受 Kalman 构造启发的一阶子结构逻辑单子代数的范畴等价

Juntao Wang[a]、Mei Wang[b,*]、William Zuluaga Botero[c]

[a]西安石油大学理学院，中国陕西省西安市 *710065*[b]*Xi Hang University* 理学院，中国陕西省西安市 *710077*[c] *CONICET* 和布宜诺斯艾利斯省中部国立大学精确科学学院数学系，*Pinto,399, 7000,* 阿根廷坦迪尔

arXiv:2601.22023v1 [math.LO] 29 Jan 2026

摘要

范畴 $\mathbb{DRDL}'$ 的对象是满足条件 **CK** 的 c-微分剩余分配格；该范畴是范畴 $\mathbb{RDL}$ 在范畴等价（Kalman 函子）**K** 下的像，其中范畴 $\mathbb{RDL}$ 的对象是剩余分配格。本文的主要目标是将这一等价**K** 提升到范畴 $\mathbb{MRDL}$（其对象为单子剩余分配格）与范畴$\mathbb{MDRDL}'$（其对象为由 $\mathbb{DRDL}'$ 的对象和一个中心全称量词组成的配对）之间。首先，基于单子 $\mathbf{FL_e}$- 代数簇，我们引入单子剩余格的概念，并研究其若干代数性质，证明单子剩余分配格类与单子 c-微分剩余分配格类之间存在一一对应关系。随后，基于这一对应关系，我们证明范畴 $\mathbb{MRDL}$ 与 $\mathbb{MDRDL}'$ 之间存在范畴等价。本文的结果不仅推广了 Sagastume 和 San Martín 在 [Mathematical Logic Quarterly, **60**(2014年), 375–388], 中的工作，也解决并克服了 [Studia Logica, **111**(2023年), 361–390] 中指出的局限性。最后，本文介绍了有关 2-上下文翻译描述的一些应用。

关键词： 次结构逻辑；单子剩余格；Kalman 函子；范畴等价*2010* 年数学学科分类： 03B47, 06B05

1. 引言

子结构逻辑构成了一个庞大的非经典逻辑家族，大致可以定义为这样一类逻辑系统：当通过Gentzen型演算表述时，它们缺少某些结构规则（交换、缩并和弱化），而这些规则出现在经典逻辑和直觉主义逻辑的标准相继式系统中 [20]。因此，它们涵盖了自20世纪中叶以来独立发展起来的各种系统，包括相干逻辑或多值逻辑，如幺半逻辑（不满足缩并），以及线性逻辑（除前述两条规则外，也不满足交换）。全Lambek演算的Gentzen系统 **FL** 是子结构逻辑中所考虑的最弱逻辑，它由以下方式得到

*通讯作者。电子邮箱：wjt@xsyu.edu.cn (J.T. Wang)、wangmeimath@163.com (M. Wang)、wizubo@gmail.com (W. Zuluaga Botero)。

全Lambek演算的Gentzen系统 **LJ**：从直觉命题逻辑中移除三条结构规则。作为**FL**的一个非常重要的扩展，相继式演算$\mathbf{FL_{ew}}$同样是通过仅删除收缩规则而从直觉逻辑中得到的。研究者通常将$\mathbf{FL_{ew}}$之上的子结构逻辑，或不含收缩规则的逻辑 [37], 称为子结构逻辑，尽管其中一些逻辑满足收缩规则。不含收缩规则的逻辑类包含中间逻辑、卢卡西维奇多值逻辑 [15] 以及Hájek意义下的模糊逻辑 [26]。我们的主要技术工具具有代数性质，其基础是$\mathbf{FL_{ew}}$之上的逻辑与剩余格的簇 [6, 19, 22–24, 33]之间的紧密联系。

带强否定的构造逻辑 [39] 是出于逻辑上的原因而创立的：直觉否定不具备良好的构造性质。从一开始，带强否定的构造逻辑就与直觉逻辑密切相关。该逻辑的代数对应物最初由 Rasiowa 研究，随后由 Brignole 和 Monteiro [7, 8]进一步定义为一个簇。他们将其代数模型称为 Nelson 代数。直觉主义与带强否定的构造逻辑之间关系的代数方法体现为：将 Nelson 代数刻画为 Heyting 代数中一对互不相交的元素 [46]。Cignoli [16] 还表明，这一刻画可以从范畴的角度形式化为 Heyting 代数范畴与 Nelson 代数范畴之间的一个伴随；将其限制到中心 Nelson 代数后，就得到由 Kalman 函子诱导的等价。此外，Castiglioni、Menni 和 Sagastume 在 [13] 中证明，由 Kalman 的一种构造启发而来的函子 **K**，可以扩展为剩余分配格范畴 $\mathbb{RDL}$与满足条件 **CK** 的 c-微分剩余分配格范畴 $\mathbb{DRDL}'$之间的等价。最近，Castiglioni、Lewin 和 Sagastume 在 [14, 43]中证明，范畴 $\mathbf{MV^{\bullet}}$（其对象为单子 MV-代数）是通过等价 **K** 将对象为 MV-代数的范畴 **MV**映射所得的像；他们还将这一构造扩展到 l-群，并引入了新的单子 l-群范畴。

Halmos 意义下的单子（布尔）代数（L, $\Diamond$）是配备闭包算子 $\Diamond$ 的布尔代数，它抽象了标准存在量词“对于某个”所具有的代数性质。名称“单子”源于它与这样一种谓词逻辑的联系：其语言包含一个位置谓词和一个量词。随后，单子 MV-代数——单子卢卡西维奇谓词逻辑 **MŁPC** 的代数对应物——在 [1, 17, 36, 38, 41] 中被引入并加以研究；Prior 的直觉模态逻辑 **MIPC** 的代数模型单子 Heyting 代数，在 [3–5] 中被引入并加以研究；单子 BL 代数——基本模糊谓词逻辑 $\forall$ 的单子片段 **mBL** 的代数语义——在 [10–12] 中被引入并加以研究。同时，Tuyt 引入并研究了单子 $\mathrm{FL_e}$-代数及其相应子簇，并证明它们确实是各种一阶子结构逻辑 [44]的单变量（单子）片段的代数语义。在此基础上，Cintula、Metcalfe 和 Tokuda 得出了若干更有趣且富有洞见的结论，并建立了一项一般准则，可利用超 amalgamation 为各种一阶逻辑的单变量片段建立公理化体系，为具有无切割演算的子结构逻辑 [18]提供了一种替代性的证明论方法。值得注意的是，本文作者率先将单子代数与 Kalman 函子结合起来，尝试给出这些代数的一些表示。具体而言，论文 [47] 首次尝试借助 Kalman 函子 **K**，将弱单子剩余分配格的范畴 $\mathbb{WMRDL}$ 与带有弱全称量词的 c- 微分剩余分配格的范畴 $\mathbb{WMDRDL}'$ 联系起来，并给出弱单子剩余分配格的一些表示。然而，这项工作仍有两个方面可以加强。一方面，从代数逻辑的角度看，弱单子剩余格簇缺乏逻辑基础。为解决这一问题，我们将其替换为 Tuyt 意义下的单子

剩余格；这种剩余格已被证明构成一阶子结构逻辑单子片段的代数语义。另一方面，范畴 $\mathbb{WMRDL}$ 与 $\mathbb{WMDRDL}'$ 之间的范畴等价是依靠同构 α 和 β证明的（见 [47] 中的定理 6.3），其中

$$\alpha(x) = (x, {\sim}x) \text{ and } \beta(x) = (\lambda(x), \lambda({\sim}x)).$$

尽管如此，利用同构 ϕ 与 ψ（见 [13] 中的引理 7.6）来证明这一关键结果会更为恰当，其中

$$\phi(x) = (x, 0) \text{ and } \psi(x) = (x \cup c, {\sim}x \cup c),$$

因为 α 与 β 仅适用于对合剩余格范畴及其子范畴（见 [14] 中的引理 7），这一限制削弱了论证的一般性。因此，本文的第一个动机是以 Tuyt 意义下的单子剩余格为基础，以更为合理且精确的方式证明相应的范畴等价。

随后，作为对 [14]，中所呈现研究的直接延续，Sagastume 与 San Martín [42] 还将 Kalman 函子 $\mathbf{K}^\bullet$ 从范畴 $\mathbb{MV}$ 和 $\mathbb{MV}^\bullet$ 提升到范畴 $\mathbb{MV}_{\mathrm{U}}$（其对象为 UMV-代数，即带有 U-算子的 MV-代数）以及 $\mathbb{MV}^\bullet{}_{\mathrm{cU}}$（其对象为由 $\mathbf{K}^\bullet$ 的一个对象与一个 cU-算子构成的对），请见下图：

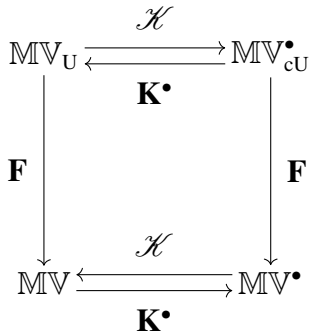
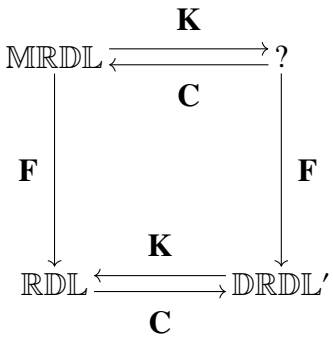


图 1。 函子图表$\mathbf{K}^\bullet$ 和 $\mathscr{K}$关联范畴 $\mathbb{MV}_{\mathrm{U}}$ 和 $\mathbb{MV}^\bullet{}_{\mathrm{cU}}$。

注意到，MV-代数和 MV•-代数都满足对合律，因此与之对应的 UMV-代数和 cUMV•-代数也有平行的定义。在这种情况下，尽管 Kalman 函子$\mathbf{K}^\bullet$诱导出范畴 $\mathbb{MV}_{\mathrm{U}}$ 与 $\mathbb{MV}^\bullet{}_{\mathrm{cU}}$之间的等价，但它无法简化给定的范畴 $\mathbb{MV}_{\mathrm{U}}$。鉴于 UMV-代数与单子剩余格之间关系密切，更确切地说，UMV-代数是单子剩余格的一种自然推广（见推论 3.8(2)），第二个动机是将这一结果从 UMV-代数范畴推广到单子剩余格的情形。更具体地说，本研究在很大程度上受到 Castiglioni、Menni 和 Sagastume [13] 的相关结果启发：他们通过函子$\mathbf{K}$建立了剩余分配格与满足条件$\mathbf{CK}$的 c-微分剩余分配格之间的联系；我们也相信，这些结果可以提升到单子剩余分配格的层次。令 $\mathbb{MRDL}$ 为单子剩余分配格范畴。那么本部分的主要目标是确定一个合理的范畴，使下图得以补全：



F图 2. 函子**K** 和 **C** 之间关系的图表将范畴 $\mathbb{MRDL}$ 和 ? 联系起来。 .

其中， $\mathbb{MRDL} \to \mathbb{RDL}$ 是显然的遗忘函子 F。补全这个方形的范畴应当是一个满足条件**CK** 的 c- 微分剩余分配格，并配备一种单子结构，使两种结构以合理的方式相互作用。注意，c- 微分剩余分配格满足对合律。因此，在定义相应的一元代数时，可以只将存在量词或全称量词中的一种作为基本符号，另一种则可定义为所选量词的对偶。然而，单子剩余分配格的定义要求同时引入这两类量词，因为这两个量词不能相互定义。显然，单子 c-微分剩余分配格（L， $\Diamond$）的结构比单子剩余分配格（L， $\Box$， $\Diamond$）更简单，因为它只包含存在量词或全称量词中的一种。鉴于此，我们所构造出的范畴将比原来的范畴更简单。

最后，我们注意到，范畴 $\mathbb{MV}_{\mathrm{U}}$ 和 $\mathbb{MV}^{\bullet}{}_{\mathrm{cU}}$ 分别是 $\mathbb{MRDL}$ 和 ? 的子范畴（参见 [14]中的推论 4.13 和定理 13）。关键在于，这些结构并非彼此孤立，而是通过一种精妙的范畴机制从根本上联系在一起。具体而言，它们的联系是通过 Kalman 函子诱导的典范等价关系建立的；该函子充当统一的桥梁，在这些领域之间进行映射的同时，保留了基本的逻辑和代数性质。这一由函子诱导的框架不仅阐明了它们的层级关系，还揭示了其内部架构之间更深层次的内在对应关系。

这直接引出了第三个动机：系统地探索图 1 和图 2 中结构图之间的内在联系。此项研究不止于简单的分类，还旨在揭示两种表示背后一以贯之的数学叙事，即它们如何通过 Kalman 函子体现平行的范畴论真理。这是一项极具挑战性且引人入胜的研究课题。事实上，本文最后一节所探讨的正是这一关键问题，它位于代数、逻辑与范畴论视角的交汇处；我们将在该节综合这些洞见，形成统一的理论论述。因此，我们的目标是完成图 3 所示的构造。

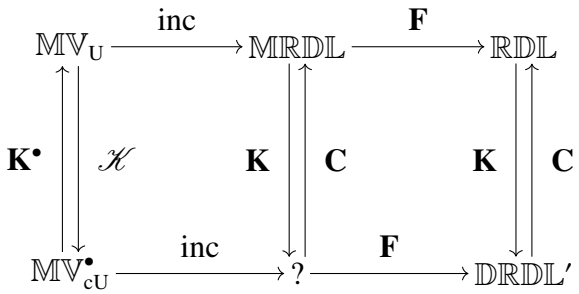


图 3。 范畴 $\mathbb{MV}_{\mathrm{U}}$、 $\mathbb{MV}^{\bullet}{}_{\mathrm{cU}}$、? 和 $\mathbb{MRDL}$ 之间关系的图表 .

为完成图 2 和图 3，我们引入满足 **CK** 的单子 c-微分剩余分配格范畴 $\mathbb{MDRDL}'$，并扩展函子 **K**，使其在范畴 $\mathbb{MRDL}$ 和 $\mathbb{MDRDL}'$ 之间建立等价，从而完成这两幅图。

本文的组织结构如下：第2节回顾关于范畴$\mathbb{RDL}$ 和 $\mathbb{DRDL}'$的一些基本结果。第3节基于单子 $\mathrm{FL_e}$-代数簇，通过自然的语义扩张引入单子剩余格簇。第4节将这一等价**K** 从范畴 $\mathbb{RDL}$ 和范畴 $\mathbb{DRDL}'$ 提升到范畴 $\mathbb{MRDL}$ 和范畴 $\mathbb{MDRDL}'$。第5节给出一个从 $\mathbb{MDRDL}'$ 的等式后承关系到 $\mathbb{MRDL}$的等式后承关系的有限、非平凡的 2-上下文翻译。

2. 预备知识

为方便读者，我们附上一张表，总结全文中用于代数类和代数方程类的记号，随后给出相应的定义。

代数类	记号
$\mathrm{FL_e}$-代数类	$\mathbb{FL}_{\mathrm{e}}$
剩余格类	$\mathbb{RL}$
剩余分配格类	$\mathbb{RDL}$
c-微分剩余分配格类	$\mathbb{DRDL}$
满足 **CK** 的 c-微分剩余分配格类	$\mathbb{DRDL}'$
MV-代数类	$\mathbb{MV}$
$\mathrm{MV}^{\bullet}$-代数类	$\mathbb{MV}^{\bullet}$
单子 $\mathrm{FL_e}$-代数类	$\mathbb{MFL}_{\mathrm{e}}$
单子剩余格类	$\mathbb{MRL}$
单子对合剩余格类	$\mathbb{MIRL}$
单子剩余分配格类	$\mathbb{MRDL}$
单子 c-微分剩余分配格类	$\mathbb{MDRDL}$
满足 **CK** 的单子 c-微分剩余分配格类	$\mathbb{MDRDL}'$
UMV-代数类	$\mathbb{MV}_{\mathrm{U}}$
$\mathrm{UMV}^{\bullet}$-代数类	$\mathbb{MV}^{\bullet}_{\mathrm{cU}}$

表 1. 本文中所涉及的代数类的记号。

代数方程	名称（记号）
$x \leq 1$	整性（INT）
$(x \to y) \vee (y \to x) = 1$	前线性（PRE）
$x \wedge y = x \odot (x \to y)$	可除性 (DIV)
$\neg\neg x = x$	对合 (INV)

表 2. 本文中涉及的代数方程的记号。

本节总结一些关于范畴 $\mathbb{RDL}$和 $\mathbb{DRDL}'$ 的基本结果，其中 $\mathbb{RDL}$的对象是剩余分配格，$\mathbb{DRDL}'$ 的对象是 c-微分剩余分配格。范畴 $\mathbb{DRDL}'$ 是 $\mathbb{RDL}$ 在 Kalman 函子**K**下的像；该函子建立了二者之间的范畴等价。此外， $\mathbb{MV}^{\bullet}$ 可视为$\mathbb{DRDL}'$ 的满子范畴，其对象是满足条件**CK** 的 c-微分剩余分配格。

定义 2.1. [20] 类型为 (2, 2, 2, 2, 0, 0) 的代数结构 $(L, \wedge, \vee, \odot, \to, 0, 1)$ 称为 FL_e- 代数，如果它满足以下条件：

(1) $(L, \wedge, \vee)$ 是一个格，(2) $(L, \odot, 1)$ 是一个交换幺半群，(3) 对任意 x、y、$z \in L$，$x \odot y \leq z$ 当且仅当 $x \leq y \to z$。

显然，类 $\mathbb{FL}$ 构成一个簇。下文中，我们用 L 表示剩余格 $(L, \wedge, \vee, \odot, \to, 0, 1)$ 的论域。在任意剩余格 L 中，我们定义其他运算

$$x^0 = 1 \text{ and } x^n = x^{n-1} \odot x \text{ for } n \geq 1,$$
$$-x = x \to 0 \text{ and } --x = -(-x) \text{ for any } x, y \in L.$$

定义 2.2. [20, 28] 一个 FL_e-代数 L 是

(1) 一个剩余格 （FL_{ew}-代数）当且仅当它满足方程 (INT)。(2) 当且仅当其底层格是分配的，它才是分配的 。(3) 当且仅当它满足方程 (INV) 时，它是对合的。(4) 当且仅当它满足方程 (INV)、(DIV) 和 (PRE) 时，它是一个MV-代数 。

接下来，我们回顾关于范畴 $\mathbb{RDL}$ 和 $\mathbb{DRDL}'$等价的结果。为区分 $\mathbb{RDL}$和 $\mathbb{DRDL}'$中的对象，我们用 $\mathcal{L}$ 表示 $\mathbb{DRDL}'$中对合剩余格的论域。关于这一主题的进一步阐述，请参阅 [13, 14, 21]。

定义 2.3。 [21] 代数结构 $(\mathcal{L}, \cap, \cup, \otimes, \sim, 0, 1)$ 是对合剩余格 当且仅当满足以下条件：

(1) $(\mathcal{L}, \cap, \cup, 0, 1)$ 是有界格，(2) $(\mathcal{L}, \otimes, 1)$ 是交换幺半群，(3) $\sim$ 是格的一个对合且为对偶自同构，(4) 对任意 x、y、$z \in \mathcal{L}$，$x \otimes y \leq z$当且仅当$x \leq \sim(y \otimes \sim z)$ 。

注 2.4。 请注意，对合剩余格与对偶化剩余格是等价的（参见 [13], 注 4.1）。回顾一下，在 [13] 中，若代数 $(\mathcal{L}, \cap, \cup, \otimes, \rightsquigarrow, 0, 1)$ 满足以下条件，则称其为对偶化剩余格：

(1) $(\mathcal{L}, \cap, \cup, \otimes, \rightsquigarrow, 0, 1)$ 是一个剩余格，(2) 0 是一个循环对偶化元。也就是说，对所有 $x \rightsquigarrow 0$，都有 $\rightsquigarrow 0 = x$。

如果一个对合剩余格 $\mathcal{L}$ 含有一个称为中心的特定元素，且该元素是对合的不动点，则称它为中心化的。c-微分剩余格是一个带中心c 的对合剩余格 $\mathcal{L}$，并满足“莱布尼茨”条件（见 [13], 定义 7.2）：

$$(x \otimes y) \cap c = ((x \cap c) \otimes y) \cup (x \otimes (y \cap c)),$$

对所有 x、$y \in \mathcal{L}$。若 c-微分剩余格的底层格是有界分配格，则称其为分配的。

Castiglioni 等人在 [13] 中由一个剩余分配格构造了一个 c-微分剩余分配格。下文将概述这一构造。

设 $L \in \mathbb{RDL}$。按如下方式定义$\mathbf{K}(L)$:

$$\mathbf{K}(L) = \{(x, y) \in L \times L^o \mid x \odot y = 0\},$$

whe其中 L^o 是L 的对偶序（见 [13],第 7 节）。定义$\mathbf{K}(L)$中的运算 :

$$\begin{gathered}(x, y) \cup (z, w) = (x \vee z, y \wedge w),\\ (x, y) \cap (z, w) = (x \wedge z, y \vee w),\\ (x, y) \otimes (z, w) = (x \odot z, (x \to w) \wedge (z \to y)),\\ (x, y) \rightsquigarrow (z, w) = ((x \to z) \wedge (w \to y), w \odot x).\end{gathered}$$

于是，代数 $(\mathbf{K}(L), \cap, \cup, \otimes, \rightsquigarrow, (0, 1), (1, 0))$ 是一个对偶化剩余分配格，且 $(1, 1)$ 是一个循环对偶化元；$\mathbf{K}(L)$ 中由 $\cap$ 给出的诱导序 $\leq$ 为

$$(x_1, y_1) \leq (x_2, y_2) \text{ if and only if } x_1 \leq x_2 \text{ and } y_1 \geq y_2$$

（见 [45], 推论 3.5）。代数结构 $(\mathbf{K}(L), \cap, \cup, \otimes, \sim, (0, 1), (1, 0))$，其中

$$\sim(x, y) = (x, y) \rightsquigarrow (1, 1) = (y, x)$$

是一个满足$c = (0, 0)$的对合剩余格（见 [13], 备注 4.1），并且是 $\mathbb{DRDL}$的一个对象。赋值$\mathbf{K}$ 扩展为一个函子$\mathbf{K}: \mathbb{RDL} \to \mathbb{DRDL}$ （见 [13], 引理 7.1）。

令 $\mathcal{L} \in \mathbb{DRDL}$ 和 $C(\mathcal{L}) = \{x \in \mathcal{L} \mid x \geq c\}$。在 $C(\mathcal{L})$中定义乘积

$$x \otimes_c y = (x \otimes y) \cup c,$$

将底元取为常量c，其他运算则取为由 $\mathcal{L}$所诱导的运算。于是 $C(\mathcal{L})$是 $\mathbb{DRDL}$ 的一个对象，而 $\mathcal{L} \mapsto C(\mathcal{L})$定义了另一个函子

$$\mathbf{C} : \mathbb{DRDL} \to \mathbb{RDL},$$

它是$\mathbf{K}$ 的左伴随（见 [13], 定理 7.6）。

这个伴随

$$\mathbf{C} \dashv \mathbf{K} : \mathbb{RDL} \to \mathbb{DRDL}$$

限制为一个等价 $\mathbf{C} \dashv \mathbf{K}: \mathbb{RDL} \to \mathbb{DRDL}'$ (见 [13], 推论7.8)，其中 $\mathbb{DRDL}'$ 是范畴 $\mathbb{DRDL}$ 的子范畴，其对象 $\mathcal{L}$ 满足以下条件:

(CK) 对于任意一对元素 x、$y \in \mathcal{L}$，若x、$y \geq c$ 且$x \otimes y \leq c$，则存在$z \in \mathcal{L}$，使得$z \cup c = x$ 且 $\sim z \cup c = y$。

Castiglioni 等人还在 [14] 证明了 $\mathbb{DRDL}'$ 构成一个簇。更确切地说，令 $\mathcal{L} \in \mathbb{DRDL}'$。那么存在一个映射 $\kappa : \mathcal{L} \to \mathcal{L}$，满足以下两个条件:

$$\kappa x \cup c = c \rightsquigarrow x \text{ and } \kappa x \cup c = x \cup c.$$

反过来，若 $\mathcal{L} \in \mathbb{DRDL}'$ 中存在一个满足前述方程的算子 κ，则（**CK**）在 $\mathcal{L}$ 上成立（参见 [14], 定理 1）。

基于上述内容，　我们回顾有关范畴 $\mathbb{MV}$ 与 $\mathbb{MV}^\bullet$等价的结果。

令 $\mathbb{MV}^\bullet$ 为 $\mathbb{DRDL}'$ 的满子范畴，其对象 $\mathcal{L}$ 满足

$$\begin{aligned}
&(\text{Inv}^\bullet)\ \sim\kappa x = \kappa\sim\kappa x,\\
&(\text{Lin}^\bullet)\ (x \rightsquigarrow y) \cup (y \rightsquigarrow x) \geq c,\\
&(\text{QHey}^\bullet)\ (x \otimes c) \otimes (x \rightsquigarrow (y \cup c)) = (x \cap y) \otimes c,
\end{aligned}$$

对于任意的 x、$y \in \mathcal{L}$ [，参见 [14], 定理 13]。范畴 $\mathbb{MV}^\bullet$（其对象为 **MV**$^\bullet$-代数）是范畴 $\mathbb{MV}$（其对象为 MV-代数）在范畴等价 $\mathbf{K}^\bullet$下的像。更确切地说，对于 $\mathcal{L} \in \mathbb{MV}^\bullet$，有

$$\kappa(\mathcal{L}) = \{x \in \mathcal{L} \mid \kappa(x) = x\}.$$

赋值 $\mathcal{L} \mapsto \kappa(\mathcal{L})$ 可扩展为一个函子 $\mathscr{K}$: $\mathbb{MV}^\bullet \to \mathbb{MV}$ [see [14], 定理 10]。若 $g : \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_2$ 是 $\mathbb{MV}^\bullet$中的一个态射，则 $\mathscr{K}(g) : \kappa(\mathcal{L}_1) \to \kappa(\mathcal{L}_2)$ 是 $\mathbb{MV}$ 中的态射，由将 g 限制到 $\kappa(\mathcal{L}_1)$ 得到。反过来，对于 $L \in \mathbb{MV}$，赋值 $L \mapsto \mathbf{K}^\bullet(L)$ 可扩展为一个函子 $\mathbf{K}^\bullet : \mathbb{MV} \to \mathbb{MV}^\bullet$。若 $L_1 \to L_2$是 $\mathbb{MV}$中的一个态射，则 $\mathbf{K}^\bullet(f) : L_1 \to L_2$是 $\mathbb{MV}^\bullet$ 中的态射，由

$$(\mathbf{K}^\bullet(f))(x, y) = (f(x), f(y)).$$

伴随 $\mathscr{K} \dashv \mathbf{K}^\bullet : \mathbb{MV}^\bullet \to \mathbb{MV}$ 导出一个等价 [见 [14], 推论 15]。此等价通过自然同构显式实现：对于任意 $L \in \mathbb{MV}$，该同构

$$\alpha : L \longrightarrow \kappa(\mathbf{K}^\bullet(L)), \quad \alpha(x) = (x, \sim x),$$

且对于任意 $\mathcal{L} \in \mathbb{MV}^\bullet$，该同构

$$\beta : \mathcal{L} \longrightarrow \mathbf{K}^\bullet(\kappa(\mathcal{L})), \quad \beta(x) = (\lambda(x), \lambda(\sim x)), \text{ where } \lambda(x) = \sim\kappa(\sim x)$$

[参见 [14], 定理 11]。

3. 单子剩余格

单子 $\mathrm{FL_e}$-代数的簇由 Tuyt 在其博士论文中提出，作为一阶子结构逻辑单变量片段的一种代数语义 [44]。

定义 3.1. [44] 一个单子 FL_e-代数 是一个三元组 $(L, \Box, \Diamond)$，其中 L 是一个 $\mathrm{FL_e}$-代数，且 $\Box, \Diamond : L \to L$ 是 L 上的两个一元算子，满足以下条件:

(M1) $\Box x \leq x$, (M2) $\Box\Diamond x = \Diamond x$, (M3) $\Box(x \wedge y) = \Box x \wedge \Box y$,
(M4) $\Box 0 = 0$, (M5) $\Box 1 = 1$,
(M6) $\Box(x \to \Box y) = \Diamond x \to \Box y$, (M7) $\Box(\Box x \to y) = \Box x \to \Box y$,

for 任意的 $x, y \in L$。

单子 $\mathrm{FL_e}$-代数的类 $\mathbb{MFL}_e$ 构成一个簇。

这里我们给出单子剩余格的一个等价刻画。

定理 3.2. 设 L 是一个剩余格， $\Box$和 $\Diamond$ 是剩余格L上的两个一元算子。则以下命题等价:

(1) $(L, \Box, \Diamond)$ 是一个单子剩余格；(2) $\Box$ 和 $\Diamond$ 满足恒等式 (M1)-(M3) 和 (M6)-(M7)。

证明。 (1) $\Rightarrow$ (2) 由定义 3.1 可直接得出。(2) $\Rightarrow$ (1) 这里只需证明 (M4) 和 (M5) 成立。(M4) 在 (M1) 中令 $x = 0$， 可得

$$\Box 0 \leq 0,$$

这意味着 $\Box 0 = 0$。

(M5) 在 (M1) 中令$x = y = 1$ ，得到 $\Box 1 \to 1 = 1$，因此由 (M7) 可得

$$\Box 1 = \Box(\Box 1 \to 1) = \Box 1 \to \Box 1 = 1,$$

这意味着 $\Box 1 = 1$。 □

现在我们按照 Tuyt 的定义引入单子剩余格这一簇，并研究其中的一些子簇，例如单子对合剩余格和 UMV-代数。

定义 3.3. 单子剩余格是一个三元组（L， $\Box$， $\Diamond$），满足恒等式：(M1)–(M3) 和 (M6)–(M7)。

一元算子 $\Box, \Diamond : L \to L$ 分别称为剩余格L上的全称量词和存在量词。单子剩余格的类 $\mathbb{MRL}$ 显然构成一个簇。

命题 3.4. 在任意单子剩余格（$L, \Box, \Diamond$）中，以下恒等式成立：

(1) $x \le \Diamond x$, (2) $x \le y$ 意味着 $\Box x \le \Box y$, (3) $x \le y$ 意味着 $\Diamond x \le \Diamond y$, (4) $\Box x = \Diamond \Box x$, (5) $\Box(\Diamond x \to y) = \Diamond x \to \Box y$, (6) $\Box(x \to \Diamond y) = \Diamond x \to \Diamond y$, (7) $\Box\Box x = \Box x$, (8) $\Diamond\Diamond x = \Diamond x$, (9) $\Diamond 1 = 1$, (10) $\Diamond 0 = 0$, (11) $\Diamond(\Diamond x \odot \Diamond y) = \Diamond x \odot \Diamond y$, (12) $\Box(\Box x \odot \Box y) = \Box x \odot \Box y$, (13) $\Diamond(x \odot \Diamond y) = \Diamond x \odot \Diamond y$, (14) $\Box(\Diamond x \vee \Diamond y) = \Diamond x \vee \Diamond y$, (15) $\Diamond(x \vee y) = \Diamond x \vee \Diamond y$, (16) $\Diamond(x \to \Diamond y) \le \Diamond x \to \Diamond y$, (17) $\Box x \odot \Box y \le \Box(x \odot y)$, (18) $\Diamond(x \odot \Box y) = \Diamond x \odot \Box y$, (19) $\Diamond(x \odot y) \ge \Diamond x \odot \Box y$, (20) $\Box(\Box x \to \Box y) = \Box x \to \Box y$, (21) $\Box - \Box x = - \Box x$, (22) $\Box - x = - \Diamond x$, (23) $\Diamond \Box x \le x$, (24) $x \le \Box \Diamond x$, (25) $\Diamond x \le y$ 当且仅当 $x \le \Box y$

.

证明。 注意到每个单子 $\mathrm{FL_e}$-代数，因此（1）—（16）的证明分别与 [44], 中引理 2.2（L7）—（L23）的证明类似。

（18）由（4）和（13），我们有

$$\Diamond(x \odot \Box y) = \Diamond(x \odot \Diamond \Box y) = \Diamond x \odot \Diamond \Box y = \Diamond x \odot \Box y,$$

这意味着 $\Diamond（x \odot \Box y） = \Diamond x \odot \Box y$。

（19）根据定义 3.1 （M1）以及 $\odot$ 的单调性，$x \odot y \ge x \odot \Box y$，再由（3）和（18），我们有

$$\Diamond(x \odot y) \ge \Diamond(x \odot \Box y) = \Diamond x \odot \Box y,$$

这意味着 $\Diamond（x \odot y） \ge \Diamond x \odot \Box y$。

(20) 根据定义 3.1(M7) 和 (7)，我们有

$$\Box(\Box x \to \Box y) = \Box x \to \Box \Box y = \Box x \to \Box y,$$

这意味着 $\Box(\Box x \to \Box y) = \Box x \to \Box y$。

(21) 在定义 3.1(M7) 中取 $y = 0$，并根据定义 3.1(M4)，可得

$$\Box - \Box x = \Box(\Box x \to 0) = \Box x \to \Box 0 = - \Box x,$$

这意味着 $\Box -\Box x = -\Box x$。

(22) 在 (6) 中取 $y = 0$，并由 (10)，我们得到

$$\Box -x = \Box(x \to \Diamond 0) = \Diamond x \to \Diamond 0 = -\Diamond x,$$

由此可得 $\Box -x = -\Diamond x$。

(23) 这由 (4) 和定义 3.1 (M1) 得出。

(24) 作为 3.1 (M5)、(6)、(1) 以及剩余性质的应用，我们得到

$$1 = \Box 1 = \Box(\Diamond x \to \Diamond x) = \Diamond x \to \Box\Diamond x \leq x \to \Box\Diamond x,$$

由此可得 $x \leq \Box\Diamond x$。

(25) 这基本上是对 (23) 和 (24) 的重述。 □

为便于在第4节定义幺元 c-微分剩余格，我们预先引入单子对合剩余格的概念。

定义 3.5. 如果代数（L, $\wedge, \vee, \odot, \to, \Box, 0, 1$）满足（$L$, $\wedge, \vee, \odot, \to, 0, 1$）是对合剩余格，且此外 $\Box$ 满足恒等式 (M1)、(M3) 和 (M7)，则称其为单子对合剩余格。

单子对合剩余格 $\mathbb{MIIRL}$ 的类构成一个簇。

定理3.6. 由下式确定的簇 $\mathbb{MRL}$ 的子簇

$$--x = x,$$

与簇 $\mathbb{MIIRL}$项等价。

证明。 设（L, $\Box, \Diamond$）是满足 $--x = x$的单子剩余格。由定义 3.1 中的 (M1)、(M3) 和 (M7) 可直接得出，（$L, \Box$）是单子对合剩余格。

反过来，设 $(L, \Box)$ 是一个单子对合剩余格，并定义 $\Diamond x := -\Box - x$。接下来证明 $(L, \Box, \Diamond)$ 是一个单子剩余格。注意，(M1)、(M3) 和 (M7) 可直接由定义 3.5 得出。

(M2)：由定义 3.1、(M1) 和 (M7)，可得

$$\Box -\Box -x = \Box(\Box -x \to 0) = \Box -x \to \Box 0 = \Box -x \to 0 = -\Box -x,$$

这意味着

$$\Box\Diamond x = \Diamond x.$$

(M6)：为证明这一点，我们先证明

$$\Box(-x \to \Box y) = -\Box x \to \Box y.$$

事实上，由定义 3.1 (M1) 和 (M7)，我们有

$$\Box -\Box x = -\Box x.$$

这是 wo rth 注意到，再次由定义 3.1 (M7) 及上述等式，我们同样 hav e

$$\begin{aligned}\Box(x \to \Box y) &= \Box(--x \to \Box y)\\ &= \Box(-\Box y \to -x)\\ &= -\Box y \to \Box -x\\ &= \Diamond x \to \Box y,\end{aligned}$$

这意味着

$$\Box(x \to \Box y) = \Diamond x \to \Box y.$$

因此，$(L, \Box, \Diamond)$ 是一个单子剩余格。 □

我们回顾一下 hat ([40]) 一个类型为 (2, 1, 0) 的代数 $(L, \to, -, 1)$ 是一个 *Wajsberg*代数 提供 d:
(W1) $1 \to x = x$, (W2) $(x \to y) \to ((y \to z) \to (x \to z)) = 1$, (W3) $(x \to y) \to y = (y \to x) \to x$, (W4) $(-y \to -x) \to (x \to y) = 1$.

Lattanzi [30, 31] 引入了 Wajsberg 代数上 U-算子的概念。由此得到的代数类称为 UW-代数，并为单子无限值 Łukasiewicz 函数命题演算的一个片段提供了代数对应物。更确切地说，UW-代数是一个对 $(L, \forall)$，其中 L 是一个 Wajsberg 代数，且 $\forall : L \to L$ 是一个满足以下条件的一元算子

$$\text{(U1) } \forall x \to x = 1 \quad \text{and} \quad \text{(U2) } \forall(\forall x \to y) = \forall x \to \forall y.$$

众所周知，MV-代数与有界 Wajsberg 代数的范畴是等价的，因此 UMV-代数的定义可以类似于 UW-代数的定义来陈述。类 $\mathbb{UMV}$ 构成一个簇。

此外，单子对合剩余格实际上是 UMV-代数的自然推广。

注 3.7. 若 $(L, \Box)$ 是一个单子对合剩余格，则以下条件等价:
(1) L 是一个MV-代数，(2)
$(L, \Box)$ 是一个UMV-代数。

证明。 显然 (1) $\Leftrightarrow$ (2)。更确切地说，
(1) $\Rightarrow$ (2) 由如下事实得出：(U1) 与 (U2) 成立，因为 $(L, \Box)$ 满足 (M1) 与 (M7)。(2) $\Rightarrow$ (1) 是显然的。 □

作为注 3.7 的一个结果，得到如下推论，该推论将用于讨论第4节中图1与图2之间的关系。

推论 3.8. (1) 由方程 (DIV) 与 (PRE) 所确定的簇 $\mathbb{MIRL}$ 的子簇与簇 $\mathbb{UMV}$ 项等价。

(2) 由方程 (INV)、(DIV) 和 (PRE) 确定的簇 $\mathbb{MRL}$ 的子簇与簇 $\mathbb{UMV}$ 项等价。

4. 由单子剩余分配格导出的 Kalman结构

4.1. 单子 *c*-微分剩余格

本节中，我们引入单子 c-微分剩余格的概念，并证明满足**CK** 的单子 c-微分剩余分配格类与单子剩余分配格类之间存在一一对应关系。事实上，我们还从一个单子剩余分配格构造出两个定义在 c-微分剩余分配格上的全称量词，这将在证明本节的主要结果时发挥重要作用。

设 $(L, \Box, \Diamond)$ 是一个单子剩余格。则我们定义一个一元算子

$$\Box_K : \mathbf{K}(L) \to \mathbf{K}(L)$$

使得

$$\Box_K(x, y) = (\Box x, \Diamond y),$$

对于所有 $x,y \in \mathbf{K}(L)$，均有。

定理 4.1. 设 $(L, \Box, \Diamond)$ 是一个单子剩余分配格。则对于任意 (x,y)、(x_1, y_1)、$(x_2, y_2) \in \mathbf{K}(L)$，我们有

(1) $\Box_K$ is well defined, i.e., $\Box_K(x, y) \in \mathbf{K}(L)$,
(2) $\Box_K(0, 1) = (0, 1)$,
(3) $\Box_K(c) = c$,
(4) $\Box_K(1, 0) = (1, 0)$,
(5) $\Box_K(x, y) \rightsquigarrow (x, y) = (1, 0)$,
(6) $\Box_K((x_1, y_1) \rightsquigarrow (x_2, y_2)) \leq \Box_K(x_1, y_1) \rightsquigarrow \Box_K(x_2, y_2)$,
(7) $\Box_K(x_1, y_1) \cap (x_2, y_2)) = \Box_K(x_1, y_1) \cap \Box_K(x_2, y_2)$,
(8) $\Box_K(\Box_K(x_1, y_1) \rightsquigarrow (x_1, y_2)) = \Box_K(x_1, y_1) \rightsquigarrow \Box_K(x_2, y_2)$,
(9) $\Box_K(x_1, y_1) \otimes \Box_K(x_2, y_2) \leq \Box_K((x_1, y_1) \otimes (x_2, y_2))$,
(10) $(x_1, y_1) \leq (x_2, y_2)$ implies $\Box_K(x_1, y_1) \leq \Box_K(x_2, y_2)$,
(11) $\Box_K(\Box_K(x_1, y_1) \rightsquigarrow \Box_K(x_2, y_2)) = \Box_K(x_1, y_1) \rightsquigarrow \Box_K(x_2, y_2)$,
(12) $\Box_K(\neg\Box_K(\neg(x, y))) = \neg\Box_K(\neg(x, y))$,
(13) $\Box_K(\Box_K(x, y)) = \Box_K(x, y)$,
(14) $\Box_K((x, y) \cap c) = \Box_K(x, y) \cap c$,
(15) $\Box_K((x, y) \cup c) = \Box_K(x, y) \cup c$,
(16) $\Box_K((x, y) \otimes c) = \Box_K(x, y) \otimes c$.

证明。(1)：若 $(x,y) \in \mathbf{K}(L)$，则 $x \leq -y$。由命题3.4(2)和 3.4(19)，可得

$$\Box x \leq \Box -y = -\Diamond y,$$

因此 $\Box x \odot \Diamond y = 0$，也就是说 $(\Box x, \Diamond y) \in \mathbf{K}(L)$，这说明 $\Box_K$ 是良定义的。

(2)：由定义 3.1(M4)和命题 3.4(9)，可得

$$\Box_K(0, 1) = (\Box 0, \Diamond 1) = (0, 1).$$

(3)：由定义 3.1(M4) 和命题 3.4(10)，我们有

$$\Box_K(c) = \Box_K(0,0) = (\Box 0, \Diamond 0) = (0,0) = c.$$

(4)：由定义 3.1(M5) 和命题 3.4(10)，我们有

$$\Box_K(1,0) = (\Box 1, \Diamond 0) = (1,0).$$

(5)：如果（x，y）$\in \mathbf{K}$（L），那么根据命题 3.4 (1)，我们有

$$\Box x \odot y \leq \Box x \odot \Diamond y = 0,$$

从而

$$\Diamond x \odot y = 0,$$

这意味着

$$\begin{aligned} \Box_K(x,y) \rightsquigarrow (x,y) &= (\Box x, \Diamond y) \rightsquigarrow (x,y) \\ &= ((\Box x \to x) \wedge (y \to \Diamond y), \Box x \odot y) \\ &= (1,0). \end{aligned}$$

(6)：设（x_1, y_1）、（x_2, y_2）$\in \mathbf{K}$（L）。那么根据命题 3.4(17)，我们有

$$\begin{aligned} \Box_K((x_1,y_1) \rightsquigarrow (x_2,y_2)) &= \Box_K((x_1 \to x_2) \wedge (y_2 \to y_1), y_2 \odot x_1) \\ &= (\Box((x_1 \to x_2) \wedge (y_2 \to y_1)), \Diamond(y_2 \odot x_1)) \\ &\leq ((\Box x_1 \to \Box x_2) \wedge (\Diamond y_2 \to \Diamond y_1), \Diamond y_2 \odot \Box x_1). \end{aligned}$$

另一方面，我们有

$$\begin{aligned} \Box_K(x_1,y_1) \rightsquigarrow \Box_K(x_2,y_2) &= (\Box x_1, \Diamond y_1) \rightsquigarrow (\Box x_2, \Diamond y_2) \\ &= ((\Box x_1 \to \Box x_2) \wedge (\Diamond y_2 \to \Diamond y_1), \Diamond y_2 \odot \Box x_1). \end{aligned}$$

(7)：设（x_1, y_1）、（x_2, y_2）$\in \mathbf{K}$（L）。那么根据定义 3.1(M3)和命题 3.4(15)，我们有

$$\begin{aligned} \Box_K((x_1,y_1) \sqcap (x_2,y_2)) &= \Box_K(x_1 \wedge x_2, y_1 \vee y_2) \\ &= (\Box(x_1 \wedge x_2), \Diamond(y_1 \vee y_2)) \\ &= (\Box x_1 \wedge \Box x_2, \Diamond y_1 \vee \Diamond y_2) \\ &= (\Box x_1, \Diamond y_1) \sqcap (\Box x_2, \Diamond y_2) \\ &= \Box_K(x_1,y_1) \sqcap \Box_K(x_2,y_2). \end{aligned}$$

(8)：设 (x_1, y_1)、(z,w) $\in \mathbf{K}(L)$。则由命题 3.4(18)，可得

$$\begin{aligned} \Box_K(\Box_K(x_1,y_1) \rightsquigarrow (x_2,w)) &= \Box_K((\Box x_1, \Diamond y_1) \rightsquigarrow (x_2,w)) \\ &= \Box_K((\Box x_1 \to x_2) \wedge (w \to \Diamond y_1), \Box x_1 \odot w) \\ &= (\Box((\Box x_1 \to x_2) \wedge (w \to \Diamond y_1)), \Diamond(\Box x_1 \odot w)) \\ &= ((\Box x_1 \to \Box x_2) \wedge (\Box w \to \Diamond y_1), \Box x_1 \odot \Diamond w). \end{aligned}$$

另一方面，我们有

$$\begin{aligned} \Box_K(x_1,y_1) \rightsquigarrow \Box_K(x_2,y_2) &= (\Box x_1, \Diamond y_1) \rightsquigarrow (\Box x_2, \Diamond y_2) \\ &= ((\Box x_1 \to \Box x_2) \wedge (\Diamond y_2 \to \Diamond y_1), \Box x_1 \odot \Diamond y_2). \end{aligned}$$

（9）：根据（6）和剩余运算，我们有

$$\Box_K((x_1,y_1)\rightsquigarrow(x_2,y_2))\otimes\Box_K(x_1,y_1)\leq\Box_K(x_2,y_2).$$

在上述方程中取（x_2,y_2）= （x_2,y_2）⊗（x_1,y_1），可得

$$\begin{aligned}\Box_K(x_1,y_1)\otimes\Box_K(x_2,y_2) &= \Box_K(x_2,y_2)\otimes\Box_K(x_1,y_1)\\ &\leq \Box_K((x_1,y_1)\rightsquigarrow((x_2,y_2)\otimes(x_1,y_1)))\otimes\Box_K(x_1,y_1)\\ &\leq \Box_K((x_1,y_1)\otimes(x_2,y_2)),\end{aligned}$$

这意味着

$$\Box_K(x_1,y_1)\otimes\Box_K(x_2,y_2)\leq\Box_K((x_1,y_1)\otimes(x_2,y_2)).$$

(10)：若 (x_1,y_1) ≤ (x_2,y_2)，则由 (4) 和 (6)，可得

$$\Box_K((x_1,y_1)\rightsquigarrow(x_2,y_2))=\Box_K(1,0)=(1,0)\leq\Box_K(x_1,y_1)\rightsquigarrow\Box_K(x_2,y_2),$$

这意味着 $\Box_K(x_1,y_1)\leq\Box_K(x_2,y_2)$。

(11)：设 (x_1,y_1)，$(x_2,y_2)\in\mathbf{K}(L)$。由命题 3.4(18)，可得

$$\begin{aligned}\Box_K(\Box_K(x_1,y_1)\rightsquigarrow\Box_K(x_2,y_2)) &= \Box_K((\Box x_1,\Diamond y_1)\rightsquigarrow(\Box x_2,\Diamond y_2)\\ &= ((\Box x_1\to\Box x_2)\wedge(\Diamond y_2\to\Diamond y_1),\Box x_1\odot\Diamond y_2)\\ &= (\Box(\Box x_1\to\Box x_2)\wedge(\Diamond y_2\to\Diamond y_1)),\Diamond(\Box x_1\odot\Diamond y_2)\\ &= ((\Box x_1\to\Box x_2)\wedge(\Diamond y_2\to\Diamond y_1),\Box x_1\odot\Diamond y_2).\end{aligned}$$

另一方面，可得

$$\begin{aligned}\Box_K(x_1,y_1)\rightsquigarrow\Box_K(x_2,y_2) &= (\Box x_1,\Diamond y_1)\rightsquigarrow(\Box x_2,\Diamond y_2)\\ &= ((\Box x_1\to\Box x_2)\wedge(\Diamond y_2\to\Diamond y_1),\Box x_1\odot\Diamond y_2),\end{aligned}$$

这意味着

$$\Box_K(\Box_K(x_1,y_1)\rightsquigarrow\Box_K(x_2,y_2))=\Box_K(x_1,y_1)\rightsquigarrow\Box_K(x_2,y_2).$$

(12)：令 $(x,y)\in\mathbf{K}(L)$。那么根据定义 3.1(M2)，我们有

$$\begin{aligned}\Box_K(\neg\Box_K(\neg(x,y))) &= \Box_K(\neg\Box_K(y,x))\\ &= \Box_K(\Box_K(y,x)\rightsquigarrow(1,1))\\ &= \Box_K((\Box y,\Diamond x)\rightsquigarrow(1,1))\\ &= \Box_K(((\Box y\to 1)\wedge(1\to\Diamond x),\Diamond x))\\ &= \Box_K((\Diamond x,\Diamond x))\\ &= (\Box\Diamond x,\Diamond x)\\ &= (\Diamond x,\Diamond x).\end{aligned}$$

另一方面，我们有

$$\begin{aligned}\neg\Box_K(\neg(x,y)) &= \neg\Box_K(y,x)\\ &= \Box_K(y,x)\rightsquigarrow(1,1)\\ &= (\Box y,\Diamond x)\rightsquigarrow(1,1)\\ &= ((\Box y\to 1)\wedge(1\to\Diamond x),\Diamond x)\\ &= (\Diamond x,\Diamond x).\end{aligned}$$

(13)：设 $(x,y) \in \mathbf{K}(L$。那么根据命题 3.4(7) 和 (8)，我们有

$$\begin{aligned} \Box_K(\Box_K(x,y)) &= \Box_K(\Box x, \Diamond y) \\ &= (\Box\Box x, \Diamond\Diamond y) \\ &= (\Box x, \Diamond y) \\ &= \Box_K(x,y). \end{aligned}$$

(14)：设 $(x,y) \in \mathbf{K}(L)$。由定义 3.1(M4)，可得

$$\begin{aligned} \Box_K((x,y) \cap c) &= \Box_K((x,y) \cap (0,0)) \\ &= \Box_K(0,y) \\ &= (\Box 0, \Diamond y) \\ &= (0, \Diamond y) \\ &= \Box_K(x,y) \cap c. \end{aligned}$$

(15)：设 $(x,y) \in \mathbf{K}(L)$。由命题 3.4(10)，可得

$$\begin{aligned} \Box_K((x,y) \cup c) &= \Box_K((x,y) \cup (0,0)) \\ &= \Box_K(x,0) \\ &= (\Box x, \Diamond 0) \\ &= (\Box x, 0) \\ &= \Box_K(x,y) \cup c. \end{aligned}$$

(16)：设 $(x,y) \in \mathbf{K}(L)$。由定义 3.1(M4)，可得

$$\begin{aligned} \Box_K((x,y) \otimes c) &= \Box_K((x,y) \otimes (0,0)) \\ &= \Box_K(0,y) \\ &= (0, \Diamond y) \\ &= (\Box 0, \Diamond y) \otimes c \\ &= \Box_K((x,y) \otimes c. \end{aligned}$$

□

注 4.2. 这里应当指出，若L 是剩余分配格，则$\mathbf{K}(L)$是对合剩余格的一个特殊类；根据定理 4.1(5)、(7) 和 (8)，它依定义 3.5 构成一个单子对合剩余格。

受定义 3.5 以及定理 4.1(5)、(7) 和 (8) 的启发，并结合定理 4.1(14)–(16) 所呈现的全称量词与中心元c 之间的相容性，我们引入 c-微分剩余格上的中心全称量词这一概念，由此得到的代数类称为单子 c-微分剩余格。

定义 4.3. 一个单子 c-微分剩余格是一个偶

$$(\mathcal{L}, \cap, \cup, \otimes, \neg, \Box_c, 0, c, 1,)$$

其中 $(\mathcal{L}, \cap, \cup, \otimes, \neg, 0, c, 1)$ 是一个 c-微分剩余格，且此外 $\Box_c$ 满足以下恒等式：

$(\Box_c 1)\ \Box_c \mathrm{c} = \mathrm{c}$, $(\Box_c 2)\ \Box_c \mathrm{x} \rightsquigarrow \mathrm{x} = 1$, $(\Box_c 3)\ \Box_c(\mathrm{x} \cap \mathrm{y}) = \Box_c \mathrm{x} \cap \Box_c \mathrm{y}$, $(\Box_c 4)\ \Box_c(\Box_c \mathrm{x} \rightsquigarrow \mathrm{y}) = \Box_c \mathrm{x} \rightsquigarrow \Box_c \mathrm{y}$, $(\Box_c 5)\ \Box_c(\mathrm{x} \cap \mathrm{c}) = \Box_c \mathrm{x} \cap \mathrm{c}$, $(\Box_c 6)\ \Box_c(\mathrm{x} \cup \mathrm{c}) = \Box_c \mathrm{x} \cup \mathrm{c}$, $(\Box_c 7)\ \Box_c(\mathrm{x} \otimes \mathrm{c}) = \Box_c \mathrm{x} \otimes \mathrm{c}$.

$\Box_c$： $\mathcal{L} \to \mathcal{L}$称为 c-微分剩余格 $\mathcal{L}$ 上的中心全称量词。单子 c-微分剩余格的类 $\mathbb{MDRDL}$ 构成一个簇。

注 4.4. (1) 取 $\mathcal{L} = \mathbf{K}(L)$，其中 L 是剩余分配格，则根据定理 4.1 (5)、(7)、(8)、(14)–(16)，我们得到 $\Box_K$ 是定义在 $\mathbf{K}(L)$ 上的 c-微分剩余格的中心全称量词，并且可以将其视为全称量词和存在量词 $\forall$ 与 $\exists$ 在等价 Kalman 函子 $\mathbf{K}$ 下的像。

(2) 注意到，c-微分剩余格是对合剩余格的特殊类型，因此，定义 3.5 中定义的全称量词概念也可以直接从对合剩余格应用到 c-微分剩余格。这里需要指出，c-微分剩余格上的全称量词与中心全称量词并不相同。例如，设L 是一个剩余分配格，$\mathbf{K}(L)$ 是相应的 Kalman 结构，

$$\Box_\neg : \mathbf{K}(L) \to \mathbf{K}(L)$$

是由下式定义的一元算子

$$\Box_\neg(x, y) = (x, \neg x),$$

对任意 $(x,y) \in \mathbf{K}(L)$。那么，$\Box_\neg$ 是$\mathbf{K}(L)$ 上定义 3.5 中的一个全称量词，但它不是定义 4.3 中的中心全称量词。

更准确地说，若 $(x,y) \in \mathbf{K}(L)$，则$x \odot \neg x = 0$，这意味着 $\Box_\neg$ 是良定义的。

(M1) 若 $(x,y) \in \mathbf{K}(L)$，则$x \odot y = 0$，因此

$$\begin{aligned} \Box_\neg(x, y) \rightsquigarrow (x, y) &= (x, \neg x) \rightsquigarrow (x, y) \\ &= ((x \to x) \wedge (y \to -x), x \odot y) \\ &= (1, 0). \end{aligned}$$

(M3) 设 (x_1, y_1)、$(x_2, y_2) \in \mathbf{K}(L)$。则

$$\begin{aligned} \Box_\neg((x_1, y_1) \cap (x_2, y_2)) &= \Box_\neg(x_1 \wedge x_2, y_1 \vee y_2) \\ &= (x_1 \wedge x_2, -(x_1 \wedge x_2)) \\ &= (x_1 \wedge x_2, \neg x_1 \vee \neg x_2) \\ &= (x_1, \neg x_1) \cap (x_2, \neg x_2) \\ &= \Box_\neg(x_1, y_1) \cap \Box_\neg(x_2, y_2). \end{aligned}$$

(M7) 设（x_1, y_1），（x_2, y_2）$\in \mathbf{K}$（L）。首先注意到

$$x_1 \odot (x_1 \to x_2) \odot y_2 \le x_2 \odot y_2 = 0,$$

w这直接推出 $x_1 \to x_2 \le y_2 \to -x_1$，根据定义 2.1(3)。接下来我们有

$$\begin{aligned}
\Box_\neg(\Box_\neg(x_1, y_1) \rightsquigarrow (x_2, y_2)) &= \Box_\neg((x_1, -x_1) \rightsquigarrow (x_2, y_2)) \\
&= \Box_\neg((x_1 \to x_2) \wedge (y_2 \to -x_1), x_1 \odot y_2) \\
&= \Box_\neg(x_1 \to x_2), x_1 \odot y_2) \\
&= (x_1 \to x_2, -(x_1 \to x_2)) \\
&= (x_1 \to x_2, x_1 \odot -x_2).
\end{aligned}$$

另一方面，我们有

$$\begin{aligned}
\Box_\neg(x_1, y_1) \rightsquigarrow \Box_\neg(x_2, y_2) &= (x_1, -x_1) \rightsquigarrow (x_2, -x_2) \\
&= ((x_1 \to x_2) \wedge (-x_2 \to -x_1), x_1 \odot -x_2) \\
&= (x_1 \to x_2, x_1 \odot -x_2).
\end{aligned}$$

根据定义 3.5，我们有 $\Box_\neg$ 是 c-微分剩余格$\mathbf{K}(L)$上的全称量词。然而， $\Box_\neg$ 不是定义 4.3 中关于中心全称量词的中心全称量词，因为 Definition4.3($\Box_c$1) 通常并不成立，

$$\Box_\neg(c) = (0, 0) = \Box_\neg(0, \neg 0) = (0, 1) \neq (0, 0) = c.$$

命题 4.5。 在任意幺元 c-微分剩余格 $(\mathcal{L}, \cap, \cup, \otimes, \neg, \Box_c, 0, c, 1)$ 中， 以下性质成立:

($\Box_c$8) $\Box_c(1) = 1$, ($\Box_c$9) $\Box_c(0) = 0$, ($\Box_c$10) $\Box_c\Box_c x = \Box_c x$, ($\Box_c$11) $x \le y$ 蕴含 $\Box_c x \le \Box_c y$, ($\Box_c$12) $\Box_c x \otimes \Box_c y \le \Box_c(x \otimes y)$, ($\Box_c$13) $\Box_c\neg\Box_c x = \neg\Box_c x$, ($\Box_c$14) $\Box_c(\Box_c x \rightsquigarrow \Box_c y) = \Box_c x \rightsquigarrow \Box_c y$。

证明。 ($\Box_c$8)-($\Box_c$14) 的证明可直接由定义 3.1 和命题 3.4 推得。 □

定理 4.6。 设 L 是一个剩余分配格。则

$$\varphi : (L, \Box, \Diamond) \longmapsto (\mathbf{K}(L), \Box_K)$$

定义了从 L 的单子扩张类到 **K(L)** 的单子 c-微分剩余分配格扩张类的一个映射，该映射满足以下两个性质:

(1) 若 $(L, \Box_1, \Diamond_1)$ 和 $(L, \Box_2, \Diamond_2)$ 是 L 的两个单子扩张，则

$$\mathbf{K}(L, \Box_1, \Diamond_1) \cong \mathbf{K}(L, \Box_2, \Diamond_2)$$

作为 **K(L)** 的单子 c-微分剩余分配格扩张，这表明，任何 L 的幺元扩张在 **K** 下的像本质上是唯一的。

(2) 如果 $(\mathbf{K}(L), \Box_K)$ 是单子 c-微分剩余分配格，那么 L 上存在二元运算符 $\Box, \Diamond$，使得 $(L, \Box, \Diamond)$ 是单子剩余分配格，并且

$$\varphi(L, \Box, \Diamond) \cong (\mathbf{K}(L), \Box_K).$$

因此，φ 在 L 的单子扩张类与 **K(L)** 的单子 c-微分剩余分配格扩张类之间建立了一一对应（在同构意义下）。

证明。 (1) 若 $(L, \Box, \Diamond)$ 是一个单子剩余分配格，则由定理 4.1(5)、(7)、(8) 和 (14)-(16)，可得 $(\mathbf{K}(L), \Box_K)$ 满足条件 $(\Box_c 1)$-$(\Box_c 7)$，这表明 $(\mathbf{K}(L), \Box_K)$ 是一个单子 c-微分剩余分配格。设 $(L, \Box_1, \Diamond_1)$ 和 $(L, \Box_2, \Diamond_2)$ 是两个单子剩余分配格，使得

$$\Box_{K_1}(x, y) = (\Box_1 x, \Diamond_1 y) = (\Box_2 x, \Diamond_2 y) = \Box_{K_2}(x, y)$$

对任意 $(x,y) \in \mathbf{K}(L)$。特别地，由于 $(x, -x) \in \mathbf{K}(L)$，我们有

$$(\Box_1 x, \Diamond_1(-x)) = (\Box_2 x, \Diamond_2(-x)),$$

根据命题 3.4(25)，存在量词由全称量词唯一确定。因此，由于 $\Box_1 = \Box_2$，我们得出 $\Diamond_1 = \Diamond_2$。

(2) 如果 $(\mathbf{K}(L), \Box_K)$ 是单子 c-差剩余分配格（根据定理 4.1，事实确实如此），那么我们定义函数 $\Box: L \to L$ 为

$$\Box x = \pi_1 \Box_K(x, 0),$$

并证明 $(L, \Box, \Diamond)$ 是一个单子剩余分配格，其中 $\Diamond x := \neg\Box\neg x$。这里我们首先证明 $(L, \Box)$ 是一个单子对合剩余分配格。根据命题 4.5，我们有

$$(\blacktriangle) \quad \Box_K(x, 0) = \Box_K((x, 0) \cup c) = (\Box x, 0).$$

(M1)：根据定义 4.3 和 (▲)，我们有

$$(1, 0) = \Box_K(x, 0) \rightsquigarrow (x, 0) = (\Box x, 0) \rightsquigarrow (x, 0) = (\Box x \to x, 0),$$

这意味着

$$\Box x \to x = 1.$$

(M3)：根据 (▲) 和命题 4.5(9)，我们有

$$\begin{aligned} (\Box(x \wedge y), 0) &= \Box_K(x \cap y, 0) \\ &= \Box_K(x, 0) \cap \Box_K(y, 0) \\ &= (\Box x, 0) \cap (\Box y, 0) \\ &= (\Box x \wedge \Box y, 0), \end{aligned}$$

这意味着

$$\Box(x \wedge y) = \Box x \wedge \Box y.$$

（M7）：由（▲），我们得到

$$\Box(x \rightsquigarrow y, 0) = (\Box x, 0) \rightsquigarrow (y, 0) = \Box_K(x, 0) \rightsquigarrow (y, 0),$$

因此

$$\begin{aligned}(\Box(\Box x \to y), 0) &= \Box_K(\Box_K(x, 0) \rightsquigarrow (y, 0)) \\ &= \Box_K(x, 0) \rightsquigarrow \Box_K(y, 0) \\ &= (\Box x, 0) \to (\Box y, 0) \\ &= (\Box x \to \Box y, 0),\end{aligned}$$

这证明了

$$\Box(\Box x \to y) = \Box x \to \Box y.$$

因此，根据定义 3.5 和定理3.6，$(L, \Box, \Diamond)$ 是一个单子剩余分配格。此外，我们证明了 $\Box_K = \Box_c$。由命题 4.5 可得

$$\Box_K(x, 0) = (\Box x, 0) = \Box_c(x, 0),$$

and

$$\begin{aligned}\Box_c(0, y) &= \Box_c((-y, 0) \otimes c) \\ &= \Box_c(-y, 0) \otimes c \\ &= (\Box -y, 0) \otimes c \\ &= (0, \Diamond y) \\ &= \Box_K(0, y).\end{aligned}$$

我们还证明了

$$\begin{aligned}\Box_c(x, y) \cup c = \Box_c(x, 0) = (\Box x, 0) = \Box_K(x, y) \cup c, \\ \Box_c(x, y) \cap c = \Box_c(x, 0) = (0, \Diamond y) = \Box_K(x, y) \sqcap c.\end{aligned}$$

因此，由分配律可得该结果。 □

4.2. 将范畴 $\mathbb{RDL}$ 与 $\mathbb{DRDL}'$ 之间的范畴等价推广

在本小节中，我们将推广范畴等价 $\mathbf{C} \dashv \mathbf{K}$。具体而言，我们在范畴 $\mathbb{MRDL}$（其对象为单子剩余分配格）与范畴 $\mathbb{MDRDL}$（其对象为弱单子 c-微分剩余分配格）之间定义两个扩展函子，仍将它们记为**C** 和**K**。在这两个范畴中，态射均为相应的代数同态。

很容易验证该映射

$$\mathbf{K}_f : (\mathbf{K}(L_1), \Box_{K_1}, \Diamond_{K_1}) \to (\mathbf{K}(L_2), \Box_{K_2}, \Diamond_{K_2})$$

由.....给出

$$\mathbf{K}_f(x, y) = (f(x), f(y))$$

确实是从 $(\mathbf{K}(L_1), \Box_{K_1}, \Diamond_{K_1})$ 到 $(\mathbf{K}(L_2), \Box_{K_2}, \Diamond_{K_2})$ 的 $\mathbb{MRDL}$ 中的一个态射。这些赋值确立了一个从 $\mathbb{MRDL}$ 到 $\mathbb{MDRDL}$ 的函子 $\mathbf{K}$。

此外，若$g: \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_2$ 是c-微分剩余分配格的同态，则不难看出

$$\mathbf{C}_g : C(\mathcal{L}_1) \to C(\mathcal{L}_2)$$

定义为

$$\mathbf{C}_g(x) = g(x)$$

是剩余分配格的同态。

上述构造可以提升到相应的一元代数结构。

P命题 4.7. 设 $(\mathcal{L}, \Box_c) \in \mathbb{MDRDL}$。则 $(C(\mathcal{L}), \Box_c, \Diamond_c) \in \mathbb{MRDL}$，其中

$$\Diamond_c x = \neg\Box_c(\neg x) \text{ for any } x \in \mathcal{L}.$$

此外，若$g: \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_2$ 是 $\mathbb{MDRDL}$中的态射，则$\mathbf{C}_g: C(\mathcal{L}_1) \to C(\mathcal{L}_2)$是$\mathbb{MRDL}$中的态射。

证明。 首先，我们将证明 $(C(\mathcal{L}), \Box_c, \Diamond_c) \in \mathbb{MRDL}$。公理 (M1)、(M3) 和 (M7) 可分别直接由 $\Box_c$2-$\Box_c$4 得出。(M2) 和 (T6) 的证明分别类似于定理3.6推导中的 (M2) 和 (T6) 的证明。此外，由 $\mathbf{C}_g$ 是剩余分配格的同态这一事实，可得出此外部分。 □

命题4.8。 设 $(L, \Box, \Diamond)$ 是一个单子剩余分配格。那么映射

$$\phi : (L, \Box, \Diamond) \to (C(\mathbf{K}(L)), \Box_K, \Diamond_K)$$

定义为

$$\phi(x) = (x, 0)$$

是 $\mathbb{MRDL}$ 中的同构。

证明。 众所周知（见 [13]， ϕ 是分配剩余格的双射同态。为证明我们的结论，还需证明它同时保持 $\Box$ 和 $\Diamond$。事实上，设 $x \in L$。由 (M4) 和 (M5) 可得

$$\begin{aligned}\phi(\Box x) &= (\Box x, 0) = (\Box x, \Diamond 0) = \Box_K((x, 0)) = \Box_K(\phi(x)),\\ \phi(\Diamond x) &= (\Diamond x, 0) = (\Diamond x, \Box 0) = \Diamond_K((x, 0)) = \Diamond_K(\phi(x)),\end{aligned}$$

这证明了 ϕ 保持全称量词和存在量词。 □

如果 $\mathcal{L}$ 是 c-微分剩余分配格，那么

$$\psi : \mathcal{L} \to \mathbf{K}(C(\mathcal{L}))$$

由.....给出

$$\psi(x) = (x \cup c, \neg x \cup c)$$

是 c-微分剩余分配格的单射同态（见 [13]）。为了得到本小节的主要结果，我们需要以下重要结论。

命题 4.9. 设 $(\mathcal{L}, \Box_c)$ 是一个单子 c-微分剩余分配格。那么，单射映射 ψ保持 $\Box_c$。

证明. 首先，注意到 $\Diamond_c c = c$。设 $x \in \mathcal{L}$。根据定义 4.3、$\Diamond_c$ 的定义以及命题 3.4(15)，我们有：

$$\begin{aligned}
\psi(\Box_c x) &= (\Box_c x \cup c, \neg(\Box_c x) \cup c) \\
&= (\Box_c(x \cup c), \Diamond_c \neg x \cup c) \\
&= (\Box_c(x \cup c), \Diamond_c(\neg x \cup c)) \\
&= \Box_K(x \cup c, \neg x \cup c) \\
&= \Box_K(\psi(x)).
\end{aligned}$$

因此，

$$\psi(\Box_c x) = \Box_K(\psi(x)).$$

这表明映射 ψ 保持中心全称量词。 □

命题 4.10. [13] 一个 c-微分剩余分配格 $\mathcal{L}$ 满足条件**CK** 当且仅当 ψ 是满射。

这里，我们用 $\mathbb{MDRDL}'$ 表示由满足条件**CK**的对象构成的 $\mathbb{MDRDL}$ 的满子范畴。现在，作为前述结果的推论，我们可以陈述本文的主要结果。

定理 4.11. 函子 **K** 和 **C** 通过自然同构 ϕ和 ψ，在 $\mathbb{MRDL}$ 与 $\mathbb{MDRDL}'$之间建立了范畴等价。

证明. 由命题 4.8、4.9 和 4.10 可得。 □

推论 4.12. 函子 $\mathbb{MRDL} \vdash \mathbb{RDL}$ 后接 **K**： $\mathbb{RDL} \vdash \mathbb{DRDL}'$，可经由遗忘函子**F**：$\mathbb{MDRDL}' \vdash \mathbb{DRDL}'$分解。

证明. 证明显然。 □

由定理 4.11 和推论 4.12 可得如下交换图：

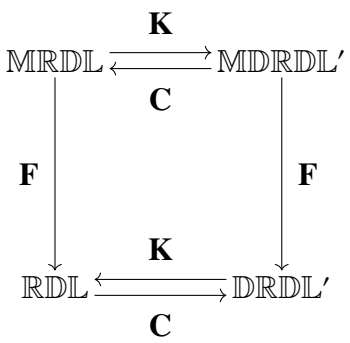


图 4。　函子 **K** 和 **C**关联范畴 $\mathbb{MRDL}$ 和 $\mathbb{MDRDL}'$ 的图表。

它具有引言第五段中讨论的性质。

Castiglioni、Lewin 和 Sagastume 在 [14] 中证明，范畴 $\mathbb{MV}^\bullet$（其对象为 MV•-代数）是范畴 $\mathbb{MV}$（其对象为 MV-代数）在等价 $\mathbf{K}^\bullet$下的像。沿着这一思路，Sagatume 和 San Martín 将范畴 $\mathbb{MV}_{\mathrm{U}}$（其对象为 UMV-代数）与 $\mathbb{MV}^\bullet{}_{\mathrm{cU}}$（其对象为由 $\mathbf{K}^\bullet$ 中的一个对象和一个 cU-算子构成的对）之间的$\mathbf{K}^\bullet$ 提升了。

作为推论 3.8(2)的直接结果，我们得到以下结论。

推论 4.13。 由方程 (INV)、(DIV) 和 (PRE) 确定的 $\mathbb{MRDL}$ 单子对合剩余格子范畴与 $\mathbb{MV}_{\mathrm{U}}$ UMV-代数范畴项等价。

作为图 1、图 4 和推论 4.13 的推论，在下图中我们给出了上述范畴之间的关系，其中 *inc* 表示包含函子:

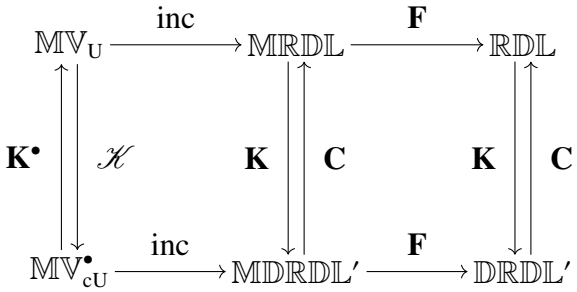


图5. 范畴 $\mathbb{MV}_{\mathrm{U}}$、 $\mathbb{MV}^\bullet{}_{\mathrm{cU}}$、 $\mathbb{MDRDL}'$ 和 $\mathbb{MRDL}$之间关系的图表。

5. 上下文翻译

设 $\mathcal{V}$ 和 $\mathcal{W}$ 为簇，并用相同的符号表示相应的代数与同态范畴。在 [34], 中，Moraschini 证明了 $\mathcal{V}$ 与 $\mathcal{W}$之间的非平凡伴随——即一对函子 $F\colon\ \mathcal{V}\to\mathcal{W}$ 和$G\colon\ \mathcal{W}\to\mathcal{V}$，使得$F$ 是G 的左伴随（记作$F\ \dashv G$）——与从 $\mathcal{V}$ 所对应的等式后承关系到 $\mathcal{W}$所对应的等式后承关系的非平凡 κ-上下文翻译之间存在对应关系，二者分别记作 $\models_{\mathcal{V}}$ 和 $\models_{\mathcal{W}}$。这里， κ 是任意基数，不一定有限。 κ-上下文翻译的著名例子包括：由分配格的 Kalman 构造所诱导的经典伴随产生的 Kolmogorov 翻译 [16], ；由连接时态积分交换剩余分配格与时态 c-微分剩余格的 Kalman 构造所确定的 2-上下文翻译 [9],；由连接布尔代数与 Heyting 代数的 Glivenko 函子所确定的 Glivenko 翻译 [29], ； 以及关联 Heyting 代数与内算子代数的等式后承关系的 Gödel 翻译 [25]。

本节的目的是说明，定理 4.11 可用于在满足 **CK** 的单子 c-微分剩余分配格与单子剩余分配格的等式后承关系之间，建立一种有限且非平凡的 2-上下文翻译。

我们首先固定一些记号。设 X 为一组变量。对于命题语言 L，我们用 $\mathrm{Fm}_L(X)$ 表示 X 上 L-项的绝对自由代数，并用 $\mathrm{Fm}_L(X)$ 表示其底集。特别地，对于基数 λ，$\mathrm{Fm}_L(\lambda)$ 表示变量 $\{x_i:\ i<\lambda\}$ 中的 L-项的集合。我们定义

$$\mathrm{Eq}(L,X):=\mathrm{Fm}_L(X)\times\mathrm{Fm}_L(X).$$

若 $\mathcal{V}$ 是一个簇，则 $\mathrm{F}_{\mathcal{V}}(\mathrm{X})$ 表示 X 上的自由 $\mathcal{V}$-代数。此外，若 L 是 $\mathcal{V}$ 的语言，且 $\mathrm{t}(\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_n)$ 是一个 L-项，我们用同一记号表示它在从 $\mathrm{Fm}_L(\mathrm{X})$ 到 $\mathrm{F}_{\mathcal{V}}(\mathrm{X})$ 的典范同态下的像。当 $\mathrm{X} = \{\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_k\}$ 时，我们写 $\mathrm{F}_{\mathcal{V}}(\mathrm{k})$ 而不写 $\mathrm{F}_{\mathcal{V}}(\mathrm{X})$。我们还用 $\mathcal{V}$ 表示由该簇所确定的范畴。给定 $\mathrm{A} \in \mathcal{V}$ 以及 $\mathrm{S} \subseteq \mathrm{A} \times \mathrm{A}$，$\mathrm{Cg}_A(\mathrm{S})$ 表示由 S 生成的同余。对于元组 $\vec{\mathrm{a}}, \vec{\mathrm{b}} \in \mathrm{A}^N$，我们用 $\mathrm{Cg}_A(\vec{\mathrm{a}}, \vec{\mathrm{b}})$ 表示由对 $(\mathrm{a}_1, \mathrm{b}_1), \ldots, (\mathrm{a}_N, \mathrm{b}_N)$ 生成的同余。

2语境翻译

设 $\mathcal{K}$ 是一类相似代数，$L_{\mathcal{K}}$ 是其语言。语言 $L^2_{\mathcal{K}}$ 由所有由变量构成的 $L_{\mathcal{K}}$-项对组成

$$X_n = \{x^1_j : 1 \leq j \leq n\} \cup \{x^2_j : 1 \leq j \leq n\},$$

对每个 $n \in \mathbb{N}$。也就是说，$L^2_{\mathcal{K}}$ 中的一个 n 元运算符号具有如下形式

$$f((x^1_1, x^2_1), \ldots, (x^1_n, x^2_n)) = (t_1(x^1_1, x^2_1, \ldots, x^1_n, x^2_n), t_2(x^1_1, x^2_1, \ldots, x^1_n, x^2_n)),$$

其中 $t_1, t_2 \in \mathrm{Fm}_{L_{\mathcal{K}}}(X_n)$。例如，若 $L_{\mathcal{K}} = \{\to, \vee\}$，由 $\oplus$ 定义的运算

$$\oplus((x^1_1, x^2_1), (x^1_2, x^2_2)) := ((x^2_2 \to (x^1_1 \to x^1_2)) \vee x^2_1,\ x^2_1 \vee x^1_2 \vee x^2_2)$$

是 $L^2_{\mathcal{K}}$ 的一个二元运算。

对于任意 $A \in \mathcal{K}$，令 $A[2]$ 为类型为 $L^2_{\mathcal{K}}$、论域为 A^2，的代数，其中每个运算都按照定义项逐分量解释。类

$$\mathcal{K}[2] := \mathbb{I}\{A[2] : A \in \mathcal{K}\}$$

称为 $\mathcal{K}$ 的 2-矩阵幂。已知，当且仅当 $\mathcal{K}$ 是一个簇时，$\mathcal{K}[2]$ 是一个簇（参见 [32] 的定理 2.3(iii)）。此外，任意同态 $h: A \to B$ 都会诱导一个同态 $h \times h: A^2 \to B^2$,，我们将其记为 $h[2]$。这给出了一个函子 $[2]: \mathcal{K} \to \mathcal{K}[2]$。

设 $L_{\mathcal{V}}$ 和 $L_{\mathcal{W}}$ 分别是簇 $\mathcal{V}$ 和 $\mathcal{W}$ 的语言。从 $L_{\mathcal{V}}$ 到$L_{\mathcal{W}}$ 的 2-翻译是一个映射 $\tau: L_{\mathcal{V}} \to L^2_{\mathcal{W}}$，并保持元数不变。这样的翻译唯一地扩展到项，从而得到一个映射

$$\tau^*: \mathrm{Fm}_{L_{\mathcal{V}}}(\lambda) \longrightarrow \mathrm{Fm}_{L_{\mathcal{W}}}(X_\lambda)^2,$$

通过变量、常项和复合项递归定义。该扩展进一步在等式集上诱导出一个变换。

$\models_{\mathcal{V}}$ 到 $\models_{\mathcal{W}}$ 的 2-上下文翻译是一个二元组（τ，Θ），其中 τ 是一个 2-翻译，而 $\Theta \subseteq \mathrm{Eq}(L_{\mathcal{W}}, 2)$ 是一个等式集，它相对于运算和蕴涵满足适当的保持条件。集合 Θ 称为该翻译的语境。如果存在一个非空的常项对，见证该语境不会将所有变量坍缩为相等，则称该翻译为非平凡的（详情请参见 [34] ）。

现在，我们对函子 **C** 作用于有限生成自由 $\mathbb{MDRDL}'$-代数所得的代数给出一个显式描述。具体而言，我们证明，对于每个 $n \geq 1$，代数 $\mathbf{C}(\mathbf{F}_{\mathbb{MDRDL}'}(n))$ 同构于由 $2n$ 个生成元生成的自由 $\mathbb{MRDL}$-代数的一个商代数，其中定义同余规定：对每个生成元，对应的一对变量的乘积等于 0。这一表示将在构造相关的上下文 2-平移时发挥重要作用。

定理 5.1. 代数 $\mathbf{C}(\mathbf{F}_{\mathbb{MDRDL}'}(1))$ 同构于

$$\mathbf{F}_{\mathbb{MRDL}}(x_1^1, x_1^2)/\mathrm{Cg}_{\mathbf{F}_{\mathbb{MRDL}}(2)}(x_1^1 \odot x_1^2, 0).$$

此外，如果$X_n = \{x_1^1, x_1^2, \ldots, x_n^1, x_n^2\}$，那么$\mathbf{C}(\mathbf{F}_{\mathbb{MDRDL}'}(n))$同构于$\mathbf{F}_{\mathbb{MRDL}}(X_n)/\theta_n$，其中 e

$$\theta_n = \bigvee_{i=1}^{n} \mathrm{Cg}_{\mathbf{F}_{\mathbb{MRDL}}(X_n)}(x_i^1 \odot x_i^2, 0),$$

对每个$n \geq 1$。

证明。 注意，第一部分是对 [9] 中定理 7 的改编。对于此外 部分，注意到$n = 2$的情形是对 [9] 中推论 5 的改编。我们对n作归纳。假设归纳假设成立，即

$$\mathbf{C}(\mathbf{F}_{\mathbb{MDRDL}'}(k)) \cong \mathbf{F}_{\mathbb{MRDL}}(X_k)/\theta_k.$$

我们证明该命题对$n = k + 1$成立。事实上，由于两个函子$\mathbf{C}$ 和$\mathbf{F}_{\mathbb{MDRDL}'}$ 都保持余积，且$\mathbf{C}(\mathbf{F}_{\mathbb{MDRDL}'}(1))$同构于

$$\mathbf{F}_{\mathbb{MRDL}}(x_{k+1}^1, x_{k+1}^2)/\mathsf{Cg}^{\mathbf{F}_{\mathbb{MRDL}}(2)}(x_{k+1}^1 \odot x_{k+1}^2, 0),$$

由代数余积的众所周知的描述可知

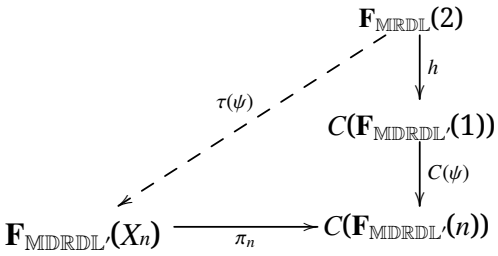
$$\begin{aligned}
\mathbf{C}(\mathbf{F}_{\mathbb{MDRDL}'}(k+1)) &\cong \mathbf{C}(\mathbf{F}_{\mathbb{MDRDL}'}(k)) + \mathbf{C}(\mathbf{F}_{\mathbb{MDRDL}'}(1)) \\
&\cong \mathbf{F}_{\mathbb{MRDL}}(X_k)/\theta_k + \mathbf{F}_{\mathbb{MRDL}}(x_{k+1}^1, x_{k+1}^2)/\mathsf{Cg}^{\mathbf{F}_{\mathbb{MRDL}}(2)}(x_{k+1}^1 \odot x_{k+1}^2, 0) \\
&\cong \mathbf{F}_{\mathbb{MRDL}}(X_{k+1})/\mathrm{Cg}_{\mathbf{F}_{\mathbb{MRDL}}(X_{k+1})}(Z \cup \{(x_{k+1}^1 \odot x_{k+1}^2, 0)\}) \\
&\cong \mathbf{F}_{\mathbb{MRDL}}(X_{k+1})/\theta_{k+1},
\end{aligned}$$

其中 $Z = \{(x_i^1 \cdot x_i^2, 0) \mid 1 \leq i \leq k\}$。因此，该命题对每个$n \geq 1$都成立，正如所述。 □

现在我们描述与伴随$\mathbf{C} \dashv \mathbf{K}$相关的上下文 2-平移的构造。考虑如下同态$h$: $\mathbf{F}_{\mathbb{MRDL}}(2) \to \mathbf{C}(\mathbf{F}_{\mathbb{MDRDL}'}(1))$:

$$t(x_1^1, x_1^2) \longmapsto t^{\mathbf{C}(\mathbf{F}_{\mathbb{MDRDL}'}(1))}(z \cup c, \sim z \cup c),$$

并设 ψ 是单子c-微分剩余分配格语言中的一个n元函数符号，且满足$\mathbf{CK}$。众所周知， ψ可被识别为唯一的 $\mathbb{MDRDL}'$-同态ψ: $\mathbf{F}_{\mathbb{MDRDL}'}(1) \to \mathbf{F}_{\mathbb{MDRDL}'}(n)$。令$X_n = \{x_1^1, x_1^2, \ldots\ldots, x_n^1, x_n^2\}$。根据 [34], 的定理 4.3，相关的 2-翻译 τ由一个使下图交换的同态 $\tau(\psi)$ 确定:



其中， π_n 表示由定理 5.1 诱导的典范同态。我们强调， $\tau(\psi)$的存在性源于 $\mathrm{F}_{\mathbb{MRDL}}(2)$ 在簇 $\mathbb{MRDL}$ 中是满射投射的这一事实。此外，映射 $\tau\colon \mathrm{L}_{\mathbb{MDRDL}'} \to \mathrm{L}^2_{\mathbb{MRDL}}$ 完全由其在生成元上的作用确定。也就是说，$\tau(\psi) = (\tau(\psi)(\mathrm{x}_1^1), \tau(\psi)(\mathrm{x}_1^2))$。因此，要定义 $\tau(\psi)$，只需在 $\mathrm{F}_{\mathbb{MDRDL}'}(\mathrm{X}_n)$ 中找到项 $\mathrm{t}(\mathrm{x}_1^1, \mathrm{x}_1^2, \ldots\ldots, \mathrm{x}_n^1, \mathrm{x}_n^2)$ 和 $\mathrm{s}(\mathrm{x}_1^1, \mathrm{x}_1^2, \ldots\ldots, \mathrm{x}_n^1, \mathrm{x}_n^2)$，使得

$$C(\psi)(h(x)) = h(t(x_1^1, x_1^2, \ldots, x_n^1, x_n^2)) \quad \text{and} \quad C(\psi)(h(y)) = h(s(x_1^1, x_1^2, \ldots, x_n^1, x_n^2)). \tag{1}$$

2-翻译 τ 的一个重要特点是，相关项 t 和 s 可以通过函子 **K**显式构造，如下述结果所示。

引理 5.2. 伴随 $\mathbf{C} \dashv \mathbf{K}$ 导出如下定义的 2-翻译 $\tau\colon L_{\mathbb{MDRDL}'} \to L^2_{\mathbb{MRDL}}$：

$$\begin{array}{rcl}
\tau(\cap)((x_1^1, x_1^2), (x_2^1, x_2^2)) & := & (x_1^1 \wedge x_2^1, x_1^2 \vee x_2^2) \\
\tau(\cup)((x_1^1, x_1^2), (x_2^1, x_2^2)) & := & (x_1^1 \vee x_2^1, x_1^2 \wedge x_2^2) \\
\tau(\otimes)((x_1^1, x_1^2), (x_2^1, x_2^2)) & := & (x_1^1 \odot x_2^1, (x_1^1 \to x_2^2) \wedge (x_2^1 \to x_1^2)) \\
\tau(\rightsquigarrow)((x_1^1, x_1^2), (x_2^1, x_2^2)) & := & ((x_1^1 \to x_2^1) \wedge (x_2^2 \to x_1^2), x_1^1 \cdot x_2^2) \\
\tau(\Box_c)(x_1^1, x_1^2) & := & (\Box x_1^1, \Diamond x_1^2) \\
\tau(\sim)(x_1^1, x_1^2) & := & (x_1^2, x_1^1) \\
\tau(c) & := & (0, 0) \\
\tau(0) & := & (0, 1) \\
\tau(1) & := & (1, 0).
\end{array}$$

证明。首先回顾一下，映射 $\mathrm{C}(\Box_c) : \mathrm{C}(\mathrm{F}_{\mathbb{MDRDL}'}(1)) \to \mathrm{C}(\mathrm{F}_{\mathbb{MDRDL}'}(1))$ 将项 $\mathrm{u}(\mathrm{z})$ 映射为 $\mathrm{u}(\Box_c(\mathrm{z}))$。此外，根据定理 5.1，同态 $\mathrm{h} : \mathrm{F}_{\mathbb{MRDL}}(2) \to \mathrm{C}(\mathrm{F}_{\mathbb{MDRDL}'}(1))$ 将项 $\mathrm{t}(\mathrm{x}_1^1, \mathrm{x}_1^2)$ 映射为 $\mathrm{t}^{\mathbf{C}(\mathbf{F}_{\mathbb{MDRDL}'}(1))}(\mathrm{z} \cup \mathrm{c}, \sim \mathrm{z} \cup \mathrm{c})$。现在考虑项 $\mathrm{t}(\mathrm{x}_1^1, \mathrm{x}_1^2) = \Box \mathrm{x}_1^1$ 和 $\mathrm{s}(\mathrm{x}_1^1, \mathrm{x}_1^2) = \Diamond \mathrm{x}_1^2$。可以直接验证，$\mathrm{h}(\Box_c(\mathrm{x}_1^1)) = \mathrm{C}(\Box_c)(\mathrm{h}(\mathrm{x}_1^1))$。另一方面，根据命题 4.7，我们得到

$$\begin{array}{rcl}
h(\Diamond x_1^2) & = & \Diamond(\sim z \cup c) \\
& = & \sim \Box(z \cap c) \\
& = & \sim (\Box(z) \cap c) \\
& = & \sim \Box(z) \cup c \\
& = & \mathbf{C}(\Box)(\sim z \cup c) \\
& = & \mathbf{C}(\Box)(h(x_1^2)).
\end{array}$$

因此，我们可以定义 $\tau(\Box_c)(x_1^1, x_1^2) = (\Box x_{1\,1}, \Diamond x_1^2)$，如所需。关于$\tau(\cap)$、 $\tau(\cup)$、 $\tau(\otimes)$和 $\tau(\rightsquigarrow)$的各条款的证明，与 [9]中的引理 14 所给出的证明类似。 □

根据定理 5.1，生成集 $\{(x \odot y, 0)\}$ 可视为等式集 $\Theta = \{x \odot y \approx 0\}$。由 [34] 中的定理 4.3可知，$(\tau, \Theta)$给出了一个从$\models_{\mathbb{MDRDL}'}$ 到 $\models_{\mathbb{MRDL}}$的 2-上下文翻译。由于函子**C**是忠实的（定理 4.11）， [35] 中的引理 6.4适用，从而得到以下定理。

定理 5.3. 对于每个基数 λ 以及 $\Phi \cup \{\varepsilon \approx \delta\} \subseteq \mathrm{Eq}(\mathcal{L}_{\mathbb{MDRDL}'}, \lambda)$，

$$\Phi \models_{\mathbb{MDRDL}'} \varepsilon \approx \delta \iff \tau_*(\Phi) \cup \{(x_j^1 \odot x_j^2, x_j^1 \odot x_j^2) \approx (0, 0) \colon j < \lambda\} \models_{\mathbb{MRDL}} \tau_*(\varepsilon \approx \delta).$$

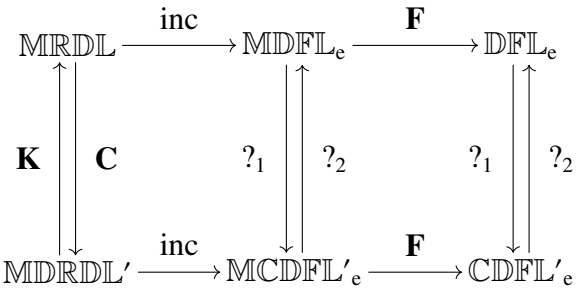
这里，(τ, Θ) 表示由 **C** 诱导的从 $\models_{\mathbb{MDRDL}'}$ 到 $\models_{\mathbb{MRDL}}$ 的上下文翻译。

通俗地说，该定理表明，通过复制变量，可以在 $\mathbb{MRDL}$ 中忠实地进行 $\mathbb{MDRDL}'$ 中的等式推理。也就是说，在 $\mathbb{MDRDL}'$中能够推导出的所有内容，恰好就是通过 τ在 $\mathbb{MRDL}$ 中能够推导出的内容，模去方程$x_j^1 \odot x_j^2 \approx 0$。

6. 结论与进一步工作

本文旨在将范畴 $\mathbb{RDL}$ 与 $\mathbb{DRDL}'$ 之间的关系推广到范畴 $\mathbb{MRDL}$ 与 $\mathbb{MDRDL}'$之间。为实现这一目标，我们首先回顾了其中一些与单子剩余格相关的代数结果，并引入了单子对合剩余格的概念。第4.1小节的结果建立了一个双射，将单子剩余分配格映射为满足**CK**的单子 c-微分剩余分配格。第4.2小节中，这一映射扩展为一个函子，构成范畴等价。第4.2小节表明，范畴 $\mathbb{MRDL}$ 与 $\mathbb{MDRDL}'$之间存在范畴等价。

本文致力于传递范畴 $\mathbb{MRDL}$与 $\mathbb{MDRDL}'$之间的平衡。此外还有一个公开问题，即建立范畴 $\mathbb{MDFL}_e$ 与 $\mathbb{MCDFL}'_e$ 之间的相应关系，其对象是带有特殊条件的一元分配 $\mathbf{FL}_e$- 代数与一元分配 c-微分 $\mathbf{FL}_e$-代数。获得这一更广泛且更普遍结果的关键，在于重建范畴 $\mathbb{DFL}_e$ 与 $\mathbb{CDFL}'_e$之间的范畴等价，因为 Kalman 函子 **K** 一般而言不再适用于这两个范畴，而这正是我们下一步讨论的主题之一。一旦做到这一点，我们便建立了这些范畴之间的关系，如下图表所示，其中 *inc* 表示包含函子，且 $?_2$ 是 $?_1$ 的左伴随:



作为伴随**C** ⊣ **K** 的一个应用，我们得到了从 $\mathbb{MDRDL}'$ 的等式后承关系到 $\mathbb{MRDL}$的等式后承关系的一个有限的、非平凡的2-上下文翻译。关键步骤是将代数 $\mathbf{C}(\mathbf{F}_{\mathbb{MDRDL}'}(n))$明确描述为以重复生成元生成的自由 $\mathbb{MRDL}$-代数的商，其中附加同余强制约束 $x_i^1 \odot x_i^2 = 0$。这一表示使我们能够显式构造翻译 τ，并表明 $\mathbb{MDRDL}'$ 中的等式推理可以通过复制变量并施加这些方程而在 $\mathbb{MRDL}$ 内部被忠实模拟。除其技术作用外，该结果说明伴随如何提供一种统一而具体的机制来比较等式理论，并提示上下文翻译在其他代数扩张与逻辑扩展中的进一步应用。

致谢。 本研究得到国家自然科学基金委员会（12501647）、中国教育部人文社会科学青年基金项目“单子次结构逻辑的命题演算形式研究”（24XJC72040001）、陕西省自然科学基础研究计划（2025JC-YBMS-034、2025JC-YBQN-092）以及陕西省教育厅科学研究计划项目（陕西高校青年创新团队）（23JP132）的资助。

声明

利益冲突作者声明不存在利益冲突。

参考文献

[1] L. P. Belluce、R. Grigolia、A. Lettieri, 《单子 MV-代数的表示》, Studia Logica, **81**（2005年）, 123–144。[2] G. M. Bergman, 《一般代数与泛构造导论》。Springer Cham, 2015年。[3] G. Bezhanishvili, 《单子 Heyting 代数簇》。第一部分, Studia Logica, **61**（1998年）, 367–402。[4] G. Bezhanishvili, 《单子 Heyting 代数簇》。第二部分：对偶理论, Studia Logica, **62**（1999年）, 21–48。[5] G. Bezhanishvili, 《单子 Heyting 代数簇》。第三部分, Studia Logica, **64**（2000年）, 215–256。[6] K. Blount、C. Tsinakis, 《剩余格的结构》, International Journal of Algebra and Computation, **13**（2003年）, 437–461。[7] D. Brignole、A. Monteiro, 《通过等式刻画 Nelson 代数 I》, Proceedings of Japan Academy, **43**（1967年）, 279–283。[8] D. Brignole、A. Monteiro, 《通过等式刻画 Nelson 代数 II》, Proceedings of Japan Academy, **43**（1967年）, 284–285。[9] I. Calomino、G. Pelaitay、W. Zuluaga Botero, 《剩余格上时态算子的另一种定义》, Journal of Logic and Computation, **35**, 第 2 期, （2024年）, exae009[10] D. Castaño、C. Cimadamore、J. P. Diaz Varela、L. Rueda, 《单子 BL 代数：Hajek 的单子模糊逻辑的等价代数语义》, Fuzzy Sets and Systems, **320**（2017年）, 40–59。[11] D. Castaño、C. Cimadamore、J. P. Diaz Varela、L. Rueda, 《通过函数代数研究单子模糊逻辑的完备性》, Fuzzy Sets and Systems, **407**（2021年）, 161–174。[12] D. Castaño、C. Cimadamore、J. P. Diaz Varela、L. Rueda, 《S5 模态 Gödel 逻辑的代数研究》, Studia Logica, **109**（2021年）, 937–967。[13] J. L. Castiglioni、M. Menni、M. Sagastume, 《关于若干对合中心剩余格范畴》, Studia Logica, **90**（2008年）, 93–124。[14] J. L. Castiglioni、R. Lewin、M. Sagastume, 《关于单子 l-群簇的一个定义》, Studia Logica, **102**（2014年）, 67–92。[15] C. C. Chang, 《多值逻辑的代数分析》, Transactions of the American Mathematical Society, **88**（1958年）, 467–490。[16] R. Cignoli, 《满足插值性质的 Kleene 代数类与 Nelson 代数》, Algebra Universalis, **23**（1986年）, 262–292。

[17] C. Cimadamore, J. P. Diaz Varela，《单子 MV-代数与带强单位元的单子 l-群等价》，Studia Logica，**98** (2011)，175–201。[18] P. Cintula, G. Metcalfe, N. Tokuda，《一阶逻辑的单变量片段》，Bulletin of Symbolic Logic，**30**(2024)，253–279。[19] P. Cintula, C. Noguera，《逻辑与蕴涵：非经典逻辑一般代数研究导论》，施普林格出版社，2021年。[20] N. Galatos, P. Jipsen, T. Kowalski, H. Ono，《剩余格：子结构逻辑的代数一瞥》，爱思唯尔科学出版社，美国，2007。[21] N. Galatos, J. G. Raftery，《为剩余格添加对合》，Studia Logica，**77** (2004)，181–207。[22] N. Galatos, H. Ono，《FL 上子结构逻辑的格利文科定理》，《符号逻辑杂志》，**71**(2006)，1353–1384。[23] N. Galatos, H. Ono，《子结构逻辑的切消去与强分离：一种代数方法》，《纯粹与应用逻辑年刊》，**161**(2010)，1097–1133。[24] N. Galatos, H. Ono，《FL 上子结构逻辑的代数化、参数化局部演绎定理与插值》，Studia Logica，**83** (2006)，279–308。[25] Gödel K，《直觉主义命题演算的一种解释》，《数学研讨会成果集》，**4**(1933)，39–40。[26] P. Hájek，《模糊逻辑的元数学》，克卢维尔学术出版社，多德雷赫特，1998年。[27] R. P. Halmos，《代数逻辑 I：单子布尔代数》，Composition Mathematica，**12** (1955)，217–249。[28] P. Jipsen, C. Tsinakis，《剩余格综述》，载于《有序代数结构》（J. Martinez 编），克卢维尔学术出版社，多德雷赫特，2002，15–96。[29] A.N. Kolmogorov，《论排中律原理》，《数学文集》，**32**(1925)，646–667。[30] M. Lattanzi，《带 U-算子的 Wajsberg 代数》，Journal of Multiple-Valued Logic and Soft Computing，**10**(2004)，315–338。[31] M. Lattanzi, A. Petrovich，《关于单子 (n+1) 值 MV-代数的对偶性》，载于：第九届“Dr. Antonio A. R. Monteiro”大会论文集（西班牙语），2008，107–117。[32] R. McKenzie，《簇及更一般代数范畴的范畴等价的代数版本》，《逻辑与代数》，《纯粹与应用数学讲义》第180卷（1996），211–243。[33] G. Metcalfe, F. Montagna，《子结构模糊逻辑》，《符号逻辑杂志》，**72**(2007)，834–864。

[34] T. Moraschini, 《广义拟簇之间伴随关系的逻辑与代数刻画》, 《符号逻辑杂志》, **83** (2018), 899–919。[35] Moraschini T.: 《抽象代数逻辑中翻译作用的研究》。博士论文。巴塞罗那大学, 2016年。[36] A. D Nola, R. Grigolia, 《关于单子 MV-代数》, 《纯粹与应用逻辑年刊》, **128** (2004), 125–139。[37] H. Ono, Y. Komori, 《没有收缩规则的逻辑》, 《符号逻辑杂志》, **50** (1985), 169–201。[38] J. Rach ̆unek, D. Šalounová, 《单子 GMV-代数》, 《数理逻辑档案》, **47**(2008), 277–297。[39] H. Rasiowa, $\mathcal{N}$-格与带强否定的构造逻辑, 《数学基础》, **46**(1958), 61–80。[40] A. J. Rodríguez, 《Łukasiewicz 命题演算的代数研究》, 博士论文, 巴塞罗那大学, 1980年。[41] J. D. Rutledge, 《无限多值谓词演算的初步研究》, 博士论文, 康奈尔大学, 1959年。[42] M. S. Sagastume, H. J. San Martín, 《逻辑 Ł$^\bullet$》, Mathematical Logic Quarterly, **60** (2014), 375–388。[43] M. S. Sagastume, H. J. San Martín, 《受 Kalman 构造启发的范畴等价》, Studia Logica, **104** (2016), 185–208。[44] O. F. Tuyt, 《一阶多值逻辑的单变量片段》, 博士论文, 伯尔尼大学, 2021年。[45] C. Tsinakis, A. M. Wille, 《对合剩余格的极小簇》, Studia Logica, **83**(2006), 407–423。[46] D. Vakarelov, 《关于 $\mathcal{N}$-格与带强否定的构造逻辑的札记》, Studia Logica, **36**(1977), 109–125。[47] J. T. Wang, Y. H. She, P. F. He, N. N. Ma, 《弱单子剩余分配格与弱单子 c-微分剩余分配格的范畴等价》, Studia Logica, **111**(2023): 361–390。