arXiv:2601.22042v1 [math.HO] 29 Jan 2026

等腰四面体中的等角共轭

SARO HARUTYUNYAN

Abstract. 本文研究等腰四面体中等角共轭的性质。特别地，我们揭示了三个双曲抛物面，每一个均由关于相应双中线对称的等角共轭点对构成；并且我们证明，等腰四面体的外接球在该四面体中的等角共轭下保持不变。

1. Introduction

四面体 $ABCD$ 称为等腰（或等面），如果其对棱相等，即 $AB = CD, \quad BC = AD, \quad AC = BD$。这类四面体已得到充分研究。读者可参阅 [3]以了解其已知性质的列表。就本文目的而言，我们只需要其中少数性质，这些性质将在第2节中讨论。

可以注意到，等腰四面体可视为等边三角形的一种推广，并且其本质上具有“对称性”，因此应当有一个“中心”，与其外心、内心和形心重合。事实上，这对等腰四面体的高维类似物也成立，见 [1] and [2]。

我们需要引入相对于多面体的等角共轭这一概念。这是多边形中这一变换的自然推广。首先，对于给定的二面角 $\mathcal{D}$ （其棱线为 e ）和一点P，将 Pe 在 $\mathcal{D}$中的等角共轭平面定义为关于 $\mathcal{D}$ 的平分面与 Pe对称的平面（若 P 位于 e上，则平面Pe及其等角共轭可以是经过 e的任意平面）。接着，对于给定的多面体 $\mathcal{P}$ 和一点 P，将 P 在$\mathcal{P}$ 中的等角共轭定义为一点 Q（若存在），使得 P 和 Q 在 $\mathcal{P}$的每个二面角中都位于等角平面内。显然，若 P 是 Q的等角共轭，则 Q 是 P的等角共轭。

等角共轭对于任意四面体都是良定义的，也就是说，任意空间点相对于该四面体都有一个等角共轭。另一方面，其他多面体则并非如此，可能只有少数点，甚至没有一个点具有

2020 数学主题分类。51M04, 51M20.关键词和短语。等腰四面体，等角共轭，反演，圆/球之间的夹角，双曲抛物面。

等角共轭点。无论如何，我们将只讨论四面体，并将在第3节给出本段第一句的证明。

第4节将讨论若干辅助事实，主要涉及圆和球，这些内容将在后文中用到。

本文的一项主要结果将在第5节给出。该节中，我们将考察关于等腰四面体的双中线对称的等角共轭点对，并证明它们位于三个双曲抛物面上。这是全文唯一采用坐标硬算而非其他部分所用几何方法的章节。

本文的另一项主要结果是，等腰四面体的外接球（顶点除外）在等角共轭下保持不变。换言之，等腰四面体外接球上除顶点外的任意一点，其等角共轭点仍在该外接球上。这将在第6节中证明。

有趣的是，等腰四面体的二维情形，即等边三角形，并不具有类似性质。此外，任意三角形 ABC 的外接圆上任意一点 $P \notin \{A, B, C\}$ 的等角共轭点都是“无穷远点”，即AP, BP, CP的等角线彼此平行。

2. Properties of isosceles tetrahedron

命题 2.1. 等腰四面体具有以下性质：

(i) 从其另外两个顶点看，任意一条棱所成的角相等，且其各面都是全等三角形（因此称为等面四面体）；*(ii)* 其外心与内心重合；*(iii)* 其各面都是锐角三角形。证明。 (i) 由对棱相等显然成立。(ii) 设 O 为等腰四面体$ABCD$的外接球 Ω 的中心。在球 Ω 上满足 $\angle AZB = \angle ACB$ 的点 $Z \in$ 的轨迹是两段圆弧，它们关于平面 ABO 对称。这意味着，对于 $\angle ADB = \angle ACB$，平面 ADB 和 ACB 关于 ABO 对称，这由 (i) 可知。因此， O 位于二面角 AB 的平分面上。类似地， O 位于其余二面角的平分面上，因而与内心重合。

（iii）不妨假设 $\angle ABC \geq 90°$，以导出矛盾为目的。例如，选择点 D' ，使得 $ABCD'$ 为平行四边形。那么，如果 M 是 AC的中点，则有$\triangle ADC = \triangle AD'C$ ，并且

$$BD < BM + MD = BM + MD' = BD' \leq AC$$

这显然是错误的（最后一个不等式由 BD' 位于以 AC 为直径的圆内这一事实得出）。因此， $ABCD$ 的各个面都是锐角面。

□

3. Isogonal conjugation in tetrahedron

这里我们将推导四面体中等角共轭的正确性证明。注意，根据定义，若 P 是四面体的一个顶点，那么对于位于对面平面上的任意 Q ， P 和 Q 都是等角共轭点。还要注意，四面体两条相对棱线上的任意两点也互为等角共轭点。因此，我们可以假设 P 不在四面体的表面上，并据此继续。

定理 3.1。对于任意四面体 $ABCD$ 以及不在其表面上的点 P，都存在它关于 $ABCD$的等角共轭点 Q 。

证明。</*style*令、 P_B、 P_C、 P_D 分别是 P在 $ABCD$相应面上的反射。由于 $DP_A = DP_B = DP_C$，过 D 且垂直于 $P_AP_BP_C$ 的直线经过 $P_AP_BP_CP_D$的外心 Q 。类似地定义的过 A、 B、 C 的直线也经过 Q 。

现在我们来证明，例如，平面 ABP 和 ABQ 在二面角 AB中等角，也就是说，它们与其平分平面所成的角相等；沿棱AB方向观察的示意图见图 1。选定绕 AB 旋转的一个正方向，并将 X 和不在 AB 上的 Y所对应的$\angle(ABX$、 $ABY)$定义为沿该正方向旋转、使平面 ABX 转到 ABY的最小角度。于是

$$\begin{aligned}\angle(ABP, ABD) &= \frac{\angle(ABP, ABP_C)}{2} \\ &= \frac{\angle(ABP_D, ABP_C) - \angle(ABP_D, ABP)}{2} \\ &= \angle(ABP_D, ABQ) - \angle(ABP_D, ABC) \\ &= \angle(ABC, ABQ).\end{aligned}$$

同样，对于四面体 $ABCD$ 的任意其他棱 e ，平面 eP 和 eQ 在二面角 e 中等角。因此， P 和 Q 是等角共轭点。

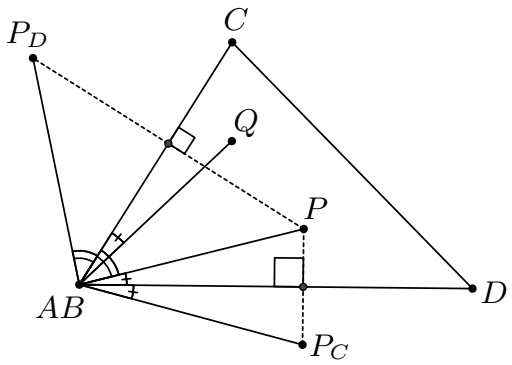

Figure 1.

□

回顾一下，对于给定的四面体 $ABCD$ 和点 P，经过 P 在 $ABCD$ 的各个面上的投影的球称为 P 的 垂足球。对于退化情形，即当投影集合少于四个点时，垂足球可以通过极限来定义。

注记 3.1. 注意，在定理 3.1 的证明中，以 P 为中心、系数为 $1/2$ 的位似变换，分别将 $P_AP_BP_CP_D$ 的顶点及其外心 Q 映射到 P 在 $ABCD$ 的各个面上的投影，以及 PQ 的中点 M_{PQ}。因此，以 M_{PQ} 为中心的所得球面经过 P 的各个投影。同样地，它也经过 Q 的各个投影。因此，我们可以表述以下命题，这是三角形中相应结果的推广：

推论 3.1. 四面体中两个等角共轭点在其各个面上的八个投影，位于一个以连接这两个等角共轭点的线段中点为中心的（垂足）球面上。此外，在同一个面上的投影，是该球面与该面的交圆上的 *diametrically opposite* 点。

不难看出，定理 3.1 的证明和注记 3.1 中的推理是可逆的。这使我们可以表述以下推论：

推论 *3.2*。 *</style}*点 P 和 Q 在四面体中是等角共轭点，当且仅当它们的垂足球重合。

4. Auxiliary facts

研究球时，考察平面上圆的类似构形（如果存在）很有帮助。平面上圆的许多性质对球也成立。尤其是反演方面的性质。

将两个相交球之间的夹角 定义为它们在交点处的切平面之间的夹角。这个定义也可以推广到球与平面之间。事实上，可以把平面视为一种特殊的球，其中心位于无穷远处。

众所周知，圆之间的夹角在反演下保持不变。自然，球之间也是如此。

命题 4.1。 球面之间的夹角在反演下保持不变。

证明。 设有两个相交的球 γ_1， γ_2 以及一个反演球 Ω。考察它们与经过其中心的平面 π 的截面。于是， γ_1 与 γ_2 之间的角等于

圆 $\gamma_1 \cap \pi$ 与 $\gamma_2 \cap \pi$之间的角。还要注意，对于这两个圆，关于 Ω 的反演等价于关于 $\Omega \cap \pi$的反演。因此，由于平面上的反演保持圆之间的角不变，以这些圆为截面、具有相同中心和半径的球之间的角也保持不变。□

证明主要结论时将用到的第二个事实，同样是平面作图的一个推广：

命题 4.2. 设有一个球Ω及其上的圆 σ ，还有一个经过 σ的球 Γ 。假设 Γ 与Ω 以及 σ所在平面所成的角相等。那么 Γ 的中心位于Ω上。

证明。 设 Q为 Γ的中心。用一个经过 Γ 和Ω的中心的平面截取该构形。设这些球的截面分别为圆 γ 和 ω ，并设 S_1, S_2 为 σ 与该割平面的交点；见图 2。再设 UV为 ω 中垂直于 S_1S_2 的直径， t 为 S_2处与 ω相切的切线。不失一般性，可假设 Q 和 V 位于 S_1S_2的同一侧。

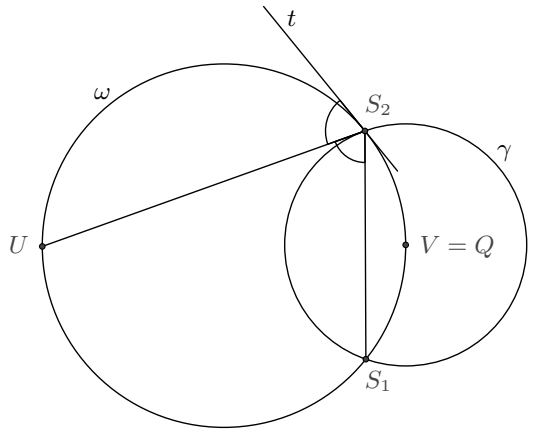

FIGURE 2.

通过简单的追角可以验证， US_2 平分 t 与 S_1S_2之间的角。这意味着 γ 应与 US_2相切。同样地，γ 也应与 US_1 相切，因此 γ 的中心与 V 重合，从而位于 Ω 上。□

我们还将利用三角形中等角共轭点的以下性质：

命题4.3. 设 X 与 Y 为三角形 ABC中的等角共轭点。设 M 与 N 分别为不含 C与含 C的弧 AB 的弧中点。设 γ_M 与 γ_N 分别为以 M与 N为中心、且经过 A、 B的圆。则

(i) 圆 γ_M 与 γ_N 中的每一个均与圆 ABX 和 ABY成等角（即平分它们）；*(ii)* N 与 M 分别为圆 ABX 与 ABY的外位似中心和内位似中心。

证明。 设 I 为 ABC的内心， S， T 分别为ABX， ABY的外心；见图3。回想一下， I位于 γ_M上。

由于 AI 平分 $\angle XAY$，且 BI 平分 $\angle XBY$，通过简单的追角可得 AM 平分 $\angle TAS$。因此， γ_M 平分圆 ABX 和ABY。但是 $AN \perp AM$，所以 AN 也平分 $\angle TAS$，而且 γ_N 也平分圆 ABX 和 ABY。因此，(i)部分得证。

根据角平分线性质，$\frac{SM}{MT} = \frac{SA}{AT} = \frac{SN}{NT}$。这就证明了(ii)部分。

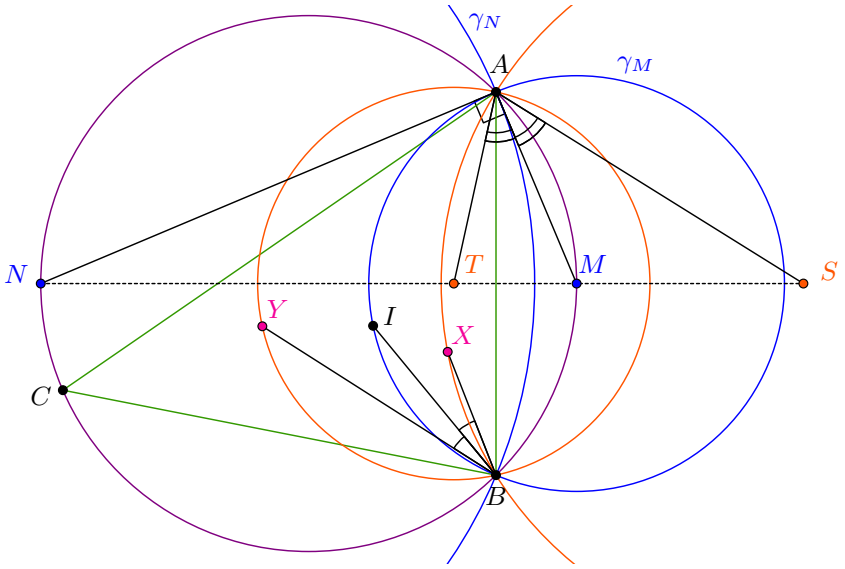

FIGURE 3.

□

命题4.4。 给定两个球Ω_1 和Ω_2 ， 它们相交于圆 σ。设 S 为它们的外位似中心。则以 S 为球心且经过 σ的球 Γ 平分球Ω_1 和Ω_2。

证明。 考虑用任一平面 π 截取该构造所得的截面，该平面通过Ω_1 与Ω_2的中心；见图4。设 $\omega_i = \Omega_i \cap \pi$， $i \in \{1, 2\}$ 与 $\gamma = \Gamma \cap \pi$。设 A 为 ω_1与 ω_2的交点之一。设 SA 与 ω_1 第二次相交于 B。

根据位似变换， ω_1 在 B 处的切线与 ω_2 在 A 处的切线平行。另一方面， SA 与 ω_1 在 A 处的切线和 B所成的角相等。因此， SA 平分了ω_1 和 ω_2 在 A处的切线之间的角。等价地，这个角由A 处与 γ相切的切线平分，证毕。

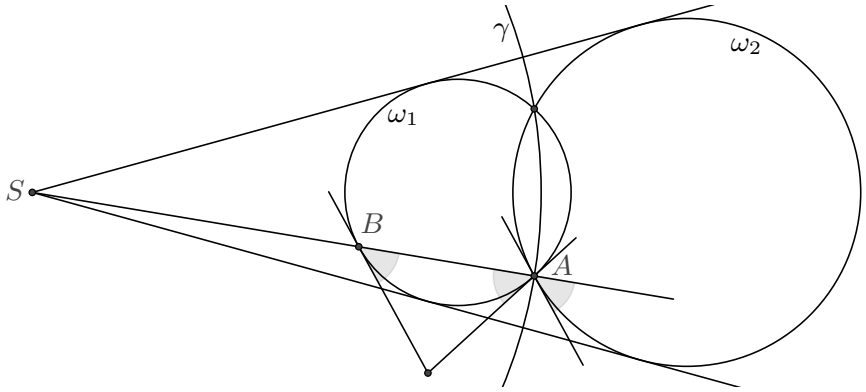

FIGURE 4.

□

5. ISOGONAL CONJUGATES SYMMETRIC IN BIMEDIANS

从此处起，我们用 $ABCD$ 表示这个等腰四面体，用 Ω 表示它的外接球，用 O 表示它的中心。

本节将大量采用坐标硬算（同时结合一些关键的几何推理），并用坐标来表示四面体的若干定量特征。具体而言，将 $ABCD$ 嵌入笛卡尔坐标系 $Oxyz$，使得

$$(1)\quad A=(-a,b,c),\ B=(a,-b,c),\ C=(a,b,-c),\ D=(-a,-b,-c)$$

对于某些 a，b，$c\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$。

下面的命题定义了我们所需的几乎所有量：

命题5.1。在 $ABCD$

(i) 若 S 是一个面的面积，则

$$S=2\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2};$$

(ii) 若 d是从 O 到一个面的距离，则

$$d=\frac{2|abc|}{S};$$

(iii) 若 θ 是二面角 CD 的角的一半（或等价地 AB），则

$$\sin\theta=\frac{d}{|c|}.$$

证明。 (i) 考虑到 ABC 的边等于$AB=2\sqrt{a^2+b^2}$ 等，并运用海伦公式，经过一些推导后，我们得到所给出的 S公式。

(ii) 注意， $ABCD$ 的体积等于 $[ABCD] = \frac{4dS}{3}$ 。另一方面，$[ABCD]$ 是外接平行六面体体积的三分之一；对于等腰四面体，该平行六面体为长方体，即$[ABCD] = \frac{8|abc|}{3}$ 。因此，我们得到所给出的 d值。

(iii) 令 M 为 CD 的中点， Q 为ACD的外心。那么 $\theta = \angle OMQ$ 所以

$$\sin\theta = \frac{OQ}{OM} = \frac{d}{|c|}.$$

□

回顾一下，四面体的双中线是连接对棱中点的直线。我们分别用 ℓ_A， ℓ_B， ℓ_C 表示 $ABCD$的三条双中线，它们分别连接棱 DA 与 BC、DB 与 AC、 DC 与 AB的中点。

为了证明接下来的定理，我们还需要以下事实：

引理 5.1. 设 X 为空间中的任意一点。设 P 和 Q 分别为它在 ACD 和 BCD上的投影。再设 R 为它在 ℓ_C上的投影。那么 $PR = RQ$。

证明。 令 S 为 X 在二面角CD 的平分面上的射影，令 T 为 S 在 CD上的射影；见图 5。则X， P， S， Q， T位于一个以 XT为直径的圆上。由于 TS平分 $\angle PTQ$，我们得到 $PS = SQ$。因此，由 $RS \perp PQS$可推得$PR = RQ$。

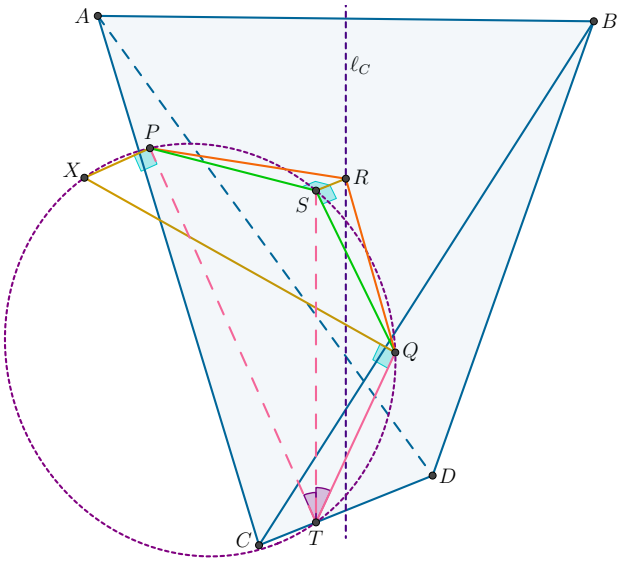

FIGURE 5.

□

定理5.1。令 ℓ为 $ABCD$的一条双中线。那么，在 $ABCD$ 中关于 ℓ 对称的等角共轭点对构成一个双曲抛物面。

证明。不失一般性，我们可以假设 $\ell = \ell_C$。设P 与 Q 为关于 ℓ对称的等角共轭点。则它们的中点 M 位于 ℓ上。根据推论 3.1，P 与 Q 的垂足球重合，且中心为 M。将该球记为 Γ。

由于 M 位于二面角 CD 的平分面上，由平面 BCD 与 ACD 分别从 Γ 截出的圆 γ_A 与 γ_B关于二面角 CD的平分面对称。

P 与 Q在 BCD 上的投影位于 γ_A 上，因此 P 与 Q 位于以 γ_A 为底的直圆柱面 $\mathfrak{C}_A$ 上。类似地， P 与 Q 位于以 γ_B为底的直圆柱面 $\mathfrak{C}_B$ 上。另一方面， P 与 Q 位于垂直于 ℓ的平面 π 上。因此 P与 Q 位于椭圆 $\pi \cap \mathfrak{C}_A$与 $\pi \cap \mathfrak{C}_B$上。然而这些椭圆重合，因为它们关于 M对称，二者都以 M 为中心，且短轴平行于 CD。将该椭圆记为 ε_1。

对二面角 AB 重复上述推理，我们发现 P 和 Q 位于类似定义的椭圆 ε_2 上。因此， P 和 Q 是交点 $\varepsilon_1 \cap \varepsilon_2$构成的一对对径点。

现在回想嵌入 (1)。于是，对于某个 $z_0 \in \mathbb{R}$，有 $M = (0,\ 0,\ z_0)$。注意， ℓ 与 Oz 重合，而 $ABCD$的另外两条双中线分别与 Ox和 Oy重合。

设 d为 O 到 $ABCD$各面的距离。那么容易看出， M 到 ACD 和 ABC的距离 d_1 和 d_2 分别为 $\left|\begin{matrix} z_0 + c \\ c \end{matrix}\right|$ 和 d 和 $\left|\begin{matrix} z_0 - c \\ c \end{matrix}\right|$。

若 r_1和 r_2分别是 γ_B和 $\gamma_C = \Gamma \cap ABD$的半径，则

$$r_1 = \sqrt{r^2 - d_1^2}, \quad r_2 = \sqrt{r^2 - d_2^2}.$$

显然， ε_1 的短轴等于 r_1，而其长轴为$r_1 \sin\theta$，其中 θ 是二面角 CD （或等价地， AB）的一半。

注意， ε_1 的短轴平行于 CD。因此，可以从椭圆得到 ε_1

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{r_1^2/\sin^2\theta} + \dfrac{y^2}{r_1^2} = 1 \\ z = z_0 \end{cases}$$

将其绕 Oz 沿负方向（从 y 到 x）旋转 $\varphi = \arctan\left(\frac{a}{b}\right)$角，可得 ε_1的以下方程：

$$\begin{cases} (x\cos\varphi - y\sin\varphi)^2 \sin^2\theta + (x\sin\varphi + y\cos\varphi)^2 = r_1^2 \\ z = z_0 \end{cases}.$$

同理， ε_2 可表示为

$$\begin{cases}(x\cos\varphi + y\sin\varphi)^2\sin^2\theta + (-x\sin\varphi + y\cos\varphi)^2 = r_2^2\\ z = z_0\end{cases}.$$

将这些方程相减，得到以下适用于 $\varepsilon_1 \cap \varepsilon_2$ 上各点的方程：

$$\begin{cases}-4xy\sin\varphi\cos\varphi\cos^2\theta = r_2^2 - r_1^2\\ z = z_0\end{cases}. \tag{2}$$

我们有

$$\sin\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \cos\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\begin{aligned} r_2^2 - r_1^2 &= d_1^2 - d_2^2 \\ &= \frac{(z_0+c)^2 - (z_0-c)^2}{c^2}d^2 = \frac{4z_0}{c}d^2. \end{aligned}$$

利用这些结果以及我们在命题5.1中计算出的值，可得

$$\cos^2\theta = 1 - \frac{d^2}{c^2} = \frac{c^2(a^2+b^2)}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}$$

而（2）可简化为

$$\begin{cases}-xy = \dfrac{ab}{c}z_0\\ z = z_0\end{cases}.$$

现在令 z_0 变化，可得双曲抛物面 $\mathcal{H}$，它包含关于 ℓ 对称的所有等角共轭点对 P 和 Q：

$$z = -\frac{c}{ab}xy.$$

然而，我们仍需证明，在 ℓ 中对称的 P' 和 Q' 是等角共轭点。为此，我们将使用推论 3.2 中关于等角共轭点的等价刻画。

令 P_A、 P_B、 P_C、 P_D 分别为 P' 在 BCD、 CDA、 DAB、ABC 上的投影。类似地定义 Q_A、 Q_B、 Q_C、 Q_D。再令 M' 为 P'（或等价地， Q'）在 ℓ 上的投影。

根据引理 5.1 $P_AM' = M'P_B$，利用 ℓ_C 中的对称性可知，四个点 P_A、P_B、 Q_A、 Q_B 到 M' 的距离相等。同样， P_C、 P_D、 Q_C、 Q_D 到 M' 的距离也相等。因此，如果我们证明 $P_BM' = P_CM'$，那么 P' 和 Q' 的垂足球就会重合，由推论 3.2 即可得证。

我们得到以下面平面方程：

$$ACD: \frac{x}{a} - \frac{y}{b} + \frac{z}{c} + 1 = 0, \qquad ABD: \frac{x}{a} + \frac{y}{b} - \frac{z}{c} + 1 = 0.$$

如果 $P'=(x_0,\ y_0,\ z_0)$，则

$$M'P_B^2=\left(x_0-\frac{p+q}{ar}\right)^2+\left(y_0+\frac{p+q}{br}\right)^2+\left(\frac{p+q}{cr}\right)^2,$$

$$M'P_C^2=\left(x_0-\frac{-p+q}{ar}\right)^2+\left(y_0-\frac{-p+q}{br}\right)^2+\left(\frac{-p+q}{cr}\right)^2,$$

其中

$$p=-\frac{y_0}{b}+\frac{z_0}{c},\qquad q=\frac{x_0}{a}+1,\qquad r=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}.$$

Then

$$\begin{aligned}\frac{M'P_B^2-M'P_C^2}{4}&=-\frac{p}{a}\left(x_0-\frac{q}{ar}\right)+\frac{q}{b}\left(y_0+\frac{p}{br}\right)+\frac{p}{c}\cdot\frac{q}{cr}\\&=-\frac{x_0}{a}p+\frac{y_0}{b}q+pq\\&=-\frac{x_0}{a}\left(-\frac{y_0}{b}+\frac{z_0}{c}\right)+\frac{y_0}{b}\left(\frac{x_0}{a}+1\right)+\left(-\frac{y_0}{b}+\frac{z_0}{c}\right)\left(\frac{x_0}{a}+1\right)\\&=\frac{x_0y_0}{ab}+\frac{z_0}{c}.\end{aligned}$$

由于 $P'=(x_0,\ y_0,\ z_0)$ 位于 $\mathcal{H}$ 上，最后一个表达式为零，正如所需。

□

注 5.1. 注意，另外两条不同于 ℓ 的双中线位于 $\mathcal{H}$ 上（$z=0$ 给出 $x=0$ 或 $y=0$）。还要注意，$ABCD$ 的顶点也位于 $\mathcal{H}$ 上。

将上文定义的、分别对应于双中线 ℓ_A，ℓ_B，ℓ_C的双曲抛物面记为 $\mathcal{H}_A$，$\mathcal{H}_B$，$\mathcal{H}_C$。

命题 5.2. 对于任意点 $P\in\Omega$，圆 ABP 与 CDP相切当且仅当 $P\in\mathcal{H}_C$。

证明。 回顾嵌入（1）。令 $P=(x,y,z)$。

我们需要检查直线 $ABP\cap CDP$ 是否与 Ω 相切，也就是说，它是否垂直于 OP。或者，等价地，检查 (x,y,z) 是否属于 ABP 和 CDP 的法向量的线性张成。不难验证，这些法向量为

$$\begin{bmatrix}b(z-c)\\a(z-c)\\-(bx+ay)\end{bmatrix}\quad\text{and}\quad\begin{bmatrix}b(z+c)\\-a(z+c)\\-bx+ay\end{bmatrix}.$$

它们的线性张成与它们的半和及半差的线性张成相同：

$$\begin{bmatrix}bz\\-ac\\-bx\end{bmatrix},\quad\begin{bmatrix}bc\\-az\\ay\end{bmatrix}.$$

我们需要检查矩阵的奇异性

$$M = \begin{pmatrix} bz & bc & x \\ -ac & -az & y \\ -bx & ay & z \end{pmatrix}.$$

考虑到 $P \in \Omega$，即 $x^2+y^2+z^2 = a^2+b^2+c^2$，我们得到

$$\begin{aligned} \det(M) &= -abz(x^2+y^2+z^2-c^2) - xyc(a^2+b^2) \\ &= -(a^2+b^2)(abz+xyc) \end{aligned}$$

当且仅当 $abz+xyc=0$ 时，其值为零，也就是说，当 $P \in \mathcal{H}_C$ 时。 □

注5.2。 显然，类似的结果对 $\mathcal{H}_A$ 和 $\mathcal{H}_B$ 也成立。

6. Isogonal conjugation on the circumsphere

在本节中， $ABCD$ 也是一个等腰四面体。所有记号均保持不变。

定理6.1. 设 $X \notin \{A,B,C,D\}$ 是Ω上的一点。那么， X 关于 $ABCD$ 的等角共轭点位于Ω上。

证明. 设 Y 是Ω与连接D 和 X的等角共轭点的直线的第二个交点。点 X 和 Y 相对于二面角 DA, DB, DC的每一个都位于等角平面内。我们要证明，它们也位于二面角 AB, BC, CA的等角平面内。

以 D为中心作反演；见图6。对于空间中的任意一点 Z ，用 Z_1表示其像。

显然， A_1, B_1, C_1, X_1, Y_1 共面（它们位于Ω的像平面内）。根据等腰四面体的性质(i)，可得

$$(*) \qquad \angle B_1A_1D = \angle ABD = \angle ACD = \angle C_1A_1D$$

另外两个类似的等式也成立。结合这一点，以及 X_1 和 Y_1 位于二面角 DA_1, DB_1, DC_1的等角平面内这一事实，我们推得 X_1 和 Y_1 是 $A_1B_1C_1$中的等角共轭点。

回想一下，根据性质（ii）， O 也是 $ABCD$的内心。这意味着，对于 $ABCD$的任意一条棱e，平面 eO 都是二面角 e 的平分面。

容易看出， O_1 是 D 关于 $A_1B_1C_1$ 的反射（考虑与 D diametrically opposite 的点）。球面之间的夹角在反演下保持不变（命题 4.1），因此，由于平面 ABO 与 ABD 和 ABC成等角，球 $A_1B_1O_1D$ 与平面 A_1B_1D 和球 $A_1B_1C_1D$成等角。根据命题 4.2，这只有在四面体 $A_1B_1O_1D$ 的外心N 位于球 $A_1B_1C_1D$上时才可能。四面体 $A_1B_1O_1D$

关于平面 $A_1B_1C_1$ 对称，因此 N 位于圆$A_1B_1C_1$上。

注意， N是弧 $A_1C_1B_1$的中点。事实上， $NA_1 = NB_1$所以N 是弧 A_1B_1中任意一段的中点。根据性质 (iii)，(*) 中的角都是锐角。这意味着， D 在$A_1B_1C_1$ 上的射影落在三角形 $A_1B_1C_1$ 内，因此 A_1B_1， B_1C_1 和C_1A_1 在 $DA_1B_1C_1$ 中的二面角都是锐角。因此， N 和 C_1 位于A_1B_1 的同一侧，而 N 位于弧 $A_1B_1C_1$上。

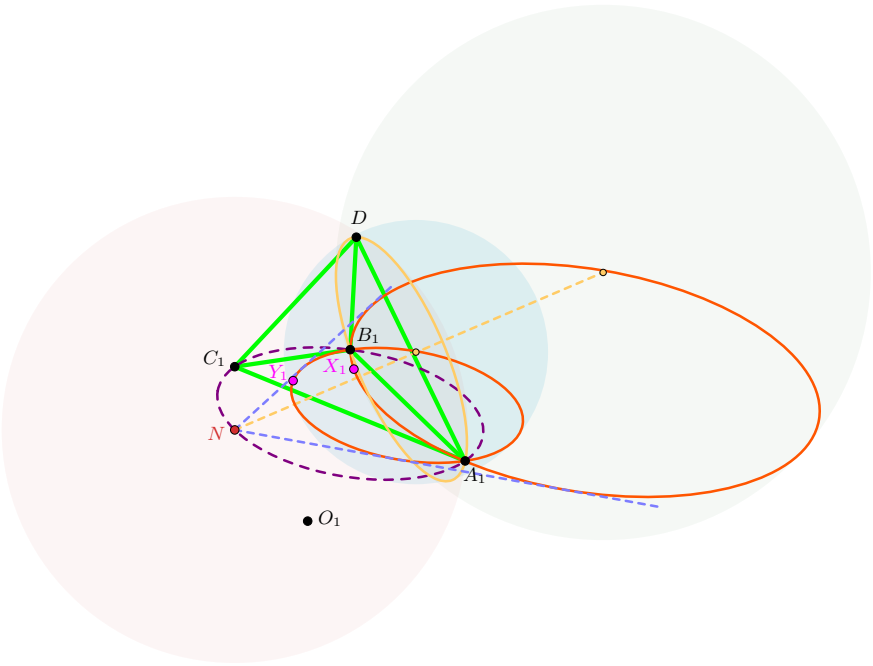

FIGURE 6.

根据命题 4，3 N 是圆 $A_1B_1X_1$和 $A_1B_1Y_1$的外位似中心。另一方面， $NA_1 = NB_1 = NC_1$ ，因此经过 $A_1B_1DX_1$ 和$A_1B_1DY_1$ 的外心的直线也经过 N 。这一点以及前面的判断得出结论： N 也是球 $A_1B_1DX_1$ 和 $A_1B_1DY_1$ 的外位似中心。

根据命题4.4，球 $A_1B_1O_1D$ 以 N 为中心并经过 A_1 ，与球 $A_1B_1DX_1$ 和$A_1B_1DY_1$成等角。因此，其原像平面 ABO 也与平面 ABX 和 ABY成等角。

同理， X 和 Y 也关于二面角 BC 和 AC 位于等角平面上，因此结论得证。□

在证明定理6.1时，莫斯科物理技术学院教授伊利亚·博格丹诺夫发现了一个在等腰四面体外接球上构造等角共轭点的有趣方法（I. Bogdanov，私人通信，2020年1月17日）：

命题6.1。 设 $X \notin \{A, B, C, D\}$ 是Ω上的一个点。设 X_A、 X_B、X_C 分别是圆 XDA 与 XBC、 XDB与 XCA、 XDC 与 XAB的第二交点。那么， X_A关于 ℓ_A的反射、 X_B 关于 ℓ_B 的反射以及 X_C 关于 ℓ_C 的反射，都与X的等角共轭重合。

证明。 设 Y 是 X的等角共轭。设 X' 和X'_A 分别是 X 和 X_A关于 ℓ_A 的反射。我们将证明 $Y = X'_A$。同样地， X 关于 ℓ_B 和 ℓ_C 的反射也都与 Y重合。

注意到，平面 $DAXX_A$ 和$DAX'X'_A$以及平面 $BCXX_A$和 $BCX'X'_A$ 分别是成对的等角线。这意味着 Y 位于 $X'X'_A$上。根据定理6.1 Y 也位于Ω上。因此， Y 应当与 X' 或 X'_A重合。

如果 $Y = X'_A$，那么无需证明。否则 $Y = X'$。这意味着 Y 和 X 位于 $\mathcal{H}_A$上。根据命题 5.2 $X = X_A$ 和$Y = X' = X'_A$，得证。□

注记6.1。 为证明这一结果，Bogdanov 对点 $\ell_A \cap \Omega$ 进行了反演。点 A、B、C、D 被映射为平行四边形的顶点，随后通过追角完成证明。不过，我们采用了另一种方法，基于此前已经证明的结果。

References

[1] Allan L. Edmonds。 等面单纯形的几何。载于：*Mathematika* 52.1-2 (2005)，第 31–45 页。[2] Allan L. Edmonds、Mowaffaq Hajja 和 Horst Martini。 单纯形中心的重合及相关面结构。载于：*Beitr¨age zur Algebra und Geometrie / Contributions to Algebra and Geometry* 46.2 (2005)，第 491–512 页。[3] Eric W. Weisstein。 “等腰四面体。”摘自 *MathWorld–Wolfram* 网络资源。
https://mathworld.wolfram.com/IsoscelesTetrahedron.html。

Saro Harutyunyan, Yerevan, Armenia 0012电子邮件地址：saro.harutyunyan@gmail.com