal{C}$-模范畴 A-**双模**$_{\mathcal{C}}$中的态射， $P\triangleright m_A$ 也属于该范畴中的态射。因此，复合

$$I^b(P)=I^b(P\triangleright\mathbb{1})\xrightarrow{\sim}P\triangleright I^b(\mathbb{1})=P\triangleright(A\otimes A)\xrightarrow{P\triangleright m_A}P\triangleright A,$$

其中，第一个同构是方程 (4.4) 中函子 I^b 的 $\mathcal{C}$-线性结构，它是 A-**双模**$_{\mathcal{C}}$ 中的满态射，因此可分裂。于是，我们可以选取 $Q=P$，并且 $P\triangleright A$ 是 $\mathcal{C}$中作为 A-双模的 $P\triangleright(A\otimes A)$ 的直和项。至此，我们证明了条件 (1) 等价于条件 (2) 或 (3) 对所有 投射对象 P成立。下文将证明，(1) 也等价于这些条件对至少一个投射对象成立。

现在回顾一下 [BGR，命题 2.3(1)]： $\mathcal{C}$ 中投射对象构成的（厚）张量理想，由任意一个固定的非零投射对象 P生成（这里的生成是指取直缩）。利用 $\triangleright$ 函子的可加性，我们因此可以将 (5.1) 中任意投射对象的作用替换为某个固定投射对象 P的$X\otimes P$作用以及某个 $X\in\mathcal{C}$。结论由以下事实得出：对任意 X，函子 $X\triangleright(-)$ 保持 $\mathcal{M}$中的投射对象。□

命题 5.15 中完全正合代数 A 的等价性质 (2) 可表述为 A 是投射可分的，回顾我们在第 1.3 节中的讨论。我们强调，可分，或者更一般地，作为双模相对投射，是完全正合的充分条件。

命题 5.16. 如果 A 作为双模是相对投射的，那么 A 是全正合的。特别是，如果 A 是可分的，那么 A 是全正合的。

证明。 假设 A 是 A-双模 $I^b(X)$ 的一个直和项。设 P 是 $\mathcal{C}$中的一个投射对象。于是，由于作用函子对两个分量都是可加的， $P \triangleright A$是投射 A-双模 $P \triangleright I^b(X) \cong I^b(P \otimes X)$ 的一个直和项。因此，结论由命题 5.15 得出。□

我们将在引理 8.26 中看到，有些全正合模范畴并非相对投射。

推论 5.17. 对于 $\mathcal{C}$ 编织的情形，由相对投射的 $\mathcal{C}$-模范畴构成的全 2-子范畴，是 $\mathcal{C}$-$\mathbf{fex}$的一个幺半2-子范畴。

证明。 这是命题 5.14 应用于 $\mathcal{M} = \mathbf{模}_{\mathcal{C}}\text{-}A$、 $\mathcal{N} = \mathbf{模}_{\mathcal{C}}\text{-}B$ 的直接推论：对某些作为双模相对投射的代数 A 与 B 的选取， $\mathcal{M} \boxtimes_{\mathcal{C}} \mathcal{N}$ 也是相对投射的。由命题 5.16，我们得到完全正合 $\mathcal{C}$-模范畴的幺半 2-范畴的一个幺半 2-子范畴。□

注 5.18。 设 $\mathcal{C}$ 是有限张量范畴。我们注意到， A 作为A-双模是投射的，当且仅当定义 5.11 中的对象 X 可以选为投射对象。若 $\mathcal{C}$ 是融合范畴，则 A 可分等价于 A 作为 A-双模是投射的，这也等价于 A 作为 A-双模是相对投射的。因此，在半单情形下，这些性质在代数的 Morita 等价下是稳定的。当 $\mathcal{C}$ 非半单时，可分代数以及作为双模相对投射的代数这些概念，由例 4.16 可知在 Morita 等价下并不稳定，因为由引理 5.13，每一个作为 A-双模相对投射的代数特别地都是相对半单的。

我们还可以考虑 $\mathcal{C}$-模范畴 $\mathcal{M} = \mathbf{模}_{\mathcal{C}}\text{-}A$，其中 A 在 A-$\mathbf{双模}_{\mathcal{C}}$中是投射的。可以证明，这一条件在内代数的 Morita 等价下保持不变。然而，至少在特征零时，我们看到，对于 $\mathcal{C}$ 非半单有限编织张量范畴，不存在具有此性质的非平凡代数。

推论 5.19。 假设 特征$\Bbbk = 0$。若 A 是 $\mathcal{C}$ 中的非零代数，且作为 A-$\mathbf{双模}_{\mathcal{C}}$中的对象是投射的，则 $\mathcal{C}$ 是半单的，因此 A 是可分的。

证明。 假设 A 在 A-$\mathbf{双模}_{\mathcal{C}}$中是投射的。那么， A 特别是作为 A-双模相对投射的。因此，根据命题 5.16， $\mathcal{M}$ 是完全正合的。因此， $\mathcal{M}$ 和 $\mathcal{C}^*_{\mathcal{M}}$ 是正合的左 $\mathcal{C}$-模范畴。由于 $\mathcal{M}$ 是正合的，根据 [DSPS2, 定理 2.3， $\mathcal{C}^*_{\mathcal{M}}$ 是一个多张量范畴 5]。因此，根据引理 A.1， $\mathcal{C}^*_{\mathcal{M}}$ 中的投射对象构成一个理想。由于 $\mathcal{C}^*_{\mathcal{M}} \cong A$-$\mathbf{双模}_{\mathcal{C}}$ 的恒等对象是投射的，每个对象都是投射的，且 $\mathcal{C}^*_{\mathcal{M}}$ 是半单的。

现在，由于 $\mathcal{M}$ 非零，根据推论 2.17，没有对象会以零作用。因此， [EGNO，定理 7.12.16] 给出一个保正合模范畴的 2-等价 $\mathcal{C}$-$\mathbf{模} \simeq \mathcal{C}^*_{\mathcal{M}}$-$\mathbf{模}$ 。这个 2-等价将正则 $\mathcal{C}$-模 $\mathcal{C}$ 映射到 $\mathcal{C}^*_{\mathcal{M}}$-模 $\mathcal{N} := 函子_{\mathcal{C}}(\mathcal{M}, \mathcal{C})$，并诱导出一个等价 $\mathcal{C} \simeq 函子_{\mathcal{C}}(\mathcal{C}, \mathcal{C}) \simeq 函子_{\mathcal{C}^*_{\mathcal{M}}}(\mathcal{N}, \mathcal{N})$。若 $\Bbbk$是特征零域，则 $\mathcal{N}$正合意味着函子$_{\mathcal{C}^*_{\mathcal{M}}}(\mathcal{N}, \mathcal{N})$正合，因此根据推论 5.6，它是半单的。由此， $\mathcal{C}$是半单的。正如注释 5.18 中所解释的， A 也因此是可分的。□

6. Duals of fully exact module categories

本节研究有限编织张量范畴 $\mathcal{C}$ 上完全正合 $\mathcal{C}$-模范畴的对偶。在第 6.1 节讨论 $\mathcal{C}$-模的对偶的预备知识后，我们引入*op*-完全正合 $\mathcal{C}$-模范畴，并证明完全正合模范畴的对偶是 op-完全正合的，见

第 6.2 节。由例 6.11 可知，对于非对称的 $\mathcal{C}$，完全正合模范畴一般不在取对偶运算下封闭。我们在第 6.3 节根据编织相反代数给出对偶为完全正合的判据。最后，在第 6.4 节中，我们将 $\mathcal{M}$ 定义为完美 $\mathcal{C}$-模范畴，当且仅当 $\mathcal{M}$ 同时是完全正合和 op-完全正合的。我们证明，完美 $\mathcal{C}$-模范畴恰好是 $\mathcal{C}$-**模**中的完全可对偶对象（按 [L, P] 的意义），见定理 6.25。

6.1. **有限模范畴的可对偶性**。 我们先设置一个预备章节，依照 [DSPS2 第 3.2]，节，讨论第 3.4 节中引入的左、右对偶 $\mathcal{C}$-模如何成为幺半 2-范畴 $\mathcal{C}$-**模** 中的对偶，具体含义见定义 C.2。

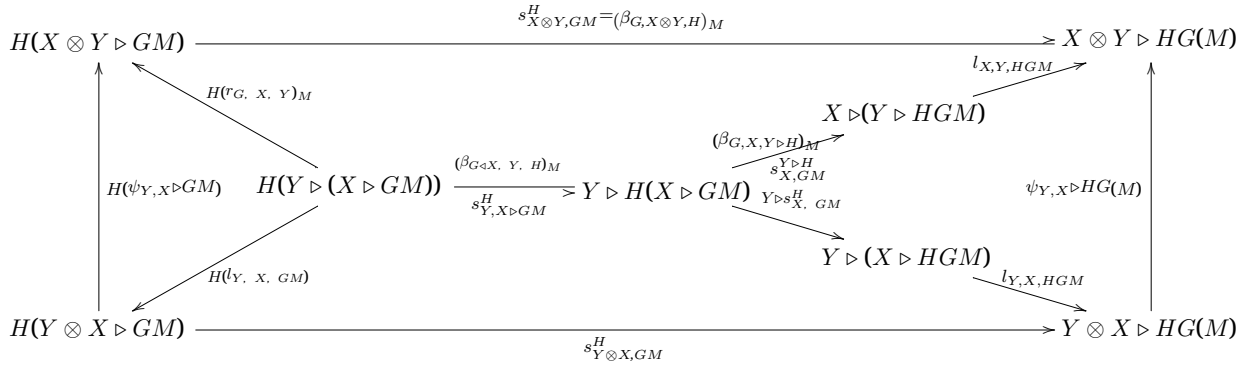
对于左 $\mathcal{C}$-模 $\mathcal{M},\mathcal{N},\mathcal{P}$，考虑复合函子

$$\circ\colon \mathrm{Fun}_{\mathcal{C}}(\mathcal{M},\mathcal{N})\times\mathrm{Fun}_{\mathcal{C}}(\mathcal{N},\mathcal{P})\to\mathrm{Fun}_{\mathcal{C}}(\mathcal{M},\mathcal{P}),\quad (G,H)\mapsto H\circ G.$$

我们利用 $\mathcal{C}$-线性结构为 $\circ$ 定义一个 $\mathcal{C}$-平衡，即对于 M，若 $\mathcal{M}$，我们定义

$$\circ\big((G\triangleleft X),H\big)(M)=H(X\triangleright G(M))\xrightarrow{(\beta_{G,X,H})_M:=s^H_{X,G(M)}}X\triangleright HG(M)=\circ\big(G,(X\triangleright H)\big)(M).$$

这里，我们利用了根据定义 2.10 有 $(X\triangleright G)(M)=X\triangleright G(M)$，以及由 (2.8) 得到的 $M\triangleleft X=X\triangleright M$。下面的计算验证了上述平衡 β 满足相干条件 (2.1)。在对象 M 处取值，其中 $\mathcal{M}$，这可由



交换。此处，右图依 (2.11) 交换，左图依 $(r_{G,X,Y})_M=r_{GM,X,Y}$ 在 (2.8) 中的定义而交换，下图依 s^H 的凝聚性交换，见 (B.6)，外图依 $s^H_{-,GM}$ 关于 $\psi_{Y,X}$ 的自然性而交换。此外，由严格幺性可知 $\beta_{G,\mathbb{1},H}=s^H_{\mathbb{1},G(M)}=\mathrm{id}$ 如所要求。因此，通过下降到相对 Deligne 积，我们得到一个良定义的 $\mathcal{C}$-模范畴函子

$$\circ\colon \mathrm{Fun}_{\mathcal{C}}(\mathcal{M},\mathcal{N})\boxtimes_{\mathcal{C}}\mathrm{Fun}_{\mathcal{C}}(\mathcal{N},\mathcal{P})\to\mathrm{Fun}_{\mathcal{C}}(\mathcal{M},\mathcal{P}). \tag{6.1}$$

由命题3.28 以及 $\mathcal{C}$ 的自对偶性可知，存在 $\mathcal{C}$-模范畴之间的等价 $\mathrm{Fun}_{\mathcal{C}}(\mathcal{C},\ \mathcal{M})\simeq\mathcal{M}$，尤其是 $\mathrm{Fun}_{\mathcal{C}}(\mathcal{C},\ \mathcal{C})\simeq\mathcal{C}$。结合命题3.28(ii)中的等价，我们得到一个函子

$$\mathrm{ev}^r_{\mathcal{M}}:=\big(\mathcal{M}\boxtimes_{\mathcal{C}}{}^*\mathcal{M}\xrightarrow{\sim}\mathrm{Fun}_{\mathcal{C}}(\mathcal{C},\mathcal{M})\boxtimes_{\mathcal{C}}\mathrm{Fun}_{\mathcal{C}}(\mathcal{M},\mathcal{C})\xrightarrow{\circ}\mathrm{Fun}_{\mathcal{C}}(\mathcal{C},\mathcal{C})\xrightarrow{\sim}\mathcal{C}\big). \tag{6.2}$$

引理 6.1。T $\mathcal{C}$-线性函子的以下图在自然同构意义下交换 :

$$\begin{array}{ccccc}
\mathrm{Fun}_{\mathcal{C}}(\mathcal{C},\mathcal{M})\boxtimes_{\mathcal{C}}\mathrm{Fun}_{\mathcal{C}}(\mathcal{M},\mathcal{M}) & \xrightarrow{\circ} & \mathrm{Fun}_{\mathcal{C}}(\mathcal{C},\mathcal{M}) & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{M} \\
\downarrow{\scriptstyle\sim} & & & & \uparrow{\scriptstyle L_{\mathcal{M}}} \\
\mathcal{M}\boxtimes_{\mathcal{C}}({}^{*}\mathcal{M}\boxtimes_{\mathcal{C}}\mathcal{M}) & \xrightarrow{A_{\mathcal{M},{}^{*}\mathcal{M},\mathcal{M}}} & (\mathcal{M}\boxtimes_{\mathcal{C}}{}^{*}\mathcal{M})\boxtimes_{\mathcal{C}}\mathcal{M} & \xrightarrow{\mathrm{ev}^{r}_{\mathcal{M}}\boxtimes_{\mathcal{C}}\mathrm{id}_{\mathcal{M}}} & \mathcal{C}\boxtimes_{\mathcal{C}}\mathcal{M},
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc}
\mathrm{Fun}_{\mathcal{C}}(\mathcal{M},\mathcal{M})\boxtimes_{\mathcal{C}}\mathrm{Fun}_{\mathcal{C}}(\mathcal{M},\mathcal{C}) & \xrightarrow{\circ} & \mathrm{Fun}_{\mathcal{C}}(\mathcal{M},\mathcal{C}) & \xrightarrow{\sim} & {}^{*}\mathcal{M} \\
\downarrow{\scriptstyle\sim} & & & & \uparrow{\scriptstyle R_{\mathcal{M}}} \\
({}^{*}\mathcal{M}\boxtimes_{\mathcal{C}}\mathcal{M})\boxtimes_{\mathcal{C}}{}^{*}\mathcal{M} & \xrightarrow{A_{{}^{*}\mathcal{M},\mathcal{M},{}^{*}\mathcal{M}}} & {}^{*}\mathcal{M}\boxtimes_{\mathcal{C}}(\mathcal{M}\boxtimes_{\mathcal{C}}{}^{*}\mathcal{M}) & \xrightarrow{\mathrm{id}_{{}^{*}\mathcal{M}}\boxtimes_{\mathcal{C}}\mathrm{ev}^{r}_{\mathcal{M}}} & {}^{*}\mathcal{M}\boxtimes_{\mathcal{C}}\mathcal{C}.
\end{array}$$

这里，$\circ$ 是式 (6.1) 中的函子，而 A、R、L 分别表示 $\mathcal{C}$-**模**的结合子、右单位子和左单位子函子，见 (2.4)–(2.5)。

证明。A 假设 $\mathcal{M}=$ **模**$_{\mathcal{C}}$-A。那么我们有以下 $\mathcal{C}$-模范畴的等价

$$\mathrm{Fun}_{\mathcal{C}}(\mathcal{M},\mathcal{M})\simeq\mathbf{mod}_{\mathcal{C}}\text{-}A^{\psi}\otimes A,\quad {}^{*}\mathcal{M}\simeq\mathbf{mod}_{\mathcal{C}}\text{-}A^{\psi}$$

相对 Deligne 积由相应张量积代数上的内部右模直接给出，见命题 3.16 和命题 3.15。要证明第一个图的交换性，只需考虑一个对象 $V\otimes W\in$ **模**$_{\mathcal{C}}$-$A^{\psi}\otimes A$ 并

$$M\otimes V\otimes W\in\mathbf{mod}_{\mathcal{C}}\text{-}A\otimes A^{\psi}\otimes A\simeq\mathcal{M}\boxtimes_{\mathcal{C}}\mathrm{Fun}_{\mathcal{C}}(\mathcal{M},\mathcal{M}).$$

一方面，沿引理陈述中图示的函子复合路径下方部分进行计算，可得

$$M\otimes V\otimes W\mapsto(M\otimes_{A}V)\otimes W.$$

另一方面，上方路径中的函子 $\circ$ 由下式给出

$$M\otimes V\otimes W\mapsto M\otimes_{A}(V\otimes W).$$

由于张量积是正合的，且右 A^{ψ}-作用仅定义在 V 上，因此得到的两个右 A-模同构。此同构与左 $\mathcal{C}$-模相容性相容；对于所有内部模范畴，该相容性由 $\mathcal{C}$的结合子给出。

第二个图的可交换性 可以用类似的方法通过内部模来验证。 □

引理 6.2。 左 $\mathcal{C}$-模 ${}^{*}\mathcal{M}$ 和 $\mathcal{M}^{*}$ 分别是 $\mathcal{C}$-**模** 中的右对偶和左对偶，定义见定义 *C.2*。

证明。 我们已经构造了上面的求值函子 $\mathsf{ev}^{r}_{\mathcal{M}}$。我们定义

$$\mathrm{coev}^{r}_{\mathcal{M}}=\Big(\mathcal{C}\xrightarrow{A_{\mathcal{M}}}\mathrm{Fun}_{\mathcal{C}}(\mathcal{M},\mathcal{M})\xrightarrow{\sim}{}^{*}\mathcal{M}\boxtimes_{\mathcal{C}}\mathcal{M}\Big),\tag{6.3}$$

其中 $A_{\mathcal{M}}$ 是定义 2.13 中的函子，而等价 $\sim$ 由命题 3.28 得到。根据构造，这是一个左 $\mathcal{C}$-模函子。应用引理 6.1，给出定义 C.2 中的等价 α 等价于证明复合

$$\mathcal{M}\simeq\mathsf{F}\ \mathrm{un}_{\mathcal{C}}(\mathcal{C},\mathcal{M})\boxtimes_{\mathcal{C}}\mathcal{C}\xrightarrow{\mathrm{id}_{\mathcal{M}}\boxtimes_{\mathcal{C}}A_{\mathcal{M}}}\mathrm{Fun}_{\mathcal{C}}(\mathcal{C},\mathcal{M})\boxtimes_{\mathcal{C}}\mathrm{Fun}_{\mathcal{C}}(\mathcal{M},\mathcal{M})\xrightarrow{\circ}\mathrm{Fun}_{\mathcal{C}}(\mathcal{C},\mathcal{M})\xrightarrow{\sim}\mathcal{M}$$

与恒等函子同构。这一点同样可以利用相对 Deligne 积与 $\mathcal{C}$-线性函子范畴经由内部代数的等价描述来检验。此处，函子$A_{\mathcal{M}}$: $\mathcal{C}\to\mathsf{Fun}_{\mathcal{C}}(\mathcal{M},\mathcal{M})$由 $X\mapsto X\otimes A$给出，它是 $\mathcal{C}$中的一个 A-双模，如(3.1)–(3.2)所示。因此，函子的整个复合将对象 M映到 $\mathbb{1}\triangleright M\cong M$。故 ${}^{*}\mathcal{M}$ 在定义 C.2 的意义下是右对偶。

利用引理 6.1 中的第二个图，构造定义 C.2 所要求的等价 β 等价于证明该复合

$$\mathrm{Fun}_{\mathcal{C}}(\mathcal{M},\mathcal{C}) \simeq \mathcal{C} \boxtimes_{\mathcal{C}} \mathrm{Fun}_{\mathcal{C}}(\mathcal{M},\mathcal{C}) \xrightarrow{A_{\mathcal{M}} \boxtimes_{\mathcal{C}} \mathrm{id}} \mathrm{Fun}_{\mathcal{C}}(\mathcal{M},\mathcal{M}) \boxtimes_{\mathcal{C}} \mathrm{Fun}_{\mathcal{C}}(\mathcal{M},\mathcal{C}) \xrightarrow{\circ} \mathrm{Fun}_{\mathcal{C}}(\mathcal{M},\mathcal{C})$$

同构于恒等函子，这一点是显然的。

现在，通过应用推论 3.24 的等同 ${}^*(\mathcal{M}^*) \simeq \mathcal{M}$，我们可以在定义 C.2 的意义下将 $\mathcal{M}^*$ 展示为 $\mathcal{M}$ 的左 对偶。在此等同下，评价$^l_{\mathcal{M}}$ = 评价$^r_{\mathcal{M}^*}$ 与余评价$^l_{\mathcal{M}}$ =余评价$^r_{\mathcal{M}^*}$。□

回顾定理 2.9，B：$\mathcal{C}$-**模** $\to \mathcal{C}$-**双模** 是幺半 2-范畴的函子。由注记 2.12 可知，$\mathrm{B}(\mathrm{Fun}_{\mathcal{C}}(\mathcal{M},\mathcal{N})) \simeq \mathrm{Fun}_{\mathcal{C}}(\mathrm{B}(\mathcal{M}),\mathrm{B}(\mathcal{N}))$, 其中目标带有来自 [DSPS2，截面 2.4] 的 $\mathcal{C}$-$\mathcal{C}$-双模结构。这总结为下述结果。

推论 6.3. 含入B: $\mathcal{C}$-**模** $\to \mathcal{C}$-**双模** 是保持对偶的幺半2-范畴函子。

6.2. **反完全正合模范畴与对偶性**。 在定义 5.1 中，我们要求正合性在右侧张量积下封闭。我们也可以改为在左侧张量积，从而得到以下反完全正合 模范畴的概念。这个概念对于理解完全正合 $\mathcal{C}$-模范畴的对偶至关重要。

定义 6.4。 我们称左 $\mathcal{C}$-模范畴 $\mathcal{M}$ 是反完全正合 的，如果对于任意正合 $\mathcal{C}$-模范畴 $\mathcal{N}$， $\mathcal{C}$-模范畴 $\mathcal{M} \boxtimes_{\mathcal{C}} \mathcal{N}$都是正合的。

我们用 $\mathcal{C}$-**opfex** 表示 $\mathcal{C}$-**mod** 中由反完全正合 $\mathcal{C}$-模范畴构成的全 2-子范畴。与命题 5.4 中一样，可知 $\mathcal{C}$-**opfex** 在相对 Deligne 积下封闭，因此 $\mathcal{C}$-**opfex** 是 $\mathcal{C}$-**mod** 的幺半 2-子范畴。

命题 6.5。 设 $\mathcal{M}$ 是有限左 $\mathcal{C}$-模范畴。以下陈述等价:

(i) $\mathcal{M}$ *is fully exact.* *(ii)* $\mathcal{M}^*$ *is op-fully exact.*
(iii) ${}^*\mathcal{M}$ *is op-fully exact.* *(iv)* $\mathcal{M}^{**}$ *is fully exact.*

证明。 这由推论 3.25 中的 $\mathcal{C}$-线性等价 $(\mathcal{N} \boxtimes \mathcal{M})^* \simeq \mathcal{M}^* \boxtimes \mathcal{N}^*$ 以及以下事实得出： $\mathcal{M}$ 是正合的，当且仅当 $\mathcal{M}^*$ 是正合的，参见推论 4.18。对 ${}^*\mathcal{M}$也可采用同样的论证。通过两次应用这一论证，可得 (i) 与 (iv) 等价。□

定义 6.6。 若代数 $A \in \mathcal{C}$ 满足 反完全正合代数 的条件，即 $\mathbf{mod}_{\mathcal{C}}$-$A$ 作为左 $\mathcal{C}$-模范畴是反完全正合的，则称 $A \in \mathcal{C}$ 为反完全正合代数。

推论 6.7。 对于代数 A （属于 $\mathcal{C}$），下列命题等价。

(i) A 是完全正合的。***(ii)*** A^{ψ} 是反完全正合的。
(iii) $A^{\psi^{-1}}$ 是反完全正合的。***(iv)*** A^{ψ^2} 是完全正合的。

证明。 令 $\mathcal{M} = \mathbf{mod}_{\mathcal{C}}$-$A$，则这直接由命题 6.5 得出。 □

回顾附录A.1中的编织张量范畴 $\mathcal{C}^{\otimes \mathrm{op}}$，其对偶张量积为$X \otimes^{\mathrm{op}} Y = Y \otimes X$，编织为$\psi_X^{\mathcal{C}^{\otimes \mathrm{op}}}{}_{,\,Y} = \psi_{Y,\,X}$，以及 $\mathcal{C}^{\mathrm{rev}}$，其编织为$\psi_X^{\mathcal{C}^{\mathrm{rev}}}{}_{,\,Y} = \psi_{X,\,Y}^{-1}$。

命题 6.8. 设 A 是 $\mathcal{C}$中的一个代数。则下列条件等价:

(i) A 是 *op*-完全正合的。***(ii)*** A 作为 $\mathcal{C}^{\otimes \mathrm{op}}$中的代数是完全正合的。***(iii)*** A 作为 $\mathcal{C}^{\mathrm{rev}}$ 中的代数是完全正合的。***(iv)*** $A \otimes A^{\psi}$ 是一个正合代数。***(v)*** $A \otimes A^{\psi^{-1}}$ 是一个正合代数。

证明。 假设 (i) A 是 op-完全正合的。那么，对于 $\mathcal{C}$中的任意正合代数B， $A\otimes B = B\otimes^{\mathrm{op}} A$ 都是正合的。这说明 (ii) A 作为 $\mathcal{C}^{\otimes\mathrm{op}}$中的代数是完全正合的。由于 $\mathcal{C} =(\mathcal{C}^{\otimes\mathrm{op}})^{\otimes\mathrm{op}}$，(ii) 也蕴含 (i)。现在，将推论 5.10 应用于编织张量范畴 $\mathcal{C}^{\otimes\mathrm{op}}$，可知 (ii) 等价于 (iv) 和 (v)。

引理3.10 中证明的代数同构 $A\otimes B = A\otimes^{\psi} B \cong B\otimes^{\psi^{-1}} A$ 表明 (i) 和 (iii) 等价。证明至此完成。□

命题 5.15 中完全正合代数的等价刻画，对于A 为 op-完全正合的情形也有类似结论。只需在其中的条件 (2) 和 (3) 中，将 A 替换为 A^{ψ}，并将乘法 m_A 替换为其反向乘法m_A^{op}。

命题 6.8 的一个推论是，通过限制 (B.9) 中的 2-等价，2-范畴 $\mathcal{C}$-**op-完全正合** 和 $\mathcal{C}^{\otimes\mathrm{op}}$-**完全正合** 等价。利用引理3.21 和命题 3.15，我们可以证明这个 2-等价与相对 Deligne 积相容。

现在我们可以推导出反完全正合模范畴的如下判据。为此，注意到左 $\mathcal{C}$-模 $\mathcal{M}$ 也是 $\mathcal{C}^{\mathrm{rev}}$ 上的左模，因为作为张量范畴，$\mathcal{C}^{\mathrm{rev}}$ 与 $\mathcal{C}$ 相同，只是编织取逆元，见附录 A.3。相应的幺半函子 $A_{\mathcal{M}}$ 按照定义 2.13 定义，但其左 $\mathcal{C}$-线性结构中，定义 2.10 所用的反向编织 ψ^{-1} 取代了编织 ψ；该函子记为 $A^{\mathrm{rev}}_{\mathcal{M}}\colon \mathcal{C}\to\mathcal{C}^*_{\mathcal{M}}$。

推论 **推论 6.9.** 对于左 $\mathcal{C}$-模范畴 $\mathcal{M}$，以下陈述等价 :

(i) $\mathcal{M}$ 是反完全正合的。*(ii)* 函子 $A^{\mathrm{rev}}_{\mathcal{M}}$ 保

持投射对象。

证明。 命题 6.8 表明，(i) 等价于 $\mathcal{M}=$**模**$_{\mathcal{C}}$-$A=$**模**$_{\mathcal{C}^{\mathrm{rev}}}$-$A$ 作为左 $\mathcal{C}^{\mathrm{rev}}$-模范畴是完全正合的。根据定理 5.5，这又等价于 (ii)。□

注记 6.10。 接续注记 2.15，幺半函子 $A^{\mathrm{rev}}_{\mathcal{M}}$ 对应于 [DN2 的另一种 α-诱导函子 $\alpha^-_{\mathcal{M}}$，(4.4)], 也就是说 $\alpha^-_{\mathcal{M}} = A^{\mathrm{rev}}_{\mathcal{M}}\circ I^-$，对应于 (A.4) 中的幺半等价 I^-。

推论 6.9 中的刻画有助于我们给出一个完全正合模范畴的例子，而该范畴并非 op-完全正合。

例 6.11。 设 $\mathcal{C}=\mathcal{Z}($$H$-**模**$)$，其中 $H=\Bbbk G$ 是有限群 G 的群代数，且 $\mathrm{char}\,\Bbbk$ 整除 $|G|$。等价地，$\mathcal{C}\simeq D(\Bbbk G)$-**模**，其中 $D(\Bbbk G)$ 是 G 的***Drinfeld*** 双，例如参见 EGNO，命题 7.14.6]。霍普夫代数 H 是非半单的，而其对偶 $H^*=\Bbbk[G]$是半单的。Drinfeld 双 $D(\Bbbk G)$ 也是一个非半单代数 [R，推论 13.2.3]。作为余代数，$D(\Bbbk G)=\Bbbk[G]\otimes\Bbbk G$，并且霍普夫代数 $D(\Bbbk G)$ 是准三角的，其万有 R 矩阵

$$R=\sum_{g\in G}(\varepsilon_{\Bbbk G}\otimes g)\otimes(\delta_g\otimes 1_{\Bbbk G}),$$

其中 $\varepsilon_{\Bbbk G}\in(\Bbbk G)^*$ 是余单位，$1_{\Bbbk G}$ 是 $\Bbbk G$ 的单位元。考虑通过例 B.1 从纤维函子 $F\colon \mathcal{C}\to$ **vect** 得到的 $\mathcal{C}$-模范畴 **vect**。众所周知，参见例如 [EGNO，例 7.12，26]，$\mathcal{C}^*_{\mathbf{vect}}\simeq D(\Bbbk G)^*$-**mod** 是等价范畴。由于 $D(\Bbbk G)=\Bbbk[G]\otimes\Bbbk G$ 作为余代数，我们看到 $D(\Bbbk G)^*$ 也是非半单的。利用下文命题 8.5 的结果，我们看到**vect** 是完全正合的，当且仅当对于 (8.8) 中的态射 ϕ_R，限制函子 Res$_{\phi_R}\colon D(H)$-**mod** $\to D(H)^*$-**mod**保持投射对象。利用上述万有 R 矩阵以及约定 $(V\otimes W)^*:=W^*\otimes V^*$，我们计算得

$$\phi_R\colon\Big(D(\Bbbk G)^*=(\Bbbk G)^*\otimes(\Bbbk G)^{**}\xrightarrow{(1_{\Bbbk[G]}\circ\varepsilon_{\Bbbk[G]})\otimes p}(\Bbbk G)^*\otimes\Bbbk G=D(\Bbbk G)\Big),$$

其中 $p\colon(\Bbbk G)^{**}\to\Bbbk G$ 是 **vect** 的枢轴结构，是一个同构。由于 $(\Bbbk G)^*$ 是半单的，沿 ϕ_R 限制会保留投射对象。因此，**vect** 是完全正合的。

根据推论 6.9， $\mathcal{M}$ 是 op-完全正合的，当且仅当 $A^{\mathrm{rev}}_{\mathcal{M}}$ 保留投射对象。根据推论 8.6，这个函子由沿以下态射的限制给出

$$\phi_{R_{21}^{-1}}\colon \Big(D(\Bbbk G)^* = (\Bbbk G)^* \otimes (\Bbbk G)^{**} \xrightarrow{S_{\Bbbk[G]}\otimes(1_{\Bbbk G}\circ\varepsilon_{(\Bbbk G)^{**}})} (\Bbbk G)^* \otimes \Bbbk G = D(\Bbbk G)\Big),$$

涉及 $\Bbbk[G]$ 的反 antipode $S_{\Bbbk[G]}$ 。沿此代数同态作限制不会保留投射对象。例如，正则模被映为简单对象的直和，但该范畴 $\mathcal{C}^*_{\mathcal{M}}$ 不是半单的。因此，$\mathbf{vect}$ 不是 op-完全正合的。此例可推广到非零特征下的非半单 Hopf 代数 H ，其对偶却是半单的。

6.3. **对偶为完全正合的判据**。为结束本节，我们将考察一些情形，在这些情形中，左 $\mathcal{C}$-模的完全正合与 op-完全正合这两个概念是等价的。

推论 6.12. 当 $\mathcal{C}$ 对称时，左 $\mathcal{C}$-模完全正合，当且仅当它 *op*-完全正合。

证明。 $\mathcal{C}$ 的对称编织给出一个代数同构

$$\psi_{A,B}\colon A \otimes B \to B \otimes A.$$

这给出了左 $\mathcal{C}$-模范畴 $\mathcal{N} \boxtimes_{\mathcal{C}} \mathcal{M} \simeq \mathcal{M} \boxtimes_{\mathcal{C}} \mathcal{N}$ 的一个等价，其中 $\mathcal{M} = \mathbf{模}_{\mathcal{C}}\text{-}A$ 和 $\mathcal{N} = \mathbf{模}_{\mathcal{C}}\text{-}B$。现在由命题 6.5 可得所述结论。□

现在我们来考察代数成为完全正合和 op-完全正合代数的判据。值得注意的是，可分代数构成了一类既完全正合又 op-完全正合的代数。

引理 6.13. 假设 A 是可分的。那么 A^{ψ} 是可分的，且 A 是 *op*-完全正合的。

证明. 由命题 5.16，我们已知 A 是完全正合的。固定一个 A-双模的嵌入 i 和投影 p

$$i\colon A \to A \otimes A, \qquad p\colon A \otimes A \to A,$$

使得 $ip = \mathrm{id}_A$。考虑以下态射

$$j = \psi^{-1}_{A,A} i\colon A^{\psi} \to A^{\psi} \otimes A^{\psi}, \qquad q = p\,\psi_{A,A}\colon A^{\psi} \to A^{\psi} \otimes A^{\psi},$$

利用 $A = A^{\psi}$ 作为 $\mathcal{C}$ 中的对象（但不作为代数）。容易验证， j 和 q 是 A^{ψ}-双模的态射。因此， A^{ψ} 是可分的，进而是完全正合的。由推论 6.7，这意味着 A 是 op-完全正合的。□

注记 6.14. 注意，可分代数 A 的定义（或更一般地，作为双模相对投射的代数的定义）不涉及 $\mathcal{C}$ 的编织 ψ 。因此，若A 是可分的（相应地，作为双模是相对投射的），则对于配备任意编织的 $\mathcal{C}$ ，$\mathbf{mod}_{\mathcal{C}}\text{-}A$ 是完全正合且 op-完全正合的。

推论 6.15. 若 $\mathcal{M}$ 是可分左 $\mathcal{C}$-模，则 $\mathcal{M}$ 是完全正合且 *op*-完全正合的。

证明. 这直接由定义 4.13 和引理 6.13 得出。□

命题 6.16. 假设代数 A 在 $\mathcal{C}$中满足下列条件之一：

(i) A 在 $\mathcal{C}$中是交换的；*(ii)* $\psi^2_{A,A} = \mathrm{id}_{A\otimes A}$；

(iii) A 包含于 $\mathcal{C}$的 *Müger* 中心；*(iv)* 代数 A 与 A^{ψ} 是 *Morita* 等价的。

那么， A 是完全正合的，当且仅当它在 $\mathcal{C}$ 中是 *op*-完全正合的。

证明。 假设 A 是一个完全正合代数。

假设 (i)，则 $A = A^{\psi}$。根据推论 6.7， $A = A^{\psi} = A$ 也是 op-完全正合的。

假设 (ii)，则 $\psi_{A,\ A} = \psi^{-1}_{A\ A,}$。作为 $\mathcal{C}$ 中的对象， $A = A^{\psi}$ ，且该假设意味着 $A^{\psi} \otimes A = A^{\psi} \otimes^{\psi^{-1}} A$ 作为代数相等。但根据引理 3.10， $A^{\psi} \otimes^{\psi^{-1}} A \cong A \otimes^{\psi} A^{\psi}$。因此，根据命题 6.8， A 是 op-完全正合的。

假设 (iii) 蕴含 (ii)，因此在此情形下 A 也是 op-完全正合的。

假设 (iv)，我们有 $\mathcal{M} := \textbf{模}_{\mathcal{C}}\text{-}A \simeq \textbf{模}_{\mathcal{C}}\text{-}A^{\psi}$ 作为左 $\mathcal{C}$-模范畴。但是

$$ {}^{*}\mathcal{M} \boxtimes_{\mathcal{C}} \mathcal{M} \simeq \mathcal{M} \boxtimes_{\mathcal{C}} {}^{*}\mathcal{M}. $$

特别地，正合代数 $A^{\psi} \otimes A$ 与代数 $A \otimes A^{\psi}$ Morita 等价。这意味着 $A \otimes A^{\psi}$ 也是正合的，并且根据命题 6.8， A 是 op-完全正合的。

因此，在假设 (i)–(iv) 中的任一条件下，我们都已验证： A 完全正合蕴含 A op-完全正合。反向蕴含可用同样的推理得到，因为根据命题 6.8，当将 A 视为 $\mathcal{C}^{\otimes \mathrm{op}}$中的代数时，它是 op-完全正合的，当且仅当 A 是完全正合的；并且当将 A 视为 $\mathcal{C}^{\otimes \mathrm{op}}$中的代数时，假设 (i)–(iv) 也都成立。□

现在我们回顾编织模范畴的定义，参见例如 [DN2，定义 4.1]。

命题 6.17. 设 $\mathcal{M}$是一个左 $\mathcal{C}$-模，且具有编织模范畴结构。那么， $\mathcal{M}$ 完全正合，当且仅当 $\mathcal{M}$ *op*-完全正合。

证明. 根据 [DN2，命题 4.9], ，编织的 $\mathcal{C}$-模范畴结构对应于一个幺半同构 $A_{\mathcal{M}} \cong A^{\mathrm{rev}}_{\mathcal{M}}$。因此，这些函子同时保持投射对象。□

注记 6.18。 根据 [DN2，命题 4.9 和定理 4.11] ，Drinfeld 中心 $\mathcal{Z}(\mathcal{C}\textbf{-模})$ 的 2-范畴版本与 [BN，节 3] 中的 2-范畴 $\mathcal{C}\textbf{-编织模}$存在 2-等价，其中后者由编织的 $\mathcal{C}$-模构成。因此，后者具有幺半 2-范畴结构。根据 [DN2，注记 4.13] ，编织模范畴 $\mathcal{M}$ 和 $\mathcal{N}$ 的张量积就是 $\mathcal{M} \boxtimes_{\mathcal{C}} \mathcal{N}$，并带有典范编织。因此我们得出结论：（反）完全正合编织的 $\mathcal{C}$-模的乘积仍然是（反）完全正合且编织的。

我们以如下观察结束本小节：引理 6.13 中的论证无法直接推广到相对投射代数或完全正合代数，并由此提出以下问题。

问题 6.19。 若 $\mathrm{char}\,\Bbbk = 0$，完全正合模范畴在对偶性下是否稳定？也就是说， $\mathcal{M}$ 完全正合当且仅当 $\mathcal{M}^{*}$ 完全正合吗？等价地，代数 $A^{\psi} \otimes A$ 在 $\mathcal{C}$ 中正合，当且仅当 $A \otimes A^{\psi}$ 正合吗？

当 $\mathrm{char}\ \Bbbk = p$ 时，根据例 6.11，答案是否定的。对于 $\mathcal{C}$ 对称范畴，根据推论 6.12，答案是肯定的；详细示例另见第 8.4 节。

6.4. **完美模范畴**。 例 6.11 表明，全正合模范畴一般不对对偶封闭。为了得到带对偶的幺半 2-范畴，我们可以限制为左 $\mathcal{C}$-模，并要求它们同时完全正合且 op-完全正合。回顾定义 C.2，幺半 2-范畴中的对象若有左、右对偶，就称为可对偶。还要回顾的是， $\mathcal{C}\textbf{-模}$中的所有对象都是可对偶的，见第 6.1 节。

定义 6.20。 若左 $\mathcal{C}$-模范畴 $\mathcal{M}$ 在 $\mathcal{C}\textbf{-fex}$中可对偶，则称其为完美。我们将 $\mathcal{C}\textbf{-模}$中由所有完美模范畴构成的全 2-子范畴记为 $\mathcal{C}\textbf{-perf}$。

根据命题6.5， $\mathcal{M}^{*}$ 完全正合当且仅当 ${}^{*}\mathcal{M}$ 完全正合，因此我们知道， $\mathcal{M}$ 完美当且仅当 $\mathcal{M}$ 和 $\mathcal{M}^{*}$ 完全正合。

由于完全正合和 op-完全正合 $\mathcal{C}$-模的类在张量积下封闭，$\mathcal{C}\textbf{-完美}$ 是 $\mathcal{C}\textbf{-模}$的一个幺半 2-子范畴。结合前述结果定理 5.5、命题 6.8、推论 6.9 和命题 3.28，我们得到完美模范畴的等价判据。

推论 6.21。 对于左 $\mathcal{C}$-模范畴 $\mathcal{M}$，以下条件等价：

(i) $\mathcal{M}$是完美的。*(ii)* $\mathcal{M}$ 既是完全正合的，也是*op*-完全正合的。*(iii)* 两个函子 $A_{\mathcal{M}}$、$A^{\mathrm{rev}}_{\mathcal{M}}\colon \mathcal{C}\to\mathcal{C}^*_{\mathcal{M}}$ 都保持投射对象。*(iv)* 两个左 $\mathcal{C}$-模 ${}^*\mathcal{M}\boxtimes_{\mathcal{C}}\mathcal{M}$ 与 $\mathcal{M}\boxtimes_{\mathcal{C}}{}^*\mathcal{M}$ 都是正合的。*(v)* 两个左 $\mathcal{C}$-模 $\mathcal{M}^*\boxtimes_{\mathcal{C}}\mathcal{M}$ 与 $\mathcal{M}\boxtimes_{\mathcal{C}}\mathcal{M}^*$ 都是正合的。

注记6.22。完美模范畴这一术语的提出，是类比于交换环 R 上模的或概形 X [上拟凝聚层的完美复形这一术语，参见St，第15.75节与第20.3]节。可以证明，完美复形恰好是 R-模的导出范畴 $D(R)$ 中关于 R上导出相对张量积的可对偶对象。更一般地，这一观察适用于 X 上拟凝聚层的导出范畴 $D(\mathcal{O}_X)$关于导出相对张量积 [的情形，见St，第20.50]节。另见 [BZFN，命题3.6] 以及 [HR，引理 4.3] ，其中将此类陈述推广到叠。特别地，完美模范畴给出了 R上完美模的一个范畴版本，即集中在零次的完美复形。

根据推论 6.21，完美模范畴 $\mathcal{M}$ 可等价地刻画为：中心化子函子 $A_{\mathcal{M}}$ 与 $A^{\mathrm{rev}}_{\mathcal{M}}$在 [BrNa,S1], 的术语中均为完美张量函子，见注 4.22。

回顾一下，在任意 2-范畴中，我们可以定义 1-态射的左伴随与右伴随，见 [JY, Def. 6.1.1]。

定义 6.23. 一个幺半 2-范畴是刚性的，如果它的所有对象都可对偶，并且所有 1-态射都具有左伴随与右伴随。[11]

例如， $\mathcal{C}$-**perf** 是一个刚性幺半 2-范畴。

定义 6.24. 我们称幺半 2-范畴$\mathbf{C}$ 中的一个对象是完全可对偶的，如果它包含在$\mathbf{C}$的某个刚性幺半 2-子范畴$\mathbf{D}$ 中。$\mathbf{C}$中的对象 $\mathcal{M}$ 完全可对偶的一个等价条件是： $\mathcal{M}$ 可对偶，并且左、右求值与余求值 1-态射具有左伴随与右伴随，而这些伴随又具有进一步的伴随，依此类推，参见 [DSPS2, Ch. 1]的开头。

我们注意到，定义 6.24 中的 $\mathbf{D}$ 并不要求是一个全 幺半 2-子范畴。以下是本节的主要结果。

定理 6.25. $\mathcal{C}$-**模** 中的对象 $\mathcal{M}$ 是完全可对偶的，当且仅当 $\mathcal{M}$ 是完美的，即 $\mathcal{M}$ 与 $\mathcal{M}^*$ 是完全正合的。

证明. 至此我们知道， $\mathcal{C}$-**完美** 是一个完全可对偶的幺半 2-范畴，并且是 $\mathcal{C}$-**模**的一个全 2-子范畴。因此，所有完美的 $\mathcal{C}$-模都是完全可对偶的。

反过来，假设 $\mathcal{M}$ 是 $\mathcal{C}$-**模**中的完全可对偶对象。特别地，式 (6.3) 中的余评价函子 $\mathrm{coev}^r_{\mathcal{M}}$ 有一个右伴随 R，而它自身还有进一步的右伴随。因此，由于 $\mathrm{coev}^r_{\mathcal{M}}$ 是有限阿贝尔范畴之间的函子，根据引理 B.2，这意味着 R 是正合的。然而，按构造，中心化子函子 $A_{\mathcal{M}}$ 与 $\mathrm{coev}^r_{\mathcal{M}}$ 相差一个等价下的复合。因此， $A_{\mathcal{M}}$ 有一个正合右伴随。根据注 4.22，这意味着 $A_{\mathcal{M}}$ 保持投射对象，因此根据定理 5.5， $\mathcal{M}$ 是完全正合的。若 $\mathcal{M}$ 完全可对偶，则 $\mathcal{M}$*也完全可对偶。因此， $\mathcal{M}^*$ 是完全正合的；再利用推论 3.24 中的等价 ${}^*(\mathcal{M}^*)\simeq\mathcal{M}$, 根据命题 6.5， $\mathcal{M}$ 也是 op-完全正合的。综上可知，根据定义 6.20， $\mathcal{M}$ 是完美的。□

[11]在 (∞,2)-范畴的设定中，在 [L 的定义 2.3.16] 中，这一性质被称为 *having duals*。我们选择使用刚性幺半 2-范畴这一术语，而非完全可对偶幺半 2-范畴，以避免与幺半 2-范畴的 Morita 4-范畴中作为完全可对偶对象这一性质相混淆，参见 [D´e2]。注意，在 [GJF 第 4.1], 节中，我们所称的刚性幺半 2-范畴被称为 *fully rigid*。

注 6.26. [L，断言 2.3。19] 引入了对称幺半 2-范畴 $\mathbf{C}$ 的完全可对偶部分 $\mathbf{C}^{\mathrm{fd}}$ 。对于对称有限张量范畴 $\mathcal{C}$ 和 $\mathbf{C}=\mathcal{C}$-**模**的情形，利用定理 6.25，我们注意到 $\mathbf{C}^{\mathrm{fd}}$ 由刚性幺半 2-范畴 $\mathcal{C}$-**完美**给出。

注 6.27。 考虑由两类 $\mathcal{C}$-模范畴（完全正合和 op-完全正合）在 $\boxtimes_{\mathcal{C}}$、直和及直和项下生成的 $\mathcal{C}$-**模**（满）幺半 2-子范畴。若这两类不相同，则存在一个 op-完全正合但非完全正合的左 $\mathcal{C}$-模范畴 $\mathcal{M}$ 。例 6.11 给出了这样一个 $\mathcal{M}$。因此，利用命题 3.28， $\mathcal{C}^*_{\mathcal{M}}\simeq {}^*\mathcal{M}\boxtimes_{\mathcal{C}}\mathcal{M}$ 不是正合的。其对偶 ${}^*\mathcal{M}$ 是完全正合的，但不是 op-完全正合的。因此，在这种情况下，将一个 op-完全正合的 $\mathcal{C}$-模与一个完全正合的 $\mathcal{C}$-模作张量积，会得到一个非正合的 $\mathcal{C}$-模。

7. Invertible module categories

本节讨论完全正合模范畴与可逆模范畴之间的关系。

7.1. **可逆模范畴的刻画**。 若存在另一个有限左 $\mathcal{C}$-模范畴 $\mathcal{N}$（称为逆元），以及左 $\mathcal{C}$-模范畴之间的等价 $\mathcal{M}\boxtimes_{\mathcal{C}}\mathcal{N}\simeq\mathcal{C}$和 $\mathcal{N}\boxtimes_{\mathcal{C}}\mathcal{M}\simeq\mathcal{C}$，则称有限左 $\mathcal{C}$-模范畴 $\mathcal{M}$ 为可逆的； 关于 $\mathcal{C}$-**模**幺半 2-范畴，参见定义 C.4。我们需要以下引理，其证明思路已在 ENO1 的命题 4.2] 中关于可逆双模范畴的背景下出现。

引理 7.1. 设 $F\colon \mathcal{C}\to\mathcal{D}$ 是幺半范畴 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{D}$之间的幺半函子，其中 $\mathcal{C}$是编织的，并将 $\mathcal{D}$ 视为左 $\mathcal{C}$-模范畴，如例 *B.1* 所示。那么， $\mathcal{D}$ 作为左 $\mathcal{C}$-模等价于 $\mathcal{C}$ ，当且仅当 F 是一个等价。

证明. 设 $G\colon \mathcal{C}\to\mathcal{D}$ 是左 $\mathcal{C}$-模之间的一个等价。然后，利用引理 B.6 中定义的 2-函子 B，我们得到一个 $\mathcal{C}$-双模之间的等价 $\mathrm{B}(G)\colon \mathrm{B}(\mathcal{C})\to\mathrm{B}(\mathcal{D})$。因此，存在一个对象 C 属于 $\mathcal{C}$ ，使得 $G(C)\cong\mathbb{1}_{\mathcal{D}}$。现在，

$$\mathbb{1}_{\mathcal{D}}\cong G(C)\cong G(C\otimes\mathbb{1}_{\mathcal{C}})\cong F(C)\otimes G(\mathbb{1}_{\mathcal{C}}),$$

并且，利用右 $\mathcal{C}$-线性结构， $\mathbb{1}_{\mathcal{D}}\cong G(\mathbb{1}_{\mathcal{C}})\otimes F(C)$。 这表明 $G(\mathbb{1}_{\mathcal{C}})$ 是 $\mathcal{D}$ 中的一个可逆对象。此外，由 $\mathcal{C}$-线性性，我们有如下自然同构族

$$s^{G}_{X,\mathbb{1}}\colon G(X)\xrightarrow{\cong}F(X)\otimes G(\mathbb{1}_{\mathcal{C}})$$

因此，函子 G 同构于 F 与由和可逆对象作张量积所给出的等价的复合。这意味着 F 同样是一个等价。

反之方向显然成立，因为 $F\colon \mathcal{C}\to\mathcal{D}$ 尤其是左 $\mathcal{C}$-模的一个函子。 □

按照 [ENO1中命题4.2] 的论证，我们可以证明可逆模范畴的一个刻画。

定理 7。 2. 设 $\mathcal{M}$ 为一个有限左 $\mathcal{C}$-模范畴。则下列各项等价:

(i) $\mathcal{M}$ 作为左 $\mathcal{C}$-模范畴是可逆的。*(ii)* 定义*2.13*中的中心化子函子 $A_{\mathcal{M}}$ 是一个等价。*(iii)* $\mathcal{M}$ 的右对偶的求值函子是一个等价。*(iv)* $\mathcal{M}$ 的右对偶的余评价函子是一个等价。*(v)* $\mathcal{M}$ 的左对偶的求值函子是一个等价。*(vi)* $\mathcal{M}$ 的左对偶的余评价函子是一个等价。

证明。假设 $\mathcal{M}$ 是一个可逆的 $\mathcal{C}$-模范畴。回顾命题 3.28 中左 $\mathcal{C}$-模范畴的等价 $\mathrm{Fun}_{\mathcal{C}}(\mathcal{M},\mathcal{M})\simeq{}^*\mathcal{M}\boxtimes_{\mathcal{C}}\mathcal{M}$。由于 $\mathcal{M}$是可逆的，由引理 C.5 知其逆元为 $\mathcal{M}^*\simeq{}^*\mathcal{M}$，我们有 $\mathrm{Fun}_{\mathcal{C}}(\mathcal{M},\mathcal{M})\simeq\mathcal{C}$ 是等价的左 $\mathcal{C}$-模范畴。由引理 2.14，$\mathrm{Fun}_{\mathcal{C}}(\mathcal{M},\mathcal{M})$ 上的左 $\mathcal{C}$-作用由张量函子 $A_{\mathcal{M}}$诱导。因此，由引理 7.1， $A_{\mathcal{M}}$是一个等价。这表明 (i) 蕴含 (ii)。

我们现在证明 (ii) 蕴含 (i)。为此，假设 $A_{\mathcal{M}}\colon \mathcal{C}\to \mathrm{End}_{\mathcal{C}}(\mathcal{M})$ 是一个等价。因此，$\mathcal{C}\simeq {}^*\mathcal{M}\boxtimes_{\mathcal{C}}\mathcal{M}$ 与 $\mathcal{M}$ 有一个左逆元 ${}^*\mathcal{M}$。此外，由引理 B.7，幺半函子 $A^r_{\mathrm{B}(\mathcal{M})}$是一个等价，因而引理 B.3 中的拉回 2-函子 $\mathrm{Res}^{A^r_{\mathrm{B}(\mathcal{M})}}$ 是一个 2-等价。进一步，由 [EGNO，定理 7.12.11], ，(B.26) 中的双中心化子函子 $\mathbb{D}_{\mathcal{M}}$ 是一个等价。使用该结果要求 $\mathcal{M}$ 是 忠实的，即任何非零对象都通过一个非零函子$X\triangleright \mathrm{id}_{\mathcal{M}}\colon \mathcal{M}\to\mathcal{M}$来作用。但这由推论 2.17 得出。因此，由命题 B.9， $A^l_{\mathrm{B}(\mathcal{M})}$ 也是一个等价。于是，由引理 B.8，函子 $A^{\mathrm{rev}}_{\mathcal{M}}$ 是一个等价。假设 $\mathcal{M}=\textbf{模}_{\mathcal{C}}\text{-}A$。则这给出左 $\mathcal{C}$-模范畴的一个等价

$$A^{\mathrm{rev}}_{\mathcal{M}}\colon \mathcal{C}\to(\mathcal{C}^{\mathrm{rev}})^*_{\mathcal{M}}\simeq \mathbf{mod}_{\mathcal{C}}\text{-}A^{\psi^{-1}}\otimes^{\psi^{-1}}A\simeq \mathbf{mod}_{\mathcal{C}}\text{-}A\otimes A^{\psi^{-1}}\simeq \mathcal{M}\boxtimes_{\mathcal{C}}\mathcal{M}^*.$$

这里，我们依次对目标范畴应用了命题 3.16（针对 $\mathcal{C}^{\mathrm{rev}}$）中的等价、经由代数同构 $A\otimes B\simeq B\otimes^{\psi^{-1}}A$ 的引理 3.10，以及命题 3.22。

现在，我们有左 $\mathcal{C}$-模范畴的等价

$$\mathcal{C}\simeq {}^*\mathcal{M}\boxtimes_{\mathcal{C}}\mathcal{M},\quad \text{and}\quad \mathcal{C}\simeq \mathcal{M}\boxtimes_{\mathcal{C}}\mathcal{M}^*.$$

将这些结合起来表明

$${}^*\mathcal{M}\simeq {}^*\mathcal{M}\boxtimes_{\mathcal{C}}\mathcal{C}\simeq {}^*\mathcal{M}\boxtimes_{\mathcal{C}}(\mathcal{M}\boxtimes_{\mathcal{C}}\mathcal{M}^*)\simeq ({}^*\mathcal{M}\boxtimes_{\mathcal{C}}\mathcal{M})\boxtimes_{\mathcal{C}}\mathcal{M}^*\simeq \mathcal{C}\boxtimes_{\mathcal{C}}\mathcal{M}^*\simeq\mathcal{M}^*$$

从而， $\mathcal{M}$ 是可逆的，即 (i) 成立。

由构造可知，（6.3）的余评价函子余评价$^r_{\mathcal{M}}$ 是 $A_{\mathcal{M}}$ 与一个等价的复合。这表明 (ii) 与 (iv) 等价。

我们可以利用左对偶性来定义

$$\mathrm{ev}'\colon \big(\mathcal{M}^*\boxtimes_{\mathcal{C}}\mathcal{M}\simeq({}^*\mathcal{M}\boxtimes_{\mathcal{C}}\mathcal{M})^*\xrightarrow{(\mathrm{coev}^r_{\mathcal{M}})^*}\mathcal{C}^*\simeq\mathcal{C}\big),$$

$$\mathrm{coev}'\colon \big(\mathcal{C}^*\simeq\mathcal{C}\xrightarrow{(\mathrm{ev}^r_{\mathcal{M}})^*}(\mathcal{M}\boxtimes_{\mathcal{C}}{}^*\mathcal{M})^*\simeq\mathcal{M}\boxtimes_{\mathcal{C}}\mathcal{M}^*\big).$$

由此可知，($\mathcal{M}^*$，ev′，coev′) 定义了 $\mathcal{M}$ 的一个左对偶。现在，$\mathrm{coev}^r_{\mathcal{M}}$ 是等价当且仅当 ev′ 是等价，也就是说，(iv) 与 (v) 等价。此外，$\mathrm{ev}^r_{\mathcal{M}}$ 是等价当且仅当 coev′ 是等价，也就是说，(iii) 与 (vi) 等价。

利用引理 C.5，(i) 推出 (iii)，而 (iii) 等价于 (vi)。还需证明 (vi) 推出 (i)。在识别 $\mathcal{M}={}^*(\mathcal{M}^*)$ 下，我们有 $\mathrm{coev}^l_{\mathcal{M}}=\mathrm{coev}^r_{\mathcal{M}^{*\circ}}$ 因此，$\mathrm{coev}^l_{\mathcal{M}}$ 是等价当且仅当 $\mathcal{M}^*$ 可逆。应用引理 C.5，可得 ${}^*(\mathcal{M}^*)=\mathcal{M}$ 可逆，即 (i) 成立。□

7.2. **可逆模范畴是完美的**。 现在我们可以证明，可逆模范畴是完全正合且 op-完全正合的，也就是说，它们是完美的，见定义 6.20。

推论 7.3. *若 $\mathcal{M}$ 可逆，则 $\mathcal{M}$ 是完美的。*

证明。 假设 $\mathcal{M}$ 可逆。由定理 7.2，张量函子 $A_{\mathcal{M}}\colon \mathcal{C}\to\mathcal{C}^*_{\mathcal{M}}$ 是一个等价。因此，它保持投射对象，且 $\mathcal{M}$ 是完全正合的。现在，根据引理 C.5， $\mathcal{M}^*$ 也是可逆的。因此， $\mathcal{M}^*$ 是完全正合的，进而根据命题 6.5， $\mathcal{M}$ 也是 op-完全正合的。□

备注 7.4。 特别地，我们为 [DN2，命题 5.1] 中的陈述提供了一种替代证明：任意有限可逆模范畴都是正合的。结合推论7.3和引理 5.2 即可得到这一结论。

下面的例子表明，推论7.3的逆命题不成立。

例 7.5。 设 G 是一个有限群， $\mathcal{C}:=\Bbbk G\text{-}\textbf{模}$，且 $F\colon \mathcal{C}\to\mathbf{vect}$ 是相应的纤维函子，其中 $\Bbbk$ 是任意域。与例 4.23 一样，这使 $\mathbf{vect}$ 成为一个不可分解的左 $\mathcal{C}$-模范畴。我们赋予 $\mathcal{C}$ 从 $\mathbf{vect}$继承而来的对称编织。中心化子函子

$$A_{\mathbf{vect}}\colon \mathcal{C}\to \mathrm{Fun}_{\mathcal{C}}(\mathbf{vect},\mathbf{vect})\simeq \Bbbk G\text{-}\mathbf{comod}$$

经由 F 分解，因为对于任意 $\Bbbk G$-模 V， $V \triangleright \mathrm{id}_{\mathbf{vect}}$对应于平凡的 $\Bbbk G$-余模。范畴 $\Bbbk G$-**余模** 是半单的，因此 $A_{\mathbf{vect}}$ 保持投射对象。这表明 **vect** 是完全正合的。由于 $\mathcal{C}$ 是对称的，**vect** 根据推论 6.12 也具有 op-完全正合性。然而，对于非平凡群 G， $A_{\mathbf{vect}}$不是等价。因此，根据定理 7.2，**vect** 不可 可逆。这个例子不依赖于 $\Bbbk$的特征。

本节的结果可归结为以下结论。

推论 7.6。 可逆左 $\mathcal{C}$-模范畴构成$\mathcal{C}$-**完美** 中的一个满幺半2-子范畴 $\mathcal{C}$-**可逆** 。

一般而言，并非每个不可分解的完美左 $\mathcal{C}$-模范畴都是可逆的，例 7.5 展示了这一点。与此相反，我们将在第 8.4 节看到一个非平凡的例子，其中所有不可分解的完美模范畴都是可逆的。

8. Hopf algebra examples

本文最后讨论一些关于由拟三角 Hopf 代数得到的编织有限张量范畴上的全正合模范畴的结果。在第 8.1 节，我们给出使**vect** 成为全正合模范畴的等价条件（命题 8.5）、使其成为 op-完全正合且完美模范畴的等价条件（推论 8.6），以及使其可逆的等价条件（推论 8.9）。在第 8.3 节，我们证明，即使在具有非退化编织的例子中，例如任意奇数次单位根 q处的可因子化小量子群 $u_q(\mathfrak{sl}_2)$，其正合模范畴**vect**并非 全正合，见命题 8.15。我们猜想这一结论对一般的可因子化小量子群也成立。在第 8.4 节，我们对 Sweedler 四维 Hopf 代数 S的有限张量范畴 $\mathcal{C} = S$-**模** 的全正合模范畴和完美模范畴进行分类。此外，我们还计算了这种情形下的相对 Deligne 积、对偶和函子范畴。这需要计算扭曲的 $\mathcal{C}$-模范畴$\mathbf{vect}^J$之间的 $\mathcal{C}$-线性函子范畴，其中 J 是一个 Hopf 2-上循环，见第 8.2 节。部分证明仅作了简要说明，更多细节将在即将发表的论文 [GL]中给出。

8.1. **vect 完全正合的条件**。设 $\mathcal{C}$ 是一个带编织的有限张量范畴，且 **vect** 具有左 $\mathcal{C}$-模结构。于是我们有一个正合忠实幺半函子，称为纤维函子，

$$F\colon \mathcal{C} \to \mathrm{Fun}(\mathbf{vect}, \mathbf{vect}) \simeq \mathbf{vect}, \tag{8.1}$$

见引理 2.16。因此，对于 $\Bbbk$ 上的拟三角 Hopf 代数 H，有 $\mathcal{C} \simeq H$-**模**，例如参见 [EGNO，第 5.2 定理，3] 以及 [Ma，第 9.4 命题2]。我们将 H 的乘法、单位元、余乘法和余单位分别记为

$$m_H\colon H \otimes H \to H, \quad u_H\colon \mathbb{1} \to H, \quad \Delta_H\colon H \to H \otimes H, \quad \text{and} \quad \varepsilon_H\colon H \to \mathbb{1}.$$

我们有时使用 Sweedler 记号将余乘法写作 $\Delta_H(h) = h_{(1)} \otimes h_{(2)}$，其中 $h \in H$；将 H 的万有 R 矩阵写作 $R = R^{(1)} \otimes R^{(2)} \in H \otimes H$，其中省略求和符号。 $\mathcal{C}$ 的编织由下式给出：

$$\psi_{V,W}\colon V \otimes W \to W \otimes V, \quad v \otimes w \mapsto R^{(2)}w \otimes R^{(1)}v,$$

对于左 H-模 V、 W 以及任意 $v \in V$， $w \in W$。我们还考虑有限维左 H-余模的张量范畴 H-**余模**（C， δ），其中将左 H-余作用记为

$$\delta\colon C \to H \otimes C, \qquad c \mapsto c^{(-1)} \otimes c^{(0)}. \tag{8.2}$$

下面的引理给出了一个众所周知的等价，参见 [EGNO，例 7.12。26] 以及其推广，见下文引理 8.12。

引理 8.1. 存在一个范畴等价

$$E\colon \mathrm{Fun}_{\mathcal{C}}(\mathbf{vect}, \mathbf{vect}) \longrightarrow H\text{-}\mathbf{comod}, \quad (G, s^G) \mapsto (G(\Bbbk), \delta^G),$$

其中，将正则 H-模记为 H，

$$\delta^G = s^G_{H,\Bbbk} \circ G(u_H)\colon \quad G(\Bbbk) \to H \otimes G(\Bbbk), \tag{8.3}$$

其中，我们将 $G(u_H)$ 的目标与 $G(F(H)) = G(H \triangleright \Bbbk)$等同，并取其拟逆

$$T\colon H\text{-}\mathbf{comod} \longrightarrow \mathrm{Fun}_{\mathcal{C}}(\mathbf{vect}, \mathbf{vect}), \quad (C,\delta) \mapsto ((-)\otimes C, s^{\delta}),$$

其中 s^{δ} 的分量定义如下，回忆一下 （8.1） 中的 F，

$$s^{\delta}_{W,\Bbbk}\colon F(W)\otimes C \to F(W)\otimes C, \quad w\otimes c \mapsto c^{(-1)}w \otimes c^{(0)}, \tag{8.4}$$

对于任意 H-模 W 及元素 $w \in W$, $c \in C$。对于一般对象 $V = \Bbbk^{\oplus n}$，在 **vect** 中，$s^{\delta}_{W,V}$ 由映射 $s^{\delta}_{W,\Bbbk}$的 n 个副本的直和给出。

现在考虑对偶霍普夫代数 H^*，其乘法为

$$fg(h) = f(h_{(2)})g(h_{(1)}), \qquad \forall f,g \in H^*, h \in H, \tag{8.5}$$

以及余乘法 $\Delta(f) = f_{(1)} \otimes f_{(2)}$ 定义为

$$f(hk) = f_{(1)}(h)f_{(2)}(k), \qquad \forall h,k \in H. \tag{8.6}$$

以下结果是标准的。

引理 8.2. 存在一个范畴等价

$$H\text{-}\mathbf{comod} \to H^*\text{-}\mathbf{mod}, \quad (C,\delta) \mapsto (C, a^l_C),$$

其中，对于左 H-余模(C,δ)，我们定义

$$a^l_C\colon H^*\otimes C \to C, \quad f\otimes c \mapsto f\cdot c := f(c^{(-1)})c^{(0)}, \tag{8.7}$$

对所有 $f \in H^*$, $c \in C$，使用(8.2)中的记号。

在下文中，我们将使用由万有 R 矩阵得到的态射

$$\phi_R\colon H^* \to H, \quad f \mapsto R^{(1)}f(R^{(2)}), \tag{8.8}$$

在陈述下一个引理之前，回顾一下：对于霍普夫代数 H，左 H-余模代数 是左 H-余模张量范畴中的一个内在代数。因此，范畴 A-**模** 是 $\mathcal{C} = H$-**模**上的左模，参见 [AM，第 1 节。5] 或 [EGNO，例 7.8.3]。左 $\mathcal{C}$-作用定义如下：对于 W 属于 H-**模** 且 V 属于 A-**模**,

$$W \triangleright V = (W\otimes V, a^l_{W\triangleright V}),$$

带有 A 作用

$$a^l_{W\triangleright V}\colon A\otimes W\otimes V \to W\otimes V, \quad a\otimes w\otimes v \mapsto a^{(-1)}w\otimes a^{(0)}v, \tag{8.9}$$

对于 $a \in A, w \in W, v \in V$，对 A 上的 H-余作用使用记号 (8.2)。

引理 8.3. 态射 $\phi_R\colon H^* \to H$ 是 *Hopf* 代数的同态。因此， H^* 通过余作用成为左 H-余模代数

$$\delta_{H^*}\colon H^* \to H\otimes H^*, \quad f \mapsto \phi_R(f_{(1)})\otimes f_{(2)}. \tag{8.10}$$

特别地， H^*-**mod** 通过由 $W \triangleright V = (W\otimes V, a^l_{W\triangleright V})$ 定义的 $\mathcal{C}$-作用成为 $\mathcal{C}$-模，对于$W \in H$-**mod** $= \mathcal{C}$ 与 $V \in H^*$-**mod**，其中

$$\begin{aligned} &a^l_{W\triangleright V}\colon H^*\otimes W\otimes V \to W\otimes V,\\ &\qquad f\otimes w\otimes v \mapsto \phi_R(f_{(1)})w\otimes f_{(2)}v = f_{(1)}(R^{(2)})R^{(1)}w\otimes f_{(2)}v, \end{aligned} \tag{8.11}$$

对于 $f \in H^*$、$w \in W$、$v \in V$，以及继承自 **vect** 的模结合子。

证明。关于 ϕ_R 是 Hopf 代数同态的陈述可见于 [R，命题 12.2.11]，但约定不同。因此， H^* 通过对正则H^*-余作用沿 ϕ_R作余限制而成为 H-余模代数。这一 H-余模结构在 H^*-**mod** 上给出如 (8.9) 中的 $\mathcal{C}$-模结构，可以验证它与所述结构一致。 □

命题 8.4。 引理 *8.1* 与 *8.2* 中诸等价的复合定义了左 $\mathcal{C}$-模范畴的一个等价

$$D\colon \mathrm{Fun}_{\mathcal{C}}(\mathbf{vect},\mathbf{vect}) \xrightarrow{\sim} H^*\text{-}\mathbf{mod},$$

其中 *th e* $\mathcal{C}$-作用在源对象中的定义见定义 *2.10*，在目标对象中的定义见引理 *8.3* $t.$

证明。 我们首先考虑 (8.3) 中定义的 $\delta^{X\triangleright G}$，它对应于定义 2.10 中定义的函子 $X\triangleright G$，适用于 $G\in\mathcal{C}^*_{\mathbf{vect}}$ 和 $X\in\mathcal{C}$。我们计算

$$\begin{aligned}\delta^{X\triangleright G}(x\otimes v) &= s^{X\triangleright G}_{H,\Bbbk}(x\otimes 1_H\otimes v)\\ &= (\psi_{X,H}\otimes \mathrm{id}_{G(\Bbbk)})\circ(\mathrm{id}_X\otimes s^{G}_{H,\Bbbk})(x\otimes 1_H\otimes v)\\ &= (\psi_{X,H}\otimes \mathrm{id}_{G(\Bbbk)})(x\otimes v^{(-1)}\otimes v^{(0)}) = R^{(2)}v^{(-1)}\otimes R^{(1)}x\otimes v^{(0)},\end{aligned}$$

对于 $v\in G(\Bbbk)$ $x\in X$。这里，在第二个等式中我们用到了 (2.11)，并使用了 **vect** 的平凡凝聚性 $l^{\mathbf{vect}}$。我们对 $v\in G(\Bbbk)$ 使用适配的 Sweedler 记号 $\delta^G(v) = v^{(-1)}\otimes v^{(0)}$，，这出现在第二个等式中。这描述了 H-余模 $E(X\triangleright G) = (X\otimes G(\Bbbk)\ \delta^{X\triangleright G})$，其中 E 是引理 8.1 中的等价。

现在，我们将引理 8.2 中的等价应用于 $E(X\triangleright G) = (X\otimes G(\Bbbk)\ \delta^{X\triangleright G})$。为此，回顾一下，与 $E(G)$ 关联的 H^*-模定义在向量空间 $G(\Bbbk)$ 上，其左 H^*-作用由 (8.7) 给出。根据同一公式，由 $\delta^{X\triangleright G}$ 诱导的 $X\otimes G(\Bbbk)$ 上的 H^*- 作用为

$$\begin{aligned}a^l_{E(X\triangleright G)}\colon H^*\otimes X\otimes G(\Bbbk)&\to X\otimes G(\Bbbk),\\ f\otimes x\otimes v &\mapsto f(R^{(2)}v^{(-1)})R^{(1)}x\otimes v^{(0)}\\ &= f_{(1)}(R^{(2)})f_{(2)}(v^{(-1)})R^{(1)}x\otimes v^{(0)}\\ &= f_{(1)}(R^{(2)})R^{(1)}x\otimes f_{(2)}\cdot v.\end{aligned}$$

第一个等号应用了 (8.6) 中的对偶余乘法，第二个等号则将 (8.7) 应用于 $f_{(2)}\cdot v$。这等于 (8.11) 中定义的 H^*-作用 $a^l_{X\triangleright G(\Bbbk)}$。因此， $D(X\triangleright G) = X\triangleright D(G)$ 是左 H^*-模。于是，函子 D 是具有平凡 $\mathcal{C}$-线性结构的左 $\mathcal{C}$-模之一。□

F对于代数同态 ϕ: $A\to B$，我们将限制函子记为 by

$$\mathrm{Res}_\phi\colon B\text{-}\mathbf{mod}\to A\text{-}\mathbf{mod}, \tag{8.12}$$

其中 $\mathrm{Res}_\phi(V) = V$ 是一个 $\Bbbk$-向量空间，其作用为 $av = \phi(a)v$，对所有 $v\in V, a\in A$ 均成立。函子 Res_ϕ 忠实且正合。此外，若 ϕ 是霍普夫代数的同态，则 Res_ϕ 是具有平凡幺半结构的幺半函子。

命题 8.5。 对于左 $\mathcal{C}$-模范畴 **vect**，以下各项等价。

(i) **vect** 是完全正合的。*(ii)* 对于 ϕ_R，式 (8.8) 中的函子 Res_{ϕ_R}: H-**模** $\to H^*$-**模** 保留投射对象。*(iii)* $\mathrm{Res}_{\phi_R}(H)$ 作为左 H^*-模是投射的。

证明。为证明 明 (i) 和 (ii) 的等价性，考虑如下函子交换图 s

$$\begin{array}{ccc}\mathcal{C} & \xrightarrow{A_{\mathbf{vect}}} & \mathcal{C}^*_{\mathbf{vect}},\\ & {\scriptstyle \mathrm{Res}_{\phi_R}}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle D} & \\ & H^*\text{-}\mathbf{mod} & \end{array} \tag{8.13}$$

其中 $A_{\mathbf{vect}}$ 是定义 2.13 中的中心化子函子， D 是命题 8.4 中的等价，而 Res_{ϕ_R} 在 (8.12) 中定义。事实上， $A_{\mathbf{vect}}(X) = X$ id$_{\mathbf{vect}}$，但在等价 D 下，id$_{\mathbf{vect}}$ 对应于平凡 H^*-模，因为 id$_{\mathbf{vect}}(\Bbbk) = \Bbbk$，且 id$_{\mathbf{vect}}$ 上的平凡 $\mathcal{C}$-线性结构产生平凡 H^*-模。由于 D 是一个 $\mathcal{C}$-线性等价，

$$D(X\triangleright \mathrm{id}_{\mathbf{vect}})\cong X\triangleright D(\mathrm{id}_{\mathbf{vect}}) = X\triangleright\Bbbk\cong \mathrm{Res}_{\phi_R}(X),$$

其中最后一个等价使用了 (8.11)，并应用于平凡 H^*-模 $\Bbbk$。现在，(i) 与 (ii) 的等价由此得出，因为**vect** 完全正合当且仅当 $A_{\mathbf{vect}}$ 保持投射对象，见定理 5.5。

(ii) 与 (iii) 的等价是标准的同调代数。(ii) 蕴含 (iii) 是显然的，而其逆命题用到 H 是 H-**mod** 的投射生成元，并且 $A_{\mathbf{vect}}$ 特别地由推论 2.17 是右正合的。□

Si同样地，我们得到 **vect** 为 op-完全正合的等价条件，见定义 6 .4.

推论 8.6. 左 $\mathcal{C}$-模 **vect** 是 *op*-完全正合的，或等价地， ***vect** 是完全正合的，当且仅当函子 $\mathrm{Res}^{\phi_{R_{21}^{-1}}}$ 保持投射对象。此外，若 Res^{ϕ_R} 与$\mathrm{Res}^{\phi_{R_{21}^{-1}}}$ 都保持投射对象，则 **vect** 是完美的。

证明. 由推论 6.9，**vect** 是 op-完全正合的当且仅当 $A_{\mathbf{vect}}^{\mathrm{rev}}$ 保持投射对象。在等价 D （见 (8.13)）下，该函子对应于沿态射 $\phi_{R^{-1}}$ 的限制，因为
$\mathcal{C}$ 上的反向编织是通过以 R 矩阵 R_{21}^{-1}而非 R作用而得到的。因此，该结果由命题 8.5 推出。结合这两个假设，**vect** 是完美的，见定义 6.20 和推论 6.21。□

我们注意到，**vect** 是否完全正合取决于为 H选择的 R 矩阵。见后文注记 8.27，其中给出一个霍普夫代数 S 以及一类编织 R_t，对于 $t \in \mathbb{C}$，其中 **vect** 完全正合当且仅当 $t \neq 0$。我们观察到如下推论。

推论 8.7. 假设 H 是余交换的，并赋予 $\mathcal{C} = H$-**模** 由万有 *R* 矩阵 $R = 1 \otimes 1$给出的对称编织。若 H^* 不是半单的，则 **vect** 不是完全正合的。

证明. 由于 $R = 1 \otimes 1$，我们有 $\phi_R = u_H \circ \varepsilon_H$。这意味着 $\mathrm{Res}^{\phi_R} = \mathrm{Res}_{\varepsilon_H} \circ \mathrm{Res}^{u_H}$。该函子将 $\mathcal{C}$的对象 X先送到底层向量空间，然后再送到 $\mathbb{1}^{\oplus \dim_{\Bbbk} X}$。若 H^*-**模**不是半单的，则对于非零的 X，对象 $\mathbb{1}^{\oplus \dim_{\Bbbk} X}$不是投射的。由命题 8.5，**vect** 不是完全正合的。□

引理 8.8. 对于代数同态 $\phi\colon A \to B$，当且仅当 ϕ 是代数同构时，式 Res^{ϕ} 中的函子 (8.12) 是等价。

证明。 显然，若 ϕ 是同构，则 Res^{ϕ} 是等价。反过来，假设 Res^{ϕ} 是等价。根据 Eilenberg–Watts定理，这等价于 A-B-双模$X = \mathrm{Res}^{\phi}(B)$ 可逆。此双模 X 定义在 B 上，带有正则右 B-作用，左 A-作用则由沿 ϕ的限制给出。记 X 为 ${}_{\phi}B$。

对于逆 B-A-双模 Y，存在一个 A-双模同构 ${}_{\phi}B \otimes_B Y \cong A$。利用右 A-模的典范同构 $B \otimes_B Y \cong Y$，可得 $Y \cong A$ 作为右A-模。为简便起见，我们将 $Y = A$ 视为右 A-模。因此， Y 上的左 B-模结构由代数同态 $\tau\colon B \to A$ 定义，其中 $\tau(b) = b \cdot 1_A$。于是，我们记作$Y = {}_{\tau}A$。在此识别下， A-双模的同构 $\alpha\colon {}_{\phi}B \otimes_B {}_{\tau}A \xrightarrow{\sim} A$由 A上的左 B-作用给出。也就是说， $\alpha(b \otimes a) = b \cdot a = \tau(b)a$. 但 α 是左 A-模同构。因此，对于任意 $a \in A$,

$$a = a \cdot \alpha(1 \otimes 1) = \alpha(a \cdot 1 \otimes 1) = \alpha(\phi(a) \otimes 1) = \tau\phi(a).$$

这意味着 $\tau\phi = \mathrm{id}_A$. 同样， $\phi\tau = \mathrm{id}_B$ 并且 ϕ 是一个同构。 □

推论8.9. 左 $\mathcal{C}$-模范畴**vect** 可逆，当且仅当 ϕ_R 是单射（或满射）。在这种情况下， $\mathcal{C}^*_{\mathbf{vect}} \simeq \mathcal{C}$ 作为张量范畴以及左 $\mathcal{C}$-模范畴彼此同构。特别地，根据推论*7.3*，**vect** 在这种情况下是完全正合且*op*-完全正合的（见定义 *6.4*）。

证明。 根据定理 7.2，**vect** 可逆当且仅当 $A_{\mathbf{vect}}$ 是一个等价。根据交换图 (8.13)，这等价于 Res^{ϕ_R} 是一个等价。根据引理8.8，这等价于ϕ_R 是一个同构。由于 Hopf 代数 H 与 H^* 是维数相同的有限维代数，ϕ_R 是同构当且仅当它是单射（或满射）。□

ϕ_R 可逆性的一个等价刻画是：R 矩阵在视为映射 $\Bbbk \to H \otimes H, 1 \mapsto R$时定义了一个非退化余配对。第 8.3 节中的下一个例子表明，即使编织是非退化的，即当霍普夫代数 H 在 RR_{21} 定义非退化余配对这一意义下可因子化时，**vect**也可能不是完全正合的，参见例如 [R，定义12.4.1]。

8.2. **vect 的余循环扭曲**。我们首先回顾一下，Hopf 2-上循环是一个可逆元素 $J \in H \otimes H$，满足

$$(\mathrm{id} \otimes \Delta)J \cdot J_{23} = (\Delta \otimes \mathrm{id})J \cdot J_{12} \ , \tag{8.14}$$

该元素是归一化的，即 $(\varepsilon \otimes \mathrm{id})J = 1 = (\mathrm{id} \otimes \varepsilon)J$。然后，我们可以通过让 J 作用于幺半函子 $F^J\colon \mathcal{C} \to \mathbf{vect}$，来扭曲纤维函子 $F\colon \mathcal{C} \to \mathbf{vect}$ 的幺半结构，参见例如 [EGNO，第 5 节 14]。由此得到的 $\mathbf{vect}$ 上的 $\mathcal{C}$-模范畴结构记作 $\mathbf{vect}^J$。其模结合子由 J 的作用定义，即

$$l^J_{V,U,W}\colon V \triangleright (U \triangleright W) \xrightarrow{\sim} V \otimes U \triangleright W, \quad v \otimes (u \otimes w) \mapsto J \cdot (v \otimes u) \otimes w, \tag{8.15}$$

对于 $\mathcal{C}$ 中的对象 V, U、 $W \in \mathbf{vect}^J$ 中的对象 $v \in V, u \in U, w \in W$。

在命题 8.13 中，我们将推广命题 8.4，以计算此类 $\mathcal{C}$-模范畴之间的 $\mathcal{C}$-线性函子范畴。

定义 8.10. 余代数 ${}^LH^J$ 定义在向量空间 H 上，其余单位为 ε_H，扭曲余乘法为

$$({}^L\Delta^J_H)(h) = L^{-1} \cdot \Delta_H(h) \cdot J, \qquad \text{for} \quad h \in H \ , \tag{8.16}$$

由于 J 和 L满足 2-余循环条件，因此该余乘法是余结合的。

我们如下定义 $\mathcal{C}$在 ${}^LH^J$-**余模** 上的左作用。对于左 H-模 (W, a_W) 和左${}^LH^J$-余模 (V, δ_V)， $W \triangleright V$ 是 ${}^LH^J$-余模 $(W \otimes V, \delta_{W \triangleright V})$，其中

$$\delta_{W \triangleright V}(w \otimes v) = (R^L)^{(2)} v^{(-1)} \otimes ((R^L)^{(1)} \cdot w) \otimes v^{(0)}, \tag{8.17}$$

对于 $w \in W$, $v \in V$，其中我们将 $\delta_V(v)$ 记作 $= v^{(-1)} \otimes v^{(0)}$，并且

$$R^L = (R^L)^{(1)} \otimes (R^L)^{(2)} = L^{-1}_{21} \cdot R \cdot L. \tag{8.18}$$

该 $\mathcal{C}$-作用的模结合子继承自 $\mathbf{vect}^L$，因此由 L的作用给出。对于下一个定义，请回顾我们关于对偶代数 H^*的约定 (8.5)。

定义 8.11. 给定两个 2-余循环 J 和 L，对余乘法 ${}^LH^J$ 取对偶可在 H^*上诱导出一个乘法：

$${}_L m_J(f \otimes g)(h) := g\big(L^{(-1)} h_{(1)} J^{(1)}\big) f\big(L^{(-2)} h_{(2)} J^{(2)}\big), \tag{8.19}$$

对于 $f,\ g \in H^*$和 $h \in H$，其中 $J = J^{(1)} \otimes J_{(2)}$和 $L^{-1} = L^{(-1)} \otimes L^{(-2)}$。我们将向量空间 H^* 上的相应代数结构记为 ${}_LH^*_J$，其乘法为 ${}_L m_J$，单位元与 H^*相同。

我们得到引理 8.1 中等价 E 的以下推广。

引理 8.12。 存在一个范畴等价

$${}^LE^J\colon \mathrm{Fun}_{\mathcal{C}}(\mathbf{vect}^J, \mathbf{vect}^L) \xrightarrow{\sim} {}^LH^J\text{-}\mathbf{comod}, \quad (G, s^G) \mapsto (G(\Bbbk), \delta^G), \tag{8.20}$$

对于定义 *8.10* 中的余代数 ${}^LH^J$，并且 δ^G 如(8.3)中所定义。

证明。 设 $\delta^G(v) = v^{(-1)} \otimes v^{(0)} \in F(H) \otimes G(\Bbbk)$。将 $G(V) := V \otimes G(\Bbbk)$ 识别为向量空间，我们利用 $\mathcal{C}$-线性结构 $s^G_{X,\Bbbk}$ 的自然性，证明对于任意 $X \in \mathcal{C}$、$x \in X$ 和 $v \in G(\Bbbk)$，都有 $s^G_{X,\Bbbk}(x \otimes v) = v^{(-1)} \cdot x \otimes v^{(0)}$。然后，我们在投射生成元上计算相干条件 (B.6)，令 $X = Y = H$ 和 $M = \Bbbk$。首先，(B.6) 中的项 $s^G_{H \otimes H, \Bbbk}$ 是一个自同构，

$F(H)\otimes F(H)\otimes G(\Bbbk)$ 是如下线性映射： $g\otimes h\otimes v\mapsto \Big(\Delta_H(v^{(-1)})\cdot(g\otimes h)\Big)\otimes v^{(0)}$。接着，在元素 $1_H\otimes 1_H\otimes v$ 上计算等式 (B.6)，得到等式

$$\Delta_H(v^{(-1)})\otimes v^{(0)}=L^{(1)}v^{(-1)}J^{-(1)}\otimes L^{(2)}v^{(0)(-1)}J^{-(2)}\otimes v^{(0)(0)}\ ,$$

对于任意 $v\in G(\Bbbk)$，并且我们使用了 $\mathbf{vect}^J$ 和 $\mathbf{vect}^L$ 的非平凡模结合子，它们由 J 和 L 的作用给出，参见 (8.15)。这等价于映射 δ^G 的余模余结合条件，参见余乘法 (8.16)。此外，$s^G_{\mathbb{1},\Bbbk}=\mathrm{id}_{G(\Bbbk)}$ 等价于 δ^G 的余单位公理。因此，$(G(\Bbbk),\delta^G)$ 是一个 ${}^LH^J$-余模，故 ${}^LE^J$ 是一个定义良好的函子。将一个 ${}^LH^J$-余模 (C,δ) 映射到一对 $((-)\otimes C,s^\delta)$，即可得到 ${}^LE^J$ 的一个拟逆，其中 s^δ 由同一公式 (8.1) 定义。验证 s^δ 的相干条件 (B.6) 是直接的。□

命题 8.13 . 对于两个2-余循环 J 和 L，我们有左 $\mathcal{C}$-模范畴之间的一个等价 s

$$\mathrm{Fun}_{\mathcal{C}}(\mathbf{vect}^J,\mathbf{vect}^L)\xrightarrow{\sim}{}_LH^*_J\text{-}\mathbf{mod}. \tag{8.21}$$

这里，我们为 ${}_LH^*_J$-**模**赋予以下左 $\mathcal{C}$-模结构：对于 $V\in\mathcal{C}$ 和 $W\in{}_LH^*_J$-**模**，我们定义 $V\triangleright W$ 为 $V\otimes W$，作为向量空间，其左 ${}_LH^*_J$-作用定义为

$$f\cdot(v\otimes w)=\phi_{R^L}(f_{(1)})\cdot v\otimes f_{(2)}\cdot w, \tag{8.22}$$

对于 $v\in V$、$w\in W$。模结合子 l^L 由 L 的作用定义，参见 (8.15)。

证明。 证明采用与命题 8.4 相同的策略。回顾一下，定义 8.11 中的扭曲代数 ${}_LH^*_J$ 是通过对余代数 ${}^LH^J$ 取对偶得到的。因此，引理 8.2 可推广为范畴等价

$${}^LH^J\text{-}\mathbf{comod}\xrightarrow{\sim}{}_LH^*_J\text{-}\mathbf{mod}, \tag{8.23}$$

按照与 (8.7) 相同的公式，将余作用取对偶为对偶的作用。与引理 8.12 的等价复合后，我们得到一个等价

$$D\colon \mathrm{Fun}_{\mathcal{C}}(\mathbf{vect}^J,\mathbf{vect}^L)\xrightarrow{\sim}{}_LH^*_J\text{-}\mathbf{mod}.$$

我们需要证明等价 D 是 $\mathcal{C}$-线性的。按照命题 8.4 的证明方法，但考虑非平凡的模结合子 l^L，我们计算

$$\begin{aligned}\delta^{X\triangleright G}(x\otimes v)&=s^{X\triangleright G}_{H,\Bbbk}(x\otimes 1_H\otimes v)\\&=(l^L_{H,X,G(\Bbbk)})^{-1}\circ(\psi_{X,H}\otimes\mathrm{id}_{G(\Bbbk)})\circ l^L_{X,H,G(\Bbbk)}\circ(\mathrm{id}_X\otimes s^G_{H,\Bbbk})(x\otimes 1_H\otimes v)\\&=(l^L_{H,X,G(\Bbbk)})^{-1}\circ(\psi_{X,H}\otimes\mathrm{id}_{G(\Bbbk)})(L^{(1)}x\otimes L^{(2)}v^{(-1)}\otimes v^{(0)})\\&=L^{-(1)}R^{(2)}L^{(2)}v^{(-1)}\otimes L^{-(2)}R^{(1)}L^{(1)}x\otimes v^{(0)}=(R^L)^{(2)}v^{(-1)}\otimes(R^L)^{(1)}x\otimes v^{(0)},\end{aligned}$$

对于 $v\in G(\Bbbk)$ $x\in X$，其中第二个等号用到了 (2.11)，最后一个等号用到了 (8.18) 中 R^L 的定义。接下来，通过等价 (8.23) 对偶化 ${}^LH^J$-余作用 $\delta^{X\triangleright G}$，即可恢复 (8.22) 中的 ${}_LH^*_J$-作用。这表明，等价 D 将 $X\triangleright(G,s^G)$ 映射到 $X\triangleright D(G,s^G)$。因此， D 是具有平凡 $\mathcal{C}$-线性结构的 $\mathcal{C}$-模范畴之间的等价。${}_LH^*_J$-**模** 的结合子继承自 (2.11) 中 $\mathbf{vect}^L$ 的结合子，因为它是定义于引理 2.11 的 $\mathrm{Fun}_{\mathcal{C}}(\mathbf{vect}^J,\mathbf{vect}^L)$ 的结合子在等价 D 下的像。□

命题 8.13 中的模结合子 l^L 是 ${}_LH^*_J$-模的态射，这等价于

$$(L^{-1}\otimes 1)\cdot((\Delta\otimes\mathrm{id})\delta(f))\cdot(L\otimes 1)=(\mathrm{id}\otimes\delta)\delta(f)\ , \tag{8.24}$$

其中，类比于（8.10），我们定义一个代数同态

$$\delta\colon {}_LH^*_J\to H\otimes{}_LH^*_J,\quad f\mapsto\phi_{R^L}(f_{(1)})\otimes f_{(2)}. \tag{8.25}$$

我们注意到，(8.24) 等价于 ${}_LH^*_J$ 关于 (8.25) 中的 δ是一个 ${}^LH^L$-余模代数。这里，霍普夫代数 ${}^LH^L$ 是 H，其余乘法如定义 8.10 中所示由 L 扭曲。

注8.14。由命题 8.13 可知，命题 8.5 中 (i) 与 (ii) 的等价性有如下推广：$\mathbf{vect}^J$ 完全正合，当且仅当 $\mathrm{Res}^{\phi_{R^J}}$ 保持投射对象，其中R^J 由 (8.18) 定义，且回顾 (8.8)。我们省略证明，因为它本质上重复了命题 8.5 的证明。此外，利用 (8.18)，我们有 $(R^J)_{21}^{-1} = (R_{21}^{-1})^J$。因此，${}^*\mathbf{vect}^J$完全正合，当且仅当 $\mathrm{Res}^{\phi_{(R_{21}^{-1})^J}}$ 保持投射对象，这是推论 8.6 的直接推广。此外，$\mathbf{vect}^J$可逆，当且仅当 ϕ_{R^J} 可逆，这推广了推论 8.9。

8.3. **小量子 $\mathfrak{sl}_2$。** 这里，我们考虑非半单可因子化霍普夫代数的情形。设 q 是奇数阶 $p \geq 3$的本原单位根。小量子群 $u_q = u_q(\mathfrak{sl}_2)$ 是由 E、F、K生成的$\mathbb{C}$-代数，其定义关系为

$$KE = q^2 EK, \quad KF = q^{-2} FK, \quad EF - FE = \frac{K - K^{-1}}{q - q^{-1}}, \quad E^p = F^p = 0, \quad K^p = 1.$$

其余乘法和余单位由[12]给出

$$\begin{aligned} &\Delta(E) = 1 \otimes E + E \otimes K, \qquad \Delta(F) = F \otimes 1 + K^{-1} \otimes F, \qquad \Delta(K) = K \otimes K\ , \\ &\varepsilon(E) = 0, \qquad \varepsilon(F) = 0, \qquad \varepsilon(K) = 1. \end{aligned} \tag{8.26}$$

众所周知 [CP] 或 [KS，第 3.3 节。3] 该代数有 p 个简单模同构类，每个模的维数为 $1 \leq s \leq p$。维数为 p 的唯一简单模是投射模。其余 $p-1$ 个简单模的投射盖的维数均为 $2p$ [CP，第 3.8] 节。

现在我们考虑对偶霍普夫代数 u_q^*。设 $\rho : u_q(\mathfrak{sl}_2) \to \mathrm{End}(\mathbb{C}^2)$ 是由下式定义的基本表示

$$\rho(E) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \rho(F) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \rho(K) = \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & q^{-1} \end{pmatrix}.$$

写出 $\rho = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$，使得 $a,\ b,\ c,\ d \in u_q^*$。我们首先注意到，这些定义在 PBW基 上的泛函为

$$\begin{aligned} &a(F^m E^n K^j) = q^j \delta_{m,0}\delta_{n,0}\ , \qquad b(F^m E^n K^j) = q^{-j}\delta_{m,0}\delta_{n,1}\ , \\ &c(F^m E^n K^j) = q^j \delta_{m,1}\delta_{n,0}\ , \qquad d(F^m E^n K^j) = q^{-j}(\delta_{m,0}\delta_{n,0} + \delta_{m,1}\delta_{n,1})\ , \end{aligned} \tag{8.27}$$

对所有 $0 \leq m,\ n,\ j \leq p-1$。通过归纳法，我们证明 PBW基 上余乘法的以下公式:

$$\Delta(F^m E^n K^j) = \sum_{r=0}^{m}\sum_{s=0}^{n} q^{2(n-s)(r-m)+r(m-r)+s(n-s)} \begin{bmatrix} m \\ r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n \\ s \end{bmatrix} F^r E^{n-s} K^{r-m+j} \otimes F^{m-r} E^s K^{n-s+j}.$$

这里，我们使用 q-二项式

$$\begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} = \frac{[m]!}{[n]![m-n]!}, \qquad \text{where} \qquad [n]! = \prod_{k=1}^{n}[k], \qquad \text{and} \qquad [k] = \frac{q^k - q^{-k}}{q - q^{-1}}.$$

利用这个余乘法公式以及关于 H^* 中乘法的约定 (8.5)，我们计算得到

$$\begin{aligned} bc(F^m E^n K^j) &= \delta_{m,1}\delta_{n,1} = cb(F^m E^n K^j)\ , \\ db(F^m E^n K^j) &= q^{-2j-1}(\delta_{m,0}\delta_{n,1} + \delta_{m,1}\delta_{n,2})\ , \\ da(F^m E^n K^j) &= \delta_{m,0}\delta_{n,0} + q^{-1}\delta_{m,1}\delta_{n,1}\ , \end{aligned}$$

其他乘法也类似。由此可见，u_q^*由 b、c、d生成，其定义关系为

$$bc = cb, \quad db = q^{-1}bd, \quad dc = q^{-1}cd, \quad b^p = c^p = 0, \quad d^p = 1, \tag{8.28}$$

[12]我们不写出反 antipode，因为本节中不会用到它。

以及 $da - ad = (q^{-1} - q)cb$，其中最后一个关系中的 1 是 u_q的余单位。因此，由于 d可逆，元素 a 并非独立的： $a = d^{-1} + q^{-1}d^{-1}bc$。

现在我们可以描述 u_q^*上的射影覆盖。由关系式(8.28)可见， u_q^* 恰好容许 p 个同构类的简单模，它们是一维的 $\mathbb{C}_\xi$ ，由作为 d的特征值的1的 p次根q^ξ来标号，其中 $\xi = 0$，……， $p-1$，并且 b与 c的作用是平凡的。相应的本原幂等元为 $e_\xi = \frac{1}{p}\sum_{n=1}^{p} q^{-\xi n} d^n$，即 $de_\xi = q^\xi e_\xi$，而投射模 $u_q^* e_\xi$ 覆盖 $\mathbb{C}_\xi$。由于 b 与 c 交换，利用(8.28)中倒数第二个关系式，它们各自的维数为 p^2 。 $\mathbb{C}_\xi$ 的射影覆盖 P_ξ 是 $u_q^* e_\xi$ 的直和项，因而维数至多为 p^2。由韦德伯恩–阿廷定理， $\sum_{\xi=0}^{p-1} \dim_{\mathbb{C}} P_\xi \le p \cdot p^2$ 必须等于 $p^3 = \dim_{\mathbb{C}} u_q^*$。因此对所有 ξ 都有 $P_\xi = u_q^* e_\xi$ ，并且每个投射 u_q^*-模的维数至少为 p^2。

已知霍普夫代数 u_q是可因子化的 [Ly，推论 A.3.3]，其 R 矩阵为 [Ly，第 A.2–A.3] 节 $R \in u_q$ 的形式为$\mathfrak{b}_+(\ \otimes u_q)\mathfrak{b}_-$，其中 $u_q(\mathfrak{b}_+)$是由 E 生成的霍普夫子代数，且 K；而 $u_q(\mathfrak{b}_-)$是由 F 和 K生成的霍普夫子代数。因此，来自（8.8）的霍普夫代数映射 ϕ_R 下， u_q^* 的像为 $u_q(\mathfrak{b}_+) \subset u_q$。相应的限制函子 Res$_{\phi_R}$: u_q-**模** $\to u_q^*$-**模**s 将 p 维和 $2p$ 维的投射 u_q-模映为维数相同的 u_q^*-模；根据不等式 $2p < p^2$，这些模不可能是投射模。由命题 8.5（ii），我们得出以下结果。

命题8.15。 左 $\mathcal{C}$-模范畴**vect** 对于 $\mathcal{C} = u_q$（$\mathfrak{sl}_2$）-**模**不是完全正合的。

由此可得如下例子：在非退化编织张量范畴 $\mathcal{C}$ 上，两个正合的 $\mathcal{C}$-模范畴的相对 Deligne 积并非正合。

推论 8.16。 左 $\mathcal{C}$-模范畴 ***vect** $\boxtimes_{\mathcal{C}}$ **vect** 并非正合。

证明。 由命题 8.15，**vect** 并非完全正合，因此根据定理 5.5， ***vect** $\boxtimes_{\mathcal{C}}$ **vect** 并非正合。此外， ***vect** 是正合的，因为**vect** 是正合的，见命题 4.17。□

对一般的单李代数 $\mathfrak{g}$，也可以进行类似的分析。任意 $u_q(\mathfrak{g})$ 的 R 矩阵具有形式 $R \in u_q(\mathfrak{b}_+) \otimes u_q(\mathfrak{b}_-)$，因此，与上述情形类似， $\mathfrak{sl}_2$ 中 ϕ_R： $u_q(\mathfrak{g})^* \to u_q(\mathfrak{g})$ 的像是 Borel 子代数 $u_q(\mathfrak{b}_+)$。特别地，由推论 8.9 可知，模范畴**vect** 不可逆。此外，我们可以作如下猜想：

猜想 8.17. 设 $\mathcal{C}$ 为 $u_q(\mathfrak{g})$上有限维模构成的编织张量范畴，其中q 是奇数阶单位根，且配备标准可因子化 R 矩阵，参见 [Ly，第 A.2–A 节。3]。那么， $\mathcal{C}$-模范畴**vect** 并非全正合。

8.4. **Sweedler 霍普夫代数的全正合模范畴**。 本节将分类 Sweedler 四维 Hopf 代数的（有限维）模范畴上的全正合模范畴和完美模范畴，见命题 8.22。我们还将在命题 8.23 中计算此例的相对 Deligne 积和函子范畴。

在本节余下部分，我们假设 $\Bbbk = \mathbb{C}$ 。记**svect** 为 $\mathbb{C}$上的超向量空间构成的对称张量范畴。作为编织张量范畴，**svect** 等价于$\mathbb{C}C_2$-模范畴，其中 $C_2 = \langle g \mid g^2 = 1 \rangle$，其编织由 R 矩阵给出

$$R = \frac{1}{2}(1 \otimes 1 + g \otimes 1 + 1 \otimes g - g \otimes g). \tag{8.29}$$

定　义 8.18（Sweedler霍普夫代数）。 *Sweedler*霍普夫代数 是该代数

$$S = \mathbb{C}\langle x, g \mid x^2 = 0,\ g^2 = 1,\ gx = -xg \rangle,$$

余乘法 Δ、余单位 ε和反 antipode S 由生成元上的下列表达式确定

$$\Delta(x) = x \otimes 1 + g \otimes x, \qquad \Delta(g) = g \otimes g,$$
$$\varepsilon(x) = 0, \qquad \varepsilon(g) = 1, \qquad S(g) = g, \qquad S(x) = xg.$$

张量范畴 $\mathcal{C}=S$-**模** 是非半单的。它有两个简单对象 $\mathbb{C}_+$ 和 $\mathbb{C}_-$，它们均为一维对象，其中 g 分别作用为 $+1$、 -1，而 x 作用为零。这两个简单对象的投射盖为 $Se_\pm$，对应于幂等元 $e_\pm=(1\pm g)/2$。

考虑超 Hopf 代数

$$B=\mathbb{C}[x]/(x^2)\ , \tag{8.30}$$

其中 x 的度为 1，具有本原余乘 $\Delta(x)=x\otimes 1+1\otimes x$。等价地， B 是 **svect** 中的交换且余交换 Hopf 代数。作为 Hopf 代数， S 同构于玻色化 $B\rtimes\mathbb{C}C_2$。超 Hopf 代数 B 关于任意以下 R 矩阵都是准三角的

$$\check{R}_t=1\otimes 1+tx\otimes x, \tag{8.31}$$

对 $t\in\mathbb{C}$。这 这使 Hopf 代数 S 成为准三角代数，其一族 R 矩阵由下式给出

$$R_t:=\frac{1}{2}(1\otimes 1+g\otimes 1+1\otimes g-g\otimes g)(1\otimes 1+tx\otimes gx),\qquad t\in\mathbb{C}. \tag{8.32}$$

注意，对于来自 (8.29) 的 R 矩阵， $R_0=R$。可以验证 $(R_t)_{21}\cdot R_t=1\otimes 1$。因此，R 矩阵 R_t 在 $\mathcal{C}=S$-**模** 上诱导出对称编织。

定义 8.19. 将 $\mathcal{C}$ 配备由 (8.32) 中的 R 矩阵 R_t 所诱导的编织后得到的对称张量范畴记为 $\mathcal{C}_t$。我们将对称张量范畴 $\mathcal{C}_0$ 简记为 $\mathcal{C}$。

注意，R 矩阵 R_t 特别地是 $S\otimes S$ 中的 Hopf 2-余循环，回顾 (8.14)。类似地，$\check{}R_t$ 是 $B\otimes B$ 中的 Hopf 2-余循环，但它是内部于 **svect** 的。

引理 8.20. 对于任意 t、 $\lambda\in\mathbb{C}$，我们有一个编织张量范畴之间的等价

$$I_t^\lambda=(\mathrm{id}_{\mathcal{C}},\iota^\lambda)\colon\mathcal{C}_t\to\mathcal{C}_{t+2\lambda}, \tag{8.33}$$

其幺半结构定义为

$$\iota^\lambda_{V,W}\colon V\otimes W\to V\otimes W,\quad v\otimes w\mapsto R_\lambda\cdot v\otimes w,$$

对于 $\mathcal{C}$ 中的对象 V、 W 以及元素 $v\in V$、 $w\in W$。特别地，我们得到一个编织张量范畴之间的等价 $I_t^{-t/2}:\ \mathcal{C}_t\xrightarrow{\sim}\mathcal{C}_0$。

证明. 由于 R_λ 是霍普夫代数 S 的 2-余循环，因此 I_t^λ 是一个幺半函子。显然它是一个等价。恒等

$$(R_\lambda)_{21}^{-1}\cdot R_t\cdot R_\lambda=R_{t+2\lambda} \tag{8.34}$$

霍普夫代数 S 的 R 矩阵很容易验证，并意味着 I_t^λ 是一个辫编织单oidal等价。□

对 $\mathcal{C}$ 上不可分解的精确左模范畴的等价类的分类，可由更一般的结果 [EO2，定理 4.10] 和 [Mo，第 8 节.1], 得到；另见 [W，第 5 节.3]，其中按混合结合子对正合模范畴给出了我们将使用的详细分类。不可分解的精确左模范畴分为这两个单参数族

$$\Big\{\mathbf{vect}^\lambda\mid\lambda\in\mathbb{C}\Big\}\quad\text{and}\quad\Big\{\mathbf{svect}^\lambda\mid\lambda\in\mathbb{C}\Big\},$$

半单模范畴以及两个非半单模范畴 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{D}=D$-**模**。这里，$D=\mathbb{C}[x]/(x^2)$ 是 S 的子代数。 S 的余乘法在 $\Delta|_D$ 上的限制， $D\to S\otimes D$: D 使其成为左 S-余理想子代数。特别地， D 是一个左 S-余模代数，它根据 (8.9) 在 $\mathcal{D}$ 上诱导出一个左 $\mathcal{C}$-作用。

记 $F\colon \mathcal{C}\to\mathbf{vect}$ 为遗忘 S-作用的纤维函子，其幺半结构由恒等分量给出。对于每个 $\lambda\in\mathbb{C}$，$\mathbf{vect}^\lambda=\mathbf{vect}$ 作为一个范畴，其左$\mathcal{C}$-作用由例 B.1 中的张量函子给出

$$F^\lambda=(F,\mu^\lambda)\colon \mathcal{C}\to\mathbf{vect},\qquad \mu^\lambda_{V,W}\colon F(V)\otimes F(W)\to F(V\otimes W),\quad v\otimes w\mapsto R_\lambda\cdot v\otimes w, \tag{8.35}$$

对于 $v\in F(V)$，$w\in F(W)$。类似地，存在一个纤维函子 $\check{}F\colon \mathcal{C}\to\mathbf{svect}$，因为 $\mathcal{C}=B$-**模**$_{\mathbf{svect}}$。我们将 $\mathbf{svect}^\lambda=\mathbf{svect}$ 定义为一个范畴，其左侧 $\mathcal{C}$-作用由例 B.1 中的遗忘函子 $(\check{}F,\ \check{}\mu^\lambda)\colon \mathcal{C}\to\mathbf{svect}$ 及其幺半结构给出

$$\check{\mu}^\lambda_{V,W}\colon \check{F}(V)\otimes\check{F}(W)\to\check{F}(V\otimes W),\quad v\otimes w\mapsto\check{R}_\lambda\cdot v\otimes w,$$

其中 $\check{}R_\lambda$ 是超 Hopf 代数 B的 2-余循环，见 (8.30)–(8.31)。

接下来，我们将正合模范畴的集合重新参数化如下：对于 $\lambda\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$，记作

$$\mathcal{V}_\lambda:=\mathbf{vect}^{\lambda^{-1}},\quad \mathcal{V}_0:=\mathcal{C},\quad \mathcal{V}_\infty:=\mathbf{vect}^0,$$

并且，类似地，

$$\mathcal{S}_\lambda:=\mathbf{svect}^{\lambda^{-1}},\quad \mathcal{S}_0:=\mathcal{D},\quad \mathcal{S}_\infty:=\mathbf{svect}^0.$$

这样，$\mathcal{C}$ 的不可分解正合 $\mathcal{C}$-模范畴可参数化为一个不交并

$$\left\{\mathcal{V}_\lambda\mid\lambda\in\mathbb{C}\mathrm{P}^1\right\}\sqcup\left\{\mathcal{S}_\lambda\mid\lambda\in\mathbb{C}\mathrm{P}^1\right\},$$

由复射影空间 $\mathbb{C}\mathrm{P}^1=\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ 的两份副本索引。这些左 $\mathcal{C}$-模范畴两两不等价，这一点可由 [W，命题 5.20 和 5.21] 得出。

引理 8.21. 左 $\mathcal{C}$-模范畴 $\mathcal{D}$ 是可分的（参见定义 *4.8* 和 *4.13*）。

证明. 可以证明，对于 $\mathcal{C}$ 中的代数 $I=\Bbbk[y]/(y^2-1)$，$\mathcal{D}\simeq$ **模**$_{\mathcal{C}}$-I。一个对象为 $I=\mathbb{C}_+\oplus\mathbb{C}_-$，其中 1_I 和 y 分别张成直和项 $\mathbb{C}_+$ 和 $\mathbb{C}_-$。

乘法映射的一个截面定义如下：

$$s\colon I\to I\otimes I,\qquad 1\mapsto\frac{1}{2}(1\otimes1+y\otimes y),\quad y\mapsto\frac{1}{2}(y\otimes1+1\otimes y),$$

显然与 S-作用交换。由于下式成立，这定义了一个 I-双模同态：

$$y\cdot\frac{1}{2}(1\otimes1+y\otimes y)=\frac{1}{2}(y\otimes1+1\otimes y)=\frac{1}{2}(1\otimes1+y\otimes y)\cdot y.$$

因此，I 是 $\mathcal{C}$中的可分代数。 □

现在，我们可以在 Sweedler 情形 $H=S$ 下对完全正合的 $\mathcal{C}$-模进行分类。

命题 8.22. 对于 $\lambda\in\mathbb{C}\mathrm{P}^1,$，左 $\mathcal{C}$-模范畴 $\mathcal{V}_\lambda$ 和 $\mathcal{S}_\lambda$ 完全正合，当且仅当 $\lambda\neq\infty$ 时，它们是完美的。

证明。由于 $\mathcal{C}$ 是对称的，根据推论 6.12，完全正合与 op-完全正合的 $\mathcal{C}$-模范畴类相同。因此，$\mathcal{V}_\lambda$ 和 $\mathcal{S}_\lambda$ 完全正合，当且仅当它们是完美的。

考虑来自 (8.8) 的态射 $\phi_R\colon S^*\to S$。利用 (8.29) 中 $R=R_0$ 的显式公式，我们看到 ϕ_R 的像等于由 g 生成的子代数 $\mathbb{C}C_2\subset S$，特别是 $\phi_R(x)=0$。因此，函子 Res$_{\phi_R}\colon \mathcal{C}\to S^*$-**模** $\simeq\mathcal{C}$ 不保投射对象，因为其像由半单对象构成。根据命题 8.5，$\mathcal{V}_\infty=\mathbf{vect}$ 不是完全正合的。

显然，根据例 5.3(i)，$\mathcal{V}_0=\mathcal{C}$ 是完全正合的。对于 $\lambda\neq0$，要证明 $\mathcal{V}_{\lambda^{-1}}=\mathbf{vect}^\lambda$ 完全正合，根据注 8.14，只需证明 ϕ_{R^J}对 $J=R_\lambda$而言是一个同构。根据 (8.34)，这里 $R^J=(R_\lambda)^{-1}_{21}\cdot R_0\cdot R_\lambda=R_{2\lambda}$。接着我们计算得出，同态 $\phi_{R_{2\lambda}}$ 确实是一个同构。

我们在例 4.24 中证明了 $\mathcal{S}_\infty\boxtimes_{\mathcal{C}}\mathcal{S}_\infty$不是正合的，因此根据定义 5.1，$\mathcal{S}_\infty$不是完全正合的。由引理 8.21 和命题 5.16 可知，非半单的 $\mathcal{C}$-模范畴 $\mathcal{S}_0=\mathcal{D}$是完全正合的。证明 $\mathcal{S}_\lambda$ 对所有 $\lambda\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ 都是完全正合的，使用了上一段中证明 $\mathcal{V}_\lambda$ 的论证的推广，但在 **svect** 内部进行。细节留给 [GL]。□

对于 $\mathcal{C}=S$-**模**，我们可以计算所有不可分解的完全正合 $\mathcal{C}$-模范畴的相对 Deligne 积、对偶以及函子范畴。

命题 8.23。 对于 λ、$\mu\in\mathbb{C}$，我们有以下左 $\mathcal{C}$-模范畴之间的等价：

$$\begin{aligned}
&\mathcal{V}_\lambda\boxtimes_{\mathcal{C}}\mathcal{V}_\mu\simeq\mathcal{V}_{\lambda+\mu}, && \mathcal{S}_\lambda\boxtimes_{\mathcal{C}}\mathcal{V}_\mu\simeq\mathcal{S}_{\lambda+\mu}, && \mathcal{V}_\lambda^*\simeq\mathcal{V}_{-\lambda}\simeq{}^*\mathcal{V}_\lambda,\\
&\mathcal{V}_\lambda\boxtimes_{\mathcal{C}}\mathcal{S}_\mu\simeq\mathcal{S}_{\lambda+\mu}, && \mathcal{S}_\lambda\boxtimes_{\mathcal{C}}\mathcal{S}_\mu\simeq\mathcal{V}_{\lambda+\mu}, && \mathcal{S}_\lambda^*\simeq\mathcal{S}_{-\lambda}\simeq{}^*\mathcal{S}_\lambda,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Fun}_{\mathcal{C}}(\mathcal{V}_\lambda,\mathcal{V}_\mu)\simeq\mathcal{V}_{\mu-\lambda}, && \mathrm{Fun}_{\mathcal{C}}(\mathcal{S}_\lambda,\mathcal{V}_\mu)\simeq\mathcal{S}_{\mu-\lambda},\\
&\mathrm{Fun}_{\mathcal{C}}(\mathcal{V}_\lambda,\mathcal{S}_\mu)\simeq\mathcal{S}_{\mu-\lambda}, && \mathrm{Fun}_{\mathcal{C}}(\mathcal{S}_\lambda,\mathcal{S}_\mu)\simeq\mathcal{V}_{\mu-\lambda}.
\end{aligned}$$

证明。 我们首先说明如何得到涉及 $\mathcal{V}_\lambda=\mathbf{vect}^{\lambda^{-1}}$、$\mathcal{V}_\mu=\mathbf{vect}^{\mu^{-1}}$ 的 $\mathcal{C}$-线性函子范畴，其中 λ、$\mu\in\mathbb{C}$。对于来自（8.32）的 2-余循环，我们令 $H=S$、$J=R_{\lambda^{-1}}$ 和 $L=R_{\mu^{-1}}$。在此情形下，我们计算得到，定义 8.11 中的代数 ${}_LH_J^*$ 同构于代数

$$S_d^*=\mathbb{C}\langle h,y\rangle/(h^2=1,hy=-yh,y^2=d1), \tag{8.36}$$

对于 $d=\lambda^{-1}-\mu^{-1}$。如果 $\lambda\neq\mu$，则 S_d^* 是半单的，因为它同构于矩阵代数 $M_2(\mathbb{C})$。由（8.25）给出的 ${}^LH^L$-余作用只是一个 S-余作用，因为在此情形下，对于（8.16）中的扭曲余乘法，我们有 ${}^L\Delta^L=\Delta$。我们计算得到，S-余作用 $\delta\colon\ S_d^*\to S\otimes S_d^*$，在生成元上的确定方式为

$$\delta(y)=g\otimes y-2\mu^{-1}x\otimes 1,\qquad \delta(h)=g\otimes h.$$

通过设定 $\hat{}g=h$ 和 $\hat{}x=\frac{iyh}{\sqrt{d}}$，我们可以将代数 S_d^* 与 S-余模代数 $A_\xi=\mathbb{C}\langle\hat{}g,\hat{}x\rangle/(\hat{}g^2=1,\hat{}g\hat{}x=-\hat{}x\hat{}g,\hat{}x^2=1)$ 识别为 [W, Eq. (5.3)],[13] 中的 $\xi=-\frac{2\mu^{-1}i}{\sqrt{d}}$。在此识别下，$\delta$ 对应于 S-余作用

$$\delta\colon A_\xi\to S\otimes A_\xi,\qquad \hat{g}\mapsto g\otimes\hat{g},\qquad \hat{x}\mapsto 1\otimes\hat{x}+\xi xg\otimes\hat{g}.$$

由命题 8.13，我们有左 $\mathcal{C}$-模范畴 $\mathrm{Fun}_{\mathcal{C}}(\mathcal{V}_\lambda,\mathcal{V}_\mu)\simeq S_d^*$-**模**之间的一个等价，其中 $\mathcal{C}$-模结合子非平凡，由 $L=R_{\mu^{-1}}$的作用给出。由此得到的 $\mathcal{C}$-模范畴 S_d^*-**模** 可以按照 [W, Cor. 5.19]中的记号，识别为 $(A_\xi$- **模** $)^{-\mu^{-1}}$。因此，利用 [W, Prop. 5.23], 计算 $\mu^{-1}-\frac{1}{4}\big(-\frac{2\mu^{-1}i}{\sqrt{\lambda^{-1}-\mu^{-1}}}\big)^2=\frac{1}{\mu-\lambda}$，我们得到左 $\mathcal{C}$-模范畴之间的一个等价

$$\mathrm{Fun}_{\mathcal{C}}(\mathcal{V}_\lambda,\mathcal{V}_\mu)=\mathrm{Fun}_{\mathcal{C}}(\mathbf{vect}^{\lambda^{-1}},\mathbf{vect}^{\mu^{-1}})\simeq\mathbf{vect}^{(\mu-\lambda)^{-1}}=\mathcal{V}_{\mu-\lambda}.$$

若 $\lambda=\mu$，我们首先回顾命题 8.22 的证明，该证明表明，对于 $J=R_{\lambda^{-1}}$，ϕ_{R^J} 是一个同构。接着由注 8.14 可知，$\mathcal{C}$-模 $\mathcal{V}_\lambda$ 可逆，因此由定理 7.2，其中心化子函子 $\mathcal{C}\to\mathcal{C}^*_{\mathcal{V}_\lambda}$ 是一个幺半等价，并由引理 7.1 诱导出一个 $\mathcal{C}$-模等价。

我们还可以进一步计算得出 $\mathcal{V}_\lambda^*={}^*\mathcal{V}_\lambda=\mathcal{V}_{-\lambda}$。因此，

$$\mathcal{V}_\lambda\boxtimes_{\mathcal{C}}\mathcal{V}_\mu\simeq\mathrm{Fun}_{\mathcal{C}}(\mathcal{V}_\lambda^*,\mathcal{V}_\mu)\simeq\mathrm{Fun}_{\mathcal{C}}(\mathcal{V}_{-\lambda},\mathcal{V}_\mu)\simeq\mathcal{V}_{\lambda+\mu}.$$

对于涉及 $\mathcal{S}_\lambda$ 的等价，我们采用了类似但技术性更强的方法。相关细节留待在 [GL] 中发表。□

对于 Sweedler 霍普夫代数，我们作出以下值得注意的观察。

推论 8.24. 所有不可分解的完全正合 $\mathcal{C}$-模范畴 $\mathcal{V}_\lambda$, $\mathcal{S}_\lambda$（其中 $\lambda\in\mathbb{C}$）均可逆。

证明。 命题 8.23 表明，对于这些模范畴 $\mathcal{M}=\mathcal{V}_\lambda$ 或 $\mathcal{S}_\lambda$，在 $\lambda\in\mathbb{C}$的条件下，我们有 $\mathcal{M}^*\boxtimes_{\mathcal{C}}\mathcal{M}\simeq\mathcal{V}_0\simeq\mathcal{M}\boxtimes_{\mathcal{C}}\mathcal{M}^*$。由于 $\mathcal{V}_0=\mathcal{C}$，这表明 $\mathcal{M}$ 是可逆的。□

[13] [W] 采用了不同的方式来表示 Sweedler 霍普夫代数。该同构通过将我们表示中的 x 与 [W] 中的 xg 对应来给出。

注 8.25。 所有 $\mathcal{C}$-**可逆** 对象在等价意义下构成的群 $\pi_0(\mathcal{C}\text{-}\mathbf{可逆})$，就是 S的 Picard 1-群。根据 [Ca] 中的计算，该群为 $\mathbb{C}\times C_2$。通过命题 8.23 和推论 8.24，我们重新得到这一结果，并找到了 Picard 1-群各元素的代表，具体表现为模范畴。

We 最后注意到， $\mathcal{C}$上只有两个可分模范畴 .

引理 8.26。 唯一不可分解的相对投射左 $\mathcal{C}$-模范畴是可分模范畴 $\mathcal{C}=\mathcal{V}_0$ 和 $\mathcal{D}=\mathcal{S}_0$。特别是，它们是仅有的不可分解可分$\mathcal{C}$-模范畴。

证明。 回顾定义 8.19， $\mathcal{C}_t$ 表示编织张量范畴 $\mathcal{C}$ ，其编织由式 (8.32) 中的 R 矩阵 R_t 定义。对于 t, $\lambda\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$，运用命题 8.23 证明中说明的技巧，我们得到左 $\mathcal{C}$-模范畴的一个等价

$$\mathrm{Fun}_{\mathcal{C}_t}(\mathcal{V}_\lambda,\mathcal{V}_\lambda)\simeq S_0^*\text{-}\mathbf{mod},$$

采用式 (8.36) 中的记号，其中， $\mathcal{C}$在 S_0^*-**模** 上的作用由式 (8.17) 中的 S-余作用给出；根据引理 8.3，该余作用对应于扭曲 R 矩阵 $R_{t+2\lambda^{-1}}=(R_{\lambda^{-1}})_{21}^{-1}\cdot R_t\cdot R_{\lambda^{-1}}$所给出的 S-余作用。因此，对于 $\lambda=-2/t$，由命题 8.5 可知， $\mathcal{V}_\lambda$ 作为 $\mathcal{C}_t$-模范畴并非完全正合。类似的论证表明， $\mathcal{S}_{-2/t}$ 作为 $\mathcal{C}_t$-模范畴并非完全正合。

然而，我们注意到，定义 5.11 中将代数视为双模并称其为相对投射的定义，并不取决于 $\mathcal{C}$ 的编织选择。因此，如果 $\mathcal{V}_\lambda$ 按照定义 5.12 的意义是相对投射的，那么根据命题 5.16，对于 $\mathcal{C}$ 上的任意 编织选择，它都是完全正合的。因此，对于 $\lambda\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$， $\mathcal{C}$-模范畴 $\mathcal{V}_\lambda$ 和 $\mathcal{S}_\lambda$ 不可能是相对投射的。

对于 $\lambda=0$，显然 $\mathcal{V}_0=\mathcal{C}$ 是可分的，并且根据引理 8.21， $\mathcal{S}_0=\mathcal{D}$ 也是可分的。 □

注记 8.27。 记 $\mathcal{C}_t$ 为对称张量范畴 $\mathcal{C}$ ，其编织由 (8.32) 中的 R 矩阵 R_t 得到。根据等式 (8.33)，存在一个对称张量范畴等价$\mathcal{C}\xrightarrow{\sim}\mathcal{C}_t$。注意，对于所有 $t\neq 0$，**vect** 作为 $\mathcal{C}_t$-模范畴都是完全正合的。这由命题 8.5 得出，因为映射 ϕ_{R_t}（其中 $t\neq 0$）是一个同构。然而，**vect** 作为$\mathcal{C}_0$-模并非完全正合。因此，即使编织是扭等价的，**vect** 的完全正合性仍取决于编织的选择。

如引理 8.26 的证明所示，模范畴 $\mathbf{vect}^{-t/2}$ 作为左 $\mathcal{C}_t$-模并非全正合。由命题 C.7，从方程 (8.33) 得到的幺半等价 $I:=I_t^{-t/2}$ 诱导出幺半2-等价 $\mathrm{Res}_I\colon\ \mathcal{C}\text{-}\mathbf{mod}\to\mathcal{C}_t\text{-}\mathbf{mod}$，它由命题 5.8 可知保持全正合模范畴。此等价将非全正合的 $\mathcal{C}$-模 **vect** 映射到非全正合的 $\mathcal{C}_t$-模 $\mathbf{vect}^{-t/2}$。这是因为，根据定义，Res_I**(vect)** 是定义在 **vect** 上的 $\mathcal{C}_t$-模范畴，其作用由幺半函子 $F\circ I$给出（如例 B.1 所示）；该函子等于 (8.35) 中定义 $\mathbf{vect}^{-t/2}$上的 $\mathcal{C}$-作用的幺半函子 $F^{-t/2}$。

备注 8.28. 从例子 $\mathcal{C}=S\text{-}\mathbf{mod}$ 可见，全正合 $\mathcal{C}$-模范畴与枢纽的 $\mathcal{C}$-模范畴 [S3] 这两个概念并无直接关联。从 [S3，表 1]可见，对所有 $\lambda\in\mathbb{C}$，全正合的 $\mathcal{V}_\lambda$以及非全正合的**vect** 都是枢纽的 $\mathcal{C}$-模范畴。然而，对所有 $\lambda\in\mathbb{C}$，全正合的 $\mathcal{S}_\lambda$以及非全正合的 **svect** 都不是枢纽的 $\mathcal{C}$-模范畴。

Appendix A. Monoidal and braided monoidal categories

我们在此汇集有关幺半范畴的约定和基本定义。

A.1. **幺半范畴**。 幺半范畴 $\mathcal{C}$ 附带一个结合子，它是一个自然同构，其分量为

$$\alpha_{X,Y,Z}\colon X\otimes(Y\otimes Z)\to(X\otimes Y)\otimes Z$$

满足通常的五边形公理和三角形公理，参见例如 [EGNO，命题 2.2.3–2.2.4]。不过，我们将假设 $\mathcal{C}$ 是严格的，且 α 由恒等态射构成。注意， $\mathcal{C}$ 总可以替换为一个等价的严格幺半范畴 [ML2]。

对于范畴 $\mathcal{M}$， $\mathcal{M}^{\mathrm{op}}$ 表示具有态射空间的对偶范畴

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}^{\mathrm{op}}}(X,Y)=\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}}(Y,X).$$

如果 $\mathcal{C}$ 是一个 m 幺半范畴，则 $\mathcal{C}^{\otimes\mathrm{op}}$ 表示范畴 $\mathcal{C}$，并带有相反张量积 t

$$X\otimes^{\mathrm{op}}Y=Y\otimes X. \tag{A.1}$$

幺半函子 $F\colon\ \mathcal{C}\to\mathcal{D}$ 是一个函子，并带有一个自然同构

$$\mu^F\colon F(X)\otimes F(Y)\to F(X\otimes Y)$$

它满足相干条件，即该图

$$\begin{array}{ccc} F(X)\otimes F(Y)\otimes F(Z) & \xrightarrow{\mu^F_{X,Y}\otimes F(Z)} & F(X\otimes Y)\otimes F(Z) \\ \downarrow{\scriptstyle F(X)\otimes\mu^F_{Y,Z}} & & \downarrow{\scriptstyle \mu^F_{X,Y\otimes Z}} \\ F(X)\otimes F(Y\otimes Z) & \xrightarrow{\mu^F_{X,Y\otimes Z}} & F(X)\otimes F(Y\otimes Z) \end{array} \tag{A.2}$$

对任意对象 X、Y、Z，该图在 $\mathcal{C}$ 中交换。我们假设所有幺半函子都是严格幺元的，即 $F(\mathbb{1}_{\mathcal{C}})=\mathbb{1}_{\mathcal{D}}$。这一假设在 [EGNO，注 2.4.6] 中得到了论证。

若 F 和 G 是幺半函子，则 幺半自然变换 $\eta\colon\ F\to G$ 是满足下图

$$\begin{array}{ccc} F(X)\otimes F(Y) & \xrightarrow{\mu^F_{X,Y}} & F(X\otimes Y) \\ \downarrow{\scriptstyle \eta_X\otimes\eta_Y} & & \downarrow{\scriptstyle \eta_{X\otimes Y}} \\ G(X)\otimes G(Y) & \xrightarrow{\mu^F_{X,Y}} & G(X\otimes Y) \end{array} \tag{A.3}$$

对 $\mathcal{C}$ 中的所有对象 X、Y 都交换。

A.2. **幺半范畴中的对偶**。 我们采用以下关于幺半范畴中对偶的约定。 $\mathcal{C}$ 中对象 X 的一个左对偶 是对象 X^*，连同态射

$$\mathrm{ev}^l_X\colon X^*\otimes X\to\mathbb{1},\qquad \mathrm{coev}^l_X\colon\mathbb{1}\to X\otimes X^*$$

满足通常的蛇形恒等式。类似地，一个右对偶 是对象 ${}^*X$，连同态射

$$\mathrm{ev}^r_X\colon X\otimes{}^*X\to\mathbb{1},\qquad \mathrm{coev}^r_X\colon\mathbb{1}\to{}^*X\otimes X$$

满足类似的恒等式。若幺半范畴 $\mathcal{C}$ 中每个对象都有左对偶和右对偶，则称其为刚性的 。在这种情况下，左对偶构成一个幺半等价

$$(-)^*\colon\mathcal{C}\to\mathcal{C}^{\otimes\mathrm{op}}.$$

由于 $\mathcal{C}$ 是严格幺半的，我们可以假设典范同构 ${}^*(X\otimes Y)={}^*Y\otimes{}^*X$ 是恒等映射。类似地，也存在一个右对偶函子。存在典范自然同构

$$\eta^l_X\colon X\xrightarrow{\sim}({}^*X)^*,\qquad \eta^r_X\colon X\xrightarrow{\sim}{}^*(X^*),$$

它们是幺半同构。

以下引理是众所周知的，参见 [EGNO，第 4 节和第 6 节。1]。

引理 A.1. 对于 $\mathcal{C}$ 阿贝尔刚性幺半范畴，以下陈述成立：

(i) 张量积 $\otimes\colon\ \mathcal{C}\times\mathcal{C}\to\mathcal{C}$ 在两个变量上都是正合的；*(ii)* 对于每个投射对象，其左对偶（和右对偶）都是投射对象；*(iii)* 投射对象在 $\mathcal{C}$ 中构成一个双边张量理想。

A.3. **带编织幺半范畴**。 在本文的大部分内容中， $\mathcal{C}$ 将是一个带编织幺半范畴，其编织为 $\psi\colon \otimes \xrightarrow{\sim} \otimes^{\mathrm{op}}$，或用分量表示

$$\psi_{X,Y}\colon X\otimes Y \xrightarrow{\sim} Y\otimes X = X\otimes^{\mathrm{op}} Y,$$

对于对象 X,Y，它们满足两个六边形公理，参见例如 [EGNO，定义 8.1.1]。逆编织的分量记为

$$\psi^{-1}_{X,Y} = (\psi_{Y,X})^{-1}\colon X\otimes Y \xrightarrow{\sim} Y\otimes X.$$

逆编织也在 $\mathcal{C}$ 上定义了一种编织，有时称为反向编织。我们用 $\mathcal{C}^{\mathrm{rev}}$ 表示带编织幺半范畴 $\mathcal{C}$，其幺半群乘积相同，但采用反向编织 ψ^{-1}。注意，(A.1) 中的幺半范畴 $\mathcal{C}^{\otimes\mathrm{op}}$ 从 $\mathcal{C}$ 继承的编织定义为

$$\psi^{\mathcal{C}^{\otimes\mathrm{op}}}_{X,Y} := \psi_{Y,X}\colon X\otimes^{\mathrm{op}} Y \xrightarrow{\sim} Y\otimes^{\mathrm{op}} X.$$

对于带编织幺半范畴 $\mathcal{C}$，众所周知，恒等函子 $\mathrm{id}_{\mathcal{C}}\colon \mathcal{C}\to\mathcal{C}$ 具有两种自然的幺半等价结构

$$I^{\pm} = (\mathrm{id}_{\mathcal{C}}, \mu^{\pm})\colon \mathcal{C}^{\otimes\mathrm{op}} \to \mathcal{C} \tag{A.4}$$

其中幺半结构由编织或逆编织给出，$\mu^{\pm}_{X,Y} = \psi^{\pm 1}_{X,Y}$。这些函子是带编织幺半范畴之间的函子，因为

$$\mu^{\pm}_{Y,X}\circ\psi_{X,Y} = \psi^{\mathcal{C}^{\otimes\mathrm{op}}}_{X,Y}\circ\mu^{\pm}_{X,Y}.$$

Appendix B. Module and bimodule categories

We 现在回顾有关（双）模范畴的关键定义与构造 .

B.1. **模范畴**。设 $\mathcal{C}$ 为第 2 节开头所定义的有限张量范畴。一个左 $\mathcal{C}$-模范畴是一个有限范畴 $\mathcal{M}$，连同一个函子 $\triangleright\colon \mathcal{C}\times\mathcal{M}\to\mathcal{M}$，它在 $\mathcal{C}$ 分量上右正合，[14] 以及一个自然同构 $l\colon \triangleright(\mathrm{id}_{\mathcal{C}}\times\triangleright)\to\triangleright(\otimes\times\mathrm{id}_{\mathcal{M}})$，称为模结合子，其分量为

$$l_{X,Y,M}\colon X\triangleright(Y\triangleright M)\xrightarrow{\sim} X\otimes Y\triangleright M$$

满足图

$$\begin{array}{ccc}
 & X\triangleright(Y\triangleright(Z\triangleright M)) & \\
{\scriptstyle X\triangleright l_{Y,Z,M}}\swarrow & & \searrow{\scriptstyle l_{X,Y,Z\triangleright M}} \\
X\triangleright(Y\otimes Z)\triangleright M & & (X\otimes Y)\triangleright(Z\triangleright M) \\
{\scriptstyle l_{X,Y\otimes Z,M}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle l_{X\otimes Y,Z,M}} \\
X\otimes(Y\otimes Z)\triangleright M & = & (X\otimes Y)\otimes Z\triangleright M
\end{array} \tag{B.1}$$

可交换。为简便起见，我们假设 $\mathcal{M}$ 严格幺元，即对所有 M 属于 $\mathcal{M}$ 的对象 $\mathbb{1}\triangleright M = M$。事实上，根据注 3.1，每个有限 $\mathcal{C}$-模范畴都等价于一个严格模范畴，特别地，它是严格幺元的。由于幺半范畴 $\mathcal{C}$ 也严格幺元，因此我们有

$$l_{X,\mathbb{1},M} = \mathrm{id}_{X\triangleright M} = l_{\mathbb{1},X,M}. \tag{B.2}$$

我们常将有限 $\mathcal{C}$-模范畴简称为 $\mathcal{C}$-模范畴或 $\mathcal{C}$-模。函子 $\triangleright$ 称为作用函子。相应的幺半函子

$$\rho_{\mathcal{M}}\colon \mathcal{C}\to\mathrm{End}(\mathcal{M}),\quad X\mapsto X\triangleright(-) \tag{B.3}$$

[14]由 $\mathcal{C}$的刚性， $\triangleright$在 $\mathcal{M}$ 分量中总是正合的 [EGNO，例 7.3。2] 并且根据 [DSPS1，推论 2。26]， $\triangleright$在 $\mathcal{C}$分量中也正合。

也称为作用函子。

一个右 $\mathcal{C}$-模范畴 或右 $\mathcal{C}$-模 是一个有限范畴，带有一个函子

$$\triangleleft\colon \mathcal{M}\times\mathcal{C}\to\mathcal{M},$$

右作用 作用于 $\mathcal{C}$，一个自然同构 $r\colon \triangleleft(\triangleleft\times \mathrm{id}_{\mathcal{C}})\to\triangleleft(\mathrm{id}_{\mathcal{M}}\times\otimes)$，其分量为

$$r_{M,X,Y}\colon (M\triangleleft X)\triangleleft Y\xrightarrow{\sim} M\triangleleft X\otimes Y$$

满足相应的相干图

$$\begin{array}{ccc} & ((M\triangleleft X)\triangleleft Y)\triangleleft Z & \\ {\scriptstyle r_{M,X,Y}\triangleleft Z}\swarrow & & \searrow{\scriptstyle r_{M\triangleleft X,Y,Z}} \\ (M\triangleleft(X\otimes Y))\triangleleft Z & & (M\triangleleft X)\triangleleft(Y\otimes Z) \\ \downarrow{\scriptstyle r_{M,X\otimes Y,Z}} & & \downarrow{\scriptstyle r_{M,X,Y\otimes Z}} \\ M\triangleleft(X\otimes Y)\otimes Z & = & M\triangleleft X\otimes(Y\otimes Z) \end{array} \tag{B.4}$$

并且再次假设该作用是严格幺元的，即对于 $\mathcal{M}$ 中的所有 M， $M\triangleleft\mathbb{1}=M$。

例 B.1. 对于右正合幺半函子 $F\colon \mathcal{C}\to\mathcal{D}$，我们可以赋予 $\mathcal{D}$ 左 $\mathcal{C}$-模范畴的结构，其作用定义为

$$C\triangleright D=F(C)\otimes D,\qquad \forall C\in\mathcal{C}, D\in\mathcal{D},$$

且模结合子为

$$\begin{array}{ccc} C\triangleright(C'\triangleright D) & \xrightarrow{l^F_{C,C',D}} & C\otimes C'\triangleright D \\ \| & & \| \\ F(C)\otimes F(C')\otimes D & \xrightarrow{\mu^F_{C,C'}\otimes D} & F(C\otimes C')\otimes D. \end{array} \tag{B.5}$$

在这种情况下，我们称 $\mathcal{C}$ 通过沿 限制作用于 $\mathcal{D}$。

对于左 $\mathcal{C}$-模范畴，模相容性 l 定义幺半函子的相容性 $(\mu^{\triangleright}_{X,\ Y})_M:=l_{X,\ Y,\ M}$

$$\triangleright\colon \mathcal{C}\to\mathrm{Fun}(\mathcal{M}).$$

对于右 $\mathcal{C}$-模范畴 $\mathcal{N}$，函子的一个相容性

$$\triangleleft\colon \mathcal{C}^{\otimes\mathrm{op}}\to\mathrm{Fun}(\mathcal{N})$$

可定义为 $(\mu^{\triangleleft}_{Y,X})_N=r_{N,X,Y}$.

一个左 $\mathcal{C}$-模函子 $G\colon\ \mathcal{M}\to\mathcal{N}$由一对（$G$，$s^G$）定义，其中 $G\colon\ \mathcal{M}\to\mathcal{N}$是一个（$\Bbbk$-线性）函子，$s^G\colon\ G(\triangleright)\to\triangleright\circ G$ 是一个自然同构，其分量为

$$s^G_{X,M}\colon G(X\triangleright M)\to X\triangleright G(M),$$

满足 [EGNO 定义 7.2.1] 的相干条件。也就是说，该图

$$\begin{array}{ccccc} G(X\triangleright(Y\triangleright M)) & & \xrightarrow{s^G_{X,Y\triangleright M}} & & X\triangleright G(Y\triangleright M) \\ \downarrow{\scriptstyle G(l^{\mathcal{M}}_{X,Y,M})} & & & & \downarrow{\scriptstyle X\triangleright s^G_{Y,M}} \\ G(X\otimes Y\triangleright M) & & & & X\triangleright(Y\triangleright G(M)) \\ & \searrow^{s^G_{X\otimes Y,M}} & & \swarrow_{l^{\mathcal{N}}_{X,Y,G(M)}} & \\ & & X\otimes Y\triangleright G(M) & & \end{array} \tag{B.6}$$

交换。当 $\mathcal{C}$-模结构从上下文中显而易见时，我们通常将偶对 (G, s^G) 简记为 G 。所考虑的所有模函子都将是右正合的。

由于我们假设 $\mathcal{M}$ 和 $\mathcal{N}$ 是严格幺元的，因此在一般情形下，利用 [W, 命题 A.18] 中证明的恒等式，可得 $s^G_{\mathbb{1},M} = \mathrm{id}_{G(M)}$。

右 $\mathcal{C}$-模函子以类似方式定义。我们通常将 $\mathcal{C}$-模函子简称为 $\mathcal{C}$-线性函子。以下结果已在 [DSPS1, 第 2.1] 节中得到证明。

引理 B.2. </style}左 -模函子： $\mathcal{M} \to \mathcal{N}$ 作为左 $\mathcal{C}$-模函子具有左（或右）伴随，当且仅当 G 是左（分别为右）正合的。

两个左 $\mathcal{C}$-模函子 G 和 H 之间从 $\mathcal{M}$到 $\mathcal{N}$ 的一个左 $\mathcal{C}$-模变换 η: $G \to H$ 是一个满足以下条件的自然变换 η

$$\begin{array}{ccc} G(X \triangleright M) & \xrightarrow{\eta_{X\triangleright M}} & H(X \triangleright M) \\ \downarrow{\scriptstyle s^G_{X,M}} & & \downarrow{\scriptstyle s^H_{X,M}} \\ X \triangleright G(M) & \xrightarrow{X\triangleright\eta_M} & X \triangleright H(M). \end{array} \tag{B.7}$$

左 $\mathcal{C}$-模范畴、右正合左 $\mathcal{C}$-模函子以及左 $\mathcal{C}$-模变换构成的 2-范畴记作 $\mathcal{C}$-**模**。对于两个左 $\mathcal{C}$-模范畴 $\mathcal{M}$ 和 $\mathcal{N}$，我们定义

$$\mathrm{Fun}_{\mathcal{C}}(\mathcal{M}, \mathcal{N}) := \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}\text{-}\mathbf{mod}}(\mathcal{M}, \mathcal{N}).$$

类似地，右 $\mathcal{C}$-模变换 以及 2-范畴 $\mathbf{mod}$-$\mathcal{C}$ 均有定义，我们记

$$\mathrm{Fun}(\mathcal{M}, \mathcal{N})_{\mathcal{C}} := \mathrm{Hom}_{\mathbf{mod}\text{-}\mathcal{C}}(\mathcal{M}, \mathcal{N}),$$

表示右 $\mathcal{C}$-模范畴 $\mathcal{M}$ 和 $\mathcal{N}$。

我们注意到，两个左 $\mathcal{C}$-线性函子 F: $\mathcal{M} \to \mathcal{N}$, G: $\mathcal{N} \to \mathcal{P}$的复合具有由下式定义的$\mathcal{C}$-线性结构

$$\begin{array}{ccc} GF(X \triangleright M) & \xrightarrow{s^{GF}_{X,M}} & X \triangleright GF(M)\ . \\ & {\scriptstyle G(s^F_{X,M})} \searrow \quad \nearrow {\scriptstyle s^G_{X,F(M)}} & \\ & G(X \triangleright F(M)) & \end{array} \tag{B.8}$$

左 $\mathcal{C}^{\otimes\mathrm{op}}$-模范畴与右 $\mathcal{C}$-模范畴相对应。事实上，存在一个 2-等价

$$R\colon \mathbf{mod}\text{-}\mathcal{C} \to \mathcal{C}^{\otimes\mathrm{op}}\text{-}\mathbf{mod}, \quad (\mathcal{M}, \triangleleft, r) \mapsto (\mathcal{M}, \triangleright^{\mathrm{op}}, l^{\mathrm{op}}), \tag{B.9}$$

其中我们定义 e 左 $\mathcal{C}^{\otimes\mathrm{op}}$-作用 $\triangleright^{\mathrm{op}}$ 由 $X \triangleright^{\mathrm{op}} N = N \triangleleft X$ 以及左 $\mathcal{C}^{\otimes\mathrm{op}}$-模相容性

$$l^{\mathcal{C}^{\otimes\mathrm{op}}}_{Y,X,N}\colon Y \triangleright^{\mathrm{op}} (X \triangleright^{\mathrm{op}} N) = (N \triangleleft X) \triangleleft Y \xrightarrow{r^{\mathcal{C}}_{N,X,Y}} N \triangleleft X \otimes Y = Y \otimes X \triangleright^{\mathrm{op}} N, \tag{B.10}$$

对于给定的右 $\mathcal{C}$-作用 $\triangleleft$ 以及右 $\mathcal{C}$-模相容性 $r^{\mathcal{C}}$。在 1-态射上， R 定义如下。对于给定的右 $\mathcal{C}$-线性函子 (G, s^G): $\mathcal{M} \to \mathcal{N}$，同一函子 G成为一个左$\mathcal{C}^{\otimes\mathrm{op}}$-线性函子 $R(\mathcal{M}) \to R(\mathcal{N})$，并带有左 $\mathcal{C}^{\otimes\mathrm{op}}$-线性结构

$$s^G_{X,M}\colon G(X \triangleright^{\mathrm{op}} M) = G(M \triangleleft X) \xrightarrow{s^G_{M,X}} G(M) \triangleleft X = X \triangleright^{\mathrm{op}} G(M).$$

在 2-态射上， R 充当恒等。注意， R 是严格 2-函子，意即对两个相容的 1-态射，$R(G \circ H) = R(G) \circ R(H)$。

沿幺半函子限制左 $\mathcal{C}$-模给出一个 2-函子，推广了例 B.1。

引理 B.3. 幺半函子 F: $\mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 诱导一个2-函子 Res_F: $\mathcal{D}$-**模** $\to$ $\mathcal{C}$-**模**。此外，若 F 保持投射对象，则Res_F 保持正合模范畴。

证明。这一构造众所周知，但为完整起见，我们在此简述相关数据。对于左$\mathcal{D}$-模范畴 $\mathcal{M}$，定义 $\mathrm{Res}_F(\mathcal{M})$ 为同一范畴 $\mathcal{M}$，其左 $\mathcal{C}$-模作用$C \triangleright^F M = F(C) \triangleright M$以及凝聚性 $l^{\mathrm{Res}_F(\mathcal{M})}$由下图定义：

$$\begin{array}{ccc} C \triangleright^F (C' \triangleright^F M) & \xrightarrow{l^{\mathrm{Res}_F(\mathcal{M})}_{C,C',M}} & C \otimes C' \triangleright^F M \\ \| & & \| \\ F(C) \triangleright (F(C') \triangleright M) & \xrightarrow{l^{\mathcal{M}}_{F(C),F(C'),M}} F(C) \otimes F(C') \triangleright M \xrightarrow{\mu^F_{C,C'} \triangleright M} & F(C \otimes C') \triangleright M \end{array} \tag{B.11}$$

对于一个 $\mathcal{D}$-线性函子 $(G,\ s^G)\colon \mathcal{M} \to \mathcal{N}$，同一个底层函子 G定义了一个 $\mathcal{C}$-线性函子 $\mathrm{Res}_F(G)\colon \mathrm{Res}_F(\mathcal{M}) \to \mathrm{Res}_F(\mathcal{N})$，其 $\mathcal{C}$-线性结构 $s^{\mathrm{Res}_F(G)}$定义为 $s^{\mathrm{Res}_F(G)}_{C,\ M} := s^G_{F(C),\ M}$。对于 2-态射，$\mathrm{Res}_F$ 作用为恒等映射，因为每个左 $\mathcal{D}$-模变换都限制为一个左 $\mathcal{C}$-模变换。可以验证，这些赋值确实定义良好且具有 2-函子性。

最后，根据构造，若 F保持投射对象且 $\mathcal{M}$正合，则对于 $\mathcal{C}$中的任意投射对象 P以及 $\mathcal{M}$中的任意对象 M，$F(P) \triangleright M$是投射对象。因此，$\mathrm{Res}_F(M)$ 是正合的。□

B.2. **双模范畴**。$\mathcal{C}$-双模是一个兼具左、右 $\mathcal{C}$-模结构的 $\mathcal{M}$，并带有$\mathcal{C}$-双模相干性，即一个自然同构 $b\colon \triangleleft \circ (\triangleright \times \mathrm{id}) \to \triangleright \circ (\mathrm{id} \times \triangleleft)$，其分量为

$$b_{X,M,Y}\colon (X \triangleright M) \triangleleft Y \to X \triangleright (M \triangleleft Y) \tag{B.12}$$

满足以下相干图表（参见 [EGNO，定义 7.1.7] 或 [CG，定义 4.3.1]）

$$\begin{array}{ccc} & (X \triangleright (Y \triangleright M)) \triangleleft Z & \\ {\scriptstyle b_{X,Y\triangleright M,Z}}\swarrow & & \searrow{\scriptstyle l_{X,Y,M}\triangleleft Z} \\ X \triangleright ((Y \triangleright M) \triangleleft Z) & & (X \otimes Y \triangleright M) \triangleleft Z \\ {\scriptstyle X\triangleright b_{Y,M,Z}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle b_{X\otimes Y,M,Z}} \\ X \triangleright (Y \triangleright (M \triangleleft Z))) & \xrightarrow{l_{X,Y,M\triangleleft Z}} & X \otimes Y \triangleright (M \triangleleft Z). \end{array} \tag{B.13}$$

$$\begin{array}{ccc} & ((X \triangleright M) \triangleleft Y) \triangleleft Z & \\ {\scriptstyle b_{X,M,Y}\triangleleft Z}\swarrow & & \searrow{\scriptstyle r_{X\triangleright M,Y,Z}} \\ (X \triangleright (M \triangleleft Y)) \triangleleft Z & & (X \triangleright M) \triangleleft Y \otimes Z \\ {\scriptstyle b_{X,M\triangleleft Y,Z}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle b_{X,M,Y\otimes Z}} \\ X \triangleright ((M \triangleleft Y) \triangleleft Z) & \xrightarrow{X\triangleright r_{M,Y,Z}} & X \triangleright (M \triangleleft Y \otimes Z), \end{array} \tag{B.14}$$

并且，由于我们假定左、右 $\mathcal{C}$-模结构都是严格幺元的，

$$b_{\mathbb{1},M,X} = \mathrm{id}_{M\triangleleft X}, \qquad b_{X,M,\mathbb{1}} = \mathrm{id}_{X\triangleright M}. \tag{B.15}$$

一个函子，作用于 $\mathcal{C}$-双模范畴 $G\colon\ \mathcal{M}\to\mathcal{N}$ 是一个（右正合 $\Bbbk$-线性）函子，它针对各自的左、右 $\mathcal{C}$-模结构，作为左、右$\mathcal{C}$-模范畴的函子，并满足

$$\begin{array}{ccccc} & & G((X\triangleright M)\triangleleft Y) & \xrightarrow{G(b^{\mathcal{M}}_{X,M,Y})} & G(X\triangleright(M\triangleleft Y)) & & \\ & \swarrow^{s^G_{X\triangleright M,Y}} & & & & \searrow^{s^G_{X,M\triangleleft Y}} & \\ G(X\triangleright M)\triangleleft Y & & & & & & X\triangleright G(M\triangleleft Y), \\ & \searrow_{s^G_{X,M}\triangleleft Y} & & & & \swarrow_{X\triangleright s^G_{M,Y}} & \\ & & (X\triangleright G(M))\triangleleft Y & \xrightarrow{b^{\mathcal{N}}_{X,G(M),Y}} & X\triangleright(G(M)\triangleleft Y) & & \end{array} \tag{B.16}$$

其中， $b^{\mathcal{M}}$ 和 $b^{\mathcal{N}}$ 分别是 $\mathcal{M}$、 $\mathcal{N}$和s^G_X的双模相干条件， $_M$ 和s^G_M分别是 G的左、右 $\mathcal{C}$-线性结构的分量。最后， $\mathcal{C}$-双模变换是同时为左、右 $\mathcal{C}$-双模变换的变换。由此我们得到一个由 $\mathcal{C}$-双模构成的2-范畴 $\mathcal{C}$-**双模**。

例 B.4。 对于一个幺半函子 $F\colon\ \mathcal{C}\to\mathcal{D}$，我们可以将例 B.1 中 $\mathcal{D}$上的左 $\mathcal{C}$-模结构扩展为一个 $\mathcal{C}$-双模，其右作用为

$$D\triangleleft C=D\otimes F(C),\qquad \forall C\in\mathcal{C},D\in\mathcal{D},$$

并具有与 (B.5) 类似的模结合子。双模结合子由幺半范畴 $\mathcal{D}$ 的结合子给出，因此，由于我们假设 $\mathcal{D}$ 是一个严格幺半范畴，它由恒等态射给出。对于双模范畴，也有引理 B.3 的类似结论。

B.3. **从左模到双模**。 现在我们假设 $\mathcal{C}$ 是一个辫编幺半范畴。

引理 B.5. *(i)* 我们有一个2-函子

$$\mathrm{S}_{lr}\colon \mathcal{C}\text{-}\mathbf{mod}\to\mathbf{mod}\text{-}\mathcal{C}$$

它将左 $\mathcal{C}$-模 $\mathcal{M}$ 映到相同的范畴，其右作用由 $M\triangleleft X:=X\triangleright M$给出，凝聚性 r 由(2.8)定义；它将左 $\mathcal{C}$-模函子(G,s^G) 映到相同的函子 G，其右 $\mathcal{C}$-线性结构由相同的分量同构 $s^G_{X,M}$ 给出，并将其视为态射 $G(M\triangleleft X)\to G(M)\triangleleft X$，且不改变 $\mathcal{C}$-线性变换。

(ii) 类似地，我们有一个2-函子

$$\mathrm{S}_{rl}\colon \mathbf{mod}\text{-}\mathcal{C}\to\mathcal{C}\text{-}\mathbf{mod}$$

它将左 $\mathcal{C}$-模 $\mathcal{M}$ 映到相同的范畴，其左作用由 b 给出 y

$$X\triangleright M:=M\triangleleft X,$$

其凝聚性 l 由以下分量定义

$$\begin{array}{ccc} X\triangleright(Y\triangleright M) & \xrightarrow{\quad l_{X,Y,M}\quad} & (X\otimes Y)\triangleright M \\ \| & & \| \\ (M\triangleleft Y)\triangleleft X & & M\triangleleft(X\otimes Y). \\ & \searrow^{r_{M,Y,X}} \quad \nearrow_{M\triangleleft\psi^{-1}_{Y,X}} & \\ & M\triangleleft(Y\otimes X). & \end{array} \tag{B.17}$$

(iii) *(i)* 和 *(ii)* 中定义的2-函子互逆，即 $\mathrm{S}_{rl}\mathrm{S}_{lr}=$ 恒等 且$\mathrm{S}_{lr}\mathrm{S}_{rl}=$恒等。

证明。 不难验证，S_{lr} 可扩展为一个 2-函子，且不会改变 $\mathcal{C}$-线性函子和 $\mathcal{C}$-线性自然变换。关于 S$_{rl}$ 的论述可用相同的方法证明。根据构造，$\mathrm{S}_{rl}\mathrm{S}_{lr}(\mathcal{M})=\mathcal{M}$ 具有原有的凝聚性 $l_{M,\ X,\ Y}$。由于这两个 2-函子都不会改变$\mathcal{C}$-线性函子和 $\mathcal{C}$-线性自然变换，(iii) 部分得证。□

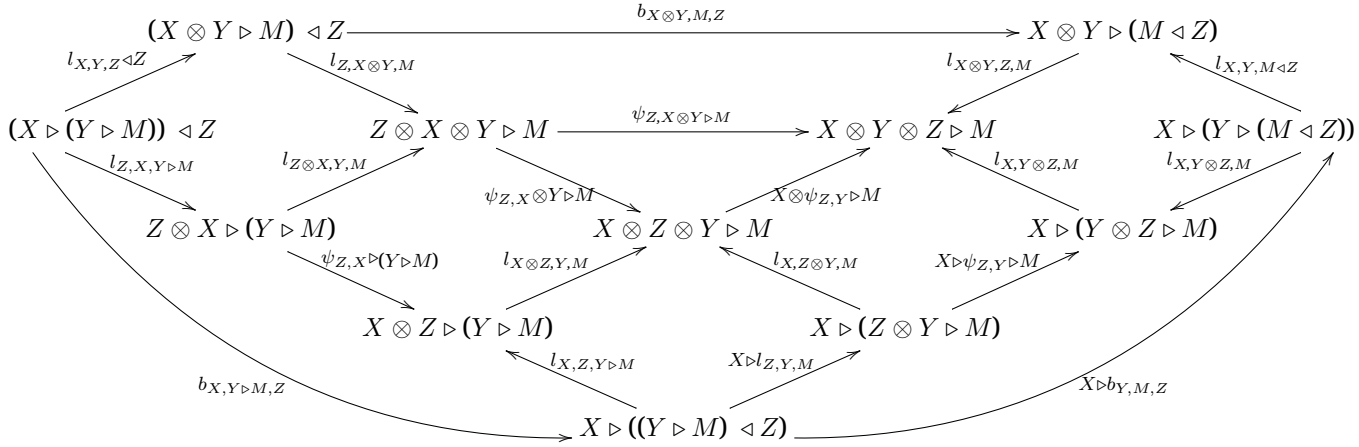
以下内容 该结果已在 [DN2，第 3.3] 节中指出。为方便读者，我们给出证明 e.

引理 B.6. 引理*B.5*中的2-函子S_{lr} 可扩展为一个2-函子

$$\mathrm{B}\colon \mathcal{C}\text{-}\mathbf{mod} \to \mathcal{C}\text{-}\mathbf{bimod},$$

具有相同的左右模相容性，以及(2.9)中的双模相干性。

证明。 公理 (B.13) 可由外层图的交换性得出，见



在此图中，仅涉及 l 的矩形由 (B.1) 保持交换；涉及 b 的变形方形根据 b 的定义保持交换，参见 (2.9)；涉及编织 ψ 的方形由将 l 的自然性应用于编织而保持交换；中心三角形则由编织的六边形保持交换。

我们可以利用 (2.8) 将其改写为

$$b_{X,M,Y} = l^{-1}_{X,Y,M} r_{M,X,Y} = r^{-1}_{M,Y,X}(M \triangleleft \psi_{X,Y}) r_{M,X,Y}.$$

现在，对于 $\otimes$-反幺半范畴 $\mathcal{C}^{\otimes\mathrm{op}}$，另一条件 (B.14) 可由第一条条件推出；其左模范畴对应于右 $\mathcal{C}$-模范畴，参见 (B.9)。□

B.4. 左中心化子函子与右中心化子函子。对于一个 $\mathcal{C}$-双模范畴 $\mathcal{M}$，存在两个幺半函子

$$A^r_{\mathcal{M}}\colon \mathcal{C}^{\otimes\mathrm{op}} \to \mathrm{Fun}_{\mathcal{C}}(\mathcal{M},\mathcal{M}), \qquad X \mapsto (-) \triangleleft X, \tag{B.18}$$

$$A^l_{\mathcal{M}}\colon \mathcal{C} \to \mathrm{Fun}(\mathcal{M},\mathcal{M})_{\mathcal{C}}, \qquad X \mapsto X \triangleright (-)。 \tag{B.19}$$

为了定义这些函子，我们需要指定 $\mathcal{C}$ 中给定对象 X 的 $A^r_{\mathcal{M}}(X)$ 的左 $\mathcal{C}$-线性结构，以及 $A^l_{\mathcal{M}}(X)$ 的右 $\mathcal{C}$- 线性结构。这些结构通过 $\mathcal{M}$ 的双模相干性 b 定义，见 (B.12)：

$$s^{A^r_{\mathcal{M}}(X)}_{Y,M}\colon (Y \triangleright M) \triangleleft X \xrightarrow{b_{Y,M,X}} Y \triangleright (M \triangleleft X), \tag{B.20}$$

$$s^{A^l_{\mathcal{M}}(X)}_{M,Y}\colon X \triangleright (M \triangleleft Y) \xrightarrow{b^{-1}_{X,M,Y}} (X \triangleright M) \triangleleft Y. \tag{B.21}$$

幺半结构　　这些结构分别使用右（左） $\mathcal{C}$-模相干条件定义，即　　y,

$$\begin{array}{ccc} \big(A^r_{\mathcal{M}}(X)\circ A^r_{\mathcal{M}}(Y)\big)(M) & \xrightarrow{(\mu^{A^r_{\mathcal{M}}}_{X,Y})_M} & A^r_{\mathcal{M}}(Y\otimes X)(M) \\ \| & & \| \\ (M\triangleleft Y)\triangleleft X & \xrightarrow{r_{M,Y,X}} & M\triangleleft Y\otimes X \end{array}, \tag{B.22}$$

$$\begin{array}{ccc} \big(A^l_{\mathcal{M}}(X)\circ A^l_{\mathcal{M}}(Y)\big)(M) & \xrightarrow{(\mu^{A^l_{\mathcal{M}}}_{X,Y})_M} & A^l_{\mathcal{M}}(X\otimes Y)(M) \\ \| & & \| \\ X\triangleright(Y\triangleright M) & \xrightarrow{l_{X,Y,M}} & X\otimes Y\triangleright M. \end{array} \tag{B.23}$$

这些幺半函子结构的相干公理，分别由左（或右） $\mathcal{C}$-模结构的相干公理推出。

现在我们将利用 (A.4) 中的范畴等价 $I^{\pm}\colon \mathcal{C}^{\otimes\mathrm{op}}\to\mathcal{C}$，比较与左 $\mathcal{C}$-模范畴相关联的幺半函子 $A_{\mathcal{M}}$（见定义 2.13），以及与引理 B.6 中的双模 $\mathrm{B}(\mathcal{M})$ 相关联的幺半函子 $A^r_{\mathrm{B}(\mathcal{M})}$ 和 $A^l_{\mathrm{B}(\mathcal{M})}$（见 (B.18) 和 (B.19)）。

引理 B.7. 幺半函子 $A_{\mathcal{M}}\circ I^-$ 和 $A^r_{\mathrm{B}(\mathcal{M})}$ 相等。

证明. 我们先比较这些函子。对于 $\mathcal{C}$ 中的一个对象 X，由于右作用是根据左作用定义的，$\Bbbk$-线性函子 $\mathrm{id}_{\mathcal{M}}\triangleleft X$ 和 $X\triangleright\mathrm{id}_{\mathcal{M}}$ 相等。左 $\mathcal{C}$-线性结构相等，因为

$$s^{A^r_{\mathcal{M}}(X)}_{Y,M}=b_{Y,M,X}=l^{-1}_{Y,X,M}(\psi_{X,Y}\triangleright M)l_{X,Y,M}=s^{X\triangleright\mathrm{id}_{\mathcal{M}}}_{Y,M}, \tag{B.24}$$

其中第一个等式是 (B.20)，第二个等式是 (2.9)，最后一个等式是 (2.11)。作为函子，我们有 $A^r_{\mathrm{B}(\mathcal{M})}\circ I^-=A^r_{\mathcal{M}}$，因为 I^- 的底层函子是 $\mathrm{id}_{\mathcal{C}}$。

接下来，我们使用幺半群结构的定义并计算

$$\begin{aligned}(\mu^{A^r_{\mathrm{B}(\mathcal{M})}\circ I^-}_{X,Y})_M&=(A^r_{\mathrm{B}(\mathcal{M})}(\mu^+_{X,Y}))_M\circ(\mu^{A^r_{\mathcal{M}}}_{I^-(X),I^-(Y)})_M\\&=(\psi^{-1}_{X,Y}\triangleright M)\circ r_{M,Y,X}\\&=(\psi^{-1}_{X,Y}\triangleright M)(\psi_{X,Y}\triangleright M)l_{X,Y,M}\\&=l_{X,Y,M}=\mu^{A_{\mathcal{M}}}_{X,Y},\end{aligned}$$

在第三个等式中使用 (2.8)。因此，幺半群结构相等。 □

我们现在转而关注左中心化子函子 $A^l_{\mathrm{B}(\mathcal{M})}$。回想一下，$A^{\mathrm{rev}}_{\mathcal{M}}$ 表示将 $\mathcal{M}$ 视为左 $\mathcal{C}^{\mathrm{rev}}$-模范畴时的中心化子函子。在下文中，我们将用同一符号表示通过在 Hom 范畴上对一个 2-函子（例如 S_{lr}）求值所得到的函子。

引理 B.8. 以下幺半函子图表交换

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \xrightarrow{A^{\mathrm{rev}}_{\mathcal{M}}} & \mathcal{C}^*_{\mathcal{M}} \\ {\scriptstyle A^l_{\mathrm{B}(\mathcal{M})}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{S}_{lr}} \\ \mathrm{Fun}(\mathrm{B}(\mathcal{M}),\mathrm{B}(\mathcal{M}))_{\mathcal{C}} & = & \mathrm{Fun}(\mathrm{S}_{lr}(\mathcal{M}),\ \mathrm{S}_{lr}(\mathcal{M}))_{\mathcal{C}}, \end{array}$$

其中 S_{lr} 是引理*B.5*中在 *Hom* 范畴 $\mathcal{C}^*_{\mathcal{M}}=\mathrm{Fun}_{\mathcal{C}}(\mathcal{M},\mathcal{M})$ 上的2-函子 $\mathrm{S}_{lr}\colon$ $\mathcal{C}$-**模** $\to$ **模**-$\mathcal{C}$ 的求值，它是一个等价。

证明。我们首先比较底层的线性函子 $A^l_{\mathrm{B}(\mathcal{M})}$ 和 $\mathrm{S}_{lr}\circ A^{\mathrm{rev}}_{\mathcal{M}}$。对于 $\mathcal{C}$中的对象 X，两个函子都将其对应到函子 $X\triangleright\mathrm{id}_{\mathcal{M}}$。回顾引理B.5，2-函子 S_{lr}

是可逆的，并且在 1-态射和 2-态射层面由恒等赋值给出。也就是说，给定一个左 $\mathcal{C}$-模函子 $(G,\ s^l)$: $\mathcal{M}\to\mathcal{M}$，相同的数据定义了一个右 $\mathcal{C}$- 模函子 $(G,\ s^r)$: $\mathsf{S}_{lr}(\mathcal{M})\to\mathsf{S}_{lr}(\mathcal{M})$，其中

$$\begin{array}{ccc} G(M\triangleleft X) & \xrightarrow{\ s^r_{M,X}\ } & G(M)\triangleleft X \\ \| & & \| \\ G(X\triangleright M) & \xrightarrow{\ s^l_{X,M}\ } & X\triangleright G(M). \end{array}$$

因此，我们看到，函子 $\mathsf{S}_{lr}\circ A^{\mathrm{rev}}_{\mathcal{M}}$ 给出的 $s^{X\triangleright\mathrm{id}}$ of $X\triangleright\mathrm{id}_{\mathcal{M}}$ 的左 $\mathcal{C}$-线性结构为

$$s^{X\triangleright\mathrm{id}}_{Y,M}\overset{(2.11)}{=}l^{-1}_{Y,X,M}(\psi^{-1}_{X,Y}\triangleright M)l_{X,Y,M}\overset{(2.9)}{=}b^{-1}_{X,M,Y}\overset{(\mathrm{B}.20)}{=}s^{A^l_{\mathcal{M}}(X)}_{M,Y}. \tag{B.25}$$

因此，$A^l_{\mathrm{B}(\mathcal{M})}(X)$ 和 $\mathsf{S}_{lr}\circ A^{\mathrm{rev}}_{\mathcal{M}}(X)$ 的左 $\mathcal{C}$-线性结构一致。

剩下要比较幺半结构。2-函子 S_{lr} 严格保留复合的幺半结构（即 1-态射的复合）。此外，我们有

$$(\mu^{A^l_{\mathcal{M}}}_{X,Y})_M\overset{(\mathrm{B}.23)}{=}l_{X,Y,M}=\mu^{A_{\mathcal{M}}}_{X,Y}=\mu^{A^{\mathrm{rev}}_{\mathcal{M}}}_{X,Y},$$

其中第二个等式用到了引理 2.11，并且我们注意到 $A^{\mathrm{rev}}_{\mathcal{M}}$ 和 $A_{\mathcal{M}}$ 具有相同的幺半结构。因此，这些函子作为幺半函子相等，所述图是交换的。□

B.5. **双中心化子函子**。为后文所用，我们记录以下一个联系 $A_{\mathcal{M}}$ 与 $A^{\mathrm{rev}}_{\mathcal{M}}$ 的命题。为此，我们回顾一下双中心化子 函子[15]

$$\mathbb{D}=\mathbb{D}_{\mathcal{M}}\colon\mathcal{C}\to\mathrm{Fun}_{\mathcal{C}^*_{\mathcal{M}}}(\mathcal{M},\mathcal{M}). \tag{B.26}$$

此处，我们使用由 $G\triangleright M=G(M)$ 给出的 $\mathcal{M}$ 上的左 $\mathcal{C}^*_{\mathcal{M}}$-作用，其中对象 $G=(G,\ s^G)$ 属于 $\mathcal{C}^*_{\mathcal{M}}$，而 M 属于 $\mathcal{M}$。对于对象 X 属于 $\mathcal{C}$，$\mathbb{D}(X)=(X\triangleright\mathrm{id}_{\mathcal{M}},\ s^{\mathbb{D}(X)})$，其中

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{D}(X)(G\triangleright M) & \xrightarrow{\ s^{\mathbb{D}(X)}_{G,M}\ } & G\triangleright(\mathbb{D}(X)(M)) \\ \| & & \| \\ X\triangleright G(M) & \xrightarrow{\ (s^G_{X,M})^{-1}\ } & G(X\triangleright M) \end{array} \tag{B.27}$$

$\mathbb{D}$ 的幺半结构由下式给出

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{D}(X)\circ\mathbb{D}(Y))(M) & \xrightarrow{\ (\mu^{\mathbb{D}}_{X,Y})_M\ } & \mathbb{D}(X\otimes Y)(M) \\ \| & & \| \\ X\triangleright(Y\triangleright M) & \xrightarrow{\ l_{X,Y,M}\ } & X\otimes Y\triangleright M \end{array} \tag{B.28}$$

在对象 M 属于 $\mathcal{M}$ 上取值时。再回顾引理 B.3 中为幺半函子 F 定义的 2-函子 Res_F。

命题 B.9. 对于 $\mathcal{M}$ 这一左 $\mathcal{C}$-模范畴，图

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \xrightarrow{\ \mathbb{D}_{\mathcal{M}}\ } & \mathrm{Fun}_{\mathcal{C}^*_{\mathcal{M}}}(\mathcal{M},\mathcal{M}) \\ {\scriptstyle A^l_{\mathrm{B}(\mathcal{M})}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Res}_{A^r_{\mathrm{B}(\mathcal{M})}}} \\ \mathrm{Fun}(\mathrm{B}(\mathcal{M}),\mathrm{B}(\mathcal{M}))_{\mathcal{C}} & \xrightarrow{\ R\ } & \mathrm{Fun}_{\mathcal{C}^{\otimes\mathrm{op}}}(\mathrm{B}(\mathcal{M}),\mathrm{B}(\mathcal{M})) \end{array}$$

幺半函子图表交换。此处，函子 R 是通过对 *Hom* 范畴 $\mathrm{Fun}(\mathrm{B}(\mathcal{M}),\mathrm{B}(\mathcal{M}))_{\mathcal{C}}$ 上的式 (B.9) 中的 *2*-等价取值而得到的等价。

[15]函子 $\mathbb{D}$ 是 [EGNO 定理 7.12 中双中心化子定理的一部分。该定理针对正合模范畴，说明了何时 $\mathbb{D}$ 是一个等价。

证明。 我们首先注意到，$\mathrm{Res}^{A^r_{\mathrm{B}(\mathcal{M})}}$ 保有限模范畴和右正合函子。由于 $\mathrm{Res}^{A^r_{\mathrm{B}(\mathcal{M})}}$ 甚至是一个 2-函子，因此将其限制为自函子范畴之间的函子时，它是严格幺半的。因此，图中的每个函子都是幺半函子。

为检验函子图表是否交换，设 X 为 $\mathcal{C}$中的一个对象。我们将确定如下得到的左 $\mathcal{C}^{\otimes\mathrm{op}}$-线性结构：沿幺半函子 $A^r_{\mathrm{B}(\mathcal{M})}$限制 $X \triangleright \mathrm{id}_{\mathcal{M}}$ 的 $\mathcal{C}^*_{\mathcal{M}}$-线性结构 s^* 。由此得到 $\mathcal{C}^{\otimes\mathrm{op}}$-线性结构

$$X \triangleright (Y \triangleright M) \xrightarrow{s^*_{Y\triangleright\mathrm{id},M}=(s^{Y\triangleright\mathrm{id}}_{X,M})^{-1}} Y \triangleright (X \triangleright M),$$

这里使用定义 2.10 中的 $\mathcal{C}$-线性结构 $s^{Y\triangleright}{}_{\mathrm{id}X,\ M}$。我们由此推出

$$(s^{Y\triangleright\mathrm{id}}_{X,M})^{-1} = l^{-1}_{Y,X,G(M)}(\psi^{-1}_{X,Y}\triangleright\mathrm{id})l_{X,Y,G(M)} = s^{A^l_{\mathrm{B}(\mathcal{M})}(X)}_{Y,M},$$

这正是右 $\mathcal{C}$-线性结构 $s^{A^l_{\mathrm{B}(\mathcal{M})}\ (X)\ M,\ Y}$，即（B.25）中所计算的结构，此处将其视为左 $\mathcal{C}^{\otimes\mathrm{op}}$-线性结构。由于在态射上这些函子都不改变自然变换的数据，这表明函子图表交换。

尚需比较幺半群结构。函子 $\mathrm{Res}^{A^r_{\mathrm{B}(\mathcal{M})}}$ 是严格幺半的，且复合 $\mathrm{Res}_{A^r_{\mathrm{B}(\mathcal{M})}}\circ\mathbb{D}_{\mathcal{M}}$ 的幺半结构由（B.28）给出。这与（B.23）中 $A^l_{\mathrm{B}(\mathcal{M})}$ 的幺半结构相等。等价 R 同样是严格幺半的，因为它来自将一个 2-函子限制到一个 1-态射范畴。因此，我们得到一个交换的幺半函子图表。□

Appendix C. Monoidal 2-categories

我们先简要回顾幺半 2-范畴的定义，然后在附录 C.1 中介绍幺半 2-范畴中对偶的一些基本定义和结果。接着，附录 C.2 回顾带有相对 Deligne 积的 $\mathcal{C}$-**双模** 的幺半 2-范畴结构的构造，其中 $\mathcal{C}$ 是有限张量范畴。最后，在附录 C.3 中，我们证明编织张量范畴之间的等价会诱导模范畴的幺半 2-范畴之间的等价。

我们所说的幺半2-范畴，是指幺半双范畴 [GPS,SP, JY]，且它是一个 2-范畴，也就是说，1-态射的复合严格满足结合律。这样的幺半 2-范畴$\mathbf{C}$ 配备以下数据。

- 张量积 $\square\colon \mathbf{C}\times\mathbf{C}\to\mathbf{C}$ 是一个伪函子 [JY，第 4 节.1]。特别地， $\square$ 与 1-态射的复合并不严格相容，而是仅在相差自然 2-同构的意义下相容，这些同构称为交换同构

(C.1) $$\phi_{H\square H',G\square G'}\colon (H\square H')\circ(G\square G') \xrightarrow{\sim} HG\square H'G',$$

对于 1-态射 $\mathcal{M}\xrightarrow{G}\mathcal{N}\xrightarrow{H}\mathcal{P}$ 和 $\mathcal{M}'\xrightarrow{G'}\mathcal{N}'\xrightarrow{H'}\mathcal{P}'$。

- 一个幺半群单位，即 $\mathbf{1}$ 中的一个对象 $\mathbf{C}$。
- 结合子 等价

(C.2) $$A_{\mathcal{M},\mathcal{N},\mathcal{P}}\colon \mathcal{M}\square(\mathcal{N}\square\mathcal{P}) \xrightarrow{\sim} (\mathcal{M}\square\mathcal{N})\square\mathcal{P},$$

它们在一个相干的 2-同构系统下是自然的

(C.3) $$((G\square H)\square K))\circ A_{\mathcal{M},\mathcal{N},\mathcal{P}} \xrightarrow{a_{G,H,K}} A_{\mathcal{M}',\mathcal{N}',\mathcal{P}'}\circ(G\square(H\square K)),$$

for 1-morphisms $\mathcal{M}\xrightarrow{G}\mathcal{M}'$, $\mathcal{N}\xrightarrow{H}\mathcal{N}'$, and $\mathcal{P}\xrightarrow{K}\mathcal{P}'$.

- 左与右单位子等价

(C.4) $$L_{\mathcal{M}}\colon \mathbf{1}\square\mathcal{M}\xrightarrow{\sim}\mathcal{M},\qquad R_{\mathcal{M}}\colon \mathcal{M}\square\mathbf{1}\xrightarrow{\sim}\mathcal{M},$$

在相干 2-同构意义下自然

$$L_{\mathcal{M}'}\circ(\mathbf{1}\Box G)\xrightarrow{l_{\mathcal{M}}} G\circ L_{\mathcal{M}},\qquad R_{\mathcal{M}'}\circ(G\Box\mathbf{1})\xrightarrow{r_{\mathcal{M}}} G\circ R_{\mathcal{M}}, \tag{C.5}$$

对于任意 1-态射 $\mathcal{M}\xrightarrow{G}\mathcal{M}'$。

•五边形*ator* 2-同构

$$(A_{\mathcal{M},\mathcal{N},\mathcal{P}}\Box\mathcal{Q})\circ A_{\mathcal{M},\mathcal{N}\Box\mathcal{P},\mathcal{Q}}\circ(\mathcal{M}\Box A_{\mathcal{N},\mathcal{P},\mathcal{Q}})\xrightarrow{p_{\mathcal{M},\mathcal{N},\mathcal{P},\mathcal{Q}}} A_{\mathcal{M}\Box\mathcal{N},\mathcal{P},\mathcal{Q}}\circ A_{\mathcal{M},\mathcal{N},\mathcal{P}\Box\mathcal{Q}}, \tag{C.6}$$

对于 $\mathbf{C}$ 中的任意四个对象 $\mathcal{M}$、$\mathcal{N}$、$\mathcal{P}$、$\mathcal{Q}$。

•三角形*ator* 2-同构

$$(R_{\mathcal{M}}\Box\mathcal{N})\circ A_{\mathcal{M},\mathbb{1},\mathcal{N}}\xrightarrow{t^m_{\mathcal{M},\mathcal{N}}}\mathcal{M}\Box L_{\mathcal{N}}, \tag{C.7}$$

$$R_{\mathcal{M}\Box\mathcal{N}}\circ A_{\mathcal{M},\mathcal{N},\mathbb{1}}\xrightarrow{t^r_{\mathcal{M},\mathcal{N}}}\mathcal{M}\Box R_{\mathcal{N}},\qquad (L_{\mathcal{M}}\Box\mathcal{N})\circ A_{\mathbb{1},\mathcal{M},\mathcal{N}}\xrightarrow{t^l_{\mathcal{M},\mathcal{N}}} L_{\mathcal{M}\Box\mathcal{N}}, \tag{C.8}$$

对于 $\mathbf{C}$ 中的任意两个对象 $\mathcal{M}$、$\mathcal{N}$。

上述数据满足凝聚性[16]，此处不详细说明，另见注 C.6。

注 C.1。在处理半严格幺半 2-范畴时通常很方便，例如参见 [BN，引理 4] 或 [DR，定义 2.1.1]。半严格幺半 2-范畴具有严格结合且严格幺正的张量积 $\Box$，因此 (C.2) 和 (C.4) 中的 1-态射 $A_{\mathcal{M},\,\mathcal{N},\,\mathcal{P}}$，$L_{\mathcal{M}}$，$R_{\mathcal{M}}$都是恒等态射；相关的自然 2-同构 a，l，r，以及 (C.3)、(C.5)–(C.8) 中定义的五边形ator 和三角化子 p，t^m，t^r，t^l，其分量也都是恒等态射。不过，(C.1) 中的交换同构 ϕ仍可能非平凡。利用三范畴严格化定理 [GPS，定理 8.1]在单对象情形下，任意幺半 2-范畴都等价于一个半严格幺半 2-范畴。

我们注意到，幺半 2-范畴 $\mathcal{C}$-**mod** 并非半严格，但它等价于一个半严格幺半 2-范畴。

C.1. **幺半 2-范畴中的对偶与逆元**。本节中，我们用 $\mathbf{C}$ 表示一个幺半 2-范畴。我们在$\mathbf{C}$ 中定义对偶与逆元，并证明一些我们未能在文献中找到的初等引理。在半严格情形下，以下定义见于 [DR，定义 2.1.5]。

定义 C.2。对象 $\mathcal{M}$ 在$\mathbf{C}$ 中的一个左对偶 是一个对象 $\mathcal{M}^*$，并配有 1-态射 $\mathsf{ev}^l=\mathsf{ev}^l_{\mathcal{M}}\colon \mathcal{M}^*\Box\mathcal{M}\to\mathbf{1}$ 和 $\mathsf{coev}^l=\mathsf{coev}^l_{\mathcal{M}}\colon \mathbf{1}\to\mathcal{M}\Box\mathcal{M}^*$，分别称为左求值 和左余求值，以及 2-同构

$$\alpha\colon R_{\mathcal{M}}\circ(\mathcal{M}\Box\,\mathrm{ev}^l)\circ A^{-1}_{\mathcal{M},\mathcal{M}^*,\mathcal{M}}\circ(\mathrm{coev}^l\Box\mathcal{M})\circ L^{-1}_{\mathcal{M}}\xrightarrow{\sim}\mathrm{id}_{\mathcal{M}},$$
$$\beta\colon \mathrm{id}_{\mathcal{M}^*}\xrightarrow{\sim} L_{\mathcal{M}}\circ(\mathrm{ev}^l\Box\mathcal{M})\circ A_{\mathcal{M}^*,\mathcal{M},\mathcal{M}^*}\circ(\mathcal{M}^*\Box\,\mathrm{coev}^l)\circ R^{-1}_{\mathcal{M}}.$$

右对偶的定义类似，只需改变张量积的顺序。我们用 ${}^*\mathcal{M}$ 表示右对偶，用 $\mathsf{ev}^r=\mathsf{ev}^r_{\mathcal{M}}\colon \mathcal{M}\Box{}^*\mathcal{M}\to\mathbf{1}$ 和 $\mathsf{coev}^r=\mathsf{coev}^r_{\mathcal{M}}\colon \mathbf{1}\to{}^*\mathcal{M}\Box\mathcal{M}$表示右求值和余求值 1-态射。具有左对偶和右对偶的对象称为可对偶。

对于$\mathbf{C}$ 中的对象 $\mathcal{M}$ 与 $\mathcal{N}$，若这些对象等价，我们记作 $\mathcal{M}\simeq\mathcal{N}$，参见例如 [JY，第6.2]节。

引理 C.3. 若 $\mathcal{M}^*$ 与 $\mathcal{M}'$ 均为 $\mathcal{M}$的左对偶，则 $\mathcal{M}'\simeq\mathcal{M}^*$。

证明。该证明改编了幺半范畴中关于对偶的经典论证，将恒等式替换为 2-同构。为使证明更简洁，我们证明：在一个 A,L,R 均为平凡对象的半严格幺半 2-范畴中，两个左对偶对象 $\mathcal{M}'$ 和 $\mathcal{M}^*$ 等价。根据 Rem.C.1，该结论在 $\mathbf{C}$ 中同样成立。在本证明中，我们将 $\mathsf{ev}=\mathsf{ev}^l$、$\mathsf{coev}=\mathsf{coev}^l$ 分别记作求值和余求值，并将 ev' 和 coev' 记作

[16]例如见于 [JY，第12.1]节。

另一个对偶对象 $\mathcal{M}'$ 的左求值和左余求值 1-态射。我们证明这些 1-态射

$$H_1 := (\mathrm{ev}\,\square\mathcal{M}')\circ(\mathcal{M}^*\square\,\mathrm{coev}')\colon \mathcal{M}^*\to\mathcal{M}',$$
$$H_2 := (\mathrm{ev}'\,\square\mathcal{M}^*)\circ(\mathcal{M}'\square\,\mathrm{coev})\colon \mathcal{M}'\to\mathcal{M}^*$$

在 $\mathbf{C}$ 中定义一个等价。我们有一串 2-同构

$$\begin{aligned}
H_1\circ H_2 &= H_1\circ(\mathrm{ev}'\,\square\mathcal{M}^*)\circ(\mathcal{M}'\square\,\mathrm{coev})\\
&\cong (\mathrm{ev}'\,\square\mathcal{M}^*)\circ(\mathcal{M}'\square\mathcal{M}\square H_1)\circ(\mathcal{M}'\square\,\mathrm{coev})\\
&= (\mathrm{ev}'\,\square\mathcal{M}^*)\circ(\mathcal{M}'\square\mathcal{M}\square\,\mathrm{ev}\,\square\mathcal{M}')\circ(\mathcal{M}'\square\mathcal{M}\square\mathcal{M}^*\square\,\mathrm{coev}')\circ(\mathcal{M}'\square\,\mathrm{coev})\\
&\cong (\mathrm{ev}'\,\square\mathcal{M}^*)\circ(\mathcal{M}'\square\mathcal{M}\square\,\mathrm{ev}\,\square\mathcal{M}')\circ(\mathcal{M}'\square\,\mathrm{coev}\,\square\mathcal{M}\square\mathcal{M}')\circ(\mathcal{M}'\square\,\mathrm{coev}')\\
&\cong (\mathrm{ev}'\,\square\mathcal{M}^*)\circ(\mathcal{M}'\square\,\mathrm{coev}')\\
&\cong \mathrm{id}_{\mathcal{M}'}.
\end{aligned}$$

这里，我们先将 (C.1) 的交换同构应用两次，然后再对对偶 $\mathcal{M}^*$ 应用定义 C.2 中形如 β^{-1} 的 2-同构，接着对 $\mathcal{M}'$ 应用类似的 2-同构。同构 $H_2H_1\cong\mathrm{id}_{\mathcal{M}^*}$ 可类似地证明。□

定义 C.4. 我们称 $\mathbf{C}$ 中的对象 $\mathcal{M}$ 是可逆 的，如果存在一个对象 $\mathcal{N}$（称为逆元）以及等价 $\mathcal{M}\square\mathcal{N}\simeq\mathbf{1}$ 和 $\mathcal{N}\square\mathcal{M}\simeq\mathbf{1}$。

若逆元存在，则它们在等价意义下是唯一的。下一个引理刻画了具有左对偶的对象何时可逆。

引理 C.5. 设 $\mathcal{M}$ 是 $\mathbf{C}$ 的一个对象，$\mathcal{M}^*$ 是 $\mathcal{M}$ 的一个左对偶。则 $\mathcal{M}$ 可逆当且仅当定义 *C.2* 中的 1-态射 评价 与 余评价 是等价。特别地，$\mathcal{M}^*\simeq{}^*\mathcal{M}$ 是 $\mathcal{M}$ 的逆元。

证明。 显然，若 ev 和 coev 是等价，则 $\mathcal{N}=\mathcal{M}^*$ 满足定义 C.4 的条件。为证明反向结论，固定等价 $\phi\colon \mathcal{M}\square\mathcal{N}\rightleftarrows\mathbf{1}\colon\phi'$ 和 $\eta\colon\mathcal{N}\square\mathcal{M}\rightleftarrows\mathbf{1}\colon\eta'$.

我们要证明 $\mathcal{N}$ 是 $\mathcal{M}$ 的左对偶。根据 Rem.C.1，只需对半严格$\mathbf{C}$ 证明这一点，因此记号中可以省略结合子和单位子。

首先，注意到 1-态射

$$\gamma := (\eta\square\mathcal{N})\circ(\mathcal{N}\square\phi')\colon\mathcal{N}\to\mathcal{N}$$

是一个等价，并且我们选取一个逆等价 γ'。现在我们定义

$$\mathrm{ev} := \eta\circ(\gamma'\square\mathcal{M})\colon\mathcal{N}\square\mathcal{M}\to\mathbf{1},\qquad \mathrm{coev} := \phi'\colon\mathbf{1}\to\mathcal{M}\square\mathcal{N}.$$

按构造，ev 和 coev 都是等价。我们需要检查三元组 $(\mathcal{N},\mathrm{ev},\mathrm{coev})$ 按定义 C.2 的意义为 $\mathcal{M}$ 定义了一个左对偶。事实上，我们有

$$\begin{aligned}
(\mathrm{ev}\,\square\mathcal{N})\circ(\mathcal{N}\square\,\mathrm{coev}) &= (\eta\square\mathcal{N})\circ(\gamma'\square\mathcal{M}\square\mathcal{N})\circ(\mathcal{N}\square\phi')\\
&\simeq (\eta\square\mathcal{N})\circ(\mathcal{N}\square\phi')\circ\gamma' = \gamma\circ\gamma'\simeq\mathrm{id}_{\mathcal{N}},
\end{aligned}$$

其中第一个同构是 (C.9) 中交换同构的一个实例。这给出了定义 C.2 所要求的同构 α。此外，我们考虑

$$\begin{aligned}
(\mathcal{M}\square\,\mathrm{ev}\,\square\mathcal{N})\circ(\mathrm{coev}\,\square\mathcal{M}\boxtimes\mathcal{N})\circ\phi' &= (\mathcal{M}\square\eta\square\mathcal{N})\circ(\mathcal{M}\square\gamma'\square\mathcal{M}\square\mathcal{N})\circ(\phi'\square\mathcal{M}\square\mathcal{N})\circ\phi'\\
&\simeq (\mathcal{M}\square\eta\square\mathcal{N})\circ(\mathcal{M}\square\mathcal{N}\square\phi')\circ(\mathcal{M}\square\gamma')\circ\phi'\\
&= (\mathcal{M}\square\gamma)\circ(\mathcal{M}\square\gamma')\circ\phi'\simeq\phi',
\end{aligned}$$

其中两个同构 $\simeq$ 都是交换同构。现在，与 ϕ 预复合可得到第二个同构 β，从而证明 $\mathcal{N}$ 是定义 C.2 意义下的左对偶。交换

$\mathcal{M}$和 $\mathcal{N}$的角色，我们也可以证明 $\mathcal{M}$是 $\mathcal{N}$的左对偶。但这等价于 $\mathcal{N}$是 $\mathcal{M}$的右对偶。□

C.2. **相对 Deligne 积与幺半 2-范畴**。 本节概述了证明 $\mathcal{C}$-**双模** 是一个幺半 2-范畴的过程。在定理 2.9 中，当 $\mathcal{C}$ 是编织的时，将用此结果证明 $\mathcal{C}$-**模** 是一个幺半 2-范畴。在本节中，我们假设所有范畴都如第 2 节所述，是$\Bbbk$-线性的有限阿贝尔范畴。回顾定义 2.2 中的相对 Deligne 积 $\mathcal{N}\boxtimes_{\mathcal{C}}\mathcal{M}$ 及其泛性质。对于 $\mathcal{C}$-双模 $\mathcal{N}$， $\mathcal{M}$，由命题 2.3 可知，它具有 $\mathcal{C}$-双模的结构。

回顾定义 2.2 中的典范平衡函子 $P_{\mathcal{M},\,\mathcal{N}}\colon \mathcal{M}\times\mathcal{N}\to\mathcal{M}\boxtimes_{\mathcal{C}}\mathcal{N}$。当 $\mathcal{M}$ 和$\mathcal{N}$ 是 $\mathcal{C}$-双模时，函子 $P_{\mathcal{M},\,\mathcal{N}}$及其 $\mathcal{C}$-平衡化与左、右$\mathcal{C}$-作用相容。也就是说，存在自然同构

$$P_{\mathcal{M},\mathcal{N}}(X\triangleright M,N)\xrightarrow{s^P_{X,M,N}}X\triangleright P_{\mathcal{M},\mathcal{N}}(M,N),\qquad P_{\mathcal{M},\mathcal{N}}(M,N\triangleleft X)\xrightarrow{s^P_{M,N,X}}P_{\mathcal{M},\mathcal{N}}(M,N)\triangleleft X,$$

对于任意对象 M（属于 $\mathcal{M}$）、 N（属于 $\mathcal{N}$）和 X（属于 $\mathcal{C}$），若它们满足相干条件：对于任意 N，$P_{\mathcal{M},\mathcal{N}}(-,N)$ 是左 $\mathcal{C}$-模函子，且对于任意 M，$P_{\mathcal{M},\mathcal{N}}(M,-)$ 是右 $\mathcal{C}$-模函子。此外，对于每个固定的 Y（属于 $\mathcal{C}$），普适的 $\mathcal{C}$-平衡性定义了一个左 $\mathcal{C}$-模变换

$$\beta^P_{-,Y,N}\colon P_{\mathcal{M},\mathcal{N}}((-)\triangleleft Y,N)\xrightarrow{\sim}P_{\mathcal{M},\mathcal{N}}(-,Y\triangleright N),$$

对于每个 N（属于 $\mathcal{N}$），以及一个右 $\mathcal{C}$-模变换

$$\beta^P_{M,Y,-}\colon P_{\mathcal{M},\mathcal{N}}(M\triangleleft Y,-)\xrightarrow{\sim}P_{\mathcal{M},\mathcal{N}}(M,Y\triangleright(-))),$$

对于每个 M（属于 $\mathcal{M}$）。

给定两个 $\mathcal{C}$-双模函子 $G\colon \mathcal{M}\to\mathcal{N}$、 $G'\colon \mathcal{M}'\to\mathcal{N}'$，容易验证函子 $P_{\mathcal{M}',\mathcal{N}'}\circ(G\times G')$ 是 $\mathcal{C}$-平衡的。因此，由于 $P_{\mathcal{M},\mathcal{N}}$ 与 $\mathcal{C}$-双模结构相容，存在一个诱导的 $\mathcal{C}$-双模函子 $G\boxtimes_{\mathcal{C}}G'$，使得图

$$\begin{array}{ccc}\mathcal{M}\times\mathcal{N} & \xrightarrow{G\times G'} & \mathcal{M}'\times\mathcal{N}'\\ {\scriptstyle P_{\mathcal{M},\mathcal{N}}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle P_{\mathcal{M}',\mathcal{N}'}}\\ \mathcal{M}\boxtimes_{\mathcal{C}}\mathcal{N} & \xrightarrow{G\boxtimes_{\mathcal{C}}G'} & \mathcal{M}'\boxtimes_{\mathcal{C}}\mathcal{N}'\end{array}$$

在一个 $\mathcal{C}$-平衡自然同构意义下交换。所得函子 $G\boxtimes_{\mathcal{C}}G'$ 在典范同构意义下唯一，如注 2.4 所述。这个典范同构意义下的唯一性意味着，对于另外的 $\mathcal{C}$-双模函子 $H\colon \mathcal{N}\to\mathcal{P}$ 和 $H'\colon \mathcal{N}'\to\mathcal{P}'$，存在一个典范同构

$$(H\boxtimes_{\mathcal{C}}H')\circ(G\boxtimes_{\mathcal{C}}G')\xrightarrow{\phi_{H\boxtimes_{\mathcal{C}}H',G\boxtimes_{\mathcal{C}}G'}}(H\circ G)\boxtimes_{\mathcal{C}}(H'\circ G'),\tag{C.9}$$

我们将其称为交换同构，参见 (2.7)。形如 $\phi_{(H,H'),\ (G,\ G')}$ 的典范同构使 $\boxtimes_{\mathcal{C}}\colon \mathcal{C}$-**双模** $\times\,\mathcal{C}$-**双模** $\to\mathcal{C}$-**双模**成为意义下的伪函子[JY，第 4 节。1]。特别地，对于 $\mathcal{C}$-双模变换 $\theta\colon G\to H$, $\theta'\colon G'\to H'$，存在唯一诱导的 $\mathcal{C}$-双模变换

$$\theta\boxtimes_{\mathcal{C}}\theta'\colon G\boxtimes_{\mathcal{C}}G'\to H\boxtimes_{\mathcal{C}}H'.$$

$\mathcal{C}$-双模变换的相对 Deligne 积对于自然变换的垂直复合严格函子性成立。也就是说，给定额外的 $\mathcal{C}$-双模变换$\tau\colon H\to K$, $\tau'\colon H'\to K'$,

$$(\tau\boxtimes_{\mathcal{C}}\tau')(\theta\boxtimes_{\mathcal{C}}\theta')=(\tau\theta)\boxtimes_{\mathcal{C}}(\tau'\theta')\colon G\boxtimes_{\mathcal{C}}G'\to K\boxtimes_{\mathcal{C}}K'.$$

相对 Deligne 积不具有严格结合性。为了构造结合子，我们将 $\mathcal{N}\boxtimes_{\mathcal{C}}\mathcal{M}$ 的泛性质扩展到三个 $\mathcal{C}$-双模的相对 Deligne 积。通过复合，(2.3) 中的等价诱导出两个范畴等价

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Fun}(\mathcal{M}\boxtimes_{\mathcal{C}}(\mathcal{N}\boxtimes_{\mathcal{C}}\mathcal{P}),\mathcal{Q}) & & \mathrm{Fun}((\mathcal{M}\boxtimes_{\mathcal{C}}\mathcal{N})\boxtimes_{\mathcal{C}}\mathcal{P},\mathcal{Q}) \\ \downarrow{\scriptstyle (-)\circ P_{\mathcal{M},\mathcal{N}\boxtimes_{\mathcal{C}}\mathcal{P}}} & & \downarrow{\scriptstyle (-)\circ P_{\mathcal{M}\boxtimes_{\mathcal{C}}\mathcal{N},\mathcal{P}}} \\ \mathrm{Fun}^{\mathrm{bal}}_{\mathcal{C}}(\mathcal{M}\times(\mathcal{N}\boxtimes_{\mathcal{C}}\mathcal{P}),\mathcal{Q}) & & \mathrm{Fun}^{\mathrm{bal}}_{\mathcal{C}}((\mathcal{M}\boxtimes_{\mathcal{C}}\mathcal{N})\times\mathcal{P}),\mathcal{Q}) \\ & \searrow^{(-)\circ(\mathcal{M}\times P_{\mathcal{N},\mathcal{P}})} \quad \mathrm{Fun}^{\mathrm{mulbal}}_{\mathcal{C}}(\mathcal{M}\times\mathcal{N}\times\mathcal{P},\mathcal{Q}) \quad \swarrow^{(-)\circ(P_{\mathcal{M},\mathcal{N}}\times\mathcal{P})} & \end{array} \tag{C.10}$$

这里，$\mathrm{Fun}^{\mathrm{mulbal}}(\mathcal{N}\times\mathcal{M}\times\mathcal{P},\ \mathcal{Q})$表示 $\mathcal{C}$-多重平衡函子及 $\mathcal{C}$-多重平衡自然变换构成的范畴，参见 [G1，定义2.1.3]。这里，$\mathcal{C}$-多重平衡函子由数据$(B,\ \beta^1,\ \beta^2)$构成，其中 $B\colon\ \mathcal{M}\times\mathcal{N}\times\mathcal{P}\to\mathcal{Q}$是一个在每个分量上均为右正合的函子，并带有两个自然同构

$$B(M\triangleleft X,N,P)\xrightarrow{\beta^1_{M,X,N,P}}B(M,X\triangleright N,P),\qquad B(M,N\triangleleft X,P)\xrightarrow{\beta^2_{M,N,X,P}}B(M,N,X\triangleright P),$$

使得对于固定对象 $P\in\mathcal{P}$, $\beta^1_{-,\ -,\ -,\ P}$是函子 $B(-,\ -,\ -,\ P)$的一个 $\mathcal{C}$-平衡；对于固定对象 $M\in\mathcal{M}$, $\beta^2_{M,\ -,\ -,\ -}$是 $B(M,\ -,\ -,\ -)$的一个 $\mathcal{C}$-平衡，并且图(C.11)

$$\begin{array}{ccccc} B(M\triangleleft X,N\triangleleft Y,P) & & \xrightarrow{\beta^2_{M\triangleleft X,N,Y,P}} & & B(M\triangleleft X,N,Y\triangleright P) \\ \downarrow{\scriptstyle \beta^1_{M,X,N\triangleleft Y,P}} & & & & \downarrow{\scriptstyle \beta^1_{M,X,M,Y\triangleright P}} \\ B(M,X\triangleright(N\triangleleft Y),P) & \xrightarrow{(\mathrm{id}_M,b^{-1}_{X,N,Y},\mathrm{id}_P)} & B(M,(X\triangleright N)\triangleleft Y,P) & \xrightarrow{\beta^2_{M,X,Y\triangleright N}} & B(M,X\triangleright N,Y\triangleright P). \end{array} \tag{C.11}$$

可交换。$\mathcal{C}$-多重平衡自然变换就是与通过固定 $\mathcal{M}$ 和 $\mathcal{P}$中的对象而得到的所有 $\mathcal{C}$-平衡相容的自然变换。

现在，对于三个 $\mathcal{C}$-双模范畴 $\mathcal{M},\mathcal{N},\mathcal{P}$，存在一个等价

$$A_{\mathcal{M},\mathcal{N},\mathcal{P}}\colon\mathcal{M}\boxtimes_{\mathcal{C}}(\mathcal{N}\boxtimes_{\mathcal{C}}\mathcal{P})\xrightarrow{\sim}(\mathcal{M}\boxtimes_{\mathcal{C}}\mathcal{N})\boxtimes_{\mathcal{C}}\mathcal{P} \tag{C.12}$$

的 $\mathcal{C}$-双模范畴，使图

$$\begin{array}{ccccc} & & \mathcal{M}\times\mathcal{N}\times\mathcal{P} & & \\ & \swarrow^{\mathcal{M}\times P_{\mathcal{N},\mathcal{P}}} & & \searrow^{P_{\mathcal{M},\mathcal{N}}\times\mathcal{P}} & \\ \mathcal{M}\times(\mathcal{N}\boxtimes_{\mathcal{C}}\mathcal{P}) & & & & (\mathcal{M}\boxtimes_{\mathcal{C}}\mathcal{N})\times\mathcal{P} \\ \downarrow{\scriptstyle P_{\mathcal{M},\mathcal{N}\boxtimes_{\mathcal{C}}\mathcal{P}}} & & & & \downarrow{\scriptstyle P_{\mathcal{M}\boxtimes_{\mathcal{C}}\mathcal{N},\mathcal{P}}} \\ \mathcal{M}\boxtimes_{\mathcal{C}}(\mathcal{N}\boxtimes_{\mathcal{C}}\mathcal{P}) & & \xrightarrow{A_{\mathcal{M},\mathcal{N},\mathcal{P}}} & & (\mathcal{M}\boxtimes_{\mathcal{C}}\mathcal{N})\boxtimes_{\mathcal{C}}\mathcal{P} \end{array} \tag{C.13}$$

在一个 $\mathcal{C}$-多平衡自然同构意义下交换。该等价按如下方式构造。我们令 $\mathcal{Q}=(\mathcal{M}\boxtimes_{\mathcal{C}}\mathcal{N})\boxtimes_{\mathcal{C}}\mathcal{P}$为(C.10) 中的对象，并将 $A_{\mathcal{M},\mathcal{N},\mathcal{P}}$定义为复合函子作用于左侧的 $\mathcal{C}$-多平衡函子 $\mathcal{M}\times\mathcal{N}\times\mathcal{P}\xrightarrow{P_{\mathcal{M}\boxtimes_{\mathcal{C}}\mathcal{N},\mathcal{P}}\circ(\mathcal{M}\times P_{\mathcal{N},\mathcal{P}})}(\mathcal{M}\boxtimes_{\mathcal{C}}\mathcal{N})\boxtimes_{\mathcal{C}}\mathcal{P}$所得的一个原像。因此，$A_{\mathcal{M},\mathcal{N},\mathcal{P}}$ 在典范同构意义下唯一。

（C.12）的结合子仅在较弱意义下具有自然性（就分量 $\mathcal{M}$、$\mathcal{N}$ 和 $\mathcal{P}$ 而言）：对于任意三个 $\mathcal{C}$-双模函子 $G\colon\mathcal{M}\to\mathcal{M}'$、$H\colon\mathcal{N}\to\mathcal{N}'$、$K\colon\mathcal{P}\to\mathcal{P}'$，存在一个

典范同构

$$\mathcal{M}\boxtimes_{\mathcal{C}}(\mathcal{N}\boxtimes_{\mathcal{C}}\mathcal{P}) \;\overset{((G\boxtimes_{\mathcal{C}}H)\boxtimes_{\mathcal{C}}K))\circ A_{\mathcal{M},\mathcal{N},\mathcal{P}}}{\underset{A_{\mathcal{M}',\mathcal{N}',\mathcal{P}'}\circ(G\boxtimes_{\mathcal{C}}(H\boxtimes_{\mathcal{C}}K))}{\Downarrow a_{G,H,K}}}\; (\mathcal{M}'\boxtimes_{\mathcal{C}}\mathcal{N}')\boxtimes_{\mathcal{C}}\mathcal{P}' \tag{C.14}$$

它满足 关于 $\mathcal{C}$-双模函子的复合所需的相干条件。[1] [7]

为了解释结合子的弱五边形公理，我们按预期将 $\boxtimes_{\mathcal{C}}$ 的泛性质扩展到四个 $\mathcal{C}$-双模的乘法。存在两个等价

$$\begin{array}{ccccc}\mathrm{Fun}(\mathcal{M}\boxtimes_{\mathcal{C}}(\mathcal{N}\boxtimes_{\mathcal{C}}(\mathcal{P}\boxtimes_{\mathcal{C}}\mathcal{Q})),\mathcal{R}) & & & & \mathrm{Fun}(((\mathcal{M}\boxtimes_{\mathcal{C}}\mathcal{N})\boxtimes_{\mathcal{C}}\mathcal{P})\boxtimes_{\mathcal{C}}\mathcal{Q},\mathcal{R}) \\ & \searrow^{(-)\circ P_1} & & \swarrow_{(-)\circ P_2} & \\ & & \mathrm{Fun}^{\mathrm{mulbal}}(\mathcal{M}\times\mathcal{N}\times\mathcal{P}\times\mathcal{Q},\mathcal{R}) & & \end{array} \tag{C.15}$$

通过与.....复合定义

$$P_1 = P_{\mathcal{M},\mathcal{N}\boxtimes_{\mathcal{C}}(\mathcal{P}\boxtimes_{\mathcal{C}}\mathcal{Q})}\circ(\mathcal{M}\times P_{\mathcal{N},\mathcal{P}\boxtimes_{\mathcal{C}}\mathcal{Q}})\circ(\mathcal{M}\times\mathcal{N}\times P_{\mathcal{P},\mathcal{Q}}),$$
$$P_2 = P_{(\mathcal{M}\boxtimes_{\mathcal{C}}\mathcal{N})\boxtimes_{\mathcal{C}}\mathcal{P},\mathcal{Q}}\circ(P_{\mathcal{M}\boxtimes_{\mathcal{C}}\mathcal{N},\mathcal{P}}\times\mathcal{Q})\circ(P_{\mathcal{M},\mathcal{N}}\times\mathcal{P}\times\mathcal{Q}),$$

其中目标是从四个 $\mathcal{C}$-双模的乘法出发的 $\mathcal{C}$-多重平衡函子，定义方式与上文类似。

现在，结合子 1-态射的实例有两种复合，它们在下图中给出的四个 $\mathcal{C}$-双模范畴$\mathcal{M}$、 $\mathcal{N}$、 $\mathcal{P}$、$\mathcal{Q}$的相对 Deligne 积的两种括号方式之间提供等价：

$$\mathcal{M}\boxtimes_{\mathcal{C}}(\mathcal{N}\boxtimes_{\mathcal{C}}(\mathcal{P}\boxtimes_{\mathcal{C}}\mathcal{Q})) \;\overset{(A_{\mathcal{M},\mathcal{N},\mathcal{P}\boxtimes_{\mathcal{C}}\mathcal{Q}})\circ A_{\mathcal{M},\mathcal{N}\boxtimes_{\mathcal{C}}\mathcal{P},\mathcal{Q}}\circ(\mathcal{M}\boxtimes_{\mathcal{C}}A_{\mathcal{N},\mathcal{P},\mathcal{Q}})}{\underset{A_{\mathcal{M}\boxtimes_{\mathcal{C}}\mathcal{N},\mathcal{P},\mathcal{Q}}\circ A_{\mathcal{M},\mathcal{N},\mathcal{P}\boxtimes_{\mathcal{C}}\mathcal{Q}}}{\Downarrow p_{\mathcal{M},\mathcal{N},\mathcal{P},\mathcal{Q}}}}\; ((\mathcal{M}\boxtimes_{\mathcal{C}}\mathcal{N})\boxtimes_{\mathcal{C}}\mathcal{P})\boxtimes_{\mathcal{C}}\mathcal{Q}. \tag{C.16}$$

因此，这些结合子的复合通过图中出现的五边形*ator* $p_{\mathcal{M},\mathcal{N},\mathcal{P},\mathcal{Q}}$典范同构。由于$p_{\mathcal{M},\mathcal{N},\mathcal{P},\mathcal{Q}}$ 是典范的，它将满足幺半 2-范畴五边形ator 的凝聚性（ [SP，定义 2.1，SM1.a，SM1.b]）。[18]

类似地，我们得到等价

$$\mathcal{C}\boxtimes_{\mathcal{C}}\mathcal{M}\xrightarrow{L_{\mathcal{M}}}\mathcal{M},\quad\text{and}\quad\mathcal{M}\boxtimes_{\mathcal{C}}\mathcal{C}\xrightarrow{R_{\mathcal{M}}}\mathcal{M} \tag{C.17}$$

它们分别充当左、右单位子。这些等价在典范同构意义下的唯一性，给出了编码 $R_{\mathcal{M}}$ 和 $L_{\mathcal{M}}$ 在 $\mathcal{M}$ 中的自然性的同构，以及使涉及$A_{\mathcal{M},\mathcal{N},\mathcal{P}}$、 $L_{\mathcal{M}}$、 $R_{\mathcal{M}}$的单位三角形交换的同构。这些同构同样通过与前面类似的论证满足所需的相干条件。

备注 C.6。上述得到的结构赋予了 $\mathcal{C}$-**双模**一个幺半 2-范畴结构。事实上，相对 Deligne 积的唯一性性质意味着，通过 2-范畴 $\mathcal{C}$-**双模**的运算（$\boxtimes_{\mathcal{C}}$、2-态射的垂直复合与水平复合）组合交换同构、A、 L、 R 的自然性约束、五边形子和单位同构所得到的任何定义良好的形式图都必定相等。在本文的范围内，这一相干性陈述使我们无需确定一组足以定义幺半 2-范畴的简明公理。不过，文献中已有此类公理化方案，例如GPS、SP、JY。

[17]一般形式下，这些凝聚性例如列于 [JY 第 4 节2]。[18]在这里， [SP] 的图中出现的用于合成 1-态射的结合凝聚性是平凡的。

定义一个幺半 2-范畴。不过，文献中已有此类公理化方案，例如[GPS、SP、JY]。

C.3. **幺半2-等价由带编织结构的张量等价诱导**。本节将说明，沿有限带编织结构的张量范畴之间的等价所得到的限制函子，如何给出幺半 2-等价。

命题 C.7。设 $F\colon \mathcal{C}\to\mathcal{D}$ 是有限带编织结构的张量范畴之间的等价。则引理 *B.3* 中的限制函子给出一个幺半 2-函子 $\mathrm{Res}_F\colon \mathcal{D}$-**模** $\to\mathcal{C}$-**模**，它是一个2-等价。该2-等价 Res_F 保持正合模范畴。

证明。显然，若 F 是编织张量范畴之间的等价，则 Res_F 是 2-范畴之间的等价。由于 F 是等价，它保持投射对象，而根据引理 B.3，Res_F 保持正合模范畴。

接下来需要验证 Res_F 与幺半 2-范畴结构相容。为此，我们固定一个逆幺半等价 $G\colon \mathcal{D}\to\mathcal{C}$，它是编织张量范畴之间的等价。可以选择这样的等价，使得自然同构 $\epsilon\colon \mathrm{id}\to FG$、$\eta\colon GF\to\mathrm{id}$ 是幺半自然同构 [TV，练习 1.4.6]。这诱导出一个 2-等价 $\mathbf{Mor}_G\colon \mathbf{Mor}_{\mathcal{D}}\to\mathbf{Mor}_{\mathcal{C}}$，它利用 G的幺半结构，将 $\mathcal{D}$ 中的代数 A 映为 $\mathcal{D}$中的代数 $G(A)$。此外，对于固定的代数 A，幺半函子 F 诱导出左 $\mathcal{C}$-模范畴之间的一个等价

$$F_A\colon \mathbf{mod}_{\mathcal{C}}\text{-}G(A)\xrightarrow{\sim}\mathrm{Res}_F(\mathbf{mod}_{\mathcal{D}}\text{-}A),\qquad (V,a_V\colon V\otimes G(A)\to V)\mapsto (F(V),a_{F(V)}),$$

$$a_{F(V)}:=\Big(F(V)\otimes A\xrightarrow{\mathrm{id}_{F(V)}\otimes\epsilon_A}F(V)\otimes FG(A)\xrightarrow{\mu^F_{V,G(A)}}F(V\otimes G(A))\xrightarrow{F(a_V)}F(V)\Big).$$

利用 ϵ 是幺半变换，可以验证 $(F(V)\,a_{F(V)})$ 确实是一个右 A-模。由于 F 是等价，因此函子 F_A 是等价。F_A 的 $\mathcal{C}$-线性结构定义为

$$s^{F_A}_{X,V}\colon F_A(X\triangleright V)=F(X\otimes V)\xrightarrow{(\mu^F_{X,V})^{-1}}F(X)\otimes F(V)=X\triangleright F_A(V).$$

记 $\mathcal{M}=$**模**$_{\mathcal{D}}$-A，函子 F_A 给出一个 $\mathcal{C}$-模范畴之间的等价 **模**$_{\mathcal{C}}$-$G(A)\xrightarrow{\sim}\mathrm{Res}_F(\mathcal{M})$。特别地，取 $A=\mathbb{1}_{\mathcal{D}}$，我们得到一个等价 $\mu_0\colon \mathcal{C}\xrightarrow{\sim}\mathrm{Res}_F(\mathcal{D})$，它由 $F_{\mathbb{1}}$ 与代数同构 $G(\mathbb{1}_{\mathcal{D}})\cong\mathbb{1}_{\mathcal{C}}$ 所诱导的等价复合而成。

现在，由于 G 的幺半结构与编织相容，我们有

$$(\mu^G_{A,B})^{-1}\colon G(A\otimes B)\xrightarrow{\sim}G(A)\otimes G(B)$$

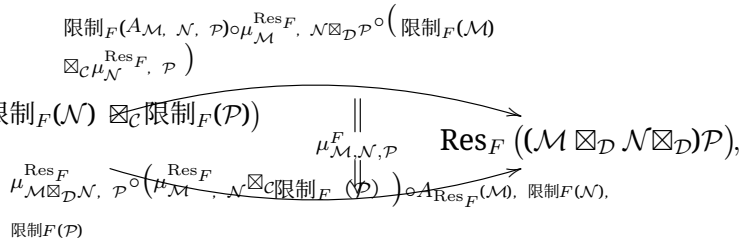
是 $\mathcal{C}$ 中的代数同构。这个代数同构诱导出左 $\mathcal{C}$-模范畴之间的等价

$$\mathbf{mod}_{\mathcal{C}}\text{-}G(A)\otimes G(B)\xrightarrow{\sim}\mathbf{mod}_{\mathcal{C}}\text{-}G(A\otimes B)\xrightarrow{\sim}\mathrm{Res}_F\big(\mathbf{mod}_{\mathcal{C}}\text{-}G(A\otimes B)\big),$$

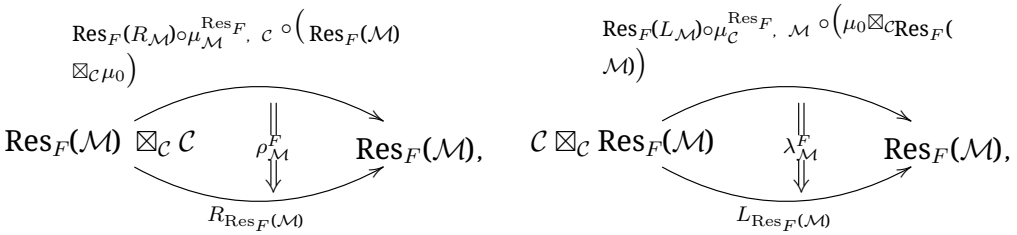
其中第二个等价是上文的等价 $F_{A\otimes B}$。因此，由命题 3.15 可知，存在左 $\mathcal{C}$-模范畴之间的等价

$$\mu^{\mathrm{Res}_F}_{\mathcal{M},\mathcal{N}}\colon \mathrm{Res}_F(\mathcal{M})\boxtimes_{\mathcal{C}}\mathrm{Res}_F(\mathcal{N})\xrightarrow{\sim}\mathrm{Res}_F(\mathcal{M}\boxtimes_{\mathcal{C}}\mathcal{N}),$$

对于 $\mathcal{M}=$**模**$_{\mathcal{D}}$-A 和 $\mathcal{N}=$**模**$_{\mathcal{D}}$-B。现在，相对 Deligne 积由泛性质定义，该性质导出其他结构数据（结合子、单位子、五边形子，.....），如附录 C.2 中所述。由此存在一个自然同构



它证明了 μ^{Res_F} 与 (C.16) 中相对 Deligne 积的结合子 $A_{\mathcal{M},\mathcal{N},\mathcal{P}}$ 相容。此外，还存在自然同构



证明了与 (C.17) 中单位子的相容性。由此得到的 2-自然变换 μ^F，ρ^F 和 $\lambda^F_{\mathcal{M}}$ 是唯一的，因此满足所有所需的相干条件。这表明 Res_F 具有幺半 2-函子的结构。[19] □

命题 C.8. 幺半2-范畴 $\mathcal{C}^{\otimes\mathrm{op}}$-**模范畴** 和 $\mathcal{C}$-**模范畴** 作为幺半2-范畴是等价的。该等价保持正合模范畴。

证明。 回顾 (A.4) 中的幺半等价 $I^{\pm}=(\mathrm{id}_{\mathcal{C}},\ \mu^{\pm})\colon \mathcal{C}^{\otimes\mathrm{op}}\to\mathcal{C}$。现在，对这些等价应用命题 C.7，即可得到所需的幺半 2-范畴等价。□

注 C.9。 [DN2，命题3.7] 表明，对于张量子范畴，归纳法是一个幺半2-函子。由于限制和归纳法在适当意义下是伴随2-函子，我们预期，当 F 不是等价时，Res_F 仅是松幺半的。

References

[AM] N. Andruskiewitsch and J. M. Mombelli, *On module categories over finite-dimensional Hopf algebras*, 《J. Algebra》 314 (2007), no. 1, 383–418. [BD] J. C. Baez and J. Dolan, *Higher-dimensional algebra and topological quantum field theory*, J. Math. Phys. 36 (1995), no. 11, 6073–6105. [BEK] J. Böckenhauer, *On α-induction, chiral generators and modular invariants for subfactors*, **208** (1999), 2, 429–487. [BGR] J. Berger, A. M. Gainutdinov, and I. Runkel, *Non-semisimple link and manifold invariants for symplectic fermions*, (2023), 2307.06069, arXiv e-prints (), ArXiv:.. [BJS] A. Brochier, D. Jordan, and N. Snyder, *On dualizability of braided tensor categories*, Compos. Math. 157 (2021), no. 3, 435–483. [BK] B. Bakalov and A. Kirillov Jr., *Lectures on tensor categories and modular functors*, University Lecture Series, vol. 21, 美国数学会, 普罗维登斯, RI, 2001. [BMS] J. W. Barrett, C. Meusburger, and G. Schaumann, *Gray categories with duals and their diagrams*, 《Adv. Math.》 450 (2024), Paper No. 109740, 129. [BN] J. C. Baez and M. Neuchl, *Higher-dimensional algebra. I. Braided monoidal 2-categories*, 《Adv. Math.》 121 (1996), no. 2, 196–244. [BrNa] A. Brugui`eres and S. Natale, *Central exact sequences of tensor categories, equivariantization and applications*, J. Math. Soc. Japan 66 (2014), no. 1, 257–287. [BZFN] D. Ben-Zvi, J. Francis, and D. Nadler, *Integral transforms and Drinfeld centers in derived algebraic geometry*, J. Amer. Math. Soc. 23 (2010), no. 4, 909–966. [Ca] G. Carnovale, *The Brauer group of modified supergroup algebras*, 《J. Algebra》 305 (2006), no. 2, 993–1036. [Cu] X. Cui, *Higher Categories and Topological Quantum Field Theories*, arXiv e-prints (2016), ArXiv:1610.07628. [CF] L. Crane and I. B. Frenkel, *Four-dimensional topological quantum field theory, Hopf categories, and the canonical bases*, (1994), 5136–5154, pp. –. 拓扑学与物理学。[CG] M. Capucci and B. Gavranović, *Actegories for the working amthematician*, arXiv e-prints (2022), ArXiv:2203.16351.[CGPM] F. Costantino, N. Geer, and B. Patureau-Mirand, *Quantum invariants of 3-manifolds via link surgery presentations and non-semi-simple categories*, **7** (2014), 4, 1005–1053, 《J. Topol.》 (), no. –. [CP] V. Chari and A. Premet, *Indecomposable restricted representations of quantum* sl_2, Publ. Res. Inst. Math. Sci. 30 (1994), no. 2, 335–352.

[19] 幺半2-函子的公理见 [BN，定义 16], ; 另见 [DN2，定义2.10]。相容条件的具体列表对本文并不重要。

[CSZ] K. Coulembier, M. Stroi´nski, and T. Zorman, *Simple algebras and exact module categories*, arXiv e-prints (2025), ArXiv:2501.06629. [D´e1] T. D. D´ecoppet, *Compact semisimple 2-categories*, Trans. Amer. Math. Soc. 376 (2023), no. 12, 8309–8336. [D´e2] T. D. D´ecoppet, *On the dualizability of fusion 2-categories*, arXiv e-prints (2023), ArXiv:2311.16827. [D´e3] T. D. D´ecoppet, *Drinfeld centers and Morita equivalence classes of fusion 2-categories*, Co mpos. Math. 161 (2025), no. 2, 305–340. [D] P. Deligne, *Catégories tannakiennes*, The Grothendieck Festschrift, Vol. II, 1990, pp. 111–195. [DHJF$^+$] T. D. D´ecoppet, P. Huston, T. Johnson-Freyd, D. Nikshych, D. Penneys, J. Plavnik, D. Reutter, and M. Yu, *The classification of fusion 2-categories*, arXiv e-prints (2024), ArXiv:2411.05907. [DN1] A. Davydov and D. Nikshych, *The Picard crossed module of a braided tensor category*, Algebra Number Theory 7 (2013), no. 6, 1365–1403. [DN2] A. Davydov and D. Nikshych,
Braided Picard groups and graded extensions of braided tensor categories, Selecta Math. (N.S.) 27 (2021), no. 4, Paper No. 65, 87. [DR] C. L. Douglas and D. J Reutter, *Fusion 2-categories and a state-sum invariant for 4-manifolds*, arXiv e-prints (2018), ArXiv:1812.11933. 即将发表于Mem. AMS。[DRGG$^+$] M. De Renzi, A. M. Gainutdinov, N. Geer, B. Patureau-Mirand, and I. Runkel,
3-Dimensional TQFTs from non-semisimple modular categories **28** 2022 2, 42, 60 , Selecta Math. (N.S.) ( ), no. Paper No. . [DS] T. D. D´ecoppet and S. Sanford,
Compact semisimple tensor 2-categories are Morita connected, Int. Math. Res. Not. IMRN 11 (2025), Paper No. rnaf135, 34. [DSPS1] C. L. Douglas, C. Schommer-Pries, and N. Snyder, *The balanced tensor product of module categories*, Kyoto J. Math. 59 (2019), no. 1, 167–179. [DSPS2] C. L. Douglas, C. Schommer-Pries, and N. Snyder, *Dualizable tensor categories*, Mem. Amer. Math. Soc. 268 (2020), no. 1308, vii+88. [EGNO] P. Etingof, S. Gelaki, D. Nikshych, and V. Ostrik,
Tensor categories, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 205, 美国数学会, 普罗维登斯, RI, 2015. [ENO1] P. Etingof, D. Nikshych, and V. Ostrik, *Fusion categories and homotopy theory*, Quantum Topol. 1 (2010), no. 3, 209–273. 附有Ehud Meir撰写的附录。[ENO2] P. Etingof, D. Nikshych, and V. Ostrik, *On fusion categories*, Ann. of Math. (2) 162 (2005), no. 2, 581–642. [EO1] P. Etingof and V. Ostrik,
On the Frobenius functor for symmetric tensor categories in positive characteristic, J. Reine Angew. Math. 773 (2021), 165–198. [EO2] P. Etingof and V. Ostrik, *Finite tensor categories*, Mosc. Math. J. 4 (2004), no. 3, 627–654, 782–783. [FFRS] J. Fr¨ohlich, J. Fuchs, I. Runkel, and C. Schweigert, *Correspondences of ribbon categories*, 《Adv. Math.》199 (2006), no. 1, 192–329. [FGS] M. Faitg, A. M. Gainutdinov, and C. Schweigert,
Davydov–Yetter cohomology and relative homological algebra **30** 2024 2, 26, 80 , Selecta Math. (N.S.) ( ), no. Paper No. . [FSS] J. Fuchs, G. Schaumann, and C. Schweigert, *A trace for bimodule categories*, Appl. Categ. Structures 25 (2017), no. 2, 227–268. [G1] J. Greenough, *Bimodule categories and monoidal 2-structure*, ProQuest LLC, 安娜堡, MI, 2010. 新罕布什尔大学博士学位论文。[G2] J. Greenough,
Relative centers and tensor products of tensor and braided fusion categories, 《J. Algebra》388 (2013), 374–396. [GJF] D. Gaiotto and T. Johnson-Freyd, *Condensations in higher categories*, arXiv e-prints (2019), ArXiv:1905.09566.[GL] A. M. Gainutdinov and R. Laugwitz, *Monoidal 2-categories from twisted fiber functors (in preparation)*. [GPMT] N. Geer, B. Patureau-Mirand, and V. Turaev, *Modified quantum dimensions and re-normalized link invariants*, Compos. Math. 145 (2009), no. 1, 196–212. [GPS] R. Gordon, A. J. Power, and R. Street, *Coherence for tricategories*, Mem. Amer. Math. Soc. 117 (1995), no. 558, vi+81. [H] A. Hattori, *Semisimple algebras over a commutative ring*, J. Math. Soc. Japan 15 (1963), 404–419. [HR] J. Hall and D. Rydh, *Perfect complexes on algebraic stacks*, Compos. Math. 153 (2017), no. 11, 2318–2367. [JFR] T. Johnson-Freyd and D. Reutter,
Minimal nondegenerate extensions **37** 2024 1, , J. Amer. Math. Soc. ( ), no. – .[JaYa] D. Jaklitsch and H. Yadav, *⊗-Frobenius functors and exact module categories*, arXiv e-prints (2025), ArXiv:2501.16978.[JY] N. Johnson and D. Yau, *2-dimensional categories*, 牛津大学出版社, 牛津, 2021. [K] G. M. Kelly, *Elementary observations on 2-categorical limits* **39** 1989 2, , Bull. Austral. Math. Soc. ( ), no. – .[KS] A. Klimyk and K. Schm¨udgen, *Quantum groups and their representations*, Texts and Monographs in Physics, Springer-Verlag, 柏林, 1997.

[KTZ] L. Kong、Y. Tian 和 S. Zhou, *The center of monoidal 2-categories in* $3+1$*D Dijkgraaf-Witten theory*, 《Adv. Math.》360 (2020), 106928, 25 页。[L] J. Lurie, *On the classification of topological field theories*, 《Current Developments in Mathematics》, 2008, 2009 年, 第 129–280 页。[Ly] V. V. Lyubashenko, *Invariants of 3-manifolds and projective representations of mapping class groups via quantum groups at roots of unity* **172** 1995 3, 467 516 , 《Comm. Math. Phys.》（），第 – 期。[LR] R. Longo 和 K.-H. Rehren, *Nets of subfactors*, 1995 年, 第 567–597 页。代数量子场论与 Jones 理论研讨会（柏林，1994 年）。[ML1] S. Mac Lane, *Homology*, 《Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften》, 第 114 卷, Springer-Verlag, 柏林-哥廷根-海德堡; Academic Press, Inc., Publishers, 纽约, 1963 年。[ML2] S. Mac Lane, *Categories for the working mathematician*, 《Graduate Texts in Mathematics》, 第 5 卷, Springer-Verlag, 纽约-柏林, 1971 年。[M1] M. Mackaay, *Spherical* 2*-categories and* 4*-manifold invariants*, 《Adv. Math.》143 (1999), 第 2 期, 288–348 页。[M2] M. Mackaay, *Finite groups spherical 2-categories and 4-manifold invariants* **153** 2000 2, , , , 353 390 《Adv. Math.》（），第 – 期。[Ma] S. Majid, *Foundations of quantum group theory*, 剑桥大学出版社, 剑桥, 2000 年。平装版, 初版于 1995 年。[Mo] M. Mombelli, *Module categories over pointed Hopf algebras*, 《Math. Z.》266 (2010), 第 2 期, 319–344 页。[O] V. Ostrik, *Module categories, weak Hopf algebras and modular invariants*, 《Transform. Groups》8 (2003), 第 2 期, 177–206 页。[P] P. Pstragowski, *On dualizable objects in monoidal bicategories*, 《Theory Appl. Categ.》38 (2022), 第 9 篇论文, 257–310 页。[R] D. E. Radford, *Hopf algebras*, 《Series on Knots and Everything》, 第 49 卷, 世界科学出版公司, 哈肯萨克, 新泽西州, 2012 年。[Re] D. Reutter, *Semisimple four-dimensional topological field theories cannot detect exotic smooth structure*, 《J. Topol.》16 (2023), 第 2 期, 542–566 页。[SP] C. J. Schommer-Pries, *The classification of two-dimensional extended topological field theories*, ProQuest LLC, 安娜堡, 密歇根州, 2009 年。博士论文——加州大学伯克利分校, 可在 https://arxiv.org/pdf/1112.1000 查阅。[Sch] G. Schaumann, *Pivotal tricategories and a categorification of inner-product modules*, 《Algebr. Represent. Theory》18 (2015), 第 6 期, 1407–1479 页。[S1] K. Shimizu, *The relative modular object and Frobenius extensions of finite Hopf algebras*, 《J. Algebra》471 (2017), 75–112 页。[S2] K. Shimizu, *Further results on the structure of (co)ends in finite tensor categories*, 《Appl. Categ. Structures》28 (2020), 第 2 期, 237–286 页。[S3] K. Shimizu, *Relative Serre functor for comodule algebras*, 《J. Algebra》634 (2023), 237–305 页。[St] Stacks Project 作者, *Stacks Project*, 2018 年。https://stacks.math.columbia.edu, 访问日期: 2025 年 12 月 12 日。[SY] K. Shimizu 和 H. Yadav, *Commutative exact algebras and modular tensor categories*, arXiv 电子预印本（2024）, ArXiv:2408.06314。[T] V. G. Turaev, *Quantum invariants of knots and 3-manifolds*, 《De Gruyter Studies in Mathematics》, 第 18 卷, Walter de Gruyter & Co., 柏林, 1994 年。[TV] V. Turaev 和 A. Virelizier, *Monoidal categories and topological field theory*, 《Progress in Mathematics》, 第 322 卷, Birkhäuser/Springer, 尚贝里, 2017 年。[W] J.-O. Willprecht, *On deformations of module categories over finite tensor categories*, 博士论文, 2023 年（英文）。汉堡大学, 可在 https://ediss.sub.uni-hamburg.de/handle/ediss/10651 查阅（检索于 2025 年 8 月 18 日）。

Institut Denis Poisson, CNRS, Université de Tours, Parc de Grandmont, 37200 Tours, France
Email address: azat.gainutdinov@法国国家科学研究中心.fr

School of Mathematical Sciences, University of Nottingham, University Park, Nottingham, NG72RD, UK*Email address*: robert.laugwitz@诺丁汉.ac.uk