arXiv:2601.22088v1 [math.AP] 29 Jan 2026

关于磁性双分量 Hunter–Saxton 系统的全局弱解

LEVIN MAIER

Abstract. 我们研究磁性双分量 Hunter–Saxton 系统（M2HS），该系统最近在 [19] 中被推导为无限维构形空间上的磁测地线方程。尽管那里概述了几何框架与全局弱流，本文从偏微分方程的角度为这一构造提供了解析基础。首先，我们通过 Riccati 约化在拉格朗日变量中导出显式解公式，从而给出爆破解据的另一证明，并给出爆破时间的显式表达式。其次，我们通过发展松弛构形空间及相关弱磁性测地线流的解析理论，严格构造全局守恒弱解，从而实现了在 [19]中提出的几何方案。

1. Introduction

1.1. 方程与动机。在本文中，我们研究最近在 [19]中引入的磁性双分量 Hunter–Saxton 系统：

$$\text{(M2HS)}\qquad \begin{cases} u_{tx} = -\dfrac{1}{2}u_x^2 - u\,u_{xx} + \dfrac{1}{2}\rho^2 - \big(s\rho + 2(c^2 - s\delta)\big) & \text{in } \mathbb{S}^1 \times (0,\infty), \\ \rho_t = -(\rho u)_x + s\,u_x & \text{in } \mathbb{S}^1 \times (0,\infty), \\ u(\cdot,0) = u_0, \qquad \rho(\cdot,0) = \rho_0 & \text{in } \mathbb{S}^1. \end{cases}$$

这里， $s \in \mathbb{R}$ 是磁参数，

$$\delta := \frac{1}{2}\int_{\mathbb{S}^1} \rho(t,x)\,\mathrm{d}x$$

表示接触角，且

$$c^2 := \frac{1}{4}\int_{\mathbb{S}^1} \big(u_x(t,x)^2 + \rho(t,x)^2\big)\,\mathrm{d}x$$

是 $\dot{H}^1$-能量。根据 [19, 定理 5.1]，这两个量沿光滑解均守恒。

参数 s 可以解释为该系统几何表述中潜在磁场的强度。它将速度分量与密度分量耦合起来，并导致与非磁性情形显著不同的动力学。本文的一个核心目标，是将光滑解的显式描述（包括爆破解行为）与一种全局守恒的弱理论相结合，从而使动力学得以延续至奇异性形成之后。

对于 $s = 0$，系统（M2HS）简化为经典双分量 Hunter–Saxton 系统 [27, 18]。若 $\rho \equiv s$，则可得到标量 Hunter–Saxton 方程，该方程用于描述向列液晶中非线性取向波的传播 [12]，并具有与测地线流相关的丰富几何结构 [13, 15, 16]。[1]

除了源自液晶领域外，Hunter–Saxton 系统还出现在数理物理中，可作为一维非耗散暗物质（Gurevich–Zybin 系统）的模型，也可视为双分量 Camassa–Holm 系统的短波极限 [23, 5, 8, 9,10]。它属于更广泛的一类耦合三阶系统，其中包括轴对称 Euler 流（含旋流）和涡量动力学模型 [26, 11, 6, 22, 21]。

从几何的角度来看，系统（M2HS）在 [19] 中被推导为无限维构形空间上哈密顿系统的运动方程。在这一框架下，光滑解可以解释为几何流的轨迹，而奇异性的形成则对应于相关拉格朗日映射的退化。此外，[19] 提出，通过扩展构形空间，即使光滑性遭到破坏，也可以在弱意义下全局延拓这一几何流。本文为这一研究方案奠定了分析基础，并在偏微分方程层面使这种延拓严格化。

有了这一动机，下面转而介绍本文的主要贡献。

1.2. **本文的主要贡献**。 本文的主要结果可概括如下：

- **在 $\mathcal{M}_{\dot{H}^1}$ 上的弱磁测地线框架**。 我们在松弛构形空间 $\mathcal{M}_{\dot{H}^1}$ 上引入弱磁测地线的概念，并建立研究弱磁流所需的分析框架（参见定义 4.4）。

- **弱磁流的整体存在性**。我们证明弱磁流在 $\mathcal{M}_{\dot{H}^1}$ 上的整体存在性，并为可容许初始数据给出全局单位速度弱磁测地线的显式构造（见定理 4.5）。作为特例，这恢复了双分量 Hunter–Saxton 系统（$s = 0$） [27, 定理 4.1] 以及标量 Hunter–Saxton 方程（$\rho \equiv s$） [16, 定理 4.1]的已知弱流。

- **（M2HS）的全局守恒弱解**。通过将弱磁流转回欧拉变量，我们得到磁性双分量 Hunter–Saxton 系统（M2HS）的全局守恒弱解（见定理 4.12）。这将以下情形的经典弱解理论加以推广： $s = 0$ [27, 定理 4.2]与 $\rho \equiv s$ [16, 定理 4.2]。

- **守恒律**。我们证明， $\dot{H}^1$在此构造的弱解沿时间几乎处处守恒–能量和接触角（见定理 4.12）。

- **显式解公式与爆破解析**。我们通过拉格朗日变量中的 Riccati 约化，推导出（M2HS）光滑解的显式表示公式（见定理 3.2）。由此，我们得以另辟蹊径证明 [19] 中的几何爆破判据，并得到爆破时间的显式表达式。在特殊情形下， $s = 0$ Wunsch 关于双分量 Hunter–Saxton 系统的显式解公式 [27,定理 2。1] 得以恢复。

H在概述了主要结果之后，我们现在简要介绍本文的结构。

1.3. **文章结构**。 在第2节中，我们回顾磁测地线的几何背景，并说明磁性双分量 Hunter–Saxton 系统如何作为构型空间上的磁测地线方程出现。

在 第3节 中，我们转而采用拉格朗日变量，并将该系统化简为复黎卡提方程。由此可得显式解公式、爆破解据和显式爆破时间；我们还讨论磁参数较大的情形 s。

弱理论将在第 4 节中展开。我们将在那里引入松弛构形空间 $\mathcal{M}_{\dot{H}^1}$，定义弱磁测地线，证明弱磁流的整体存在性，并利用它构造（M2HS）的全局守恒弱解，且能量和接触角几乎处处随时间守恒。

弱理论中用到的技术引理汇集于附录 A。

致谢：作者感谢德国研究联合会（DFG，德国研究联合会）提供的资助：281869850（RTG 2229）、390900948（EXC-2181/1）和 281071066（TRR 191）。

2. Preliminaries: geometric origin of（M2HS）

本节回顾磁测地线的几何框架，并说明磁性双分量 Hunter–Saxton 系统如何作为无限维构形空间上的磁测地线方程出现。我们还将介绍该方程的一种等价表述，这对后文发展的弱理论至关重要，并说明该系统与希尔伯特球面上的一个线性常微分方程之间的联系。

2.1. 背景：磁测地线。

我们沿用 V. Arnold 的开创性方法 [2]，介绍用于研究带电粒子在磁场作用下动力学的数学框架。

设 (M, g) 是 [14] 意义下的强黎曼希尔伯特流形，且 $\sigma \in \Omega^2(M)$ 是一个闭二形式。形式 σ 称为**磁场**，而 (M, g, σ) 称为**磁系统**。这一三元组确定了一个斜对称丛自同态 Y: $TM \to TM$，即洛伦兹力，其定义如下:

$$g_q\big(Y_q u, v\big) = \sigma_q(u, v), \qquad \forall\, q \in M,\ \forall\, u, v \in T_qM.$$

若光滑曲线 γ: $\mathbb{R} \to M$ 满足下式，则称其为 (M, g, σ) 的一条**磁测地线**：

$$\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma = Y_\gamma \dot\gamma, \tag{2.1}$$

其中 ∇ 表示度量 g的 Levi-Civita 联络。方程（2.1）在 $\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma = 0$ 时化为测地线方程 $\sigma = 0$，即磁场消失时。

与标准测地线一样，磁测地线具有恒定的动能

$$E(\gamma, \dot\gamma) := \tfrac{1}{2} g_\gamma(\dot\gamma, \dot\gamma),$$

因此以恒定速度 $|\dot\gamma| := \sqrt{g_\gamma(\dot\gamma,\ \dot\gamma)}$ 运动，因为洛伦兹力 Y是反对称的。

这种能量守恒反映了该系统的哈密顿性质。事实上，**磁测地流** 定义在切丛上，其定义为

$$\Phi^t_{g,\sigma} : TM \to TM, \quad (q, v) \mapsto \big(\gamma_{q,v}(t), \dot\gamma_{q,v}(t)\big), \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

其中 $\gamma_{q,\ v}$是具有初始条件 $(q,\ \ v)\ \in TM$的唯一磁测地线。

与标准测地线的一个关键区别是，不同速率的磁测地线并非只是单位速磁测地线的重新参数化。例如，从式（2.1）左侧随速率的平方变化，而右侧仅随速率线性变化这一事实即可看出这一点。因此，该理论的一个重要方面

是了解随着动能变化，标准测地线与磁测地线之间的相似之处和差异。

2.2. （M2HS）作为磁测地线方程。现在我们更详细地介绍这一几何背景。令 $\mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ 表示单位圆，$\mathrm{Diff}_0^m(\mathbb{S}^1)$ 表示由 Sobolev类 H^m 的 Sobolev微分同胚构成的半李群，其右乘法光滑，而左乘法仅连续；关于半李群的概念，参见 [3]。该群由所有将 $\mathbb{S}^1$ 映射到自身、属于 Sobolev类 H^m 且固定一个指定点的微分同胚构成。除非另有说明，我们假设 $m > \frac{5}{2}$。注意，$\mathrm{Diff}_0^m(\mathbb{S}^1) \cong \mathrm{Dens}^m(\mathbb{S}^1)$，其中 $\mathrm{Dens}^m(\mathbb{S}^1)$ 表示 $\mathbb{S}^1$ 上 Sobolev类 H^m 的概率密度空间；参见 [7, §5] 和 [13]。

我们进一步用 $\mathbb{S}^1_{4\pi}$ 表示长度为 4π 的圆，并用 $H^m(\mathbb{S}^1, \mathbb{S}^1_{4\pi})$ 表示 Sobolev类 H^m 的映射空间。半李群 G^m 定义为

$$G^m = \mathrm{Diff}_0^m(\mathbb{S}^1) \circledcirc H^{m-1}(\mathbb{S}^1, \mathbb{S}^1_{4\pi}),$$

其中显式的群乘积结构在 [17, §2]中描述。该群带有一个右不变度量，即 $\dot{H}^1$-度量，在单位元(id,0)处定义为

$$\mathcal{G}^{\dot{H}^1}_{(\mathrm{id},0)}\big((u,\rho),(v,\psi)\big) := \langle (u,\rho),(v,\psi)\rangle^{\dot{H}^1}_{(\mathrm{id},0)} = \frac{1}{4}\int_{\mathbb{S}^1} u_x v_x + \rho\psi \,\mathrm{d}x, \tag{2.2}$$

其中单位元处的切空间为 $T_{(\mathrm{id},0)}G^m \cong H_0^m(\mathbb{S}^1,\mathbb{R}) \times H^{m-1}(\mathbb{S}^1,\mathbb{R})$。此处$H_0^m(\mathbb{S}^1,\mathbb{R})$表示零均值Sobolev函数空间。由右不变性，（2.2）中的度量延拓到所有点 $(\varphi,\tau) \in G^m$ 如下

$$\mathcal{G}^{\dot{H}^1}_{(\varphi,\tau)}\big((U_1,U_2),(V_1,V_2)\big) := \langle (U_1,U_2),(V_1,V_2)\rangle^{\dot{H}^1}_{(\varphi,\tau)} = \frac{1}{4}\int_{\mathbb{S}^1} \frac{U_{1x}V_{1x}}{\varphi_x} + U_2V_2\varphi_x \,\mathrm{d}x,$$

其中$(U_1,U_2),(V_1,V_2) \in T_{(\varphi,\tau)}G^m \cong H_0^m(\mathbb{S}^1,\mathbb{R}) \times H^{m-1}(\mathbb{S}^1,\mathbb{R})$。更多细节请再次参见 [17, §2]。记号既定后，我们便可陈述：

定理 2.1 ([19, 定理5.1])。一条 C^2-曲线$(\varphi,\tau)\colon [0,T) \longrightarrow G^m$，其中 $T > 0$为最大存在时间，是带有 $m > \frac{5}{2}$ 的系统 $\left(G^m, \mathcal{G}^{\dot{H}^1}, \Phi^*\mathrm{d}\alpha\right)$ 的磁测地线，当且仅当

$$(u = \varphi_t \circ \varphi^{-1}, \rho = \tau_t \circ \varphi^{-1}) \in C\left([0,T), T_{(\mathrm{id},0)}G^m\right) \cap C^1\left([0,T), T_{(\mathrm{id},0)}G^{m-1}\right)$$

是磁性双分量 *Hunter–Saxton* 系统 (M2HS)，即：

$$\begin{cases} u_{tx} = -\frac{1}{2}u_x^2 - u\,u_{xx} + \frac{1}{2}\rho^2 - (s\rho + 2(c^2 - s\delta)), \\ \rho_t = -(\rho u)_x + s u_x, \end{cases} \tag{M2HS}$$

其中 c^2 是系统的 $\dot{H}^1$ 能量，为一个守恒量，其定义为

$$c^2 = \frac{1}{4}\int_{\mathbb{S}^1} \left(u_x^2 + \rho^2\right)\mathrm{d}x.$$

此外，接触角 δ 也是一个守恒量，定义为

$$\delta = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{S}^1} \rho \,\mathrm{d}x.$$

下面对磁测地线方程进行的改写，稍后在定义全局弱解和显式构造全局弱解时都将起到关键作用。

命题 2.2。 $\left(G^m, \mathcal{G}^{\dot{H}^1}, \Phi^*\mathrm{d}\alpha\right)$ 在点 $(\varphi, \tau) \in G^m$ 处的磁测地线方程为：

$$\begin{pmatrix} (u_t + uu_x)\circ\varphi - \frac{1}{2}\left(\int_0^{\varphi(\cdot)} \left(u_x^2(y) + \rho^2(y)\right)\mathrm{d}y - \varphi(\cdot)(c^2 - s\delta)\right) - s\int_0^{\varphi(\cdot)} \rho(y)\,\mathrm{d}y \\ (\rho_t + (u\rho)_x - su_x\rho)\circ\varphi \end{pmatrix} = 0,$$

其中 c^2 和 δ 是定理 *2.1* 中的守恒量定理 *2.1*。

从几何视角看，（M2HS）的动力学可与无限维希尔伯特球面上的线性常微分方程相关联。

结合 [19], 的结果可知，曲线（φ， τ）是（G^m， $\mathcal{G}^{\dot{H}^1}$， $\Phi^*\mathrm{d}\alpha$）的一条磁测地线，其磁场强度为 s、速度为 c，当且仅当复值函数

$$\gamma := \sqrt{\varphi_x}\, e^{\mathrm{i}\tau/2}$$

满足

$$\ddot{\gamma} - \mathrm{i}s\dot{\gamma} + \big(c^2 - s\delta\big)\gamma = 0 \quad \text{in } L^2(\mathbb{S}^1, \mathbb{C}). \tag{2.3}$$

这里， δ 是一个守恒量，表示 $\dot{\gamma}$ 与向量场 $R(\gamma) = \mathrm{i}\gamma$ 之间的夹角，其表达式为

$$\delta = \mathrm{Re}\langle \mathrm{i}\gamma, \dot{\gamma}\rangle_{L^2}.$$

此外，沿用 [1, §3] 方程（2.3）的思路，可得到显式解公式。具体而言，

$$\gamma(t) = e^{\mathrm{i}\theta_1 t}p_1 + e^{\mathrm{i}\theta_2 t}p_2,$$

其中

$$\theta_{1/2} = \frac{s \pm \sqrt{s^2 + 4(c^2 - s\delta)}}{2}, \qquad p_{1/2} = \mp\frac{\theta_{2/1}\,\gamma(0) + \mathrm{i}\dot{\gamma}(0)}{\theta_1 - \theta_2}.$$

3. Explicit solution formula for the magnetic two-component Hunter–Saxton system

概述。 本节推导磁性双分量 Hunter–Saxton 系统（M2HS）解的显式表示公式。该公式不仅为 [19], 中从几何角度建立的爆破解据提供了另一种证明，而且还给出了爆破时间的显式表达式。我们的方法受到 Wunsch 为（非磁性）双分量 Hunter–Saxton 系统提出的方法 [27], 的启发，但磁性项的存在需要进行额外的技术性修改；特别是，下文出现的所有方程都是[27]中相应方程的非平凡扰动。令 $s = 0$ ，即可将 Wunsch 的显式公式作为一个特例恢复出来。

Throughout ，我们假设 $m > \frac{5}{2}$，并考虑一个 Sobolev 类的解对（u， ρ） s

$$(u, \rho) \in C\big([0, T); H^m(\mathbb{S}^{2n+1^1}) \times H^{m-1}(\mathbb{S}^{2n+1^1})\big),$$

因此，根据索伯列夫嵌入，这些函数在空间上至少是 C^2 。

3.1. **拉格朗日变量下的 (M2HS) 系统**。 设 (u,ρ) 是定义在 $\mathbb{S}^1$ 上的磁性双分量 Hunter–Saxton 系统的一个解:

$$\begin{cases} u_{tx} = -\frac{1}{2}u_x^2 - u\,u_{xx} + \frac{1}{2}\rho^2 - \big(s\rho + 2(c^2 - s\delta)\big), \\ \rho_t = -(\rho u)_x + s u_x, \\ u(0,\cdot) = u_0, \qquad \rho(0,\cdot) = \rho_0. \end{cases} \tag{3.1}$$

令 φ 表示由 u 生成的流，即

$$\varphi_t(t,x) = u(t,\varphi(t,x)), \qquad \varphi(0,x) = x. \tag{3.2}$$

定义拉格朗日变量

$$U(t,x) := u_x\big(t,\varphi(t,x)\big), \qquad P(t,x) := \rho\big(t,\varphi(t,x)\big).$$

利用链式法则直接计算可得

$$\frac{d}{dt}U = u_{tx}\circ\varphi + (u_{xx}\circ\varphi)\,\varphi_t, \qquad \frac{d}{dt}P = \rho_t\circ\varphi + (\rho_x\circ\varphi)\,\varphi_t.$$

Su代入 (3.1) 并利用 $\varphi_t = u\circ\varphi$，可得到封闭的常微分方程组

$$\begin{cases} U_t = -\frac{1}{2}U^2 + \frac{1}{2}P^2 - \big(sP + 2(c^2 - s\delta)\big), \\ P_t = -PU + sU, \\ U(0,\cdot) = (u_0)_x, \qquad P(0,\cdot) = \rho_0. \end{cases} \tag{3.3}$$

3.2. **化归为 Riccati 方程**。 引入复值函数

$$Z(t,x) := U(t,x) + iP(t,x).$$

那么，3.3) 等价于以下 Riccati 型常微分方程

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}Z = -\dfrac{1}{2}Z^2 + is\,Z - 2(c^2 - s\delta), \\ Z(0,\cdot) = Z_0 := (u_0)_x + i\rho_0. \end{cases} \tag{3.4}$$

引理 3.1. 若 (u,ρ) 满足 (3.1) 且 φ 是由 (3.2)定义的流，则函数

$$Z(t,x) = u_x\big(t,\varphi(t,x)\big) + i\,\rho\big(t,\varphi(t,x)\big)$$

满足 (3.4)。

3.3. **显式表示公式与爆破解据**。 接下来，我们显式求解 (3.4)。定义

$$\theta_{1/2} = \frac{s \pm \sqrt{s^2 + 4(c^2 - s\delta)}}{2}. \tag{3.5}$$

在单位速度情形下 $c = 1$，并假设 $\delta \neq 0$，我们有 $\theta_1 \neq \theta_2$。

定理 3.2 （显式解公式和爆破时间）。 设 $(u,\ \rho)$ 是方程 (3.1)的一个解，其初始数据为 $(u_0,\ \rho_0) \in H^m(\mathbb{S}^{2n+1^1}) \times H^{m-1}(\mathbb{S}^{2n+1^1})$，假设 $c = 1$ 且 $\delta \neq 0$，并设 φ为流 (3.2)。则:

(1) 量 $u_x\circ\varphi$ 和 $\rho\circ\varphi$ 具有如下显式表示

(3.6)

$$u_x\big(t,\varphi(t,x)\big)=\frac{\big(-(\theta_1-\theta_2)\tan\big(\frac{\theta_1-\theta_2}{2}t\big)+(u_0)_x(x)\big)\left(1+(u_0)_x(x)\frac{\tan\left(\frac{\theta_1-\theta_2}{2}t\right)}{\theta_1-\theta_2}\right)+(\rho_0(x)-s)^2\frac{\tan\left(\frac{\theta_1-\theta_2}{2}t\right)}{\theta_1-\theta_2}}{\left(1+(u_0)_x(x)\frac{\tan\left(\frac{\theta_1-\theta_2}{2}t\right)}{\theta_1-\theta_2}\right)^2+\left((\rho_0(x)-s)\frac{\tan\left(\frac{\theta_1-\theta_2}{2}t\right)}{\theta_1-\theta_2}\right)^2},$$

$$\rho\big(t,\varphi(t,x)\big)=\frac{\big(1+\tan^2(\frac{\theta_1-\theta_2}{2}t)\big)\,(\rho_0(x)-s)}{\left(1+(u_0)_x(x)\frac{\tan\left(\frac{\theta_1-\theta_2}{2}t\right)}{\theta_1-\theta_2}\right)^2+\left((\rho_0(x)-s)\frac{\tan\left(\frac{\theta_1-\theta_2}{2}t\right)}{\theta_1-\theta_2}\right)^2}.$$

(2) 函数 $u_x\circ\varphi$ 和 $\rho\circ\varphi$发生奇异性，当且仅当存在 $x_0\in\mathbb{S}^{2n+1}$[1]和 $t_0>0$ 使得

(3.7)
$$\rho_0(x_0)=s\qquad and\qquad t_0=\frac{2\ \operatorname{arccot}\left(-\frac{(u_0)_x(x_0)}{\theta_1-\theta_2}\right)}{\theta_1-\theta_2}.$$

备注 3.3。 条件 $\rho_0(x_0)=s$ 为通过几何论证得到的爆破解据 [19]提供了另一种证明。与几何方法相比，(3.7) 给出了明确的爆破时间。

备注 3.4。 令 $s=0$ 在定理 *3.2* 中，可恢复 [27, 定理 2。1]。

定理 *3.2*的证明。 通过变量分离求解(3.4)，可得到 $Z(t)=U(t)+iP(t)$的显式表达式。在单位速度情形 $c=1$ 下，可得

$$Z(t)=-(\theta_1-\theta_2)\tan\left(\frac{\theta_1-\theta_2}{2}(t-C)\right)+is$$

其中常数 C 由初始条件确定。利用正切加法公式，并将所得表达式改写为实部和虚部的形式，可得到表示式(3.6)。

关于爆破解据，注意到奇异性只有在3.6中的分母为零时才会出现。当且仅当存在 x_0、 t_0 使得同时满足

$$(\rho_0(x_0)-s)\frac{\tan\left(\frac{\theta_1-\theta_2}{2}t_0\right)}{\theta_1-\theta_2}=0,\qquad 1+(u_0)_x(x_0)\frac{\tan\left(\frac{\theta_1-\theta_2}{2}t_0\right)}{\theta_1-\theta_2}=0.$$

由于 $\delta\neq0$ 蕴含 $\theta_1\neq\theta_2$，第二个方程要求 $\tan(\frac{\theta_1-\theta_2}{2}t_0)\neq0$，因此~~$\rho_0$~~$(x_0)=s$。由第二个方程解出 t_0 可得（3.7）。□

3.4. 强磁场下爆破的渐近不存在性。最后，我们研究磁场强度 $s\to\infty$ 增大时的爆破机制。

引理 3.5。 在定理*3.2*的假设下，表达式(3.6) 在极限 $s\to\infty$下不具有奇异性。

证明。 由（3.5）可得

$$\theta_1-\theta_2=\sqrt{s^2+4(1-s\delta)}.$$

根据定理 3.2，爆破要求存在 $x_0\in\mathbb{S}^1$ 使得 $\rho_0(x_0)=s$。由于 ρ_0 固定，而 $s\to\infty$，当 x_0 足够大时，不存在这样的 s。因此，(3.6) 中的分母不可能为零，也不会出现奇异性。□

问题 3.6。 是否存在 $C > 0$ 使得对所有 $s > C$ 表达式 (3.6) 对所有可容许初始数据都保持全局正则（即永不出现奇异性）？

4. Global conservative weak solutions of the magnetic two-component Hunter–Saxton system

目的与结构。本节将详细阐述磁性双分量 Hunter–Saxton 系统（M2HS）全局时间弱解理论的解析基础。主要目标是：**(i)** 引入构型空间 G^m 的自然松弛 $\mathcal{M}_{\dot{H}^1}$，以容纳塌缩机制 $\varphi_x \to 0$；**(ii)** 在 $\mathcal{M}_{\dot{H}^1}$ 上建立适当的弱磁测地线 概念，并证明此类流的整体存在性；**(iii)** 将流转换回欧拉变量，从而获得（M2HS）的全局守恒弱解。

4.1. 准备： 的闭包及其切结构。 回顾一下，对于 $m > \frac{5}{2}$，每个足够光滑的解（u， ρ）都对应于（G^m， $\mathcal{G}^{\dot{H}^1}$， $\Phi^*\mathrm{d}\alpha$）上的一条磁测地线（φ， τ），其对应关系为

$$u = \varphi_t \circ \varphi^{-1}, \qquad \rho = \tau_t \circ \varphi^{-1}.$$

此外，欧拉变量中的爆破可由拉格朗日映射的退化来检测：存在 $T > 0$ 和 $x_0 \in \mathbb{S}^1$ 使得

$$\lim_{t \uparrow T} \varphi_x(t, x_0) = 0.$$

特别地，$(\varphi(t)\ \tau(t))$ 可能在有限时间内离开 G^m。这促使我们将微分同胚分量放宽为单调绝对连续映射。

我们简要回顾，函数 $f\colon [0,1] \to [0,1]$ 是 绝对连续的，当且仅当它具有几乎处处导数 $f' \in L^1([0,1])$，并且

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(y)\,\mathrm{d}y, \qquad x \in [0,1].$$

我们用 $AC([0,1],[0,1])$ 表示取值于 $[0,1]$ 的绝对连续映射类。虽然 $AC([0,1])$ 和 $H^1([0,1])$ 在零测集意义下作为集合相同，但约束 $f([0,1]) \subset [0,1]$ 是一项额外性质。

遵循 [27], ，我们引入松弛构形空间。

定义 4.1（松弛构形空间）。 定义

$$\mathcal{M}_{\dot{H}^1} := M^0_{AC} \rtimes L^2(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}),$$

其中 M^0_{AC} 由所有满足 $\varphi(0) = 0$ 和 $\varphi(1) = 1$的非递减绝对连续映射 $\varphi\colon [0,1] \to [0,1]$ 组成。半直积乘法与 G^m相同（参见 [17,§2]）。

注 4.2. 鉴于判据 $\varphi_x \to 0$，集合 M^0_{AC} 可视为$\mathrm{Diff}_0(\mathbb{S}^1)$（固定0的保向圆微分同胚）的自然闭包。

将 $AC(\mathbb{S}^1)$ 认作 $H^1(\mathbb{S}^1)$，则 $(\mathrm{id},0)$ 处的切空间为

$$T_{(\mathrm{id},0)}\mathcal{M}_{\dot{H}^1} = \Big\{ u \in H^1(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}) : u(0) = 0 \Big\} \times L^2(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}).$$

Fo对于一般的 $(\varphi,\tau)\in\mathcal{M}_{\dot{H}^1}$，我们通过右平移定义切空间：

$$T_{(\varphi,\tau)}\mathcal{M}_{\dot{H}^1}=\Big\{(u\circ\varphi,\rho\circ\varphi):(u,\rho)\in T_{(\mathrm{id},0)}\mathcal{M}_{\dot{H}^1}\Big\}.$$

Wunsch 给出了一种有用的内在刻画 [27, 引理 3。1]。令 $\varphi\in AC\left(\mathbb{S}^1\right)$ 为

$$N_\varphi:=\{x\in\mathbb{S}^1:\ \varphi_x(x)\text{ exists and }\varphi_x(x)=0\}.$$

引理 4.3 （[27, 引理 3。1]）。设 $(\varphi,\tau)\in\mathcal{M}_{\dot{H}^1}$。则 $(U,F)\in AC\left(\mathbb{S}^1\right)\times L^2\left(\mathbb{S}^1,\mathbb{R}\right)$ 属于 $T_{(\varphi,\tau)}\mathcal{M}_{\dot{H}^1}$ 当且仅当满足以下条件：

(1) $U(0)=0$ *and* $U_x=0$ *a.e. on* N_φ,

(2) $\displaystyle\int_{\mathbb{S}^1\setminus N_\varphi}\left(\frac{U_x^2}{\varphi_x}+F^2\varphi_x\right)\mathrm{d}x<\infty.$

此外，对于 (U,F)，$(V,G)\in T_{(\varphi,\tau)}\mathcal{M}_{\dot{H}^1}$，（右不变）度量为

$$\langle(U,F),(V,G)\rangle_{(\varphi,\tau)}=\frac{1}{4}\int_{\mathbb{S}^1\setminus N_\varphi}\left(\frac{U_xV_x}{\varphi_x}+FG\,\varphi_x\right)\mathrm{d}x.$$

4.2. 上的弱磁测地线 $\mathcal{M}_{\dot{H}^1}$。 现在，我们在松弛空间 $\mathcal{M}_{\dot{H}^1}$ 上表述磁测地流的弱类比。

定义 4.4 （弱磁测地线）。一条 (φ,τ) 曲线，其初始数据为 $(u_0,\rho_0)\in T_{(\mathrm{id},0)}\mathcal{M}_{\dot{H}^1}$，称为 $(\mathcal{M}_{\dot{H}^1},\mathcal{G}^{\dot{H}^1},\Phi^*\mathrm{d}\alpha)$ 的弱磁测地线，如果满足以下条件：

(1) 曲线 (φ,τ) 对所有 $t\geq0$ 均保持在 $\mathcal{M}_{\dot{H}^1}$ 中；也就是说，

$$\big[x\mapsto(\varphi(t,x),\tau(t,x))\big]\in\mathcal{M}_{\dot{H}^1}\quad\forall t\in[0,\infty)\,.$$

(2) 时间 导数 (φ_t,τ_t) 对所有 $t\geq0$ 均属于切空间 $T\mathcal{M}_{\dot{H}^1}$；也就是说，

$$\big[x\mapsto(\varphi_t(t,x),\tau_t(t,x))\big]\in T_{(\varphi(t,\cdot),\tau(t,\cdot))}\mathcal{M}_{\dot{H}^1}\quad\forall t\in[0,\infty)\,.$$

(3) 动能几乎处处关于时间保持恒定；也就是说，对于几乎所有$t\in[0,\infty)$，

$$\langle(\varphi_t(t),\tau_t(t)),(\varphi_t(t),\tau_t(t))\rangle_{\dot{H}^1,(\varphi,\tau)}=\langle(\varphi_t(0),\tau_t(0)),(\varphi_t(0),\tau_t(0))\rangle_{\dot{H}^1,(\mathrm{id},0)}\,.$$

此外，接触角几乎处处守恒；也就是说，对于几乎所有$t\in[0,\infty)$，

$$\delta:=\int_{\mathbb{S}^1}\rho_0(x)\,\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{S}^1}\tau_t(t,x)\,\mathrm{d}x\,.$$

(4) 对几乎所有 $t\in[0,\infty)$，曲线 (φ,τ) 满足命题 命题 *2.2*中给出的磁测地线方程，对应于磁系统 $(G^m,\mathcal{G}^{\dot{H}^1},\Phi^*\mathrm{d}\alpha)$。我们进一步称 (φ,τ) 为 单位速度弱磁测地线，如果初始数据满足

$$\langle(u_0,\rho_0),(u_0,\rho_0)\rangle_{\dot{H}^1}=1\,.$$

下一个定理给出了$\mathcal{M}_{\dot{H}^1}$上弱磁测地线的显式整体构造。其证明依赖于这样一个事实：马德隆变换是一个磁同构（参见光滑范畴中的相应结果）。

定理 4.5（弱磁流的整体存在性）。 假设 $(u_0,\ \rho_0) \in T_{(\mathrm{id},0)}\mathcal{M}_{\dot{H}^1}$满足 $\langle (u_0,\ \rho_0), (u_0,\ \rho_0) \rangle_{\dot{H}^1} = 1$ 并定义 $\theta_{1/2}$ 为

$$\theta_{1/2} = \frac{s \pm \sqrt{s^2 + 4(1 - s\delta)}}{2}.$$

对于$(t, x) \in [0, \infty) \times \mathbb{S}^1$ 集

$$\varphi(t,x) = \int_0^x \left| \frac{1}{\theta_2 - \theta_1} \left[\theta_2 e^{\mathrm{i}\theta_1 t} - \theta_1 e^{\mathrm{i}\theta_2 t} + \frac{\mathrm{i}}{2} \big(u_{0,x}(y) + \mathrm{i}\rho_0(y)\big) \big(e^{\mathrm{i}\theta_1 t} - e^{\mathrm{i}\theta_2 t}\big) \right] \right|^2 \mathrm{d}y, \tag{4.1}$$

and

$$\tau(t,x) = \rho_0(x) \int_0^t \chi_{\{\varphi_x(s,\cdot)>0\}} \frac{1}{\varphi_x(s,x)} \,\mathrm{d}s. \tag{4.2}$$

那么，(φ, τ) 是$(\mathcal{M}_{\dot{H}^1}, \mathcal{G}^{\dot{H}^1}, \Phi^*\mathrm{d}\alpha)$上的全局单位速度弱磁测地线。

注 4.6. 在定理 $s = 0$ 中令 *4.5* 即可得到 [27, 定理 4.1]。取 $\rho \equiv s$ 则可得到 *Hunter–Saxton* 方程的相应结论 [16,定理 4.1]。

注 4.7. 该构造可直接推广到具有 $\mathcal{G}^{\dot{H}^1}$-能量 $c^2 > 0$ 的初始数据，从而得到能量为 c^2的弱磁测地线。

4.3. **（M2HS）的全局守恒弱解**。 我们现在定义下文所用弱解的欧拉表示，并说明它如何由弱磁流诱导得到。

本小节旨在根据定理 4.5所建立的弱磁流整体存在性，推导出（M2HS）某种全局弱解概念的整体存在性。为此，我们引入以下定义。

定义 4.8（全局守恒弱解）。 一对 $(u, \rho)\colon [0, \infty) \times \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$ 称为 （） 的(M2HS) 具有初始数据 $(u_0, \rho_0) \in H^1(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}) \times L^2(\mathbb{S}^1, \mathbb{R})$ 的全局守恒弱解，当且仅当满足以下条件：

(1) 对所有 $t \in [0, \infty)$，都有 $x \mapsto u(t, x) \in H^1(\mathbb{S}^1, \mathbb{R})$。 *(2)* 映射 $u\colon [0, \infty) \times \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$ 是连续的，并且初始条件分别逐点和几乎处处成立：

$$u(0,x) = u_0(x) \quad \textit{for all } x \in \mathbb{S}^1, \qquad \rho(0,x) = \rho_0(x) \quad \textit{for a.e. } x \in \mathbb{S}^1.$$

(3) 映射 $t \mapsto u_x(t, \cdot)$ 和 $t \mapsto \rho(t, \cdot)$ 属于 $L^\infty([0, \infty)\ L^2(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}))$.
(4) 映射 $t \mapsto u(t, \cdot)$ 从 $[0, \infty)$ 到 $L^2(\mathbb{S}^1, \mathbb{R})$ 绝对连续，并且对于几乎所有 $t \in [0, \infty)$，有序对 $(u(t, \cdot)\ \rho(t, \cdot))$ 满足在 $(id, 0)$ 处取值的命题 *2.2* 中的方程；也就是说，

$$\begin{pmatrix} u_t + uu_x \\ \rho_t + u\rho_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}A^{-1}\partial_x(u_x^2 + \rho^2) - s \cdot \int_0^x \left(\rho - \int_{\mathbb{S}^1} \rho \,\mathrm{d}x\right) \mathrm{d}x \\ -(\rho u)_x + s u_x \end{pmatrix} \quad \textit{in } L^2(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}) \times L^2(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}).$$

备注 4.9. 对于 $s = 0$， 定义 *4.8* 恢复了全局守恒弱解的概念，即双分量 *Hunter–Saxton* 系统的全局守恒弱解，定义见 [27,定义 4.2]。

注 4.10。 对于 $\rho \equiv s$， 定义 *4.8* 可简化为（单分量）*Hunter–Saxton* 方程的全局守恒弱解这一概念，该概念最初由 [16] 引入。

注 4.11。 定义 *4.8* 中的 守恒的一词 受 *Bressan–Constantin* 在 [4] 中提出的 *Hunter–Saxton* 方程守恒弱解概念启发。

现在，我们旨在将系统 $(G^m, \mathcal{G}^{\dot{H}^1}, \Phi^*\mathrm{d}\alpha)$ 的磁测地线与 (M2HS) 解之间的上述对偶关系——如 [19, 定理 5.1]所确立——推广到弱情形。

定理 4.12. 设 (φ, τ) 是 $\mathcal{M}_{\dot{H}^1}$ 中的弱单位速磁测地线，其初始数据为$(u_0, \rho_0) \in H^1(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}) \times L^2(\mathbb{S}^1, \mathbb{R})$。

那么，由下式定义的这一对

$$\begin{pmatrix} u(t, \varphi(t,x)) \\ \rho(t, \varphi(t,x)) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \varphi_t(t,x) \\ \tau_t(t,x) \end{pmatrix}, \quad \textit{for } (t,x) \in [0,\infty) \times \mathbb{S}^1,$$

是 (M2HS) 的全局守恒弱解，其初始数据为 (u_0, ρ_0)。

此外，能量几乎处处随时间保持为运动积分；也就是说，对于几乎所有的 $t \in [0,\infty)$，

$$\langle (u(t), \rho(t)), (u(t), \rho(t)) \rangle_{\dot{H}^1} = \langle (u_0, \rho_0), (u_0, \rho_0) \rangle_{\dot{H}^1} = 1\,. \tag{4.3}$$

此外，接触角几乎处处守恒；也就是说，对于几乎所有的 $t \in [0,\infty)$，

$$\delta = \int_{\mathbb{S}^1} \rho_0(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{S}^1} \tau_t(t,x)\,\mathrm{d}x\,.$$

注 4.13. 在 $s = 0$ 中取 定理 *4.12* 可得 [27, 定理 4.2]。

注 4.14. 在 $\rho \equiv s$ 中取 定理 *4.12* 可得 [16, 定理 4.2]。

注 4.15. 参见 [19]，了解 定理 *4.12* 的几何解释，以及其证明的几何视角。具体而言，请参阅 [19]。 定理 *4.12*给出了 [19]的解析细节

注 4.16. 作相应修改后，定理 *4.12* 的证明可推广到以下情形：初始数据的 $\mathcal{G}^{\dot{H}^1}$-范数 (u_0, ρ_0) 等于 $c^2 > 0$。此时，所得曲线 (u, ρ) 是 (M2HS) 的一个全局守恒弱解，具有 $\mathcal{G}^{\dot{H}^1}$- 能量 c^2。

4.4. **定理 4.5 的证明**。 我们证明，由（φ， τ）根据（4.1）和（4.2）定义的曲线是定义 4.4意义下的弱磁测地线。证明分为四个步骤，分别对应条件 （1）–（4）。

定理 *4.5* 的证明。 **（1）：** （φ（t） τ（t））$\in \mathcal{M}_{\dot{H}^1}$ **对所有** $t \geq 0$。 我们首先证明 $x \mapsto \varphi$（t， x）属于 M^0_{AC} 对每个 $t \geq 0$。由微积分基本定理可得

$$\varphi(t,x) = \int_0^x \varphi_x(t,y)\,\mathrm{d}y, \qquad (t,x) \in [0,\infty) \times \mathbb{S}^1.$$

因此 $x \mapsto \varphi$（t， x）对每个 $t \geq 0$ 均绝对连续，由引理 A.3。此外，由（4.1）可直接得到 φ_x（t， x） ≥ 0 几乎处处成立， $x \in \mathbb{S}^1$，因此 φ（t， $\cdot$）单调不减，且φ（t，**0**） $= 0$。

为验证端点约束 $\varphi(t,$ **1**$) = 1$，定义

$$\gamma(t,y) := \frac{1}{\theta_2 - \theta_1}\left[\theta_2 e^{\mathrm{i}\theta_1 t} - \theta_1 e^{\mathrm{i}\theta_2 t} + \frac{\mathrm{i}}{2}\big(u_{0,x}(y) + \mathrm{i}\rho_0(y)\big)\big(e^{\mathrm{i}\theta_1 t} - e^{\mathrm{i}\theta_2 t}\big)\right].$$

如构造过程中所述，γ 是 $(\mathbb{S}^\infty_{L^2}, \mathcal{G}^{L^2}, \mathrm{d}\alpha)$ 上的一条磁测地线，因此满足

$$\|\gamma(t,\cdot)\|_{L^2(\mathbb{S}^1)} = 1 \qquad \forall\, t \geq 0.$$

由于 $\varphi_x(t,x) = |\gamma(t,x)|^2$，我们推得

$$\varphi(t,1) = \int_0^1 \varphi_x(t,x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 |\gamma(t,x)|^2\,\mathrm{d}x = \|\gamma(t,\cdot)\|^2_{L^2} = 1.$$

因此，对于所有 $t \geq 0$，$\varphi(t,\cdot) \in M^0_{AC}$。

最后，根据显式定义（4.2），我们有

$$\tau(t,\cdot) \in L^2(\mathbb{S}^1,\mathbb{R}) \qquad \forall\, t \geq 0.$$

因此，对于所有 $t \geq 0$，$(\varphi(t)\ \tau(t)) \in \mathcal{M}_{\dot{H}^1}$。

条目（2）： $(\varphi_t(t)\ \ \tau_t(t)) \in T_{(\varphi(t),\tau(t))}\mathcal{M}_{\dot{H}^1}$ **对于所有** $t \geq 0$。我们验证引理 4.3中给出的刻画。首先，我们证明

$$(\varphi_t(t,\cdot),\tau_t(t,\cdot)) \in AC(\mathbb{S}^1)\times L^2(\mathbb{S}^1) \qquad \forall\, t \geq 0.$$

利用 $\varphi_x = |\gamma|^2$ 并在积分号下求导，我们对所有 $t \geq 0$ 得到

$$\varphi_t(t,x) = \int_0^x \Big(\gamma(t,y)\,\overline{\dot\gamma(t,y)} + \overline{\gamma(t,y)}\,\dot\gamma(t,y)\Big)\,\mathrm{d}y, \qquad x \in \mathbb{S}^1. \tag{4.4}$$

因此 $\varphi_t(t,\cdot)$ 根据引理 A.3 是绝对连续的。此外，由（4.2）我们有 $\tau_t(t,\cdot) \in L^2(\mathbb{S}^1)$。

Next 我们验证条件 (1) 于 引理 4.3。由于 $\varphi_t(t,0) = \varphi_t(t,1)$，（4.4）给出 s

$$\varphi_t(t,1) = 2\langle\gamma(t),\dot\gamma(t)\rangle_{L^2}.$$

因为 $\dot\gamma(t) \in T_{\gamma(t)}\mathbb{S}^\infty_{L^2}$，它与 $\gamma(t)$ L^2-正交，因此 $\varphi_t(t,1) = 0$，从而 $\varphi_t(t,0) = 0$。

令 $N := \{x:\ \varphi_x(t,x) = 0\}$。利用恒等式

$$\varphi_{tx} = (u_x \circ \varphi)\,\varphi_x,$$

我们得出 $\varphi_{tx} = 0$ 几乎处处于 N，这正是引理 4.3 中所要求的退化条件。

最后，条件 性质（2）由下文验证性质（3）这一步所证明的能量估计（参见（4.5）–（4.6））。因此，

$$(\varphi_t(t),\tau_t(t)) \in T_{(\varphi(t),\tau(t))}\mathcal{M}_{\dot{H}^1} \qquad \forall\, t \geq 0.$$

性质（3）：能量守恒与接触角（在 t上几乎处处成立）。令 $N = \{x:\ \varphi_x(t,x) = 0\}$。在 $\dot{H}^1$ 上的能量为 $\mathbb{S}^1 \setminus N$：

$$\mathcal{G}^{\dot{H}^1}_{(\varphi(t),\tau(t))}\big((\varphi_t,\tau_t),(\varphi_t,\tau_t)\big) = \frac{1}{4}\int_{\{\varphi_x>0\}}\left(\frac{\varphi_{tx}^2}{\varphi_x} + \tau_t^2\varphi_x\right)\mathrm{d}x. \tag{4.5}$$

将 $\gamma = f + \mathrm{i}g$ 写成 $f = \mathrm{Re}\gamma$、$g = \mathrm{Im}\gamma$ 的形式。然后 $\varphi_x = f^2 + g^2$ 和 $\{\varphi_x = 0\} = \{f = 0\} \cap \{g = 0\}$。计算可得

$$\frac{1}{4}\int_{\{\varphi_x>0\}}\left(\frac{\varphi_{tx}^2}{\varphi_x} + \tau_t^2\varphi_x\right)\mathrm{d}x = \int_{\{|\gamma|>0\}} |\dot\gamma|^2\,\mathrm{d}x.$$

因此

$$\int_{\{f=0\}\cup\{g=0\}} |\dot\gamma|^2\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{S}^1} |\dot\gamma|^2\,\mathrm{d}x - \int_{\{f=0\}\cap\{g=0\}} |\dot\gamma|^2\,\mathrm{d}x.$$

由于初始数据选为单位速度，$\int_{\mathbb{S}^1} |\dot\gamma|^2\,\mathrm{d}x = 1$，因此

$$\mathcal{G}^{\dot H^1}_{(\varphi(t),\tau(t))}\big((\varphi_t,\tau_t),(\varphi_t,\tau_t)\big) = 1 - \int_{\{f=0\}\cap\{g=0\}} |\dot\gamma|^2\,\mathrm{d}x. \tag{4.6}$$

接下来只需证明（4.6）中的后一个积分对几乎处处的 $t\geq 0$ 都为零。这是因为，对每个固定的 $x_0\in\mathbb{S}^1$，函数 $t\mapsto\gamma(t,x_0)$ 是 $e^{\mathrm{i}\theta_1 t}$ 和 $e^{\mathrm{i}\theta_2 t}$的有限线性组合，因此在有界区间上只有有限个零点。应用Fubini定理可知，对几乎处处的时刻，其零集在空间中的测度为零。因此，能量对几乎处处的 t 都守恒。

接触角恒等式

$$\delta = \int_{\mathbb{S}^1} \tau_t(t,x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{S}^1} \rho_0(x)\,\mathrm{d}x$$

由（ τ 中的定义可立即得到4.2）。

条目（4）：弱磁测地线方程。我们证明（φ， τ）对几乎处处的 $t\geq 0$ 满足磁测地线方程。对 φ 求两次导数，并利用 $\varphi_x = f^2+g^2$，得到

$$\varphi_{tt}(t,x) = 2\int_0^x \big(f_t^2 + g_t^2 + f_{tt}f + g_{tt}g\big)\,\mathrm{d}y. \tag{4.7}$$

由于 γ 是 $(\mathbb{S}^\infty_{L^2},\ \mathcal{G}^{L^2},\ \mathrm{d}\alpha)$ 上的一条磁测地线，因此它满足

$$\ddot\gamma - s\mathrm{i}\dot\gamma + (1-s\delta)\gamma = 0.$$

等价地，

$$f_{tt} + sg_t + (1-s\delta)f = 0, \qquad g_{tt} - sf_t + (1-s\delta)g = 0.$$

将其代入（4.7），并利用恒等式

$$u = \varphi_t\circ\varphi^{-1}, \qquad \rho = \tau_t\circ\varphi^{-1},$$

再结合单调绝对连续映射的变换规则（引理 A.2），得到弱形式

$$\varphi_{tt}(t,x) = \frac{1}{2}\int_0^{\varphi(t,x)} (u_x^2+\rho^2)\,\mathrm{d}y - s\int_0^{\varphi(t,x)} \rho\,\mathrm{d}y - 2\varphi(t,x)(1-s\delta). \tag{4.8}$$

将（4.8）与命题 2.2 比较，可得磁测地线方程的第一分量几乎处处（关于时间）成立。

对于第二个分量，对恒等式求导

$$\tau_t = 2\,\frac{g_t f - f_t g}{f^2+g^2}$$

并使用 (f,g) 的常微分方程。由此可得

$$\tau_{tt} = s\frac{\varphi_{xt}}{\varphi_x} - \tau_t\frac{\varphi_{xt}}{\varphi_x}.$$

由于 $\varphi_{xt} = (u_x\circ\varphi)\varphi_x$ 和 $\tau_t = \rho\circ\varphi$，我们得到

$$\rho_t\circ\varphi = (su_x - (\rho u)_x)\circ\varphi,$$

这正是磁测地线方程的第二个分量。至此，(4) 的证明完成。

结合步骤 1–4 可知，$(\varphi,\ \tau)$ 是 $\mathcal{M}_{\dot{H}^1}$ 上的一条弱磁测地线。 □

4.5. **定理证明 定理 4.12。** 设 $(\varphi,\ \tau)$ 是 上的一条弱磁测地线，其初始数据为 $(u_0,\ \rho_0)$，并定义 $(u,\ \rho$如下：

$$u(t,\varphi(t,x))=\varphi_t(t,x),\qquad \rho(t,\varphi(t,x))=\tau_t(t,x).$$

我们证明 $(u,\ \rho)$ 是满足 M2HS 的全局守恒弱解（按定义 4.8 的意义）。论证分为四个步骤，分别对应于(1)–(4) 这四项定义 4.8。

定理证明 定理 *4.12*。 **第 (1) 项：** $u(t,\ \cdot)\in H^1(\mathbb{S}^1)$ **对所有** $t\geq 0$**均成立，且能量几乎处处在** t**守恒。** 根据通过右平移定义的 $\mathcal{M}_{\dot{H}^1}$ 的切丛（参见（4.1）），并且由于 $(\varphi_t(t)\ \tau_t(t))\in T_{(\varphi(t),\tau(t))}\mathcal{M}_{\dot{H}^1}$ 对所有 $t\geq 0$ (定义 4.4 (1))，我们有

$$(\varphi_t(t),\tau_t(t))=(u(t)\circ\varphi(t),\rho(t)\circ\varphi(t))$$

其中 $(u(t)\ \rho(t))\in T_{(\mathrm{id},0)}\mathcal{M}_{\dot{H}^1}=\{v\in H^1(\mathbb{S}^1):\ v(0)\ =0\}\times L^2(\mathbb{S}^1)$。特别地，对于每个 $t\geq 0,\ u(t,\cdot)\in H^1(\mathbb{S}^1)$。

接下来，利用 $u=\varphi_t\circ\varphi^{-1}$ 和 $\rho=\tau_t\circ\varphi^{-1}$，结合 $\mathcal{G}^{\dot{H}^1}$ 的右不变性以及绝对连续单调映射的变量替换法则（引理 A.2），可得

$$\begin{aligned}\mathcal{G}^{\dot{H}^1}_{(\mathrm{id},0)}((u(t),\rho(t)),(u(t),\rho(t)))&=\frac{1}{4}\int_{\mathbb{S}^1}\left(u_x(t,x)^2+\rho(t,x)^2\right)\,\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{4}\int_{\mathbb{S}^1}\left(\frac{\varphi_{tx}(t,x)^2}{\varphi_x(t,x)}+\tau_t(t,x)^2\,\varphi_x(t,x)\right)\,\mathrm{d}x\\&=\mathcal{G}^{\dot{H}^1}_{(\varphi(t),\tau(t))}\big((\varphi_t(t),\tau_t(t)),(\varphi_t(t),\tau_t(t))\big).\end{aligned}\tag{4.9}$$

由于 (φ,τ) 是一条弱磁测地线，根据 定义 4.4 (3)，其 $\mathcal{G}^{\dot{H}^1}$-能量对几乎处处的 t 守恒。因此，对于几乎处处的 $t\geq 0$,

$$\mathcal{G}^{\dot{H}^1}_{(\mathrm{id},0)}((u(t),\rho(t)),(u(t),\rho(t)))=\mathcal{G}^{\dot{H}^1}_{(\mathrm{id},0)}((u_0,\rho_0),(u_0,\rho_0)),$$

这正是 (4.3)。

条目 (2)：连续性 u **以及初始数据的取得。** 我们证明 $u:[0,\infty)\times\mathbb{S}^1\to\mathbb{R}$ 是连续的，并且 $u(0,\cdot)=u_0$ 逐点成立，而 $\rho(0,\cdot)=\rho_0$ 几乎处处成立。

设 $t_n\to t$ 和 $y_n\to y$ 属于 $\mathbb{S}^1$。由于对于每个固定的 t，映射 $x\mapsto\varphi(t,x)$ 单调不减且满射，我们可以选取 $x_n\in\mathbb{S}^1$，使得

$$\varphi(t_n,x_n)=y_n.$$

于是，根据定义，

$$u(t_n,y_n)=u(t_n,\varphi(t_n,x_n))=\varphi_t(t_n,x_n).$$

(x_n) 的任意极限点都属于闭水平集 $\varphi(t,\cdot)^{-1}(\{y\})$。利用 $(t,x)\ \mapsto\ \varphi_t(t,x)$ 的连续性，以及 $\varphi_t(t,\cdot)$ 在每个水平集 $\varphi(t,\cdot)^{-1}(\{y\})$ 上为常数这一事实，我们得出 $u(t_n,y_n)\to u(t,y)$，即 u 连续。

此外，由于 $\varphi(0,x) = x$ 且 $\varphi_t(0,x) = u_0(x)$，我们有 $u(0,x) = u_0(x)$ 对所有 x均成立。对于 ρ，利用 $\rho \circ \varphi = \tau_t$ 以及 τ 中的 定理 4.5，我们对几乎处处的 x，计算得，

$$\rho(0,x) = \tau_t(0,x) = \rho_0(x) \left.\frac{1}{\varphi_x(t,x)}\right|_{t=0} = \rho_0(x),$$

因为 $\varphi_x(0,x) = 1$。这证明了 (2)。

条目 (3)： $u_x, \rho \in L^\infty([0,\infty); L^2(\mathbb{S}^1))$。能量恒等式 (4.9) 表明 $\|u_x(t)\|_{L^2}^2 + \|\rho(t)\|_{L^2}^2$ 在 t (几乎处处)上一致有界。因此，剩下的任务是证明这些映射的可测性

$$t \mapsto u_x(t,\cdot) \in L^2(\mathbb{S}^1), \qquad t \mapsto \rho(t,\cdot) \in L^2(\mathbb{S}^1),$$

从而它们表示 $L^\infty([0,\infty); L^2)$ 中的元素。

对于 u_x，根据佩蒂斯定理（定理 A.5），只需证明对每个 $\Theta \in L^2(\mathbb{S}^1)$，标量映射

$$t \longmapsto \int_{\mathbb{S}^1} u_x(t,x)\,\Theta(x)\,\mathrm{d}x \tag{4.10}$$

是可测的；只需证明当 Θ 光滑时的连续性。

首先假设 $\Theta \in C^\infty(\mathbb{S}^1)$。利用变量替换公式，

$$\int_{\mathbb{S}^1} u_x(t,x)\Theta(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{S}^1} u_x(t,\varphi(t,x))\,\Theta(\varphi(t,x))\,\varphi_x(t,x)\,\mathrm{d}x.$$

由于 $\varphi_{xt} = (u_x \circ \varphi)\varphi_x$，我们得到

$$\int_{\mathbb{S}^1} u_x(t,x)\Theta(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{S}^1} \varphi_{xt}(t,x)\,\Theta(\varphi(t,x))\,\mathrm{d}x.$$

按照 定理 4.5 证明中的记号，有 $\varphi_{xt} = 2(f f_t + g g_t)$，其中 $\gamma = f + \mathrm{i}g$，因此

$$\int_{\mathbb{S}^1} u_x(t,x)\Theta(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_{\mathbb{S}^1} \big(f(t,x)f_t(t,x) + g(t,x)g_t(t,x)\big)\,\Theta(\varphi(t,x))\,\mathrm{d}x.$$

右端关于 t 连续，因为 $t \mapsto (f,\ g,\ \varphi)$ 连续。因此，对于光滑的 Θ，(4.10) 是连续的。

对于一般的 $\Theta \in L^2$，取 $\Theta_n \in C^\infty$，使得 $\Theta_n \to \Theta$ 属于 L^2。对于每个固定的 t，泛函 $\Theta \mapsto \int u_x(t)\Theta$ 在 L^2上连续；因此

$$\int_{\mathbb{S}^1} u_x(t)\Theta_n\,\mathrm{d}x \to \int_{\mathbb{S}^1} u_x(t)\Theta\,\mathrm{d}x.$$

因此，(4.10) 是连续映射的逐点极限，因而是可测的。这证明了$t \mapsto u_x(t) \in L^\infty([0,\infty);\ L^2)$。

关于 $t \mapsto \rho(t) \in L^\infty([0,\infty); L^2)$ 的相应结论可类似得到（参见 [27, 定理 4.2] 中的论证），利用 $\rho \circ \varphi = \tau_t$ 以及 τ_t 的 L^2-正则性。

条目 (4)：中的绝对连续性 L^2 以及 $L^2 \times L^2$ 中的演化方程。我们先陈述两个命题，由此推导出所需结果，随后给出这两个命题的证明。

命题 4.17。 对于任意测试函数 $\eta \in C_c^\infty((0,\infty))$ 和 $\Theta \in C^\infty(\mathbb{S}^1)$，有

$$\int_{\mathbb{S}^1}\left[\int_0^\infty u(t,x)\eta_t(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^\infty \Big(\Gamma^{(1)}_{(\mathrm{id},0)}(u,\rho)(u,\rho) + sY^{(1)}_{(\mathrm{id},0)}(u,\rho) - uu_x\Big)\eta(t)\,\mathrm{d}t\right]\Theta(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

命题 4.18。 对于任意测试函数 $\eta \in C_c^\infty((0,\infty))$ 和 $\Theta \in C^\infty(\mathbb{S}^1)$，有

$$\int_{\mathbb{S}^1}\left[\int_0^\infty \rho(t,x)\eta_t(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^\infty \Big(\Gamma^{(2)}_{(\mathrm{id},0)}(u,\rho)(u,\rho) + sY^{(2)}_{(\mathrm{id},0)}(u,\rho) - u\rho_x\Big)\eta(t)\,\mathrm{d}t\right]\Theta(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

假设命题 4.17-4.18、引理A.4可推出

$$t \mapsto u(t) \in L^2(\mathbb{S}^1) \quad \text{and} \quad t \mapsto \rho(t) \in L^2(\mathbb{S}^1)$$

均为绝对连续函数，且对几乎处处的 t，有 $L^2(\mathbb{S}^1)$ 中

$$u_t = \Gamma^{(1)}_{(\mathrm{id},0)}(u,\rho)(u,\rho) + sY^{(1)}_{(\mathrm{id},0)}(u,\rho) - uu_x, \qquad \rho_t = \Gamma^{(2)}_{(\mathrm{id},0)}(u,\rho)(u,\rho) + sY^{(2)}_{(\mathrm{id},0)}(u,\rho) - u\rho_x,$$

这恰好就是定义 4.8 (4)。接下来只需证明这两个命题。

命题命题 4.17的证明。由步骤(3)和命题2.2，映射

$$t \mapsto u(t,\cdot), \qquad t \mapsto \Gamma^{(1)}_{(\mathrm{id},0)}(u,\rho)(u,\rho) + sY^{(1)}_{(\mathrm{id},0)}(u,\rho) - uu_x$$

属于 $L^\infty([0,\infty); L^2(\mathbb{S}^1))$，因此可应用Fubini定理。

利用 $u \circ \varphi = \varphi_t$ 以及变换规则（引理A.2），

$$\int_{\mathbb{S}^1} u(t,x)\Theta(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{S}^1} \varphi_t(t,x)\,(\Theta\circ\varphi(t,x))\,\varphi_x(t,x)\,\mathrm{d}x.$$

在 t中对 η 分部积分，得到

$$\int_0^\infty\int_{\mathbb{S}^1} u(t,x)\Theta(x)\,\mathrm{d}x\,\eta_t(t)\,\mathrm{d}t = -\int_0^\infty\int_{\mathbb{S}^1} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\varphi_t(\Theta\circ\varphi)\varphi_x\Big)\,\mathrm{d}x\,\eta(t)\,\mathrm{d}t.$$

展开时间导数，得到

$$-\int_0^\infty\int_{\mathbb{S}^1} \big(\varphi_{tt}(\Theta\circ\varphi)\varphi_x + \varphi_t^2(\Theta_x\circ\varphi)\varphi_x + \varphi_t(\Theta\circ\varphi)\varphi_{xt}\big)\,\mathrm{d}x\,\eta(t)\,\mathrm{d}t.$$

由于（φ， τ）是弱磁测地线，对几乎处处的 t，我们有

$$\varphi_{tt} = \big(\Gamma^{(1)}_{(\mathrm{id},0)}(u,\rho)(u,\rho) + sY^{(1)}_{(\mathrm{id},0)}(u,\rho)\big)\circ\varphi,$$

并且此外 $\varphi_t = u\circ\varphi$ 与 $\varphi_{xt} =$ （$u_x\circ\varphi$）φ_x。再次应用变换规则，并对 x在 $u^2\Theta_x$ 项中分部积分，恰好得到命题 4.17。

证明命题 4.18。如同命题 1，步骤（3）蕴含相应的 $L^\infty_t L^2_x$ 界。利用$\rho\circ\varphi = \tau_t$ 与引理A.2，

$$\int_{\mathbb{S}^1} \rho(t,x)\Theta(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{S}^1} \tau_t(t,x)\,(\Theta\circ\varphi(t,x))\,\varphi_x(t,x)\,\mathrm{d}x.$$

对 t关于 η 进行分部积分，得到

$$\int_0^\infty\int_{\mathbb{S}^1} \rho(t,x)\Theta(x)\,\mathrm{d}x\,\eta_t(t)\,\mathrm{d}t = -\int_0^\infty\int_{\mathbb{S}^1} \big(\tau_{tt}(\Theta\circ\varphi)\varphi_x + \tau_t(\Theta_x\circ\varphi)\varphi_t\varphi_x + \tau_t(\Theta\circ\varphi)\varphi_{tx}\big)\,\mathrm{d}x\,\eta(t)\,\mathrm{d}t.$$

由于 (φ,τ) 是 $\mathcal{M}_{\dot H^1}$ 中的磁测地线方程的解，因此对几乎处处的 t，有

$$\tau_{tt} = \big(\Gamma^{(2)}_{(\mathrm{id},0)}(u,\rho)(u,\rho) + sY^{(2)}_{(\mathrm{id},0)}(u,\rho)\big)\circ\varphi,$$

并利用 $\tau_t = \rho\circ\varphi$, $\varphi_t = u\circ\varphi$和 $\varphi_{tx} = (u_x\circ\varphi)\varphi_x$，再次应用变换规则可得 命题 4.18。这就证明了断言 2。

由此已证明断言 1–2，步骤 (4) 随之成立，因此 (u,ρ) 是 (M2HS) 的全局守恒弱解。 □

AppendixA. Technical Lemmata

以下三个引理可见于 [20] 和 [24]

引理 A.1。 设 $f:\ [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ 是一个绝对连续函数。那么， f 将可测集映射为可测集；若 f_x 存在，且在可测集 $N \subset [0,1]$ 上几乎处处等于 0 ，则 $\lambda(f(N)) = 0$，其中 λ 表示勒贝格测度。

证明见 [24, 定理 7.20] ，以下引理的证明亦可参见该处

引理 A.2。 设 $\varphi\colon [0,1] \longrightarrow [0,1]$ 是绝对连续且非递减的， $\varphi(0) =0$， $\varphi(1) = 1$ ，并且 $f \in L^1([0,1])$。那么

$$\int_0^1 f(y)\,\mathrm{d}y = \int_0^1 f(\varphi(x))\,\varphi_x(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

若 f 可测且 $f \geq 0$，则同样的结论成立。

证明以下引理，参见 [24, 定理 7。18]

引理 A.3. 设 $f:\ [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ 连续且非递减。以下三个命题中，任意一个都蕴含另外两个

(1) 函数 f 绝对连续。*(2)* 函数 f 将零测集映射为零测集。*(3)* 函数 f 在 I, $f_x \in L^1([a,b])$ 上几乎处处可微，并且对所有 $x \in I$ 均有

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f_x(y)\mathrm{d}y.$$

证明以下引理，参见 [25, 第 3 章，引理 1.1。]

引理 A.4. 设 X 为巴拿赫空间，其对偶空间为 X'，且 $u, g \in L^1([0,T)\ X)$ 对某个$T > 0$成立。那么，以下两个条件等价

(1) 函数 u 几乎处处等于 g 的一个原函数，即存在一个 $F \in X$使得

$$u(t) = F + \int_0^t g(s)\mathrm{d}s \quad for\ a.e.\ t \in [0,T)\,.$$

(2) 对于每个测试函数 $\eta \in C_c^\infty((0,T))$ ，均有：

$$\int_0^T u(t)\,\eta_t(t)\,\mathrm{d}t = -\int_0^T g(t)\,\eta(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

如果*(1)* 和 *(2)* 满足，则 u 几乎处处等于一个绝对连续函数 n

$$v : [0,T) \longrightarrow X\,.$$

为求完整起见，我们陈述佩蒂斯可测性定理：

定理 A.5. 设 (X, σ, μ) 是一个测度空间，且 B 是一个巴拿赫空间。则

(1) 函数 $f : X \longrightarrow B$ 可测，当且仅当它弱可测且几乎处处可分值。*(2)* 若 B 是可分巴拿赫空间，则函数 $f:\ X \longrightarrow B$ 可测，当且仅当它弱可测。

References

[1] P. Albers、G. Benedetti 和 L. Maier。奇数维球面上磁测地线的 Hopf–Rinow 定理与 Ma˜n´e 临界值。《几何与物理学杂志》，2025年。[2] V. I. Arnold。关于线元流与标架的一些评注。《苏联科学院院刊》，138：255–257，1961年。[3] M. Bauer、P. Harms 和 P. W. Michor。半李群的正则性与完备性。《欧洲数学学会杂志》，2025年1月。[4] A. Bressan 和 A. Constantin。亨特-萨克斯顿方程的整体解。《工业与应用数学学会数学分析杂志》，37(3)：996–1026，2005年。[5] A. Constantin 和 R. I. Ivanov。关于一个可积的双分量 Camassa–Holm 浅水系统。《物理快报A辑》，372：7129–7132，2008年。[6] P. Constantin、P. D. Lax 和 A. Majda。一个简单的一维三维涡量方程模型。《纯粹与应用数学通讯》，38：715–724，1985年。[7] D. G. Ebin 和 J. Marsden。微分同胚群与不可压缩流体的运动。《数学年刊》（第2辑），92：102–163，1970年。[8] J. Escher、O. Lechtenfeld 和 Z. Yin。双分量 Camassa–Holm 方程的适定性与爆破解。《离散与连续动力系统》，19(3)：493–513，2007年。[9] Z. Guo。双分量 Camassa–Holm 系统的爆破解。《数学物理学杂志》，51(3)：033507，2010年。[10] Z. Guo 和 Y. Z hou。双分量 Camassa–Holm 系统的波破裂与整体解。《离散与连续动力系统》，24(4)：1007–1029，2009年。[11] T. Y. Hou 和 C. Li。带旋流的三维轴对称纳维-斯托克斯方程的动力稳定性。《纯粹与应用数学通讯》，61：661–697，2008年。[12] J. K. Hunter 和 R. Saxton。指向矢场的动力学。《工业与应用数学学会应用数学杂志》，51：1498–1521，1991年。[13] B. A. Khesin 和 G. Misiolek。齐性空间上的欧拉方程与维拉索罗轨道。《数学进展》，176(1)：116–144，2003年。[14] S. Lang。《微分几何基础》，《数学研究生教材》第191卷。施普林格出版社，纽约，1999年。[15]J. Lenells。Hunter–Saxton 方程描述球面上的测地流。《几何与物理学杂志》，57(10)：2049–2064，2007年。[16] J. Lenells。弱测地流与 Hunter–Saxton 方程的整体解。《离散与连续动力系统》，18(4)：643–656，2007年。[17] J. Lenells。球面、K¨ahler 几何与 Hunter–Saxton 系统。《伦敦皇家学会会报A辑：数学、物理与工程科学》，469(2154)：20120726，19，2013年。[18] J. Lenells。球面、k¨ahler 几何与 Hunter–Saxton 系统。《伦敦皇家学会会报A辑》，469(20120726)，2013年。[19]L. Maier。关于双分量 Hunter–Saxton 系统的 Ma˜n´e 临界值及一个无限维磁性 Hopf–Rinow 定理。arXiv 预印本 arXiv:2503.12901，2025 年。[20] A. Mukherjea 和 K. Pothoven。《实分析与泛函分析A部分：实分析》。普ленум出版社，纽约，第2版，1984年。[21] H. Okamoto。广义 Constantin–Lax–Majda 方程的适定性。《数学流体力学杂志》，11(2)：299–317，2009年。[22] H. Okamoto、T. Sakajo 和 M. Wunsch。关于 Constantin–Lax–Majda 方程的一种推广。《非线性》，21(10)：2447–2461，2008年。[23] M. V. Pavlov。Gurevich–Zybin 系统。《物理学杂志A辑：数学与一般》，38：3823–3840，2005年。[24] W. Rudin。《实分析与复分析》。麦格劳-希尔，第3版，1987年。[25] N. Temam。《纳维-斯托克斯方程》。北荷兰出版公司，阿姆斯特丹，1984年。[26]M. Wunsch。广义 Hunter–Saxton 系统。《工业与应用数学学会数学分析杂志》，42(3)：1286–1304，2010年。[27] M. Wunsch。半直积上的弱测地流与周期 Hunter–Saxton 系统的整体解。《非线性分析》，74(15)：4951–4960，2011年。

Faculty of Mathematics and Computer Science, University of Heidelberg电子邮件地址：lmaier@mathi.uni-heidelberg.de