莫尔斯-斯梅尔向量场的规范链复形

Clemens Bannwart* Claudia Landi†

摘要

1960年，Smale利用定义在闭光滑流形上的莫尔斯-斯梅尔向量场的不动点与闭轨道的不稳定流形，对该流形定义了一种滤过，并由此导出了广义Morse不等式。这表明，与梯度型向量场的Morse链复形类似，即使存在闭轨道，莫尔斯-斯梅尔向量场也容许在拓扑等价下不变的规范链复形，从而可从中代数地导出Morse不等式。本文证明情况确实如此，从而改进了现有研究仅给出非规范链复形的状况。技术上，我们通过考虑不稳定流形过滤的切赫同调谱序列得到这一结果。具体而言，我们将有界正合对转化为链复形，使得与正合对相关联的谱序列的极限页给出该链复形的同调。我们用例子展示了这一构造。

arXiv:2601.22066v1 [math.AT] 29 Jan 2026

目录

引言 **1**

1 设定 **2**

1.A 稳定与不稳定流形.2 1.B 莫尔斯-斯梅尔向量场.4 1.C 莫尔斯-斯梅尔向量场的不稳定流形过滤.4

2 将谱序列转换为链复形 5

2.A 谱序列与正合对预备知识.5 2.B 谱序列的链复形（通过正合对）.9

3 不稳定流形滤过的谱序列 11

3.A 切赫同调.11 ˇ 3.B 拓扑过滤的切赫同调中的谱序列.13 3.C 预备同调计算.14 3.D 第一页的典范生成元.17

4 Morse-Smale向量场的链复形 **18**

4.A $C_\bullet(v)$ 的性质.18 4.B 梯度型情形.19 4.C Morse不等式.19 4.D 例子.20

引言

研究向量场的拓扑学时，也就是研究那些在拓扑等价下保持不变的方面，可以利用代数不变量来忽略许多复杂性，同时仍然捕捉其潜在的结构行为。因此，一个普遍的主题是将向量场的性质与其定义所在流形的拓扑不变量联系起来。

一类重要且相对简单的向量场是莫尔斯-斯梅尔向量场，它们在不动点、闭轨道和连接轨道方面性态良好，因而具有结构稳定性。

*摩德纳和雷焦艾米利亚大学，意大利， clemens.bannwart@gmail.com
†摩德纳和雷焦艾米利亚大学，意大利， claudia.landi@unimore.it

在二维情形下，结构稳定性甚至等价于是 Morse-Smale 的，并且是一个通有条件。尽管如此，即便对于这类向量场，为其赋予代数不变量的方案尚未被完全理解，这促使我们着手填补这一空白。

我们从已有结果出发，这些结果暗示着还存在有待发现的其他结构和不变量。20世纪60年代，S male 将 Morse不等式从 Morse函数推广到了莫尔斯-斯梅尔向量场 [16]。这些不等式将每个指标下不动点和闭轨道的数量与底层流形的 Betti数联系起来。此外，考虑梯度型情形，即没有闭轨道或其他复现行为的向量场，可以从链复形的存在性以代数方式推导出 Morse不等式。文献中对这种链复形的提出者说法不一，有的归于 Morse、Smale、Thom、Witten 和 Floer（这里简称为*Morse*复形 ）。Morse复形的生成元由向量场的不动点给出，其微分则通过适当地计算流线来定义；它的同调与底层流形的奇异同调同构 [3]。

受这些结果启发，人们一直在探索是否存在一种链复形，其性质类似于 Morse复形，同时也适用于存在闭轨道的情形。针对莫尔斯-斯梅尔向量场， [5], 提出了一种这样的复形，它根据不动点、闭轨道和连接轨道来定义链复形。 [2], 指出了这种方法存在的一些问题，后来这些问题在 [6], 中得到了解决，然而代价是链复形失去了其典范性：在应用所提出的构造之前，可能需要作出一些任意选择。另一种广受欢迎的方法是连接矩阵，其适用范围甚至比莫尔斯-斯梅尔向量场更广；它最初由 Franzosa 引入 [9]。不过，这种方法同样存在问题：在有闭轨道时，结果并不唯一，正如 [15]所解释的那样。

本文的贡献是提出一种新方法，为闭光滑流形上的莫尔斯-斯梅尔向量场赋予一个链复形。与文献中提出的其他莫尔斯-斯梅尔向量场链复形不同，这个链复形同时具有以下性质：其同调给出底层流形的同调；它在向量场的拓扑等价下保持不变；并且它是规范的，即不需要任意选择。

具体而言，为了根据一个莫尔斯-斯梅尔向量场构造这个链复形，我们从 Smale 在 [16]中提出的底层流形的一个滤过开始。在这个滤过中，不动点和闭轨道的不稳定流形根据彼此之间是否存在连接轨道而逐步加入。随后，我们考虑与此滤过相关的切赫同调谱序列，其第一页可以根据该向量场的不动点和闭轨道来理解。我们提出一种方法，将任何来自有界正合对的谱序列转化为链复形。将此方法应用于当前的谱序列，即得到我们的链复形。最后，我们说明如何从这个链复形推导出广义Morse不等式，并明确计算了2维球面上两个向量场例子的链复形。

1 背景

1.A 稳定流形与不稳定流形

我们介绍一些将会用到的动力系统概念，更多详情请参见例如 [14] 。给定一个闭光滑流形 M，我们用 $\mathfrak{X}(M)$ 表示 M 上光滑向量场的集合。用 $\mathfrak{X}^1(M)$ 表示底集为 $\mathfrak{X}(M)$、赋予 Whitney C^1 拓扑的拓扑空间。

在本小节中，我们固定一个向量场 $v \in \mathfrak{X}(M)$，并考察由 v 生成的流的动力学。我们用下标 v 定义所有对象，但当上下文已清楚表明所考虑的向量场时，将省略该下标。我们记 $\phi_v\colon \mathbb{R} \times M \to M$ 为相应的流。该流满足

$$\phi_v(s, \phi_v(t,p)) = \phi_v(s+t,p), \qquad \phi_v(0,p) = p \qquad \text{and} \qquad \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \phi_v(t,p) = v(p)$$

对所有 $p \in M$ 均成立，并且由这些性质唯一确定。对于固定的数 $t \in \mathbb{R}$，我们有时记作$\phi_v^t\colon M \to M$，表示由 $\phi_v^t(p) := \phi_v(t, p)$ 定义的微分同胚。

给定任意点 $p \in M$， p （关于 v）的**轨道** 是集合

$$\mathcal{O}_v(p) := \phi_v(\mathbb{R}, p) = \{\phi_v(t,p) \mid t \in \mathbb{R}\}.$$

v 的**不动点**（或**奇点**）是满足以下条件的一个点：对于所有 $t \in \mathbb{R}$， $p \in M$ 点 $\phi_v(t, p) = p$，即 $\mathcal{O}_v(p) = \{p\}$。这等价于 $v(p) = 0$。 v 的**周期点**是一个并非不动点且满足以下条件的点：

存在 $T>0$ 使得 $\phi_v(T,\ p)=p$。这样的 T 中最小的一个称为 p的**周期**。周期点的轨道称为**周期轨道**（或**闭轨**）。容易验证，同一闭轨上的所有点具有相同的周期。

定义1.1. α**极限集**和 ω**极限集**在 p （关于 v）定义如下

$$\alpha_v(p):=\bigcap_{-\infty<t\le 0}\overline{\phi_v((-\infty,t],p)}=\{q\in M\mid \exists \text{ sequence } t_i\to-\infty \text{ with } \phi_v(t_i,p)\to q\},$$
$$\omega_v(p):=\bigcap_{0\le t<\infty}\overline{\phi_v([t,\infty),p)}=\{q\in M\mid \exists \text{ sequence } t_i\to\infty \text{ with } \phi_v(t_i,p)\to q\}.$$

子集 $A\subseteq M$ 称为 ϕ_v-**不变**，若对所有 $t\in\mathbb{R}$，$\phi_v(t,\ A)=A$。任意点 $p\in M$ 的轨道都是 M的ϕ_v-不变子集。

命题1.2（ [14]的命题1.4）。设 $p\in M$。则 α_v（p）和 ω_v（p）是 M的非空、闭、连通且 ϕ_v-不变子集。

定义1.3。点 $p\in M$ 称为**链复现**（关于 v），若对所有 $T>0$ 和 $\varepsilon>0$，存在 x_0、x_1、.....、$x_m\in M$，其中 $x_0=x_m=p$，使得对所有 $i=0$、.....、$m-1$，存在 $t_i>T$，满足$d_M(\phi(t_i,\ x_i)\ x_{i+1})\le\varepsilon$。

注记 1.4. 如果 $p\in M$ 是不动点或周期点，则 p 是链复现的。

定义 1.5. 给定 v 的一个不动点 p，其**稳定流形** 与其**不稳定流形** 分别定义为

$$W_v^s(p):=\{q\in M\mid \phi_v(t,q)\to p \text{ as } t\to\infty\},$$
$$W_v^u(p):=\{q\in M\mid \phi_v(t,q)\to p \text{ as } t\to-\infty\}.$$

给定一个闭的或 轨道 γ （ v 的），我们分别定义其**稳定流形**与其**不稳定流形**为

$$W_v^s(\gamma):=\{q\in M\mid \exists p\in\gamma \text{ such that } d_M(\phi_v(t,p),\phi_v(t,q))\to 0 \text{ as } t\to\infty\},$$
$$W_v^u(\gamma):=\{q\in M\mid \exists p\in\gamma \text{ such that } d_M(\phi_v(t,p),\phi_v(t,q))\to 0 \text{ as } t\to-\infty\}.$$

定义 1.6. 集合 $\Lambda\subseteq M$ 称为**双曲的**（关于 v），如果存在两个子丛 $E^s,\ E^u\subseteq T_\Lambda M$ 使得

- $T_pM=\langle v(p)\rangle\oplus E_p^s\oplus E_p^u$对所有 $p\in\Lambda$,
- 存在 $0<\lambda<1$ 和 $C>0$，使得对于所有 $p\in\Lambda$ 和 $t\ge 0$，我们都有

$$|D\phi_v^t(p)x|\le C\lambda^t|x| \qquad \text{and} \qquad |D\phi_v^{-t}(p)y|\le C\lambda^t|y|$$

其中 $x\in E_p^s$ 和 $y\in E_p^u$。

子丛 E^s 和 E^u 是唯一确定的。E^u 的维数称为 Λ的**指标**，记作 $\mathrm{ind}_v(\Lambda)$。

本文只考虑这样的情形： Λ 是 v的不动点或闭轨。接下来的两个结果由 Smale 在 [17] 中给出，相关参考文献亦见其中。全面的论述请参见 [8]。

定理 1.7。双曲不动点和双曲闭轨的稳定与不稳定流形是 M 的单射浸入子流形。

更确切地说，Smale 证明了以下结果。

引理 1.8（引理 3.8，见 [16]）。设 v 为莫尔斯-斯梅尔向量场。若 β 是 v 的指标为$k\ge 0$的不动点，则 $W^u(\beta)\cong\mathbb{R}^k$。若 β是 v的指标为 $k\ge 0$的闭轨，则 $W^u(\beta)\cong\mathbb{R}^k\times S^1$。

1.B 莫尔斯-斯梅尔向量场

定义 1.9. 两个（内射浸入的）子流形 K，$N \subseteq M$ 称为**横截地相交**，如果对每一个点 $p \in K \cap N$，我们有 $T_pM = T_pK + T_pN$。其符号记法为 $K \pitchfork N$。

注 1.10. 若我们有两个子流形 K, N，它们属于 M，且 $\dim(K) + \dim(N) < \dim(M)$，那么 K 与 N 横截相交，当且仅当 $K \cap N = \emptyset$。

定义 1.11. 若向量场 $v \in \mathfrak{X}(M)$ 满足以下条件，则称其为**莫尔斯-斯梅尔向量场**:

(i) 链递归点集由有限个不动点和闭轨道组成，且它们全都是双曲的。

(ii) 不动点和闭轨道的稳定与不稳定流形横截相交。

若莫尔斯-斯梅尔向量场没有闭轨道，则称其为**梯度型** 。

注记 1.12。 实际上，双曲不动点和双曲轨道是孤立的，因此在闭流形上，由紧性可知我们至多只能有有限多个。因而，我们可以删去只有有限多个不动点和闭轨道这一条件。此外，一些作者在莫尔斯-斯梅尔向量场的定义中使用非游荡点，而不是链递归点。正如 [8,注记 5.3.47] 中所解释的，这两个定义是等价的。

流形分解为不动点和闭轨道的不稳定流形。关于这一结果的证明可见 [17] 及其中的参考文献。关于这一结果以及其他一些有关不稳定流形的相关结果，更现代的参考文献可见 [4]。

命题 1.13。 $M = \bigsqcup_\beta W^u(\beta)$，其中 β 遍历所有不动点和闭轨道。

1.C 莫尔斯-斯梅尔向量场的不稳定流形过滤

我们回顾一种由 Smale 在 [16] 中引入的方法，它依据不稳定流形对莫尔斯-斯梅尔向量场的底层流形进行过滤。在梯度型情形中，可以考虑一种更简单的过滤，按照不稳定流形的维数依次添加它们，也就是说，在时刻 k 添加 k 维的不稳定流形。这也称为 指标过滤 ，等价于考虑该流形相应 CW 分解的 k骨架。当存在周期轨道时，就需要更加谨慎，因为指标相同的周期轨道的稳定与不稳定流形可能相交。这意味着，如果我们仅仅按照维数进行过滤，就无法得到 CW 过滤。因此，Smale 的过滤（后来称为 不稳定流形过滤）的思路是递归地定义过滤，在每一步中添加所有附着到此前已添加部分上的不稳定流形。文献中还常见另一种方法，即为向量场选取 [11] 中定义的能量函数，并考虑关于该函数的子水平集过滤。然而，这类能量函数并非由向量场唯一确定，因此可能导致不同的过滤。在存在闭轨道时，选择自指标化函数也可能引发与指标过滤相同的问题。不稳定流形过滤是 [12], 中定义的吸引子过滤的一个特例；后者是在更广泛意义下的一种过滤。

我们固定一个域 $\mathbb{F}$。所有同调群和向量空间的系数均取自 $\mathbb{F}$，通常在记号中不予明确标出。设 M 是一个维数为 m的闭光滑流形。根据定理 1.13，对于 M上的莫尔斯-斯梅尔向量场 v ，我们可以将 M 分解为 v 的不动点和闭轨道的不稳定流形的不交并。

为了更精确地说明这一点，我们首先定义不稳定流形的边界。若 β 是不动点或指标为 k的闭轨道，我们用 $W^u(\beta)$ 表示 M中 β的不稳定流形的闭包。我们定义 $\partial W^u(\beta) := W^u(\beta) \setminus W^u(\beta)$。注意，这与 [16]中给出的定义等价。现在令$L_{-1} := \emptyset$ ，并且对 $i \geq 1$，令 L_i 为所有这类 $W^u(\beta)$ 的并，其中 β 是 v的一个奇异元，且$\partial W^u(\beta) \subseteq L_{i-1}$。

命题 1.14。 存在一个数 n 使得 $L_n = M$。

证明。 由定理 1.13，只需证明每个不稳定流形最终都会被加入滤过。注意，滤过也可以用临界元的不稳定流形集合上的某个偏序 $\leq$ 来表示，其中 $W^u(\beta) \leq W^u(\beta')$ 当且仅当 $W^u(\beta) \subseteq W^u(\beta')$。这一事实

确实构成偏序，已在（ [17] 或 [16]）中证明；更现代的阐述另见 [4, 定理 3.7] 。每个不稳定流形恰好在所有低于它的不稳定流形中最后一个被加入后，再过 1 步才会加入。换言之， $W^u(\beta) \subseteq L_p \setminus L_{p-1}$，其中 p 是偏序集中 $W^u(\beta)$ 的高度。由于临界元有限，这个偏序集的高度也是有限的，因此，若我们令 n 等于该偏序集的高度，则 $L_n = M$。 □

稍后，我们将考察一个可与此滤过相对应的谱序列。

2 将谱序列转化为链复形

本节纯属代数内容。我们描述一种将由正合对导出的谱序列转化为链复形的方法。其思路是以某种方式分解谱序列的第一页，使谱序列各页的微分在分解中的某些直和项之间诱导出同构。随后，对此复形取同调，便可还原谱序列的无穷页。我们在谱序列由正合对导出的情形下描述这一过程，因为我们所关注的情形满足这一条件，而且这样可以简化记号。

2.A 谱序列与正合对的预备知识

我们陈述谱序列理论中的一些定义和结果。由于我们只考虑域系数，因此将定义调整为适合我们的需要。更多细节（以及更一般的情形）可见 [18]。另请注意， [18, 第 5 节中的指标存在一些错误。9], 参见 [19] 勘误列表。我们仅讨论具有有限总维数的谱序列和正合对。这意味着它们的所有向量空间都是有限维的，且只有有限多个非零。本文始终默认这一假设成立。

定义 2.1 定义。 从第 $a \in \mathbb{Z}$ 页开始的**谱序列** 由以下数据构成 :

- 向量空间 $E^r_{p,\,q}$ 对所有 $r \geq a$ 以及 $p,\ q \in \mathbb{Z}$,
- 线性映射 $d^r_{p,\,q}\colon E^r_{p,\,q} \to E^r_{p-r,\,q+r-1}$ 对所有 $p,\ q$，满足 $d^r_{p-r,\,q+r-1} \circ d^r_{p,\,q} = 0$,
- 同构 E^{r+1} 与 E^r的同调之间，即

$$E^{r+1}_{p,q} \cong \ker(d^r_{p,q}) / \operatorname{im}(d^r_{p+r,q-r+1}).$$

对于某个固定值 r ，向量空间 E^r 连同线性映射 d^r 的集合称为谱序列的第 r 页。谱序列中一项 $E^r_{p,q}$ 的总次数为数值 $p+q$。若对每个 n 和 r，第 r 页中总次数为 n 的非零项只有有限多个，则称谱序列为有界；若对每个 n ，都存在整数$f(n)$，使得对 $p < f(p+q)$，有 $E_{p,q} = 0$。注意，这意味着对每个 p, q，都存在 r_0，使得对所有 $r \geq r_0$ ，有 $E^r_{p,q} = E^{r+1}_{p\,q}$，。我们将这个向量空间记为 $E^\infty_{p},_{q}$。对所有 p, q ， $E^\infty_{p},_{q}$ 的集合称为谱序列的第 ∞ 页。

定义 2.2. 若有界谱序列满足以下条件，则称其**收敛到** H_*：其中 $H_* = (H_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ 是一族向量空间，且对每个 n ，都存在一个有限滤过

$$0 = H^s_n \subseteq \cdots \subseteq H^{p-1}_n \subseteq H^p_n \subseteq H^{p+1}_n \subseteq \cdots \subseteq H^t_n = H_n$$

以及同构 $E^\infty_{p\,,\,q} \cong H^p_n / H^{p-1}_n$，其中 $n = p+q$。用符号表示，我们写作 $E \implies H_*$。

由于我们使用域系数，谱序列收敛到一族向量空间这一事实，足以从谱序列的无穷页重构这些向量空间，且重构结果在同构意义下成立。为使论述自成一体，我们针对有限总维数的情形给出这一结论的一个简单证明；这对我们的目的而言已经足够。

命题 2.3. 若 E 是一个收敛到一组向量空间 $H_* = (H_n)_{n\in\mathbb{Z}}$的谱序列，则 $H_n \cong \bigoplus_{p+q=n} E^\infty_{p\,,q}$ 对所有 $n \in \mathbb{Z}$ 都成立。

证明。 由于我们处理的是有限维向量空间，只需证明它们的维数相等。我们有

$$\dim(H_n) = \sum_p \dim\left(H_n^p / H_n^{p-1}\right) = \sum_p \dim\left(E_{p,n-p}^\infty\right) = \dim\left(\bigoplus_p E_{p,n-p}^\infty\right) = \dim\left(\bigoplus_{p+q=n} E_{p,q}^\infty\right),$$

其中第一个和第三个等式由标准线性代数论证得出，第二个成立是因为E 收敛于 H_*，而在第四个等式中我们只是在重新指标化。 □

我们将关注由正合对产生的谱序列。

定义 2.4. 一个**正合对**（阶为 r，对某个 $r \in \mathbb{Z}$）

$$\mathcal{E}: \qquad \begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{\ i\ } & D \\ & {\scriptstyle k}\nwarrow \quad \swarrow{\scriptstyle j} & \\ & E & \end{array}$$

由双分次向量空间$D = \bigoplus_{p,\ q} D_{p,\ q}$与$E = \bigoplus_{p,\ q} E_{p,\ q}$以及双分次线性映射 $i,\ j,\ k$组成，其双次数为$(1,\ -1),\ (-r,\ r),\ (-1,\ 0)$，并满足正合条件$\ker(i) = \mathrm{im}(k),\ \ker(j) = \mathrm{im}(i),\ \ker(k) = \mathrm{im}(j)$。

若我们有这样一个正合对，则映射 $d := jk$ 是 E 上的一个微分（即 $d^2 = 0$），我们可以考虑由此得到的同调 $H(E) := \ker(d)/\mathrm{im}(d)$。 E 上的双分次诱导出 $H(E)$上的一个双分次（我们继续在记号中将其隐去）。通过将 E 替换为 $H(E)$，并将 D 替换为 $i(D)$，我们得到另一个正合对，如下一个定义所述。

定义 2.5. 给定一个（阶数为 r 的）正合对

$$\mathcal{E}: \qquad \begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{\ i\ } & D \\ & {\scriptstyle k}\nwarrow \quad \swarrow{\scriptstyle j} & \\ & E & \end{array}$$

其**导出对** 是（阶数为 $r+1$ 的）正合对

$$\mathcal{E}': \qquad \begin{array}{ccc} D' & \xrightarrow{\ i'\ } & D' \\ & {\scriptstyle k'}\nwarrow \quad \swarrow{\scriptstyle j'} & \\ & E' & \end{array}$$

其中 $D' = i(D)$、 $E' = H(E)$， i' 是 i 的限制， $k'([\alpha]) = k(\alpha)$，且 $j'(i(x)) = [j(x)]$。 i', j', k' 的双次数分别为 $(1,-1)$, $(-(r+1)\ r+1), (-1, 0)$。通常我们用 $i(D)$ 代替 D'，用i 表示 i'，因为它只是限制；用 k 表示 k'，因为它只是商上的诱导映射。

直接计算/图追逐表明，导出对定义中的映射是良定义的，并满足正合条件，因此导出对仍然是一个正合对。更高阶的导出对可以迭代定义（即导出对的导出对，依此类推），但也可以给出直接定义。为此，我们先定义子空间

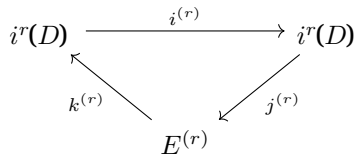
$$B^{(r)} := j(\ker(i^r)), \qquad\qquad Z^{(r)} := k^{-1}(\mathrm{im}(i^r)).$$

我们采用如下约定： i^0 表示 D上的恒等映射，因此 $\ker(i^0) = \{0\}$ 且 $\mathrm{im}(i^0) = D$，于是$B^{(0)} = \{0\}$ 且 $Z^{(0)} = E$。由于当 r 增大时， i^r 的核会扩大，而 i^r 的像会缩小（也可能保持不变），因此 $B^{(r)} \subseteq B^{(r+1)}$ 且 $Z^{(r+1)} \subseteq Z^{(r)}$。此外，所有的 $B^{(r)}$都包含在 $j(D) = \mathrm{im}(j)$之中，而所有的 $Z^{(r)}$ 都包含 $k^{-1}(\{0\}) = \ker(k)$，由于 $\mathcal{E}$的正合性，这两者相同。所有这些可以概括为如下包含链

$$\{0\} = B^{(0)} \subseteq B^{(1)} \subseteq B^{(2)} \subseteq \cdots \subseteq j(D) = \mathrm{im}(j) = \ker(k) = k^{-1}(\{0\}) \subseteq \cdots \subseteq Z^{(2)} \subseteq Z^{(1)} \subseteq Z^{(0)} = E.$$

我们定义 商 $E^{(r)} := Z^{(r)}/B^{(r)}$，并将 r **阶导出对** 定义为精确对 e

$\mathcal{E}^{(r)}$:



其中， $i^{(r)}$ 表示 i对 $i^r(D)$的限制， $k^{(r)}([\alpha]) := k(\alpha)$，而 $j^{(r)}$ 将一个元素 $i^r(x)$映射到 $[j(x)]$。为求完整起见，我们给出以下命题，其证明主要由直接计算和验证构成。

命题 2.6. 映射 $i^{(r)}, j^{(r)}, k^{(r)}$ 均定义良好，其双次数分别为 $(1,-1)$、$(-(a+r)\ a+r)$、$(-1,0)$。此外， $\mathcal{E}^{(r)}$ 是一个（阶数为 $a+r$ 的）正合对。

证明。 我们先证明这些映射定义良好。映射 $i^{(r)}$ 定义良好，因为 i 在 $i^r(D)$ 上的限制显然映入 $i^r(D)$。对于 $k^{(r)}$，我们首先需要证明它不依赖于所选代表元。为此，只需证明对于任意 $\beta \in B^{(r)}$，都有 $k(\beta) = 0$，这成立，因为$B^{(r)} \subseteq \mathrm{im}(j) = \ker(k)$。 $k^{(r)}$ 的像包含于 $i^r(D)$ 的事实直接由 $Z^{(r)}$的定义得出。对于 $j^{(r)}$，我们需要检查其定义不依赖于 i^r下原像的选择。这是因为若 $i^r x = 0$，则 $x \in \ker(i^r)$，从而 $j(x) \in j(\ker(i^r)) = B^{(r)}$。另一方面， $j(x) \in \mathrm{im}(j) = \ker(k) \subseteq Z^{(r)}$。

$i^{(r)}$ 的双次数显然与 i的双次数相同，因为它只是一个限制。同样， $k^{(r)}$ 的双次数与 k的双次数相同，因为它是子商上的诱导映射。至于 $j^{(r)}$，由于它由映射 j 与沿映射 i取 r重原像的操作组合定义，其双次数等于 j 的双次数减去 r 倍的 i的双次数，因此得到（$-a-r$， $a+r$）。

为了证明 $\mathcal{E}^{(r)}$的正合性，我们需要证明三个等式，而这归结为证明六个包含关系。包含关系 $\mathrm{im}(k^{(r)}) \subseteq \ker(i^{(r)})$、$\mathrm{im}(i^{(r)}) \subseteq \ker(j^{(r)})$ 和 $\mathrm{im}(j^{(r)}) \subseteq \ker(k^{(r)})$ 可直接由 $\mathrm{im}(k) \subseteq \ker(i)$、$\mathrm{im}(i) \subseteq \ker(j)$ 和 $\mathrm{im}(j) \subseteq \ker(k)$ 得出。现在我们来证明另外三个包含关系。

为证明 $\ker(i^{(r)}) \subseteq \mathrm{im}(k^{(r)})$，设 $x \in i^r(D)$，且 $ix = 0$。由于 $\mathcal{E}$ 是正合的，存在 $\alpha \in E$ 使得 $k(\alpha) = x$。根据 $Z^{(r)}$的定义，可得 $\alpha \in Z^{(r)}$，因此 $x = k(\alpha) = k^{(r)}([\alpha]) \in \mathrm{im}(k^{(r)})$。

为证明 $\ker(j^{(r)}) \subseteq \mathrm{im}(i^{(r)})$，考虑满足 $j^{(r)}(i^r(x)) = 0$的 $i^r x \in i^r(D)$，即 $j(x) = 0$。根据 $\mathcal{E}$的正合性， $x \in \mathrm{im}(i)$，这意味着 $i^r(x) \in i^{r+1}(D) = \mathrm{im}(i^{(r)})$。

为证明 $\ker(k^{(r)}) \subseteq \mathrm{im}(j^{(r)})$，考虑满足 $k^{(r)}([\alpha]) = 0$的 $[\alpha] \in E^{(r)}$。这意味着 $k(\alpha) = 0$，因此根据 $\mathcal{E}$的正合性，对某个 $x \in D$，有 $\alpha = j(x)$。因此 $[\alpha] = [j(x)] = j^{(r)}(i^r(x))$，从而 $[\alpha] \in \mathrm{im}(j^{(r)})$。 □

我们要证明，对 r 次导出对的直接定义，所得结果与将导出对的定义应用 r 次相同。为此，我们首先需要一个代数引理，可以概括为：子商的子商仍是子商。

引理 2.7 （命题 2.1，见 [1]）。设 Z 是一个带有子空间 $B \subseteq X' \subseteq X \subseteq Z$ 的向量空间。那么，$X/X' \cong (X/B)/(X'/B)$，其中同构的显式表达式为

$$\begin{array}{ccc} X/X' & \cong & (X/B)/(X'/B) \\ [x]_{X'} & \overset{\varphi}{\longmapsto} & [[x]_B]_{X'/B} \\ [x]_{X'} & \overset{\psi}{} & [[x]_B]_{X'/B} \end{array}$$

对所有 $x \in X$ 均成立。

现在我们可以证明前面提到的结论了。这也不是一个新结果，例如可参见 [18] 中的习题 5.9.1。为方便起见，我们仍给出证明。

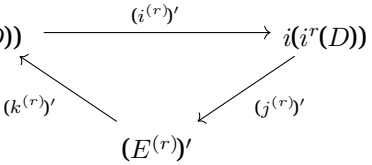
引理 2.8。我们有 $\mathcal{E}' = \mathcal{E}^{(1)}$ 和 $(\mathcal{E}^{(r)})' \cong \mathcal{E}^{(r+1)}$。

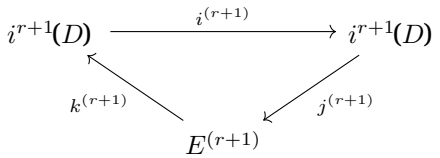
证明。 为了解释 $\mathcal{E}' = \mathcal{E}^{(1)}$，注意到

$$\ker(d) = k^{-1}(\ker(j)) = k^{-1}(\mathrm{im}(i)) = Z^{(1)},$$
$$\mathrm{im}(d) = j(\mathrm{im}(k)) = j(\ker(i)) = B^{(1)},$$

因此 $E' = \ker(d)/\mathrm{im}(d) = Z^{(1)}/B^{(1)} = E^{(1)}$。要证明这些映射也一致，只需注意 i' 和 $i^{(1)}$ 都是 i 在 $i(D)$ 上的限制，$j' = j^{(1)}$ 由定义可知，而 $k' = k^{(1)}$也同样如此。

现在我们来证明 $(\mathcal{E}^{(r)})' \cong \mathcal{E}^{(r+1)}$。换言之，我们要证明这两个正合对

$(\mathcal{E}^{(r)})'$:


$\mathcal{E}^{(r+1)}$:


是同构的。对于两个图中的上方一行，由于 $i(i^r(D)) = i^{r+1}(D)$，且 $(i^{(r)})'$ 和 $i^{(r+1)}$ 都只是 i的限制，因此两者相等。要理解为什么 $(E^{(r)})' \cong E^{(r+1)}$，注意到 $(E^{(r)})' = \ker(d^{(r)})/\mathrm{im}(d^{(r)})$，其中 $d^{(r)} = j^{(r)} \circ k^{(r)}$ 是 $E^{(r)}$ 上的微分。 $d^{(r)}$ 的核可表示如下。

$$\begin{aligned}
\ker(d^{(r)}) &= \{[\alpha] \in Z^{(r)}/B^{(r)} \mid d^{(r)}([\alpha]) = 0\} \\
&= \{[\alpha] \in Z^{(r)}/B^{(r)} \mid \exists x \in D \text{ with } k(\alpha) = i^r(x) \text{ and } j(x) \in B^{(r)}\} \\
&= \{[\alpha] \in Z^{(r)}/B^{(r)} \mid \exists x \in D \text{ with } k(\alpha) = i^r(x) \text{ and } j(x) = 0\} \\
&= \{[\alpha] \in Z^{(r)}/B^{(r)} \mid \exists x \in D \text{ with } k(\alpha) = i^{r+1}(x)\} \\
&= \{[\alpha] \in Z^{(r)}/B^{(r)} \mid \alpha \in k^{-1}(\mathrm{im}(i^{r+1}))\} \\
&= \{[\alpha] \in Z^{(r)}/B^{(r)} \mid \alpha \in Z^{(r+1)}\} = Z^{(r+1)}/B^{(r)}.
\end{aligned}$$

要看出第三个等式为何成立，注意若 $j(x) \in B^{(r)} = j(\ker(i^r))$，这意味着存在 $y \in \ker(i^r)$，使得 $j(x) = j(y)$。现在考虑元素 $x' = x - y$，则有 $i^r(x') = i^r(x) + i^r(y) = i^r(x) = k(\alpha)$，且 $j(x') = j(x) - j(y) = 0$。将 x 替换为 x' 即可得到该等式。对于第四个等式，注意 $j(x) = 0$ 当且仅当 $x \in \ker j$；根据正合性，这等于 $\mathrm{im}\ i$，因此 $x \in \mathrm{im}\ i^r$，且 $j(x) = 0$ 当且仅当 $x \in \mathrm{im}\, i^{r+1}$。其余等式均可通过展开或重述定义得到。接下来讨论 $d^{(r)}$的像:

$$\begin{aligned}
\mathrm{im}(d^{(r)}) &= \{[\alpha] \in Z^{(r)}/B^{(r)} \mid \exists [\beta] \in Z^{(r)}/B^{(r)} \text{ such that } [\alpha] = d^{(r)}([\beta])\} \\
&= \{[\alpha] \in Z^{(r)}/B^{(r)} \mid \exists x \in D \text{ such that } i^r(x) \in \mathrm{im}(k) \text{ and } [j(x)] = [\alpha]\} \\
&= \{[\alpha] \in Z^{(r)}/B^{(r)} \mid \exists x \in \ker(i^{r+1}) \text{ such that } [j(x)] = [\alpha]\} \\
&= \{[\alpha] \in Z^{(r)}/B^{(r)} \mid \exists x \in \ker(i^{r+1}) \text{ such that } j(x) = \alpha\} \\
&= \{[\alpha] \in Z^{(r)}/B^{(r)} \mid \alpha \in j(\ker(i^{r+1}))\} \\
&= \{[\alpha] \in Z^{(r)}/B^{(r)} \mid \alpha \in B^{(r+1)}\} = B^{(r+1)}/B^{(r)}.
\end{aligned}$$

要看出第三个等式为何成立，注意到根据正合性，$\mathrm{im}(k) = \ker(i)$；而 $i^r(x) \in \ker(i)$恰好意味着 $i^{r+1}(x) = 0$，即 $x \in \ker(i^{r+1})$。对于第四个等式，注意若 $[j(x)] = [\alpha]$，这意味着 $j(x) - \alpha \in B^{(r)} = j(\ker(i^r))$，也就是说，存在 $y \in \ker(i^r)$，使得 $j(x) - \alpha = j(y)$。若考虑元素 $x' = x - y$，则有 $i^{r+1}(x') = i^{r+1}(x) + i^{r+1}(y) = 0$ 且 $j(x') = j(x) - j(y) = \alpha$，因此用 x' 替换 x 便可得到该等式。同样，其余所有等式都是对不同定义进行改写的结果。因此我们有

$$(E^{(r)})' = \ker(d^{(r)})/\,\mathrm{im}(d^{(r)}) = (Z^{(r+1)}/B^{(r)})/(B^{(r+1)}/B^{(r)}) \cong Z^{(r+1)}/B^{(r+1)} = E^{(r+1)},$$

其中，同构由定理 2.7 得出。要证明这两个正合对同构，接下来只需证明图式

$$\begin{array}{ccccc}
i(i^r(D)) & \xrightarrow{(j^{(r)})'} & (E^{(r)})' = (Z^{(r+1)}/B^{(r)})/(B^{(r+1)}/B^{(r)}) & \xrightarrow{(k^{(r)})'} & i(i^r(D)) \\
\| & & \downarrow \psi & & \| \\
i^{r+1}(D) & \xrightarrow{j^{(r+1)}} & E^{(r+1)} = Z^{(r+1)}/B^{(r+1)} & \xrightarrow{k^{(r+1)}} & i^{r+1}(D)
\end{array}$$

可交换。中间的映射 ψ 是定理 2.7 中的同构，可以这样描述：它将 $[[\alpha]_{B^{(r)}}]_{B^{(r+1)}/B^{(r)}} \mapsto [\alpha]_{B^{(r+1)}}$映射到 .....。右侧方块可交换，因为

$$(k^{(r)})'([[\alpha]_{B^{(r)}}]_{B^{(r+1)}/B^{(r)}}) = k^{(r)}([\alpha]_{B^{(r)}}) = k(\alpha) = k^{(r+1)}([\alpha]_{B^{(r+1)}})$$

左方交换图交换是因为

$$(j^{(r)})'(i(i^r(x))) = [j^{(r)}(i^r(x))]_{B^{(r+1)}/B^{(r)}} = [[j(x)]_{B^{(r)}}]_{B^{(r+1)}/B^{(r)}} \xmapsto{\psi} [j(x)]_{B^{(r+1)}} = j^{(r+1)}(i^{r+1}(x)).$$

证明至此完成。 □

如果在一个正合对中忽略 D，只关注 E、$E^{(1)}$、$E^{(2)}$，.....，并为每一项赋予如下定义的微分 $d^{(r)}$：$= j^{(r)} \circ k^{(r)}$，那么这就得到一个谱序列。结果 [18, 命题 5.9。2], 对此作出了表述，我们在此重述而不予证明。

命题 2.9。一个正合对 $\mathcal{E}$，其中 i、j 和 k 的双次数分别为 $(1、-1)$、$(-a、a)$ 和 $(-1、0)$，确定了一个谱序列 $\{(E_{p\,q.}^{(r)}$、$d^{(r)})\}_{r\geq a+1}$，其中有 $d^{(r)}: = j^{(r)} \circ k^{(r)}$，从第 $a+1$ 页开始。正合对的态射会诱导相应谱序列的态射。

如果对于每个 n，都存在一个整数 $f(n)$，使得对于$p < f(p+q)$，有 $D_{p,\,q} = 0$，则称一个正合对是**下有界** 的。下一个结果是 [18, 经典收敛定理 5.9。7]。在第 3.B 节中，我们将利用它证明，拓扑过滤的谱序列的无穷页包含有关该过滤中所有层级之并的同调的信息。

定理 2.10。如果正合对是下有界的，那么谱序列也是下有界的，并收敛到$(H_n)_{n\in\mathbb{Z}}$，其中 $H_n = \lim_{p\to\infty} D_{p,n-p}$ 是沿映射 $i_{p,n-p}$: $D_{p,n-p} \to D_{p+1,n-p-1}$的直极限。

2.B 谱序列的链复形（通过正合对）

现在我们描述一种重新组织谱序列中所包含的代数信息的方法，以得到一个链复形，同时保留谱序列的一些重要性质。特别地，链复形中的向量空间同构于第一页沿对角线的直和，而其同调向量空间同构于无穷页沿对角线的直和。

考虑一个 谱序列 $E = \{E_{\bullet,\bullet}^r\}_{r\geq a+1}$，并假设 E 由一个正合
正如定理中所述的2.9...偶

$$\mathcal{E}: \qquad \begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{\quad i \quad} & D \\ & {\scriptstyle k}\nwarrow \quad \swarrow{\scriptstyle j} & \\ & E = E^a, & \end{array}$$

其中映射 j 的双次数为 $(-a, a)$。回想一下，i 的双次数为 $(1, -1)$，而 k 的双次数为 $(-1,0)$。我们通常在记号中省略双分次和双次数，仅在需要时明确写出。

接下来，我们将说明一种方法，从这样的谱序列 E 构造一个链复形 $C_\bullet = C_\bullet(E)$，使其具有以下性质：*(i)* $C_n \cong \bigoplus_{p+q=n} E_{p,q}$，以及*(ii)* $H_n(C_\bullet) \cong H_n = \lim_{p\to\infty} D_{p,n-p}$。在第 2.A 节中，我们已经见过如下序列

$$0 = B^{(0)} \subseteq B^{(1)} \subseteq B^{(2)} \subseteq \cdots \subseteq Z^{(2)} \subseteq Z^{(1)} \subseteq Z^{(0)} = E,$$

E 的子空间，定义如下：

$$B^{(r)} := j(\ker(i^r)), \qquad\qquad Z^{(r)} := k^{-1}(\operatorname{im}(i^r)).$$

由于 E 是双分次的，其子空间 $B^{(r)}$ 和 $Z^{(r)}$ 也具有双分次，但我们通常在记号中省略这一点。由于总维数有限，$B^{(r)}$ 和 $Z^{(r)}$ 的序列都会稳定，即存在一个数 n，使得对所有 $r \geq n$，都有 $B^{(r)} = B^{(r+1)}$ 和 $Z^{(r)} = Z^{(r+1)}$。这一子空间滤过诱导出一个（非典范的）分解

$$E^a \cong (B^{(1)}/B^{(0)}) \oplus \cdots \oplus (B^{(n)}/B^{(n-1)}) \oplus (Z^{(n)}/B^{(n)}) \oplus (Z^{(n-1)}/Z^{(n)}) \oplus \cdots \oplus (Z^{(0)}/Z^{(1)}). \qquad (1)$$

在这种情况下，“非典范”一词指的是该同构：可能存在多个候选，且没有明显的优先选择。我们将把这一分解与下述结果结合起来，用以定义一个链复形。

下面给出一个我们将要用到的结果。

命题 2.11. 微分 $d^{(r)}:\quad E^{(r)}\to E^{(r)}$ 诱导出同构 $\overline{d}^{(r)}:\quad Z^{(r)}/Z^{(r+1)}\xrightarrow{\cong}B^{(r+1)}/B^{(r)}$。

证明。 根据标准线性代数论证， $d^{(r)}$ 诱导出同构 $\hat{}d^{(r)}$: $E^{(r)}/\ker(d^{(r)})\cong\mathrm{im}(d^{(r)})$。在定理 2.8 的证明中，我们已经看到 $\ker(d^{(r)})=Z^{(r+1)}/B^{(r)}$ 且 $\mathrm{im}(d^{(r)})=B^{(r+1)}/B^{(r)}$。结合定理 2.7 中的同构 φ ，可得

$$Z^{(r)}/Z^{(r+1)}\xrightarrow{\varphi}(Z^{(r)}/B^{(r)})/(Z^{(r+1)}/B^{(r)})\xrightarrow{\hat{d}^{(r)}}B^{(r+1)}/B^{(r)},$$
$$=:\overline{d}^{(r)}$$

由此完成证明。 □

命题 2.12。 给定一个由正合对 $\mathcal{E}$ 诱导的谱序列 E ，我们可以如下构造其相应的链复形 $C_\bullet(E)$ 。首先考虑双分次向量空间

$$(B^{(1)}/B^{(0)})\oplus\cdots\oplus(B^{(n)}/B^{(n-1)})\oplus(Z^{(n)}/B^{(n)})\oplus(Z^{(n-1)}/Z^{(n)})\oplus\cdots\oplus(Z^{(0)}/Z^{(1)})$$

并赋予其微分 d，该微分在每个直和项上的定义由下列具有$(2n+1)\times(2n+1)$ 分块的分块形式矩阵给出。（总边界矩阵）

$$\left(\begin{array}{ccc|c|cc|c}
 & & & 0 & & 0 & \overline{d}^{(n-1)} \\
 & 0 & & \vdots & & & \\
 & & & 0 & \overline{d}^{(0)} & 0 & \\
\hline
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\hline
 & & & 0 & & & \\
 & 0 & & \vdots & & 0 & \\
 & & & 0 & & &
\end{array}\right)$$

更明确地说，

$$C_n:=\bigoplus_{p+q=n}(B^{(1)}_{p,q}/B^{(0)}_{p,q})\oplus\cdots\oplus(B^{(n)}_{p,q}/B^{(n-1)}_{p,q})\oplus(Z^{(n)}_{p,q}/B^{(n)}_{p,q})\oplus(Z^{(n-1)}_{p,q}/Z^{(n)}_{p,q})\oplus\cdots\oplus(Z^{(0)}_{p,q}/Z^{(1)}_{p,q})$$

and

$$\partial_n:=\bigoplus_{p+q=n}\bigoplus_{r=0}^{n-1}\overline{d}^{(r)}_{p,q}.$$

证明。 我们需要验证这确实是一个链复形，也就是说，微分的平方为零。在复合 $\partial_{n-1}\circ\partial_n$ 中，所有可能非零的项都是由映射$\overline{d}^{(r)}_{p\,q}$,的复合给出的；这些映射由 $E^{(r)}$上的微分诱导而来。已知这些微分的平方为零，因此$\partial_{n-1}\circ\partial_n=0$。

□

命题 2.13. 同构的正合对 $\mathcal{E}$ 与 $\mathcal{E}'$ 导出同构的谱序列 E 与 E'，从而导出同构的链复形 $C_\bullet(E)$与 $C_\bullet(E')$。

证明. 正合对之间的同构诱导其导出对之间的同构，从而诱导相应谱序列之间的同构。两个谱序列 E 与 E' 之间的同构限制为相应子空间 $B^{(r)}\cong B'^{(r)}$ 与 $Z^{(r)}\cong Z'^{(r)}$之间的同构，因此链复形定义中涉及的所有子商都是同构的；又由于微分由谱序列的微分诱导，这些微分同样是同构的。

□

命题 2.14. 设 $C_\bullet(E)$为如定理 *2.12* 中与谱序列 E 相关联的链复形。若 E 收敛于 H_*，则 $C_\bullet(E)$的同调同构于 H_*。

证明。 根据定理 2.3，只需证明 $H_n(C_\bullet(E))\cong\bigoplus_{p+q=n}E^\infty_{p,\,q}$。由于 $C_\bullet(E)$ 上的微分具有分块形式，且所有非零分块都是同构，因此同调恰好是 $Z^{(n)}/B^{(n)}$，它是唯一不受微分影响的分块。根据 $Z^{(n)}$和 $B^{(n)}$的定义，这个商与 E的无穷页同构。

□

3 不稳定流形滤过的谱序列

本节介绍将动力学/拓扑信息转化为代数信息所用的工具。在第 3.A 节中，我们汇集了一些关于切赫同调的事实。在 3.C节中，我们进行了一些同调计算，随后在第 3.D 节中利用这些计算来理解第 1.C 节所述滤过中两个相邻层的相对切赫同调。在第 3.B 节中，我们证明，紧空间的拓扑滤过会在切赫同调中诱导出一个谱序列。

ˇ 3.A 切赫同调预备知识

假定所有拓扑空间都是豪斯多夫的，我们通常不明确陈述这一点。我们所考虑的空间是流形的子集，或豪斯多夫空间关于紧子集的商，因而仍然是豪斯多夫的。

给定空间对 (X, A)，我们用 $\check{H}_k(X, A)$ 表示其以域 $\mathbb{F}$ 为系数的 k 次切赫同调。我们用 $\check{H}_k(X)$ 表示 $\check{H}_k(X, \emptyset)$。其定义为取 (X, A) 的所有开覆盖之神经的单纯同调的逆极限。详见 [7] 。我们回顾若干定义，并列出将要用到的一些性质，同时给出证明的参考文献。

我们选择切赫同调而非奇异同调，是因为它满足切除公理的一个更强版本，即在相对同胚下的不变性。由此可知，任意紧对 (X, A) 的切赫同调同构于商空间 X/A 的约化同调。奇异同调仅对足够好的对才具有这一性质（A 须为 X 中某个邻域的形变收缩），但与向量场相关联的滤过中出现的对在此意义上并不总是足够好。

定义 3.1. 对之间的映射 $f\colon (X, A) \to (Y, B)$ 称为**相对同胚**，如果它将 $X \setminus A$同胚地映射到 $Y \setminus B$。

以下结果见 [7, 第 X 章，引理 5.2]。

引理 3.2. 若 $f\colon (X, A) \to (Y, B)$ 是紧对之间的映射，且 f将 $X \setminus A$ 双射到 $Y \setminus B$，则 f 是相对同胚。

由此立即得到推论：将紧空间 X 的闭子空间 A 压缩为一点的商映射是相对同胚。

推论 3.3. 若(X, A) 是紧对，则商映射 $q\colon (X, A) \to (X/A, \{*\})$ 是相对同胚。

以下结果见 [7, 第 X 章，定理 5.4], ，它指出切赫同调在相对同胚下保持不变。

定理 3.4。 如果 $f\colon (X, A) \to (Y, B)$ 是紧对之间的相对同胚，那么诱导映射 $f_*\colon \check{H}_*(X, A) \to \check{H}_*(Y, B)$ 是一个同构。

带基点空间 $(X, *)$ 由一个拓扑空间 X 和一个选定的点 $* \in X$组成，该点称为**基点**。通常，我们用同一个符号 $*$表示所有带基点空间的基点，除非另有需要。考虑商空间 X/A时，若无特别说明，典范基点是 A 在商映射 $X \to X/A$下的像。

两个带基点空间 $(X_1, *_1)$ 和 $(X_2, *_2)$ 的**楔和** $X_1 \vee X_2$ 定义为商空间 $(X_1 \sqcup X_2)/(\{*_1\} \sqcup \{*_2\})$。可以验证，这个运算是结合的，即 $(X_1 \vee X_2) \vee X_3$ 和 $X_1 \vee (X_2 \vee X_3)$ 自然同胚。因此，我们可以通过迭代定义 n重楔和，并相应地选取典范基点。

命题 3.5。 给定紧带基点空间$(X_1, *_1), \ldots, (X_n, *_n)$，我们有

$$\check{H}_k(X_1 \vee \cdots \vee X_n, *) \cong \check{H}_k(X_1, *_1) \oplus \cdots \oplus \check{H}_k(X_n, *_n).$$

证明。 通过归纳论证，只需证明关于 $n = 2$ 的命题。考虑商映射$q\colon (X_1 \sqcup X_2, \{*_1\} \sqcup \{*_2\}) \to (X_1 \vee X_2, *)$。根据楔和的定义， q是一个相对同胚，因此由定理 3.4 可知，它在切赫同调中诱导出一个同构。考察不交并 $X_1 \sqcup X_2$ 的切赫同调时，我们可以将范围限制在这样的开覆盖：其中每个开集都是 X_1 或 X_2 的子集，

因为这类覆盖构成共尾族 [7, 第 VIII 章，推论 3.16]。这类覆盖的神经是不交并，由 X_1 和 X_2 的相应覆盖的神经组成，因此单纯同调分解为直和。由于逆极限与直和可交换，这一性质在取逆极限时仍然成立，从而得到 $\check{H}_k(X_1 \sqcup X_2, \{*_1\} \sqcup \{*_2\}) \cong \check{H}_k(X_1, \{*_1\}) \oplus \check{H}_k(X_2, \{*_2\})$。

□

对于足够良好的对（X， A），切赫同调与奇异同调一致。这里所谓足够良好，是指**可三角剖分**，也就是说，存在一个单纯对（K， L）以及一个同胚 h：$(|K|, |L|) \to (X, A)$。现在陈述两个结果： [7, 第九章, 定理 9.3] 和 [7, 第七章，定理 10.1], 。二者结合起来表明，这样的三角剖分诱导出从（X， A）的切赫同调到（K， L）的单纯同调，再从后者到（X， A）的奇异同调的同构。

定理 3.6。 三角剖分 $h\colon (|K|, |L|) \to (X, A)$ 诱导出(X, A) 的一个覆盖，从而得到同构

$$\check{H}_q(X, A; G) \xrightarrow{\cong} H_q^{\Delta}(K, L; G)$$

对任意系数群 G 及所有 q，得到 (X, A) 的切赫同调与 (K, L) 的单纯同调之间的同构。这些同构分别与对(K, L) 和(X, A)的长正合序列中的连接同态相容。

定理 3.7。 三角剖分 $h\colon (|K|, |L|) \to (X, A)$ 诱导出同构

$$H_q^{\Delta}(K, L; G) \xrightarrow{\cong} H_q(X, A; G)$$

从 (K, L) 的单纯同调到 (X, A) 的奇异同调，对任意系数群 G及所有 q均成立。这些同构分别与对 (K, L) 和 (X, A) 的长正合序列中的连接同态相交换。

˘ 结合这两个结果，我们得到：对于可三角剖分对，切赫同调与奇异同调同构。

推论 3.8。 若 (X, A) 是一个可三角剖分对，则存在自然同构 $H_*(X, A) \cong \check{H}_*(X, A)$，且与长正合序列中的连接同态相交换。

将空间 X 的一点紧化记为 $X^\star$ 。精确定义见 [7] 或 [13] 。将 $X^\star$ 视为带基点空间时，我们选取新添的点 $*$作为基点，该点通常称为**无穷远点**。我们重述 [7, 第 X 章引理 6.3], ，它给出了一个判据，用于判断一个空间何时与一点紧化同胚。

引理 *3.9.* 设 X, Y 是局部紧空间， $A \subseteq X$ 是一个闭子集，且 $f\colon X \setminus A \to Y$ 是一个真映射（即在 f 下紧集的逆像是紧集）。定义 $f\colon X \to Y^\star$，令 $f(x) = f(x)$（当 $x \in X \setminus A$ 时），并令 $f(a) = *$（当 $a \in A$ 时）。那么，f 是 f 的连续延拓。如果 f 是一个同胚，那么 f 是对 (X, A) 与 $(Y^\star, \{*\})$ 之间的相对同胚。此外，如果 X 是紧的，且 A 是一个单点，那么 f 是一个同胚。

利用这个引理，我们可以证明，对于紧对 (X, A)，将 A 压缩为一点，等同于先移除 A ，再添加一个无穷远点。

命题 3.10. 如果 (X, A) 是一对紧豪斯多夫空间，那么 $X/A \cong (X \setminus A)^\star$。

证明。 令 $f\colon X \setminus A \to X \setminus A$为恒等映射，其中定义域被视为 X/A的子空间，而陪域被视为 X的子空间。通过追溯子集拓扑和商拓扑的定义，可以验证两个空间中的开集相同，即与 A不相交的 X 的开子集（因为 A 是闭集），因此 f 是同胚。由于 X 是紧的， X/A 也是紧的。因此，由定理 3.9可知，映射 $f\colon X/A \to (X \setminus A)^\star$是同胚；该映射在 $X \setminus A$上为恒等映射，并将点 A 映至 $*$。

□

使用切赫同调的一个缺点是，对 (X, A)这一对而言，其同调群长正合列可能并不正合。根据定理 3.8, 对于可三角剖分对，该序列是正合的；但我们也关注不可三角剖分的对。幸运的是，由于我们研究的是紧流形的闭集，所以我们只考虑紧对。再加上我们使用的是域系数这一事实，确实可以得到对的长正合列，正如 [7, 第九章定理 7.6], 中所述。为方便起见，我们在此重复这一结论。

定理 3.11. 若(X, A) 是一个紧对，且 G 是域 $\mathbb{F}$ 上的向量空间，那么与对(X, A) 相关联的、以 G 为系数的切赫同调长正合序列是正合的。

ˇ 3.B 拓扑过滤的切赫同调中的谱序列

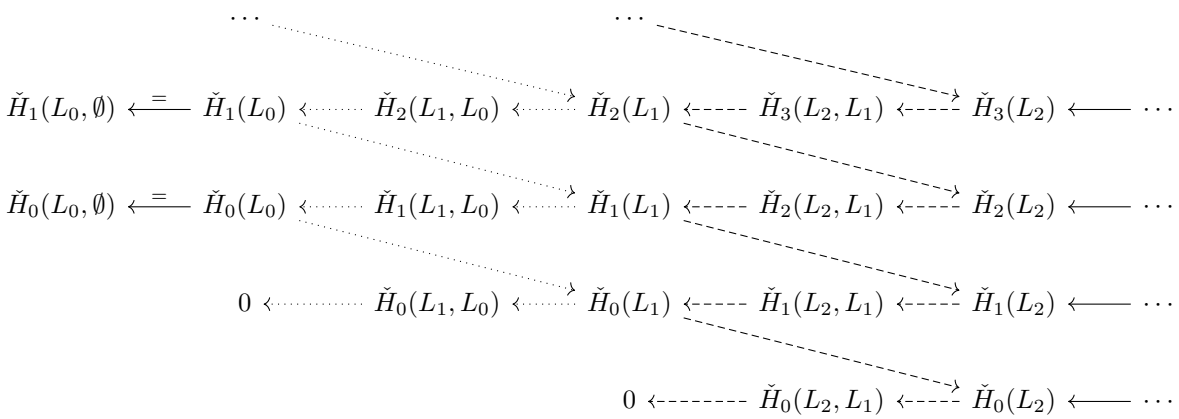
众所周知，拓扑空间的每个滤过都会在同调中诱导出一个谱序列。我们利用第 3.A 节的预备结果，重新证明紧空间情形下切赫同调的这一结论。需要注意的是，除了滤过中的空间是紧空间外，我们还利用了以域为系数这一事实，以确保切赫同调中的长正合序列存在。

命题 3.12. 若 $\emptyset \subseteq L_0 \subseteq L_1 \subseteq \cdots \subseteq L_n = M$ 是紧拓扑空间 M 的一个滤过，且每个 L_p 都是紧的，则这决定了一个谱序列 $\{E^r_{\bullet,\bullet}\}_{r\geq 1}$，其第一页由 $E^1_{p,\,q} = \check{H}_{p+q}(L_p, L_{p-1})$ 给出，并且收敛到 $\check{H}_*(M)$。

证明。设 $n := p+q$。由于我们使用域系数，且空间 L_p 是紧的，根据定理 3.11，对每一对 $(L_p,\ L_{p-1})$，在切赫同调中存在一个长正合序列

$$\cdots \longrightarrow \check{H}_n(L_{p-1}) \xrightarrow{\ i\ } \check{H}_n(L_p) \xrightarrow{\ j\ } \check{H}_n(L_p, L_{p-1}) \xrightarrow{\ k\ } \check{H}_{n-1}(L_{p-1}) \longrightarrow \cdots,$$

ˇ 其中 i 是由包含映射 $L_{p-1} \hookrightarrow L_p$ 在切赫同调中诱导的映射，j 是由对的包含映射 $(L_p,\ \emptyset) \hookrightarrow (L_p,\ L_{p-1})$ 在切赫同调中诱导的映射，而 k 是来自切赫同调的连接同态 ˇ。这些映射当然依赖于 n 和 p，我们稍后将为它们赋予指标。若同时考虑所有这些长正合列，我们可以按如下方式将它们彼此并排放置。注意，对 $(L_0,\ \emptyset)$ 的长正合序列仅由等式 ˇ $H_n(L_0,\ \emptyset) = \check{H}_n(L_0)$ 组成，因为空集的同调为零。

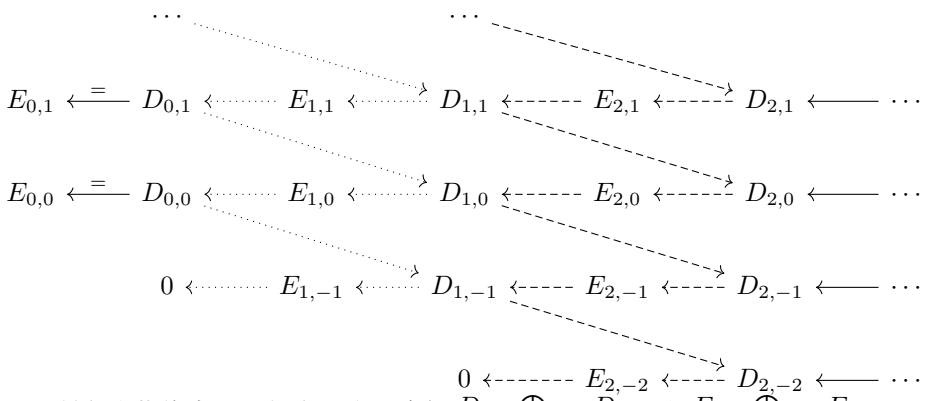


我们通过规定 $L_p = \emptyset$ 对所有 $p < 0$ 成立，且$L_p = L_n$ 对所有 $p > n$成立，并采用负次数下同调为零的约定，将该图正式地向所有方向延伸至无穷远。现在我们定义 $D_{p,\,q} = \check{H}_{p+q}(L_p)$ 和 $E_{p,\,q} = \check{H}_{p+q}(L_p,\ L_{p-1})$，并为 i、j、k 赋予指标，使得

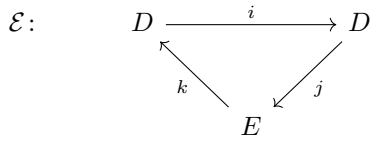
$$i_{p,q}\colon \underbrace{\check{H}_n(L_p)}_{=D_{p,q}} \longrightarrow \underbrace{\check{H}_n(L_{p+1})}_{=D_{p+1,q-1}}, \qquad j_{p,q}\colon \underbrace{\check{H}_n(L_p)}_{=D_{p,q}} \longrightarrow \underbrace{\check{H}_n(L_p, L_{p-1})}_{=E_{p,q}},$$

$$k_{p,q}\colon \underbrace{\check{H}_n(L_p, L_{p-1})}_{=E_{p,q}} \longrightarrow \underbrace{\check{H}_{n-1}(L_{p-1})}_{=D_{p-1,q}}.$$

注意，$D_{p,\,q}$ 和 $E_{p,\,q}$ 对所有 $p,\ q \in \mathbb{Z}$都有定义，但其中许多项为零，即当$p < 0$ 或 $q < -p$时，$D_{p,\,q} = 0$ 为零；当 $p < 0$ 或 $p > n$ 或 $q < -p$时，$E_{p,\,q} = 0$ 为零。用 $D_{p,\,q}$ 和 $E_{p,\,q}$ 表示时，之前的图现在如下所示。



为了更紧凑地展示所有这些信息，我们定义向量空间 $D = \bigoplus_{p,\,q} D_{p,\,q}$ 和 $E = \bigoplus_{p,\,q} E_{p,\,q}$，以及线性映射 $i = \bigoplus_{p,\,q} i_{p,\,q}$、$j = \bigoplus_{p,\,q} j_{p,\,q}$ 和 $k = \bigoplus_{p,\,q} k_{p,\,q}$。结果得到一个正合对



其中 i，j，k 的双次数分别为 $(1,\ -1)$，$(0,\ 0)$，$(-1,\ 0)$。该正合对的正合性直接由每个对 $(L_p,\ L_{p-1})$ 的同调长正合序列的正合性推出，因为直和保持正合性。因此，由定理 2.9 可得一个从第 1 页开始的谱序列。此外，由于此正合对是有界的，我们可以应用定理 2.10；该定理说明此谱序列下有界，并收敛到直极限 $\lim_{p\to\infty} D_{p,\,n-p}$。根据 $D_{p,\,q}$ 的定义，这等于 $\check{H}_n(M)$。

□

3.C 预备性同调计算

本节计算不动点和闭轨道的不稳定流形相对于其边界的相对切赫同调群。这将有助于我们在下一节为来自滤过的各对赋予相对切赫同调。回顾定理 1.8，不动点指标为 k 的不稳定流形与 $\mathbb{R}^k$ 同胚，而闭轨道指标为 k 的不稳定流形与 $\mathbb{R}^k \times S^1$ 同胚。

我们先讨论不动点的不稳定流形这一较简单的情形。

推论 3.13. 若 β 是指标为 $k \geq 0$ 的不动点，则

$$\check{H}_r(\overline{W^u(\beta)}, \partial W^u(\beta)) \cong \begin{cases} \mathbb{F}, & \textit{if } r{=}k, \\ 0, & \textit{otherwise.} \end{cases}$$

证明. 这由

$$\check{H}_r(\overline{W^u(\beta)}, \partial W^u(\beta)) \cong \check{H}_r(\overline{W^u(\beta)}/\partial W^u(\beta), *) \cong \check{H}_r(W^u(\beta)^\star, *) \cong \check{H}_r(S^k, *) \cong H_r(S^k, *)$$

第一个和第二个同构分别由定理 3.4 结合定理 3.3 和定理 3.10 得出。注意，$W^u(\beta)$ 是紧的，因为它是 M 的闭子集，而 M 是紧的。第三个同构由定理 1.8 得出，并且因为 $(\mathbb{R}^k)^\star \cong S^k$。第四个同构由定理 3.8 得出。

□

现在我们要对闭轨的不稳定流形做类似的计算。这更为困难，因为 $\mathbb{R}^k \times S^1$ 的一点紧化是一个更为复杂的空间。因此我们使用另一种紧化，即 $D^k \times S^1$，其中 D^k 表示维数为 k 的闭单位圆盘。该紧化的“边界”由 $S^{k-1} \times S^1$ 给出，因此我们最终要计算对 $(D^k \times S^1, S^{k-1} \times S^1)$ 的相对同调。我们先计算 $S^{k-1} \times S^1$ 的同调。

引理 3.14. 下列同构成立：

(i) $H_r(S^0 \times S^1) \cong \begin{cases} \mathbb{F} \oplus \mathbb{F}, & \text{if } r = 0, 1, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$

(ii) $H_r(S^1 \times S^1) \cong \begin{cases} \mathbb{F}, & \text{if } r = 0, 2, \\ \mathbb{F} \oplus \mathbb{F}, & \text{if } r = 1, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$

(iii) 对于 $k \geq 3$，我们有 $H_r(S^{k-1} \times S^1) \cong \begin{cases} \mathbb{F}, & \text{如果 } r = 0,\ 1,\ k-1,\ k, \\ 0, & \text{否则。} \end{cases}$

证明。 对于任意 $k \geq 1$，乘积 $S^{k-1} \times S^1$ 的同调可以使用 K¨unneth 公式计算，得到

$$H_r(S^{k-1} \times S^1) \cong \bigoplus_{i+j=r} H_i(S^{k-1}) \otimes H_j(S^1).$$

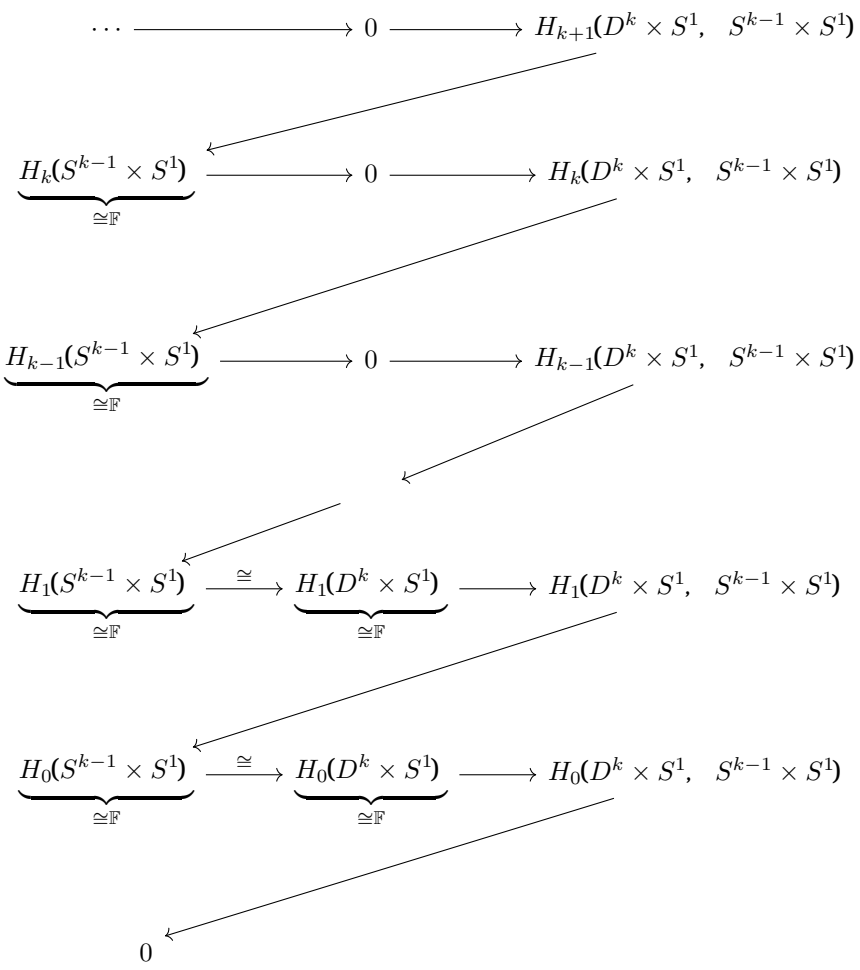
由此，利用球面的众所周知的同调群即可得到该结果。 □

现在我们可以计算对 $(D^k \times S^1,\ S^{k-1} \times S^1)$ 的相对同调。注意，这里我们使用的是奇异同调，但也可以使用切赫同调，因为这些对是可三角剖分的，因此二者同构。

引理 3.15. 对于任意 $k \geq 1$，我们有

$$H_r(D^k \times S^1, S^{k-1} \times S^1) \cong \begin{cases} \mathbb{F}, & \text{if } r = k, k+1, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

证明。 我们使用对 $(D^k \times S^1, S^{k-1} \times S^1)$ 的同调长正合序列。先考虑情形$k \geq 3$。由定理 3.14， $S^{k-1} \times S^1$ 的同调仅在次数 0,1, $k-1, k$非零，而 $D^k \times S^1$与 S^1 同伦等价，因此其同调仅在次数 0,1 非零。在这些非零次数上，同调都与 $\mathbb{F}$同构。可以验证，嵌入 $S^{k-1} \times S^1 \hookrightarrow D^k \times S^1$ 在次数 0 和 1 上诱导同调同构。因此，长正合序列中的相关部分如下：



由此根据序列的正合性可知，对于 $r \neq k, k+1$， $H_r(D^k \times S^1, S^{k-1} \times S^1) = 0$；并且次数为 $k+1$ 和 k 时的连接同态是同构，从而完成了情形 $k \geq 3$的证明。

情形 $k = 1$ 和 $k = 2$ 可以用类似的方法处理，只是长正合序列中两个非零部分有重叠。

□

我们刚才所做的计算之所以有用，是因为下面这个结果指出，存在一个相对同胚，将对 $(D^k \times S^1, S^{k-1} \times S^1)$ 映到一个闭轨的不稳定流形（其边界被压缩为一点）。

命题 3.16。 若 β 是指标为 $k \geq 1$ 的闭轨，则存在一个相对同胚，将（$D^k \times S^1$， $S^{k-1} \times S^1$）映到（W^u（β）$/\partial W^u$（β） $*$）。

证明。 记 f: $\mathbb{R}^k \times S^1 \to W^u(\beta)$ 为定理 1.8 中的微分同胚（定义见[16, 第 2.2] 节）。通过某个固定的同胚将 D^k 的内部与 $\mathbb{R}^k$ 等同后，我们可以将 f 视为从 $\mathrm{Int}(D^k) \times S^1$ 到 $W^u(\beta)$ 的映射。由定理 3.9，我们可以将其延拓为相对同胚 $f: (D^k \times S^1,\ S^{k-1} \times S^1) \to (W^u(\beta)^\star,\ *)$。将其与定理 3.10 中的同胚 $W^u(\beta)^\star \cong W^u(\beta)/\partial W^u(\beta)$ 复合，即得所求结果。 □

现在我们准备证明对闭轨道也成立的定理3.13类似结果 .

推论 3.17。 若 β 是指标为 $k \geq 0$的闭轨，则

$$\check{H}_r(\overline{W^u(\beta)}, \partial W^u(\beta)) \cong \begin{cases} \mathbb{F}, & \textit{if } r{=}k{+}1,\ k, \\ 0, & \textit{otherwise.} \end{cases}$$

证明。若 β的指标为 $k=0$，则 $W^u(\beta)=\overline{W^u}(\beta)=\beta\cong S^1$ 且 $\partial W^u(\beta)=\emptyset$。在这种情况下，结论显然成立。对于 $k\geq 1$，我们有

$$\begin{aligned}\check{H}_r(\overline{W^u(\beta)},\partial W^u(\beta))\cong \check{H}_r(\overline{W^u(\beta)}/\partial W^u(\beta),*)&\cong \check{H}_r(D^k\times S^1,S^{k-1}\times S^1)\\&\cong H_r(D^k\times S^1,S^{k-1}\times S^1).\end{aligned}$$

第一个同构由定理 3.4 和定理 3.3 得出。第二个同构由定理 3.4 和定理3.16 得出。第三个同构由定理 3.8 得出，因为这些空间是可三角剖分的。于是由定理3.15 得出结论。

□

3.D 第一页的典范生成元

回想一下，$\mathrm{Fix}_k(v)$ 是指标为 k 的不动点集合，而 $\mathrm{Orb}_k(v)$ 是指标为 k 的闭轨道集合。还要回想一下，在第 1.C 节中，我们用 v 的奇异元的不稳定流形描述了滤过 $\emptyset=L_{-1}\subseteq L_0\subseteq\cdots\subseteq L_n=M$。受证明 [16, 引理 5.1] 的启发，并利用在 3.C节中完成的计算，我们证明可以为各对 (L_p,L_{p-1}) 的相对切赫同调群得到典范基，其中每个不动点贡献一个基元素，每个周期轨道贡献两个基元素。这对我们很有用，因为这些将是谱序列第一页上的项。

给定 $\beta\in\mathrm{Fix}(v)$，我们用 $\mathbb{F}\langle\beta\rangle$ 表示由 β的形式 $\mathbb{F}$-线性组合构成的向量空间。如果 $\beta\in\mathrm{Orb}(v)$ 是一个闭轨，我们形式上构造两份 β^+ 和 β^-，并分别用 $\mathbb{F}\langle\beta^+\rangle$ 和 $\mathbb{F}\langle\beta^-\rangle$ 表示它们的形式 $\mathbb{F}$-线性组合构成的向量空间。

命题3.18. 对于每个 p、$r\geq 0$，我们有

$$\check{H}_r(L_p,L_{p-1})\cong\bigoplus_{\substack{\beta\in\mathrm{Fix}_r(v)\\ \beta\in L_p\setminus L_{p-1}}}\mathbb{F}\langle\beta\rangle\oplus\bigoplus_{\substack{\beta\in\mathrm{Orb}_{r-1}(v)\\ \beta\subseteq L_p\setminus L_{p-1}}}\mathbb{F}\langle\beta^+\rangle\oplus\bigoplus_{\substack{\beta\in\mathrm{Orb}_r(v)\\ \beta\subseteq L_p\setminus L_{p-1}}}\mathbb{F}\langle\beta^-\rangle.$$

证明. 对于 $p=0$，我们有 $L_0=\mathrm{Fix}_0(v)\sqcup\mathrm{Orb}_0(v)$。因此，

$$\check{H}_r(L_0,L_{-1})=\check{H}_r(L_0,\emptyset)=\check{H}_r(\mathrm{Fix}_0(v)\sqcup\mathrm{Orb}_0(v))=\bigoplus_{\beta\in\mathrm{Fix}_0(v)}\check{H}_r(\{\beta\})\oplus\bigoplus_{\beta\in\mathrm{Orb}_0(v)}\check{H}_r(\beta).$$

由于 $\beta\in\mathrm{Fix}_0(v)$ 是一个点，而 $\beta\in\mathrm{Orb}_0(v)$ 同胚于一个圆周，故 $p=0$ 的情形结论成立。对于 $p\geq 1$，我们有

$$\begin{aligned}\check{H}_r(L_p,L_{p-1})&\cong\check{H}_r(L_p/L_{p-1},*)\\&\cong\check{H}_r\left(\bigvee_{\substack{\beta\in\mathrm{Fix}(v)\\ \beta\in L_p\setminus L_{p-1}}}\overline{W^u}(\beta)/\partial W^u(\beta)\vee\bigvee_{\substack{\beta\in\mathrm{Orb}(v)\\ \beta\subseteq L_p\setminus L_{p-1}}}\overline{W^u}(\beta)/\partial W^u(\beta),*\right)\\&\cong\bigoplus_{\substack{\beta\in\mathrm{Fix}(v)\\ \beta\in L_p\setminus L_{p-1}}}\check{H}_r\left(\overline{W^u}(\beta)/\partial W^u(\beta),*\right)\oplus\bigoplus_{\substack{\beta\in\mathrm{Orb}(v)\\ \beta\subseteq L_p\setminus L_{p-1}}}\check{H}_r\left(\overline{W^u}(\beta)/\partial W^u(\beta),*\right)\\&\cong\bigoplus_{\substack{\beta\in\mathrm{Fix}_r(v)\\ \beta\in L_p\setminus L_{p-1}}}\mathbb{F}\langle\beta\rangle\oplus\bigoplus_{\substack{\beta\in\mathrm{Orb}_{r-1}(v)\\ \beta\subseteq L_p\setminus L_{p-1}}}\mathbb{F}\langle\beta^+\rangle\oplus\bigoplus_{\substack{\beta\in\mathrm{Orb}_r(v)\\ \beta\subseteq L_p\setminus L_{p-1}}}\mathbb{F}\langle\beta^-\rangle.\end{aligned}$$

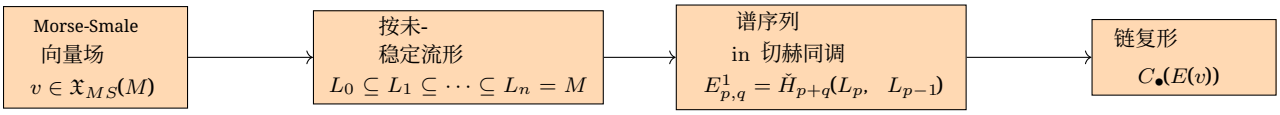
第一个同构由定理 3.4 和定理 3.3 得到。第二个同构由 L_p的定义得到，因为 $L_p\setminus L_{p-1}$ 是所有那些不包含在L_{p-1} 中但其边界包含在其中的不稳定流形的不交并。第三个同构由定理3.5得到。第四个同构由定理 3.13 和定理 3.17 得到。

□

4 莫尔斯-斯梅尔向量场的链复形

在此，我们将前面各节与各小节中的各种内容联系起来，从而完成将代数不变量与莫尔斯-斯梅尔向量场相关联的目标。

设 v 是闭光滑流形 M 上的莫尔斯-斯梅尔向量场。我们希望按照以下流程为 v 指定一个链复形 $C_\bullet(v)$：



第1个箭头：给定一个莫尔斯-斯梅尔向量场 v，我们考虑第 1.C 节中所述的、由不动点和闭轨道的不稳定流形对底流形所作的滤过。该滤过按归纳方式定义：在每一步中，我们加入那些其边界仅附着于先前已加入对象的不稳定流形。具体而言，$L_{-1} := \emptyset$ 并且对于 $p \geq 0$，若 L_{p-1} 已被定义，则

$$L_p := \bigcup_{\substack{\beta \in \mathrm{Crit}(v),\\ \partial W^u(\beta) \subseteq L_{p-1}}} W^u(\beta).$$

第2个箭头：由此滤过，我们考虑谱序列 $E(v)$，其第一页由滤过中相邻步骤的相对同调构成，该谱序列的存在性由定理3.12保证。微分由同调长正合序列中的连接同态定义。

第3个箭头：我们按照第 2.B 节，由此谱序列构造链复形 $C_\bullet(v) := C_\bullet(E(v))$。根据定理 2.12，该链复形的向量空间同构于第一页上沿对角线的直和，而这些直和可通过定理 3.18 确定。

这一流程具有典范性，因为其中没有做出任何任意选择，例如选取辅助函数或滤过。在接下来的小节中，我们将探讨由此得到的链复形的主要性质，以及一些应用和具体例子。

4.A $C_\bullet(v)$ 的性质

上述流程使我们能够从 Morse-Smale 向量场构造出一个不涉及任意选择的链复形。此外，该链复形的同调与底层流形的同调一致，而链复形中的向量空间由该向量场的奇异元生成。我们将这些结果概括如下。

定理 4.1. 若 v 是闭光滑流形 M 上的 *Morse-Smale* 向量场，且其维数为 m，则存在一个链复形 $C_\bullet = C_\bullet(v)$，具有以下性质：

(i) $H_*(C_\bullet) \cong H_*(M)$，

(ii) $\dim(C_k) = |\mathrm{Fix}_k(v)| + |\mathrm{Orb}_{k-1}(v)| + |\mathrm{Orb}_k(v)|$ *for* $k = 0, 1, \ldots, m$.

证明. 根据定理1.14，v 的不稳定流形滤过最终包含整个 M，即 $\emptyset \subseteq L_0 \subseteq L_1 \subseteq \cdots \subseteq L_n = M$。根据定理3.12，由该滤过构造的谱序列 $E = E(v)$ 收敛于 $\check{H}_*(M)$；由于 M 是流形，因而可三角剖分，所以后者等于 $H_*(M)$。根据定理2.14，可得 $H_*(C_\bullet) \cong H_*(M)$。

接下来需要证明维数公式。我们引入额外的记号，按照不动点和闭轨道进入由集合 L_p 构成的 M 滤过的时间，进一步分解这些不动点和闭轨道集合。更准确地说，对于 $r = 0$，1，……，m，有 $\mathrm{Fix}_r(v) = \mathrm{Fix}_r^0(v) \sqcup \mathrm{Fix}_r^1(v) \sqcup \ldots \sqcup \mathrm{Fix}_r^n(v)$；对于 $r = 0$，1，……，$m-1$，有 $\mathrm{Orb}_r(v) = \mathrm{Orb}_r^0(v) \sqcup \mathrm{Orb}_r^1(v) \sqcup \ldots \sqcup \mathrm{Orb}_r^n(v)$；其中，对于 $p = 0$，1，……，n，

$$\mathrm{Fix}_r^p(v) := \{\beta \in \mathrm{Fix}_r(v) \mid \beta \in L_p \setminus L_{p-1}\},$$
$$\mathrm{Orb}_r^p(v) := \{\beta \in \mathrm{Orb}_r(v) \mid \beta \subseteq L_p \setminus L_{p-1}\}.$$

现在我们可以计算 C_k 的维数，即

$$\begin{aligned}\dim(C_k) = \sum_{p+q=k} \dim(E^1_{p,q}) &= \sum_{p+q=k} \dim(\check{H}_k(L_p, L_{p-1})) \\ &= \sum_{p+q=k} |\operatorname{Fix}^p_k(v)| + |\operatorname{Orb}^p_{k-1}(v)| + |\operatorname{Orb}^p_k(v)| \\ &= |\operatorname{Fix}_k(v)| + |\operatorname{Orb}_{k-1}(v)| + |\operatorname{Orb}_k(v)|,\end{aligned}$$

其中，第一个等式由定理 2.12 和公式（1）得出，第二个由定理3.12得出，第三个由定理 3.18 得出，第四个则是因为注意到对 $p+q=k$ 求和等同于直接对所有 p 求和，然后将各项重新排序。

□

现在我们证明，赋予莫尔斯-斯梅尔向量场的链复形的同构类型在拓扑等价下是不变的。

命题 4.2。若 v 和 w 是闭光滑流形 M 上拓扑等价的莫尔斯-斯梅尔向量场，则链复形 $C_\bullet(v)$ 与 $C_\bullet(w)$ 同构。

证明。记 $h\colon M \to M$ 为 v 与 w 之间的拓扑等价。这意味着 h 是一个同胚，它将 v 的不动点映射到 w 的不动点，将 v 的闭轨道映射到 w 的闭轨道，并保持指标不变。此外，h 限制在 v 与 w 的不稳定流形之间给出同胚。因此，在与 v 和 w 相对应的滤过中，对应的不动点会同时加入。按照第 1.C 节所述，记 $\emptyset \subseteq L_0 \subseteq L_1 \subseteq \cdots \subseteq L_n = M$ 为与 v 相关联的滤过，记 $\emptyset \subseteq L'_0 \subseteq L'_1 \subseteq \cdots \subseteq L'_n = M$ 为与 w 相关联的滤过，则对所有 $p = 0, 1, \ldots, n$，有 $L_p \cong L'_p$。由此可得谱序列 $E(v) \cong E(w)$ 同构。由于从 $E(v)$ 构造 $C_\bullet(v)$，以及从 $E(w)$ 构造 $C_\bullet(w)$，纯粹是代数过程且遵循相同步骤，因此这诱导出链复形 $C_\bullet(v) \cong C_\bullet(w)$ 的同构。

□

4.B 梯度型情形

对于梯度型莫尔斯-斯梅尔向量场 v，我们已经有了一个具有所需性质的链复形，例如上文构造的链复形，其形式为*Morse*复形 $\mathrm{MC}_\bullet(v)$。向量空间 $\mathrm{MC}_k(v)$由指标为 k 的 v 的不动点生成，边界算子则通过统计相邻指标的不动点之间的流线来定义；更多细节请参见 [3] 。现在我们证明，对于梯度型莫尔斯-斯梅尔向量场 v，我们的链复形 $C_\bullet(v)$ 与 v的莫尔斯复形 $\mathrm{MC}_\bullet(v)$ 同构。

推论 4.3. 若 v 是 M上的梯度型莫尔斯-斯梅尔向量场，则 $C_\bullet(v) \cong \mathrm{MC}_\bullet(v)$。

证明。由于每个向量空间的链复形都可以唯一分解为微分为零的同调直和项和具有零同调的可缩直和项（例如参见 [18]中的习题 1.1.3），只需证明对于所有 k，$\dim(C_k) = \dim(\mathrm{MC}_k)$ 且 $\dim(H_k(C_\bullet)) = \dim(H_k(\mathrm{MC}_\bullet))$。对于前者，$\dim(\mathrm{MC}_k)$ 等于 v中指标为 k 的不动点个数。根据定理 4.1，$\dim(C_k)$ 也同样如此。至于同调，根据定理 4.1（以及莫尔斯同调定理），这两者都等于 M的奇异同调。

□

4.C Morse不等式

现在我们希望使用分配给闭光滑流形 M 上的 Morse-Smale 向量场 v 的链复形 $C_\bullet(v)$，从而由 [16] 推导出强 Morse不等式。我们先回顾代数莫尔斯不等式，即对于任意紧链复形 $C_\bullet \in \mathsf{Ch}$ 和任意 $q \geq 0$，有

$$\sum_{i=0}^{q} (-1)^{q+i} \dim(C_i) \geq \sum_{i=0}^{q} (-1)^{q+i} \dim(H_i(C_\bullet)). \tag{2}$$

这些不等式可通过标准线性代数论证，对 q作归纳来证明。此外，若 q 是使 $C_q \neq 0$成立的最大值，则(2)中的不等式变为等式。此时等式两边的值即为欧拉示性数。有了这些代数莫尔斯不等式，我们便可仅凭如定理 4.1中那样的链复形的存在性，由 [16, 定理 1.1], 推导出Morse不等式。

推论 4.4. 若 v 是闭光滑流形 M上的莫尔斯-斯梅尔向量场，对 $q \geq 0$，记 $R_q := \dim(H_q(M))$ 以及 $M_q := |\operatorname{Fix}^q(v)| + |\operatorname{Orb}^{q-1}(v)| + |\operatorname{Orb}^q(v)|$。则下列不等式成立：

$$\sum_{i=0}^{q}(-1)^{q+i}M_i \geq \sum_{i=0}^{q}(-1)^{q+i}R_i.$$

证明。 由定理 4.1 和方程 (2) 可知

$$\sum_{i=0}^{q}(-1)^{q+i}M_i = \sum_{i=0}^{q}(-1)^{q+i}\dim(C_i(v)) \geq \sum_{i=0}^{q}(-1)^{q+i}\dim(H_i(C_\bullet(v))) = \sum_{i=0}^{q}(-1)^{q+i}R_i. \qquad \square$$

4.D 例子

根据定理 3.18，我们可以为 E 第一页上的各项赋予由 v的不动点和闭轨道给出的基。特别地，这意味着许多项为零，如下述命题所示。

命题 4.5。 设 $\emptyset = L_{-1} \subseteq L_0 \subseteq L_1 \subseteq \cdots \subseteq L_n = M$ 是相对于 *Morse-Smale* 向量场 v 定义的不稳定流形过滤，其定义如第 *1.C* 节所述。则以下陈述成立。

(i) $\check{H}_i(L_0, \emptyset) = 0$ 当 $i \geq 2$ 时。

(ii) $\check{H}_0(L_p, L_{p-1}) = 0$ *for* $p \geq 1$.

(iii) 如果 $\dim(M) = 2$，则 $n = 2$ 且 $\check{H}_i(L_1, L_0) = \check{H}_i(L_2, L_1) = 0$ 当 $i \geq 3$ 时。

证明。 若 β是指标为零的不动点或闭轨，则 $\partial W^u(\beta) = \emptyset$，从而 $W^u(\beta) \subseteq L_0$。由定理 1.8，其不稳定流形是 M 的闭子集的不动点与闭轨道，仅有那些指标为零者。因此，任何指标更大的不动点或闭轨，其边界中至少还有另一个临界元，从而不能包含于 L_0中。换言之， L_0 恰好由所有指标为 0 的不动点与闭轨道组成。因此，它是有限多个点与圆周的不交并；特别地，它是可三角剖分的。于是，由定理 3.8，其切赫同调与奇异同调一致，并且仅可能在零次与一次非零，这就证明了 (i)。

注意，由定理 3.18，出现在 L_p 中但不在 L_{p-1}中的指标为零的不动点与指标为零的闭轨道生成。由于我们刚刚证明了它们都不会在晚于 L_0时被加入，故 (ii) 成立。

在二维流形上，不动点的指标至多为 2，闭轨的指标至多为 1，即 $\operatorname{Fix}^r(v) = \emptyset$ 对于 $r \geq 3$，以及 $\operatorname{Orb}^r(v) = \emptyset$ 对于 $r \geq 2$。因此，再次由定理 3.18 可得 $\check{H}_i(L_1, L_0) = \check{H}_i(L_2, L_1) = 0$ 对于 $i \geq 3$。这证明了 (iii)。 $\square$

因此，对于曲面上的 Morse-Smale 向量场，来自第 1.C 节的谱序列的第一页，其中 $E^1_{p,q} = \check{H}_{p+q}(L_p, L_{p-1})$，如下所示（这里省略了零项）：

$q=1$	$\check{H}_1(L_0,\emptyset)$	$\longleftarrow$ $\check{H}_2(L_1,L_0)$	
$q=0$	$\check{H}_0(L_0,\emptyset)$	$\longleftarrow$ $\check{H}_1(L_1,L_0)$	$\longleftarrow$ $\check{H}_2(L_2,L_1)$
$q=-1$			$\check{H}_1(L_2,L_1)$
	$p=0$	$p=1$	$p=2$

根据第 2.B 节，在二维情形下，赋予该谱序列的链复形 $C_\bullet(v) := C_\bullet(E(v))$ 简化为

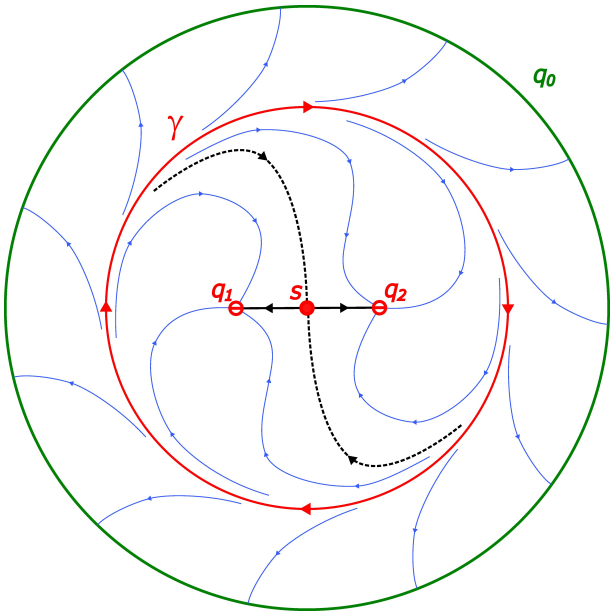
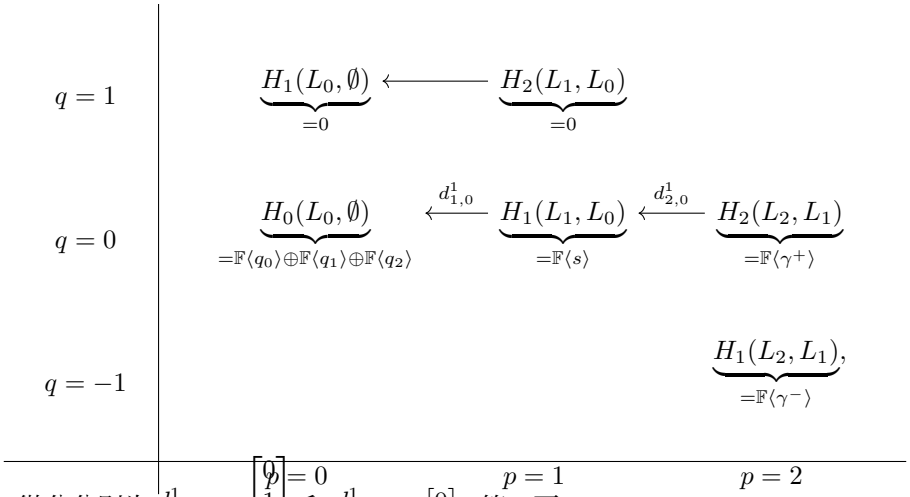


图1： S^2 上的莫尔斯-斯梅尔向量场，具有三个汇点、一个鞍点和一个排斥轨道

$$
\begin{array}{c}
C_2(v) = E^1_{1,1} \oplus \ker(d^1_{2,0}) \oplus E^1_{2,0}/\ker(d^1_{2,0}) \\
\downarrow \begin{bmatrix} 0 & d^2_{2,0} & 0 \\ d^1_{1,1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \overline{d}^1_{2,0} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
C_1(v) = E^1_{0,1}/\operatorname{im}(d^1_{1,1}) \oplus \operatorname{im}(d^1_{1,1}) \oplus E^1_{1,0} \oplus E^1_{2,-1} \\
\downarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & d^2_{2,-1} \\ 0 & 0 & d^1_{1,0} & 0 \end{bmatrix} \\
C_0(v) = E^1_{0,0}/\operatorname{im}(d^1_{1,0}) \oplus \operatorname{im}(d^1_{1,0}).
\end{array}
$$

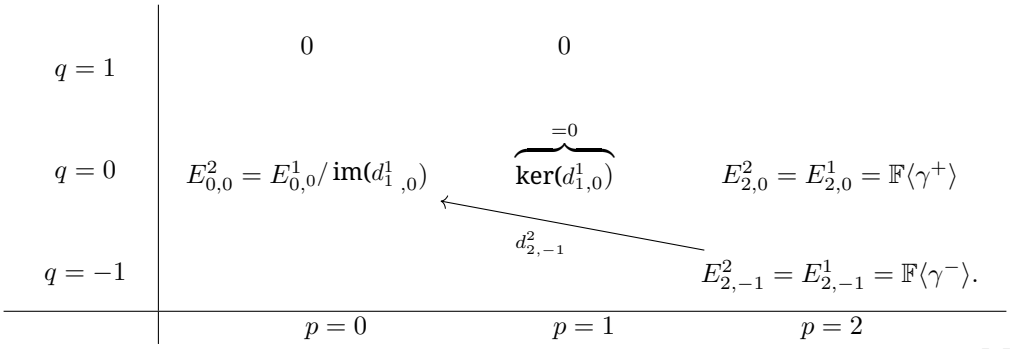
现在我们给出两个莫尔斯-斯梅尔向量场的例子： v 在 S^2 上，对于这两个例子，我们计算链复形 $C_\bullet(v)$。为简化表达式，我们假设 $\mathbb{F} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$。

例4.6。 我们将2维球面画成一个圆盘，其中边界表示单个点 q_0。考虑图1所示的向量场 $v \in \mathfrak{X}_{MS}(S^2)$。它有三个汇点 q_0, q_1, q_2、一个鞍点 s 和一条指标为1的闭轨 γ。滤过 $\emptyset \subseteq L_0 \subseteq L_1 \subseteq L_2 = S^2$ 如下：
$L_0 = \{q_0, q_1, q_2\}$, $L_1 \setminus L_0 = W^u(s)$,$L_2 \setminus L_1 = W^u(\gamma)$。在此例中，空间 L_p 均可三角剖分，因此它们的切赫同调与奇异同调一致。根据定理3.12，存在一个收敛到 $H_*(M)$ 的谱序列 E ，其第一页为 $E^1_{p,\ q} = H_{p+q}($ L_p， $L_{p-1})$。根据定理 3.18，我们为这些项赋予典范基。因此，该谱序列的第一页如下所示：



相对于这些基，微分分别为 $d^1_{1,\,0}=\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$ 和 $d^1_{2,\,0}=\begin{bmatrix}0\end{bmatrix}$。第二页

如下所示：



注意 $E^2_{0,\,0}\cong\langle q_0,\ \ q_1,\ \ q_2\mid q_1=q_2\rangle$。我们为 $E^2_{0,\,0}$ 指定基 $\{[q_0],[q_1]\}$。所得的$d^2_{2,\,-1}$ 矩阵为 $\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$。我们为 $\operatorname{im}(d^1_{1,\,0})$ 指定基 $\{q_1+q_2\}$。总之，这得到如下带基链复形：

$$
\begin{array}{c}
C_2(v)=\ker(d^1_{2,0})=\langle\gamma^+\rangle\\
\Big\downarrow\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\\
C_1(v)=E^1_{1,0}\oplus E^1_{2,-1}=\langle s,\gamma^-\rangle\\
\Big\downarrow\begin{bmatrix}0 & d^2_{2,-1}\\ d^1_{1,0} & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1\\0&1\\1&0\end{bmatrix}\\
C_0(v)=E^1_{0,0}/\operatorname{im}(d^1_{1,0})\oplus\operatorname{im}(d^1_{1,0})=\langle[q_0],[q_1],q_1+q_2\rangle.
\end{array}
$$

例4.7。 考虑图2中显示的向量场 $v\in\mathfrak{X}_{MS}(S^2)$。它有四个汇点 q_0、 q_1、q_2、 q_3，四个鞍点 s_1、 s_2、 s_3、 s_4，两个源点 p_1、 p_2，以及一条指标为1的闭轨 γ 。滤过$\emptyset=\subseteq L_0\subseteq L_1\subseteq L_2=S^2$ 如下：

$$
\begin{aligned}
&L_0=\{q_0,q_1,q_2,q_3\}, && L_1\setminus L_0=W^u(s_1)\sqcup W^u(s_2)\sqcup W^u(s_3)\sqcup W^u(s_4),\\
& && L_2\setminus L_1=W^u(p_1)\sqcup W^u(p_2)\sqcup W^u(\gamma).
\end{aligned}
$$

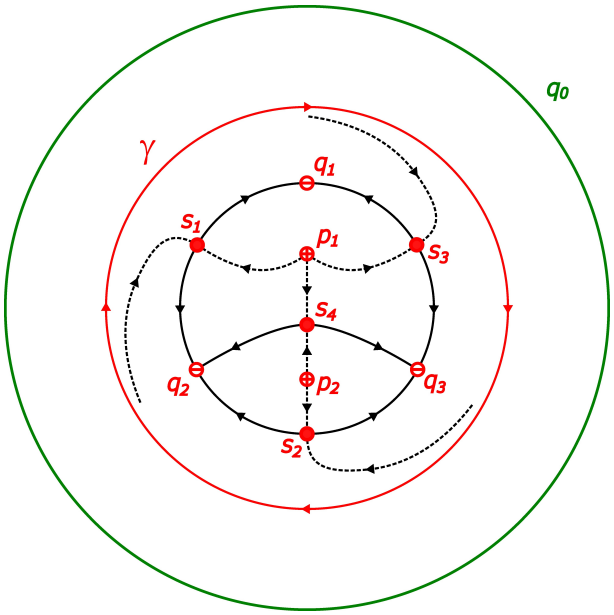


图2： S^2 上的莫尔斯-斯梅尔向量场，具有四个汇点、四个鞍点、两个源点和一条排斥轨道

˘ 与前一个例子一样，这些都是可三角剖分的，因此我们可以考虑奇异同调，而不是切赫同调。再次由定理 3.12 和 3.18，我们得到一个谱序列 $E(v)$，其第一页如下：

$$
\begin{array}{c|ccc}
q=1 & \underbrace{H_1(L_0,\emptyset)}_{=0} & \longleftarrow & \underbrace{H_2(L_1,L_0)}_{=0} \\
q=0 & \underbrace{H_0(L_0,\emptyset)}_{=\bigoplus_{i=0}^{3}\mathbb{F}\langle q_i\rangle} & \xleftarrow{d^1_{1,0}} & \underbrace{H_1(L_1,L_0)}_{=\bigoplus_{i=1}^{4}\mathbb{F}\langle s_i\rangle} \xleftarrow{d^1_{2,0}} \underbrace{H_2(L_2,L_1)}_{=\mathbb{F}\langle p_1\rangle\oplus\mathbb{F}\langle p_2\rangle\oplus\mathbb{F}\langle\gamma^+\rangle} \\
q=-1 & & & \underbrace{H_1(L_2,L_1)}_{=\mathbb{F}\langle\gamma^-\rangle}. \\
\hline
 & p=0 & p=1 & p=2
\end{array}
$$

关于这些基的微分为

$$
d^1_{1,0}=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\1&0&1&0\\1&1&0&1\\0&1&1&1\end{bmatrix} \qquad \text{and} \qquad d^1_{2,0}=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{bmatrix}.
$$

为了明确写出所得的链复形，我们需要确定子空间 $\mathrm{im}(d^1_{1,0})\subseteq E^1_{0,0}$、$\ker(d^1_{2,0})\subseteq E^1_{2,0}$ 以及商空间 $E^1_{0,0}/\mathrm{im}(d^1_{1,0})$、$E^1_{2,0}/\ker(d^1_{2,0})$ 的基。

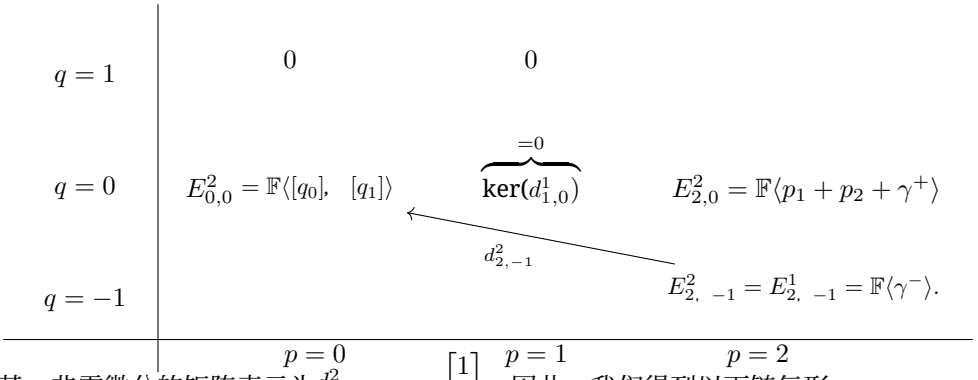
子空间的基： 我们利用简化行阶梯形，为给定向量空间的子空间赋予典范基。关于行阶梯形及其计算算法的更详细说明，可参阅许多线性代数教材，例如 [10]。我们取一个任意生成集，将其中元素的表示向量按行写入矩阵，并将该矩阵化为简化阶梯形。所得矩阵中的非零行即为所求的基。对于 $\mathrm{im}(d^1_{1,0})\subseteq E^1_{0,0}$，我们可以从

列 $d^1_{1,\,0}$开始。由此得到以下行阶梯形：

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

因此，$\mathrm{im}(d^1_{1,\,0})$ 的基为 $\{q_1+q_3, q_2+q_3\}$。对于 $\ker(d^1_{2,\,0}) \subseteq E^1_{2,\,0}$，其基由 $\{p_1+p_2+\gamma^+\}$ 给出。在这种情况下，无需再进行其他操作，因为该基只包含一个元素。

商空间的基： 我们选取 $\{[q_0],[q_1]\}$ 作为 $E^2_{0,\,0} = E^1_{0,\,0}/\,\mathrm{im}(d^1_{1,\,0})$ 的基，并选取 $\{[p_1],[p_2]\}$ 作为 $E^2_{2,\,0} = E^1_{2,\,0}/\ker(d^1_{2,\,0})$ 的基。第二页中的其他项要么为零，要么与第一页相同。因此，我们可以写出第二页：



相对于这些基，非零微分的矩阵表示为$d^2_{2,\,-1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$。因此，我们得到以下链复形：

$$C_2(v) = \ker(d^1_{2,0}) \oplus E^1_{2,0}/\ker(d^1_{2,0}) = \mathbb{F}\langle p_1+p_2+\gamma^+\rangle \oplus \mathbb{F}\langle [p_1]\rangle \oplus \mathbb{F}\langle [p_2]\rangle$$

$$\downarrow \begin{bmatrix} 0 & \overline{d}^1_{2,0} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C_1(v) = E^1_{1,0} \oplus E^1_{2,-1} = \mathbb{F}\langle s_1\rangle \oplus \mathbb{F}\langle s_2\rangle \oplus \mathbb{F}\langle s_3\rangle \oplus \mathbb{F}\langle s_4\rangle \oplus \mathbb{F}\langle\gamma^-\rangle$$

$$\downarrow \begin{bmatrix} 0 & d^2_{2,-1} \\ d^1_{1,0} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C_0(v) = E^1_{0,0}/\,\mathrm{im}(d^1_{1,0}) \oplus \mathrm{im}(d^1_{1,0}) = \mathbb{F}\langle [q_0]\rangle \oplus \mathbb{F}\langle [q_1]\rangle \oplus \mathbb{F}\langle q_1+q_3\rangle \oplus \mathbb{F}\langle q_2+q_3\rangle.$$

参考文献

[1] Michael Francis Atiyah 和 IanGrantMacDonald，《交换代数导论》，Addison-Wesley 数学丛书，Avalon Publishing，1994年。

[2] Clemens Bannwart，关于移除莫尔斯-斯梅尔向量场中闭轨道时的不唯一性，arXiv 预印本 arXiv:2410.02363(2024年)。

[3] Augustin Banyaga 和 David Hurtubise，莫尔斯同调讲义，《数学科学丛书》，Springer Netherlands，2004年。

[4] Nguyen Viet Dang 和 Gabriel Rivi`ere, 《Morse-Smale 流的谱分析 I：各向异性空间的构造》, 《Jussieu 数学研究所学报》19（2020）, 第5期, 1409–1465。[5] Marzieh Eidi 和 J¨urgen Jost, 《Floer 同调：从广义 Morse–Smale 动力系统到 Forman 组合向量场》, 《数学与统计通讯》（2022）, 695–720。[6] ,《Floer 同调：从广义 Morse–Smale 动力系统到 Forman 组合向量场》, arXiv 预印本 arXiv:2105.02567v4（2024）。[7] Samuel Eilenberg 和 Norman Steenrod, 《代数拓扑基础》, 普林斯顿大学出版社, 1952年。[8] Todd Fisher 和 Boris Hasselblatt, 《双曲流》, 《苏黎世高等数学讲座》, 欧洲数学会, 2019年。[9] Robert D. Franzosa, 《Morse 分解的连接矩阵理论》, 《美国数学会汇刊》311（1989）, 第2期, 561–592。[10] David C. Lay、Steven R. Lay 和 Judi J. McDonald, 《线性代数及其应用》, 第5版, 培生, 2014年。[11] Kenneth R. Meyer, 《Morse-Smale 系统的能量函数》, 《美国数学杂志》90（1968）, 第4期, 1031–1040。[12] Richard Moeckel, 《Morse 分解与连接矩阵》, 《遍历理论与动力系统》8（1988）, 227–249。[13] James R. Munkres, 《拓扑学》, 拓扑学精选书目, 普兰蒂斯·霍尔, 2000年。[14] Jacob J. Palis 和 Welington de Melo, 《动力系统几何理论：导论》, 施普林格纽约, 2012年。[15] James F. Reineck, 《Morse-Smale 流中的连接矩阵》, 《美国数学会汇刊》322（1990）, 第2期, 523–545。[16] Stephen Smale, 《动力系统的 Morse不等式》, 《美国数学会通报》66（1960）, 43–49。[17] , 《可微动力系统》, 《美国数学会通报》73（1967）, 第6期, 747–817。[18] Charles A. Weibel, 《同调代数导论》, 《剑桥高等数学研究》, 剑桥大学出版社, 1994年。[19] , 《同调代数导论——1995年平装版勘误》, 1995年, 详见 https://sites.math.rutgers.edu/~weibel/Hbook-corrections.html, 访问日期：2024年10月15日。