arXiv:2601.22089v1 [math.RA] 29 Jan 2026

集合论五边形方程解与正基霍普夫代数

ILARIA COLAZZO 和 GEOFFREY JANSSENS

摘要。我们研究双射（不一定有限）的五边形方程集合论解与霍普夫代数之间的联系。首先，我们证明有限解对应于具有正基性质的霍普夫代数。由此可推论，我们将 Lu-Yan-Zhu 分类推广到任意特征零域 k。其次，我们研究霍普夫代数何时具有能够导出集合论解的基这一一般问题。最后，我们对所有（余）交换双射解进行分类。此结果需要描述群代数 $k[G]$ 中所有能够导出集合论解的基。具体而言，我们证明，这些基通过傅里叶变换与 A 有限阿贝尔群 G 的分裂 $A \rtimes N$ 相对应。

目录

1. 引言 1
2. 不同类型五边形方程解的概述与联系 6
3. 由集合论 RPE 解构造的 Hopf代数 9
4. 由 Hopf代数产生的组合 RPE 解 11
4.1. 乘子霍普夫代数背景 11
4.2. 来自双代数的 RPE 解 12
4.3. 双交叉积霍普夫代数与解的匹配对 14
5. 正基性质与集合论解之间的关系 18
5.1. 关于 Φ-集合论基的基本概念 18
5.2. 有限维Hopf代数具有正基 19
6. 余交换集合论 PE 解的描述 26
6.1. Hopf代数的（余）交换性与解之间的关系 26
6.2. 集合论解与李代数的包络代数 28
7. 从群代数构造集合论解 31
7.1. 阿贝尔情形：傅里叶变换回顾 31
7.2. 有限阿贝尔因子的匹配对 33
7.3. 无限群的群代数与不存在性准则 35
8. 群代数上解的分类定理 36
参考文献 44

1. 引言

1.1. 背景。 $f \in \mathrm{End_k(V \otimes V)}$ 上的线性映射 k 是 V 向量空间上的五边形方程的一个解，当且仅当它满足 $f_{23}f_{13}f_{12} = f_{12}f_{23}$ 中的方程 $V^{\otimes 3}$。五边形

*2020*年数学主题分类. 16T25, 16T30, 81R12关键词和短语。五边形方程、集合论解、Hopf代数、正基性质。第一作者感谢 Fonds voor Wetenschappelijk Onderzoek（佛兰德）– Krediet voor wetenschappelijk verblijf in Vlaanderen（资助编号 V512223N）提供部分资助，支持其在 VUB 的研究访问。第二作者感谢 Fonds Wetenschappelijk Onderzoek vlaanderen - FWO（资助编号 88258）和 le Fonds de la Recherche Scientifique - FNRS（资助编号 1.B.239.22）提供经费支持。

方程自然地出现在从量子群理论到数学物理等多个领域。在可积系统中，五边形方程可以作为 Yang–Baxter方程的高维类比的构件：Maillet 从五边形方程的解构造出四面体方程的谱参数解 [18]。

在算子代数中，五边形方程的酉解称为乘法酉算子，在（局部紧）量子群理论中发挥着核心作用。Baaj 和 Skandalis 证明，在有限维情形下，乘法酉算子会产生一个霍普夫 C^* 代数，而这实际上是一个有限维 Kac代数 [1, 定理 4.10]。乘法酉算子一直是量子群理论中的重要工具，例如参见 [24, 14]。

尽管这种表述是解析性的，但该方程的内容本质上是结合律的相干条件。具体而言，Mac Lane五边形公理 [17]正是幺半群范畴中结合子的相干约束。此外，在幺半群范畴中，可以找到满足相同形式五边形方程的态射：Street [21]证明，融合算子满足五边形方程。此外，Kashaev [10] 证明，五边形方程对于海森堡双所起的作用，与 Yang-Baxter 方程对于 Drinfeld双所起的作用相同。对本文而言，最重要的是 Militaru[20] 和 Davydov [8] 证明了任意有限维霍普夫代数都对应于一个可逆的五边形方程解。

近年来，人们对这样一类解产生了浓厚兴趣：其底层向量空间 V 具有一个 k-基 $\mathcal{B}$，并且该基在 f作用下保持不变，即 f 将 $\mathcal{B} \otimes \mathcal{B}$中的纯张量映射到纯张量。在这种情况下，$f$ 诱导出一个映射 $f|_{\mathcal{B}} \in$ 自同态集($\mathcal{B} \times \mathcal{B}$)，该映射满足集合论五边形方程。五边形方程的集合论解通常记作有序对 (S，s)，其中 $s\colon S \times S \to S \times S$。在 [11],，五边形方程的集合论解被用于对称可分解李群；而在 [9]，人们则在离散Liouville方程的背景下研究了这些解。五边形方程的对合集合论解 (S，s)，即满足 $s^2 = \mathrm{id}$ 的解，已由 Colazzo–Jespers–Kubat [6], 完全分类；而 Castelli [4] 最近进一步研究了若干特殊的双射解族。此外，Colazzo–Okniński–Van Antwerpen [7] 证明，有限集合论解在 S 上诱导出一种形式为 $S \cong E \times G$的半群结构，其中 E 是左零半群，G 是群；随后他们将其细化为一种分解 $S \cong X \times A \times G$，同时在 A 上得到隐藏群结构，并在 (A，G) 上得到匹配积结构，该结构决定了这个解。

在本文中，我们研究（可能无限的）集合论解与Hopf代数之间的联系，并反过来从与组合解相关的Hopf代数中提取信息。在描述五边形方程的（无限）集合论解时，人们会面临两类困难。

（i）在算子或霍普夫代数层面上，大多数构造与对偶性并不保持基；（ii）不存在与无限解相关联的典范（乘子）霍普夫代数。

本文的一个目标是为克服第一类困难做出贡献。另一个目标是理解与五边形方程的有限双射集合论解相关的有限维Hopf代数。我们的主要结果之一指出，此类Hopf代数具有非常良好的组合性质：它们恰好是那些容许正基的Hopf代数。具有正基的Hopf代数由Lu–Yan–Zhu在 [16] 中定义，并在复数上完成了分类。后来，同一作者在 [15] 中由正基 Hopf 代数构造了Yang–Baxter方程的集合论解。本工作的第三个目标是研究可能无穷维的Hopf代数的基，这些基典范地给出集合论五边形方程解。特别地，我们对群代数的此类基以及（无限）余交换解进行了分类。

在后续研究中，本文的框架将与表示论相结合，用于研究 Yang–Baxter 方程的组合解。在

其他方面，该框架还将用于构造有限单射 YBE 集合论解在有限双射 RPE 集合论解上的作用。

在以下各小节中，我们将更详细地阐述本文的主要结果。

1.2. **集合论解与正基性质的联系**。给定一个双代数 $(H, \varepsilon, 1, m, \Delta)$ 存在一个与之典范关联的 RPE 解，见 [8] 和引理 4.5，如下所示:

$$\Phi_H := (1 \otimes m)(\Delta \otimes 1) \in \mathrm{End}(\mathrm{H} \otimes \mathrm{H}). \tag{1}$$

我们称 Hopf 代数 Φ 的一个基 $\mathcal{B}$为集合论基，若 Φ_H 将纯张量 $b\otimes c \in \mathcal{B} \otimes \mathcal{B}$映射为 $\mathcal{B} \otimes \mathcal{B}$ 中的一个纯张量。换言之，若将 Φ_H 限制在 $\mathcal{B} \otimes \mathcal{B}$ 上，可得到定义在 $\mathcal{B} \times \mathcal{B}$ 上的集合论解。若 H 是一个 Hopf 代数，则解 Φ_H 是双射的。

在第 5.1 节中，我们研究 Φ-集合论基的一些一般性质。例如，在引理 5.2 中，我们证明，若 $\varepsilon(b) \geq 0$ 对所有 $b \in \mathcal{B}$ 都成立，并且单位元 1_H 可分解为 $\mathcal{B}$ 的正系数线性组合，则 H 具有正基性质。后者意味着，H 存在一个基，使得所有结构映射的结构常数均为正。

若 H 是有限维的，则存在某种针对 Φ_H的逆向构造。更确切地说，[8, 20] 为每个有限维双射 RPE 解关联两个有限维霍普夫代数，分别称为右系数霍普夫代数和左系数霍普夫代数。这一构造类似于 Baaj-Skandalis 在 C^*-代数情形下对切片的构造 [2] 。这一构造在有限双射 RPE 解与有限维霍普夫代数之间建立了双向对应 [20, 定理 3.1]。给定一个有限双射集合论解 (S, s)，这些霍普夫代数记作 $H_r(s)$ 和 $H_\ell(s)$。我们的第一个主要结果是，在有限情形下，集合论解对应于具有正基的霍普夫代数。

定理 A (引理 5.4)。设 (S, s) 是五边形方程的一个有限双射解。那么 $H_\ell(s)$ 和$H_r(s)$ 具有一个同时为正的且为 Φ-集合论的基。

若基域 k 为复数，那么具有正基性质的有限维霍普夫代数已由 Lu-Yan-Zhu 完成分类 [16]。他们证明，这些代数都同构于某个匹配群对的双交叉积霍普夫代数 $k[B]^* \bowtie k[N]$ ，其中匹配群对为(B, N)。在第4.3.1 节中，我们回顾匹配群对的必要背景知识。更确切地说，他们证明，给定$\mathcal{B}$ 的一个正基 H，可以对基元素重新缩放，使得$\mathcal{B}$ 对应于一个群 G 及其一个分解 $G = B.N$，且该分解由 H唯一确定。第 [16, 节 4],中得到这种重新缩放的存在性，需要对给定向量空间上的双代数结构空间进行一些分析。作为定理A 和 [7], 的推论，我们得到了 Lu-Yan-Zhu 分类定理的新证明，其优点是适用于任意特征的0 基域。更确切地说，我们得到以下推论。

推论 B. 设 H 是一个有限维霍普夫 k代数，且 $\mathrm{char}(k) = 0$。那么，以下各项等价:

- H 有一个 Φ集合论基，
- H 具有正基性质，
- $H \cong k[B]^* \bowtie k[N]$ 来自有限群的一个揉合对$(B, N, \triangleleft, \triangleright)$。

此外，若上述条件成立，则该揉合对唯一确定。

我们预期，对于任意霍普夫代数，存在一个 Φ集合论基意味着存在一个（可能不同的）正基，见引理5.6。

注。反过来，可以尝试根据[16] 中的正基 Hopf 代数分类以及上述方法，对 [7]中所有有限双射集合论解的分类给出 Hopf 理论证明（S， s）。然而，事情比乍看起来要微妙得多。事实上，若将相应的向量空间解记为（$k[S]$， s^v），那么 [8,定理 5.7] 结合 [16] 可得， s^v 等价于一个解 $\Phi_{k[B]^* \bowtie k[N]} \otimes 1_X$

其中 X是某个有限维向量空间。然而，尚不清楚 $k[S]$ 的初始基 S 在空间 $k[B]^* \otimes k[N] \otimes X$ 中对应什么。这有两个原因：（1）张量积 $\Phi_{k[B]^* \bowtie k[N]} \otimes 1_X$ 是在应用 Hopf模基本定理后得到的，而该定理并不保持典范基；（2）群 B 和 N 是经过一个非显式的重标度过程得到的。为了解决这一障碍，需要描述 $k[B]^* \bowtie k[N]$的所有 Φ-集合论基。如下文所述，我们将在余交换情形下这样做。

1.3. **产生集合论解的无穷维Hopf代数。** 对于无限解，不存在良好定义的左系数Hopf代数类似物。特别是，一般而言，不存在与之相关的Hopf代数。例如，根据下文的主要结果——定理 C 和定理 E，引理 4.12中定义在无限阿贝尔群 A 上的解并非由某个霍普夫代数的 Φ-集合论基诱导。然而，构造（1）同样适用于乘子 Hopf 代数，而上述解正是由乘子霍普夫代数 k^A_{fin} （定义在 A上的有限支撑函数）导出的。我们认为，这一现象适用于任何双射集合论解。其概念性原因在于，集合论解不同于向量空间解，它们具有对偶性（参见引理 2.6 和引理 2.8）。

在本文余下部分，我们将探讨哪些无限解可以由Hopf代数得到。我们称此类解为可达解。实际上，这相当于确定给定的Hopf代数 H 是否具有 Φ集合论基。

余交换*Hopf*代数。我们的目标之一是分类RPE的非有限双射余交换解。为此，我们将在第6.1 节将此类解与Hopf代数关联起来，具体如下。

定理C （引理6.1）。 设（S，s）是集合 S上的一个可达的余交换*RPE*双射解。那么存在一个群 G 以及 Φ-集合论基$\mathcal{B}$ ，它属于 $k[G]$，使得

$$s = \phi_{\mathcal{B}} \times 1_X$$

对某个集合 X，其中 $\phi_{\mathcal{B}}$ 是与 $\Phi_{k[G]}\big|_{\mathcal{B}\otimes\mathcal{B}}$相关联的$B$ $\times B$上的集合论解。

人们很容易认为，定理C可由Baaj-Skandalis的工作 [2, 3] 通过将线性化解（$k[S]$， s^v）提升为希尔伯特空间 ℓ^2（S）上的乘性酉算子而得出。他们的结果将给出一个酉算子，作用于 L^2（$G \times X$），其中 G 是某个局部紧群，而 X是某个离散空间。然而，目前尚不清楚基 S 在 L^2（$G \times X$）中被映射到何处。前述引理4.12说明了这一点。我们将在后续工作中研究这个问题。

群代数的非典范基。 定理 C将对所有（可达）余交换集合论解进行分类的问题，归结为描述 Φ群代数的集合论基 $k[G]$。乍看之下，这类基不必在乘法下封闭。例如，任意揉合对分解 $A \bowtie N$ 的 G 在 A 有限阿贝尔群在 N上平凡作用的条件下，都能借助傅里叶分析得到一个 Φ-集合论基 $k[G]$ 。

具体而言，当 A 有限时，对特征群 $A^\vee$ 中的每个 χ ，都有幂等元$e_\chi := \frac{1}{|A|}\sum_{a\in A}\chi($ $a^{-1})\, a.$。一集合$\mathcal{B}_{A^\vee} := \{\, e_\chi\, u \mid \chi \in A^\vee,\ u \in N\}$是 $k[G]$的 k-基。此外， N 对 A 的右作用会在 $A^\vee$ 上诱导出 N 的左作用，该作用置换这些幂等元 e_χ。

命题 D (引理 7.3)。 设 $(A,\ N)$ 是一个揉合对，其中 A 是作用在 N 上的有限阿贝尔群，且作用平凡，并设 $G = A \rtimes N$。沿用上述记号，基 $\mathcal{B}_{A^\vee}$ 是 Φ-集合论的。此外， $\Phi_{k[G]}$ 限制为以下 *RPE* 的集合论解：

$$\phi_{A^\vee \bowtie N} :\ (A^\vee \times N) \times (A^\vee \times N) \to (A^\vee \times N) \times (A^\vee \times N),$$

由.....给出

$$\phi_{A^\vee \bowtie N}\big((\alpha, u), (\beta, v)\big) = \big((\alpha(u \cdot \beta)^{-1}, u),\ (u \cdot \beta, uv)\big). \tag{2}$$

构造非平凡的 Φ-集合论基$\mathcal{B}$ （见定理 D ）关键在于 A是有限的，且 G 含有挠元。在引理 7.5 中，我们说明非挠元如何限制 $\mathcal{B}$中元素支撑的可能范围。此外，引理 7.6 证明，在无挠情形下，只有平凡的 Φ-集合论基。更一般地，我们的最后一个主要定理表明，所有 Φ 的集合论基 $k[G]$ 都必须具有定理 D 中的形式。因此，所有余交换解都等价于形式为（2）的解。

定理E (引理8.1)。 设 G 是一个群，且 $\mathcal{B}$ 是 Φ 的集合论基。则存在 $k[G]$、 A， $N \leq G$ 使得

(1) $G \cong A \rtimes N$，其中 A 是一个有限阿贝尔群，(2) $\mathcal{B}$ 是基 $\mathcal{B}_{A^\vee} = \{e_\chi u \mid \chi \in A^\vee,\ u \in N\}$ 的标量倍，(3) $A = \{b \in \mathcal{B} \mid 1 \in \operatorname{supp}(b)\}$ 是 $\mathcal{B}$ 中的幂等元，(4) $\phi_{\mathcal{B}} := \Phi|_{\mathcal{B}\otimes\mathcal{B}}$ 等价于解 (36)。

整环中的不存在性。 定理 C 的一个初步、并不难但很重要的事实是，余交换解只能作为解 Φ 在 Φ_H 的集合论基上的限制出现，前提是 H 是余交换霍普夫代数。这使我们可以引用 Cartier-Konstant-Milnor-Moore 分类定理，该定理指出 $H \cong U(\mathfrak{g}) \rtimes k[G]$ 满足 $\mathfrak{g} := P(H)$ 是由 H 中的本原元构成的李代数，且 $G := G(H)$ 是由类群元构成的群。对于包络代数，更一般地，对于整环，我们证明不存在 Φ-集合论基。

定理F (引理6.7 和引理 6.8)。设 H 是一个整环霍普夫代数。若H 具有 Φ-集合论基$\mathcal{B}$，则对每个 $b \in \mathcal{B}$，有 $\Delta_H(b) = \varepsilon_H(b)^{-1}\, b \otimes b$。因此，若 $\mathfrak{g}$ 是一个有限维李代数，则 $U(\mathfrak{g})$ 没有 Φ-集合论基。

事实上，根据引理6.10，一般而言，若存在一个基$\mathcal{B}$ 满足 $\Delta(\mathcal{B}) \subseteq k^* \mathcal{B}\otimes\mathcal{B}$，则该霍普夫代数必与某个群代数同构。根据著名的Kaplansky猜想之一，群代数 $k[G]$ 是整环，当且仅当 G 无挠。

1.4. **概要**。 在第2 节中，我们回顾文献中各种五边形方程（PE）解的概念。它们的主要区别在于所属的范畴，也就是说，它们是基于集合、向量空间还是代数构造的。我们将回顾如何在不同设定之间进行显式转换。随后，在第3 节中，我们回顾Davydov [8] 和 Militaru [20]针对RPE解构造有限维霍普夫代数的方法。这些霍普夫代数称为系数代数，其构造受到算子代数框架下Baaj-Skandalis构造的启发[2] 。随后，我们将这一构造专门应用于集合论解的情形，并描述一个生成集。

接下来是第 4 节，我们回顾逆向构造。换言之，如何为任意霍普夫代数 H规范地关联一个解。本节给出若干重要例子，并引入 Φ-集合论基 $\mathcal{B}$这一概念，它是本文后续内容中的关键概念。文中还说明，在有限维情形下，Davydov-Militaru 霍普夫代数除一个平凡因子外，能够确定一个向量空间解，但在保留特定基方面表现不佳。

第 5 节旨在建立具有正基性质的有限维霍普夫代数与五边形方程的有限双射解之间的联系。为此，我们构造了附属于集合论解的霍普夫代数的一个显式基，并证明该基的结构常数属于 $\{0, 1\}$。本节全面阐明了有限维情形。因此，本文其余部分将聚焦于任意维数的Hopf代数。首先，在第 6节中，我们证明，作为整环或余交换代数的霍普夫代数，只有在它是群代数时才能产生集合论解。随后，在第 8 节中，我们对群代数的所有集合论基进行分类。该分类依赖于第 7节中引入的一种构造。

致谢。 我们感谢 Leandro Vendramin 与我们进行了富有启发性的讨论，尤其感谢他建议考虑正基性质。作者谨向

CIRM 致谢，感谢其在驻留研究期间提供理想的工作条件，支持本研究。第二作者感谢 Kenny De Commer 就乘子 Hopf 代数以及 Baaj-Skandalis 的工作进行的有益交流。他还要感谢 Špela Špenko 在撰写本文期间给予的支持。

2. 概述及不同类型五边形方程解之间的联系

无论所研究的代数对象属于哪种类型，我们都将考察如下形式的方程

$$Z_{12}Z_{13}Z_{23} = Z_{23}Z_{12} \tag{RPE}$$

$$Z_{23}Z_{13}Z_{12} = Z_{12}Z_{23} \tag{PE}$$

其中，PE 表示五边形方程，RPE 表示反向五边形方程。在部分文献中，PE 被称为*Hopf* 方程，此时 RPE 则简称为五边形方程。算子 Z_{ij} 的含义，以及这类方程的解的含义，取决于我们所处的范畴。

本节回顾文献中出现的五边形方程（针对集合、向量空间和代数）的各种解概念所需的背景知识，并说明这些概念之间的关联。这些内容对专家而言众所周知；由于我们尚未发现有任何单一参考文献汇集了所有这些事实，因此在此予以介绍。

2.1. 五边形方程的背景。

设 S 是一个集合。在集合论情形下，此时的 (R)PE 方程是 End(S × S × S) 中的一个单位元。

定义 2.1. RPE（分别地，PE）的集合论解是一个有序对 (S, s)，其中

(1) S 是一个集合；(2) $s \in$ End(S ×S) 满足

RPE（分别地，PE）

采用标准记号 $s_{12} = s \times \mathrm{id}_S, s_{23} = \mathrm{id}_S \times s$ 和 $s_{13} = (\mathrm{id}_s \times \tau)(s \times \mathrm{id}_s)(\mathrm{id}_s \times \tau$)

其中 $\tau(u, v) = (v, u)$ 表示翻转映射。

若 (S, s) 是 RPE（分别地，PE）的集合论解，则方便起见将其记作

$$s(x, y) = (\psi_y(x), y \circ x) \quad (\text{resp. } s(x, y) = (xy, \theta_x(y))).$$

将 (x, y, z) 的 RPE（分别地，PE）展开， $\in S^3$ 可得

$$z \circ (y \circ x) = (z \circ y) \circ x \quad (\text{resp. } x \cdot (y \cdot z)) \tag{3}$$

$$\psi_z(y \circ x) = \psi_z(y) \circ \psi_{z \circ y}(x) \quad (\text{resp. } \theta_x(y \cdot z) = \theta_x(y) \cdot \theta_{x \cdot y}(z)) \tag{4}$$

$$\psi_{\psi_z(y)}\psi_{z \circ y}(x) = \psi_y(x) \quad (\text{resp. } \theta_{\theta_x(y)}\theta_{x \cdot y}(z) = \theta_y(z)). \tag{5}$$

特别是，(3)表明，$\circ$ 是 S上的结合二元运算。

由上述恒等式可立即验证，给定 RPE 的一个集合论解 (S, s)，映射

$$t(x, y) = (x \circ y, \psi_x(y))$$

定义了 PE 的一个集合论解 (S, t)。此外，由于 $t = \tau s \tau$(with $\tau(x, y) = (yx)$)，可知 t 是双射当且仅当 s 是双射。

最后，设 (S, s) 是 RPE 的一个解，并记 $s(x, y) = (\psi_y(x)\ y \circ\ x)$ 和$s^{-1}(x, y) = (xy, \theta_x($ $y))$。直接计算可知， $ss^{-1} = \mathrm{id}_{S \times S} = s^{-1}s$ 等价于以下关系：

$$\psi_y(x)(y \circ x) = x, \tag{6}$$

$$\theta_{\psi_y(x)}(y \circ x) = y, \tag{7}$$

$$\psi_{\theta_x(y)}(xy) = x, \tag{8}$$

$$\theta_x(y) \circ (xy) = y. \tag{9}$$

在第5.1 节中，我们将这些称为逆关系。

给定一个集合论解，可以由此得到线性环境（向量空间或代数）中的解。例如，线性化会在 $V = k[S]$ 上得到一个算子，进而得到一个关于自同态集(V$^{\otimes 3}$)的方程。

定义2.2。 PE（分别为 RPE）的向量空间解 是一个二元组 (V, f)，其中

(1) V 是一个 k-向量空间；(2) $f \in$ 自同态集$_k$(V $\otimes$V) 满足 PE（分别为 RPE）

其中 $f_{12} = f \otimes$恒等映射$_V$， $f_{23} =$恒等映射$_V \otimes f$，且 $f_{13} =$(恒等映射$_V \otimes \tau$)($f \otimes$恒等映射$_V$)(恒等映射$_V \otimes \tau$)，其中 $\tau(a \otimes b) = b \otimes a$是翻转映射的双线性延拓。

有些作者更倾向于将 PE 看作自同态集$_k$(V)$^{\otimes 2}$中的方程，换言之，他们在一个k-代数中进行研究。

定义2.3。 PE（分别为 RPE）的代数解 是一个元组 (A, R)，其中

(1) A a k-algebra

(2) $R := \sum_i R_i^{(1)} \otimes R_i^{(2)} \in A \otimes A$ satisfying the PE (resp. RPE)

其中 $R_{12} = R \times 1_A, R_{23} = 1_A \otimes R$ 和 $R_{13} = \sum_i R_i^{(1)} \otimes 1_A \otimes R_i^{(2)}$.

注意，在引理2.3 中，PE 是一个定义在 $A \otimes A \otimes A$上的方程。

2.2. **集合论解与向量空间解之间的联系**。 从一个集合 S 出发，有两种将其与一个 k-向量空间关联起来的标准方式:

(1) $k[S]$，由 S生成的自由 k-向量空间;

(2) k^S，是函数 $S \to k$构成的向量空间。

2.2.1. 通过线性化。 我们考虑规范的 k-线性映射

$$\psi_{(n)} : k[S]^{\otimes n} \to k[S^n] : s_1 \otimes \cdots \otimes s_n \mapsto (s_1, \cdots, s_n).$$

注意，对于任意 $n \in \mathbb{N}$， $\psi_{(n)}$ 都是同构，其逆映射由泛性质诱导（即使 S 是无限的，这一点仍成立）。此外，若 S 是半群，则 $\psi_{(n)}$ 是一个 k-代数同态。接下来，给定一个集合论的 $s \in$ End(S^n)，令 $s \in$End$_k$(k[S^n]) 表示其 k-线性扩张。于是，我们从集合论的解定义线性映射 k: $s^v = \psi^{-1}{}_{(n)} \circ s \circ \psi_{(n)}$。

命题 2.4。 有序对 (S, s) 是五边形方程（分别为 *RPE*）的集合论解，当且仅当(kS, s^v) 是五边形方程（分别为 *RPE*）的向量空间解。

证明。 对于 $(i, j) \in$ {(1,2),(1,3),(2,3)} 有 $(s^v)_{ij} = \psi_3^{-1}{}_{()} \circ s_{ij} \circ \psi_{(3)}$。对 $\psi_{(3)}$ 取共轭作用即可得到所述结论。□

2.2.2. 通过函数空间。 另外，也可以使用 k^S。对于 $f \in$Hom(X, Y)，我们将拉回记作 $f^* \in$Hom$_k(k^Y, k^X)$，其定义为 $f^* \circ \varphi = \varphi \circ f$，其中$\varphi \in k^Y$。特别地，若 $s \in$ End(S^n)，则 $s^* \in$ End(k$^{S^n}$)。由于 $(\cdot)^*$ 是从 Set 到 Vec$_k$的逆变函子，它会将五边形方程与 RPE 相互转换。为了以合适的方式表示拉回，我们引入以下映射。

定义 2.5。 设 S 为一个集合， k 为一个域，且 $s \in$ End(S^n)。定义 $f_s = \theta_n^{-1} \circ s^* \circ \theta_n$，其中 θ_n: $k^S \otimes \cdots \otimes k^S \to k^{S^n}$ 由下式给出

$$\theta_n(f_1 \otimes \cdots \otimes f_n) : S^n \longrightarrow k : (x_1, \cdots, x_n) \longmapsto \prod_{i=1}^{n} f_i(x_i).$$

若 S 是有限的，则 θ_n 是一个同构；但其逆映射并非规范的。

命题 2.6。 当且仅当(k^S, f_s) 是 *RPE*（分别为五边形方程）的解时，(S, s) 是五边形方程（分别为 *RPE*）的解。

证明。 直接验证可知，对于 $(i,j) \in \{(1,2),(1,3),(2,3)\}$，有 $(f_s)_{ij} = \theta_3^{-1} \circ (s_{ij})^* \circ \theta_3$。因此

$$(f_s)_{12}(f_s)_{13}(f_s)_{23} = \theta_3^{-1} s_{12}^* s_{13}^* s_{23}^* \theta_3 = \theta_3^{-1}(s_{23}s_{13}s_{12})^* \theta_3$$

and

$$(f_s)_{23}(f_s)_{12} = \theta_3^{-1} s_{23}^* s_{12}^* \theta_3 = \theta_3^{-1}(s_{12}s_{23})^* \theta_3.$$

因此， f_s 在 $\mathrm{End_k}(\mathrm{k^S} \otimes \mathrm{k^S} \otimes \mathrm{k^S})$ 中的 RPE 等价于以下方程

$$(s_{23}s_{13}s_{12})^* = (s_{12}s_{23})^*$$

在 $\mathrm{End_k}(\mathrm{k^{S\times S\times S}})$ 中。现在对 δ函数求值可知，当且仅当 $s_{23}s_{13}s_{12} = s_{12}s_{23}$ 属于 $\mathrm{End}(\mathrm{S^3})$ 时，该等式成立；也就是说，$(S,\ s)$ 满足五边形方程。反向推论以及五边形方程与 RPE 的互换情形类似。□

例 2.7. 设 G 是一个群，并考虑由以下方式定义的映射 $s \in \mathrm{End}(\mathrm{G^2})$： $s(g,\ h) = (gh,\ h)$。这是五边形方程的一个集合论解。我们计算拉回 $s^* \in \mathrm{End}(\mathrm{k^{S\times S}})$。对于一个基元素 $\delta_{(g,h)}$，根据定义有

$$s^*(\delta_{(g,h)})(a,b) = \delta_{(g,h)}(s(a,b)) = \delta_{(g,h)}(ab,b) = \begin{cases} 1 & \text{if } h = b \text{ and } gb^{-1} = a \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

因此， $s^*(\delta_{(g,h)}) = \delta_{(gh^{-1},h)}$。注意，更一般地， $s^*(\delta_{(g,h)}) = \delta_{s^{-1}(g,\ h)}$。因此，对于 $k^S \otimes k^S$ 的基元素 $\delta_g \otimes \delta_h$，可得 $f_s(\delta_g \otimes \delta_h) = \delta_{gh^{-1}} \otimes \delta_h$，这表明 $(k^G,\ f_s)$ 是 RPE 的一个向量空间解。

2.2.3. 两种构造之间的联系。对于 RPE 的一个双射解 (S,s)，上述构造给出两个向量空间解：(i) $(k[S],\ s^v)$，它是 RPE 的一个解；(ii) (k^S, f_s)，它是五边形方程的一个解。它们之间的关系如下。

命题 2.8。设 (S,s) 是五边形方程的一个集合论解。那么

$$f_s = (\sigma \otimes \sigma)(s^{-1})^v(\sigma^{-1} \otimes \sigma^{-1})$$

其中 $\sigma:\ k[S] \to k^S:\ g \mapsto \delta_g$。

证明。只需在 K^S 的基 $\{\delta_g \mid g \in S\}$ 上验证该单位元。另一方面， d,

$$f_s(\delta_g \otimes \delta_h) = \theta_{(2)}^{-1} s^*(\delta_{(g,h)}) = \theta_{(2)}^{-1} \delta_{s^{-1}(g,h)}.$$

另一方面，

$$\left((\sigma \otimes \sigma)(s^{-1})^v(\sigma^{-1} \otimes \sigma^{-1})\right)(\delta_g \otimes \delta_h) = (\sigma \otimes \sigma)(s^{-1})^v(g \otimes h) = (\sigma \otimes \sigma)\psi_{(2)}^{-1} s^{-1}(g,h)$$

这与上面的表达式相等。由此得证。 □

2.3. **向量空间解与代数解之间的关系**。 为了比较引理 2.2与引理 2.3，我们使用以下代数映射。对于 $n \in \mathbb{N}$ 定义

$$\phi_{(n)} : \mathrm{End_k(V)^{\otimes n}} \longrightarrow \mathrm{End_k(V^{\otimes n})} : \mathrm{g_1 \otimes \cdots \otimes g_n} \longmapsto \phi_{(\mathrm{n})}(\mathrm{g_1 \otimes \cdots \otimes g_n})$$

定义为 $\phi_{(n)}(g_1 \otimes \cdots \otimes g_n)(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) := g_1(v_1) \otimes \cdots \otimes g_n(v_n)$。

以下结论是一个标准练习。

引理 2.9。 对于所有 $n \in \mathbb{N}$，映射 $\phi_{(n)}$ 是一个 k-代数单射，因此当 维数$_k V$ 有限时它是一个同构。因此，如果 (自同态集$_{\mathrm{k}}$(V),R) 是五边形方程（分别为 *RPE*）的代数解，那么 $(V, \phi_{(2)}(R))$ 是五边形方程（分别为 *RPE*）的向量空间解。反之，当 维数 $_k(V) < \infty$.

在实际应用中，我们常常会从向量空间解转到代数解，因此需要对 $\phi^{-1}{}_{(2)}$ 作出明确描述。假设 $\dim_k V < \infty$，并固定 V 的一组基 $\mathcal{B} = \{v_i \mid 1 \le i \le \dim\ V\}$。对于 $1 \le i,j \le \dim_k V$，定义

$$S_{ij} : V \longrightarrow V, \qquad S_{ij}(v_j) = v_i, \quad S_{i,j}(v_k) = 0\ (k \neq j).$$

在 $\mathrm{End_k(V)} \cong \mathrm{M}_{\dim \mathrm{V}}(\mathrm{k})$ 的识别下，端同态 S_{ij} 对应于初等矩阵 e_{ij}。因此，$\{S_{ij}\}$ 是 $\mathrm{End_k(V)}$ 的一组基，从而 $\{\phi_{(2)}(S_{ij} \otimes S_{kl})\}$ 是 $\mathrm{End_k(V} \otimes \mathrm{V)}$ 的一组基。

现设 $T \in$ 自同态集$_{\mathrm{k}}(\mathrm{V} \otimes \mathrm{V})$，并记 $T\colon\ V \otimes V \to V \otimes V\colon\ v_i \otimes v_j \mapsto \sum_{k,\ l} \alpha_{kl}^{ij} v_k \otimes v_l$。则直接计算可得

$$\phi_{(2)}\left(\sum_{k,l,t,h} \alpha_{kl}^{th} S_{kt} \otimes S_{lh}\right) = T. \tag{10}$$

注意，（10）为 $\phi^{-1}{}_{(2)}(T)$ 给出了显式公式，并且用到指标集合是有限的，即 $\dim_k V$ 有限。

3. 由集合论RPE解得到的Hopf代数

我们沿用 Militaru 与 Davydov 的构造。设 A 为一个 k-代数，且 $R = \sum R^1 \otimes R^2 \in A^{\otimes 2}$ 为一个 RPE 代数解。则子空间

$$R_{(\ell)} := \left\{ \sum a^*(R^2)R^1 \;\middle|\; a^* \in A^* \right\}$$
$$R_{(r)} := \left\{ \sum a^*(R^1)R^2 \;\middle|\; a^* \in A^* \right\}$$

分别称为 R 的左系数与右系数。若 A 为有限维，Militaru [20]与 Davydov [8] 已证明，下列结构映射使 $R_{(\ell)}$ 与 $R_{(r)}$ 具有霍普夫代数的结构。

命题 3.1 (Davydov,Militaru)。 $R_{(r)}$ （分别为 $R_{(\ell)}$）是 A 的子空间，配备以下结构映射后构成霍普夫代数：

- *Unit and multiplication: $R_{(r)}$ (resp. $R_{(\ell)}$) is a unital subalgebra of A,*
- *Co-unit :*
$$\epsilon_r : R_{(r)} \to k : \sum a^*(R^1)R^2 \mapsto a^*(1),$$
resp. $\epsilon_\ell(\sum a^*(R^2)R^1) = a^*(1)$.
- *Co-multiplication:*
$$\Delta_r : R_{(r)} \to R_{(r)} \otimes R_{(r)} : x \mapsto R(x \otimes 1)R^{-1},$$
resp. $\Delta_\ell(x) = R^{-1}(1 \otimes x)R$.
- *Antipode:*
$$S_r : R_{(r)} \to R_{(r)} : (a^* \otimes 1)(R) \mapsto (a^* \otimes 1)(R^{-1}),$$
resp. $S_\ell((1 \otimes a^*)(R)) = (1 \otimes a^*)(R^{-1})$.

注 3.2。在 [20, 定理 2.1] 中，余单位和反粒子是利用$R_{(\ell)}$（以及 $R_{(r)}$）的一组基定义的。引理 3.1中给出的定义取自 [8, 第 5]节。事实上，$R_{(r)}$ 中的 [20] 与 $\mathrm{Im}(\lambda)$ 中的 [8], 同构，其中

$$\lambda : A^* \to A : a^* \mapsto (a \otimes 1)(R).$$

此外，$R_{(l)}$ 与 $\mathrm{Im}(\rho)$ 同构，其中 $\rho\colon\ A^* \to A\colon\ \omega \mapsto (I \otimes \omega)(R)$。通过这些识别，[8, 命题 5.4 和 5.5] 证明，来自[20] 的余单位和反粒子可以表示为引理3.1中的形式。

若 $R = s^A$ 源自 RPE 的一个集合论解（S，s），则我们将相关 Hopf 代数记为

$$H_\ell(s) := R_{(\ell)} \text{ and } H_r(s) := R_{(r)}.$$

具体而言，如果 $s(x,\ y) = (\psi_y(x)\ y \circ x)$ 是五边形方程的集合论解，那么由（10）可知 e that

$$s^A = \sum_{x,y \in S} S_{\psi_y(x),x} \otimes S_{y \circ x,y}.$$

此外，记 $s^{-1}(x,\ y) = (xy,\ \theta_x(y))$，可以验证

$$(s^A)^{-1} = (s^{-1})^A = \sum_{x,y\in S} S_{xy,x} \otimes S_{\theta_x(y),y}. \tag{11}$$

相关 Hopf 代数有以下生成集。

命题 3.3。 设 $s(x,y) = (\psi_y(x)\ y \circ x)$ 是 *RPE* 的一个解。那么

$$H_\ell(s) = \mathrm{span}_k \left\{ \sum_{x\in\mu(x',y')} S_{\psi_{y'}(x),x} \;\middle|\; (x',y') \in S^2 \right\} \tag{12}$$

$$H_r(s) = \mathrm{span}_k \left\{ \sum_{y\in\nu(x',y')} S_{y\circ x',y} \;\middle|\; (x',y') \in S^2 \right\} \tag{13}$$

其中 $\nu(x',y') = \{y \in S \mid \psi_y(x') = \psi_{y'}(x')\}$ 且 $\mu(x',y') = \{x \in S \mid y' \circ x = y' \circ x'\}$。

证明。 我们从左系数开始。考虑一个固定的元组 $(x',y') \in S^2$ 以及与之对应的克罗内克 δ 函数 $\delta_{S_{y'\circ x',y'}} \in$ 自同态集$_k$(k[S])*。将 id$\otimes\delta_{S_{y'\circ x',y'}}$ 作用于 s^A得到

$$\begin{aligned}(\mathrm{id}\otimes\delta_{S_{y'\circ x',y'}})(s^A) &= (\mathrm{id}\otimes\delta_{S_{y'\circ x',y}}) \left(\sum_{x,y\in S} S_{\psi_y(x),x} \otimes S_{y\circ x,y} \right) \\ &= \sum_{x,y\in S} S_{\psi_y(x),x}\, \delta_{S_{y'\circ x',y'},\, S_{y\circ x,y}} \\ &= \sum_{x\in\mu(x',y')} S_{\psi_{y'}(x),x}\end{aligned}$$

右系数也可用类似的方法得到。 □

在 [20, 定理 2.1] 中，已证明 $R_{(\ell)} \cong R^*_{(r)}$。事实上，它们之间存在一个双代数配对 [8, 引理 5.2]。在集合论层面，这对应于以下结果。

命题 3.4。 设 (S, s) 是 *RPE* 的一个集合论解。我们有：

$$H_\ell(s) \cong H_r(\tau s^{-1} \tau).$$

此外，若 $s = s_1 \times s_2$，则 $H_\ell(s) \cong H_\ell(s_1) \otimes H_\ell(s_2)$。

例 3.5。 设 G 和 H 是有限群，并考虑以下映射

$$s : (H\times G)^{\times 2} \to (H\times G)^{\times 2} : ((a,g),(b,h)) \mapsto ((ab^{-1},g),(b,hg)).$$

直接验证可知，这是 RPE 的一个解 $s_{12}s_{13}s_{23} = s_{23}s_{12}$.。我们断言，相应的霍普夫代数 $H_l(s)$ 具有以下优美形式：

$$H_l(s) \cong k[H] \otimes_k (k[G^{op}])^*.$$

事实上，在这种情况下，引理3.3变为

$$H_l(s) = \mathrm{span}_k\{ \sum_{a\in H} S_{(ab^{-1},g),(a,g)} \mid b \in H, g \in G\}.$$

使用“g-坐标”可以很容易看出，该生成集是一个 k-基。对于长度 y
但通过直接计算可以验证

$$f : H_l(s) \to k[H] \otimes_k (k[G^{op}])^* : \sum_{a\in H} S_{(ab^{-1},g),(a,g)} \mapsto b \otimes \rho_g$$

是一个Hopf代数同构。

4. 源自霍普夫代数的组合 RPE 解

本节旨在回顾与（未必有限维的）霍普夫代数上的Hopf模相关联的典范RPE 解，并研究有趣的例子。更确切地说，第4.2 节包含背景知识，并引入 Φ-集合论基这一核心概念。在第4.3 节中，我们回顾匹配群对与Hopf代数的构造，从而得到双交叉积霍普夫代数。由此，我们计算相应的RPE 解，并提出RPE 解的混合对的形式框架。

4.1. 乘子霍普夫代数背景。 关于乘子 Hopf 代数的详细介绍，请参阅 [23]。此处我们仅回顾理解本文后续陈述所需的最基本内容。

约定： 在乘子代数的情形下，我们不再假设代数具有单位元。因此，在接下来的章节中，（Hopf）代数一词始终指含单位元的代数；但加上“乘子”一词时，则不假设其具有单位元。

首先，

定义 4.1。 若结合 k-代数 A 是非退化 的，则其张成空间$\{ab \mid a,b \in A\} = A$，且对所有 $a \in A$ 均有

$$Aa = 0 \Rightarrow a = 0 \qquad \text{and} \qquad aA = 0 \Rightarrow a = 0.$$

A的乘子是一个有序对（L， R），由 k-线性映射 L， R：$A \to A$组成，使得对于所有 x， $y \in A$均成立

$$L(xy) = L(x)y, \qquad R(xy) = xR(y), \qquad xL(y) = R(x)y \quad (x,y \in A).$$

所有乘子的集合记为 $M(A)$。

集合 $M(A)$可以赋予代数结构，称为 A的乘子代数。

命题 4.2。 集合 M（A） 配备以下运算后

$$(L_1,R_1) + \lambda(L_2,R_2) := (L_1 + \lambda L_2, R_1 + \lambda R_2)$$
$$(L_1,R_1) \cdot (L_2,R_2) := (L_1 \circ L_2, R_2 \circ R_1)$$

是一个代数。此外， A通过 $a \mapsto$（L_a， R_a） 嵌入到 M（A） 中，其中 L_a（x） $= ax$，R_a（x） $= xa$。

注意，含幺代数是非退化的。事实上，当且仅当 A 是含幺的时， $A = M(A)$成立。设有两个非退化代数 A 和 B。同态 ϕ： $A \to M(B)$是非退化的，如果张成空间$\{\phi(A)\, B\}$ =等于张成空间$\{B\, \phi(A)\} = B$。

定义 4.3. 乘子双代数是一个代数 A，配备一个非退化代数同态 Δ： $A \to M(A \otimes A)$，使得

(i) $\Delta(a)(1 \otimes b)$，$(1 \otimes b)\Delta(a)$ $\Delta(a)(b \otimes 1)$，$(b \otimes 1)\Delta(a)$ $\in A \otimes A$ 对所有 a，$b \in A$均成立。(ii) $(\Delta \otimes \mathrm{id})\Delta = (\mathrm{id} \otimes \Delta)\Delta$ 属于 $M(A \otimes A \otimes A)$。

乘子霍普夫代数是一个乘子双代数 $(A,\ \Delta)$，其中典范映射T_1， T_2： $A \otimes A \to A \otimes A$ 定义为

$$T_1(a \otimes b) = \Delta(a)(1 \otimes b) \text{ and } T_2(a \otimes b) = (a \otimes 1)\Delta(b)$$

是双射。

任何霍普夫代数都是乘子霍普夫代数。

例 4.4。设 G 为一个离散群，并将逐点运算下的函数代数 k^G 记作 $G \to k$。我们用 k^G_{fin} 表示有限支撑函数。注意， $k^G_{fin} = \bigoplus_{g \in G} k\,\delta_g$. 其中 $\delta_g(h) = \delta_{g,\ h}$ 对任意 g， $h \in G$. 注意，$\delta_g.\delta_h = 0$ 当 $g \neq h$时取值为 δ_g， 否则为零。给定 $f \in k^G$， 可以考虑 $L_f = R_f$：$k^G_{\mathrm{fin}} \to k^G_{\mathrm{fin}}$： $g \mapsto f$.于是 $T_f =$(L_f， R_f) 是 k^G_{fin}上的一个乘子。相应的映射

$$k^G \to M(k^G_{\mathrm{fin}}) : f \mapsto T_f$$

可以验证是一个同构。此外， $k^{G\times G}\cong M(k_{\mathrm{fin}}^G\otimes k_{\mathrm{fin}}^G)$。

代数 k_{fin}^G 是一个乘子霍普夫代数。具体而言，利用上述识别，余乘法定义为

$$\Delta: k_{\mathrm{fin}}^G\to M(k_{\mathrm{fin}}^G\otimes k_{\mathrm{fin}}^G)\text{ with }(\Delta f)(x,y):=f(xy).$$

注意，在基元素 $\Delta(\delta_g)=\sum_{ab=g}\delta_a\otimes\delta_b$ 上，这可能是一个无穷和，也就是说，它不属于 $k_{\mathrm{fin}}^G\otimes k_{\mathrm{fin}}^G$。余单位和反粒子分别为 $\varepsilon(f)=f(e)$ 和 $(Sf)(g)=f(g^{-1})$。

注意，如果 G 是有限的，那么和 $\sum_{ab=g}\delta_a\otimes\delta_b$ 也是有限的。因此，在这种情况下，k_{fin}^G 与线性对偶 $k[G]^*$ 同构。

4.2. **由双代数得到的 RPE 解**。给定一个霍普夫代数 H，按照 Davydov [8,第 3] 节的做法，可以为每个霍普夫 H-模关联一个五边形方程的双射解。回顾一下，向量空间 M 称为霍普夫 H-模，如果它满足以下条件：

- M是一个左 H-模，其作用由 μ_M：$H\otimes M\to M$给出。我们记 $\mu_M(h\otimes m)=:hm$。
- M 是一个右 H-余模，其余作用由 Δ_M：$M\to M\otimes H$给出。我们采用 Sweedler 记号$\Delta_M(m)=m_{(0)}\otimes m_{(1)}$。
- 这两种结构通过以下方式相容：$\Delta_M(hm)=\Delta_H(h)\Delta_M(m)$，即 $(hm)_{(0)}\otimes(hm)_{(1)}=h_{(1)}m_{(0)}\otimes h_{(2)}m_{(1)}$.

请注意，Hopf模的定义不要求 H 具有反粒子，因此也适用于双代数。当 H 是双代数时，Davydov 的构造仍然给出一个解，但不一定是双射。为方便读者，我们给出后一事实的证明。

命题 4.5 ([8])。设 B 是一个双代数，且 (M,μ_M,Δ_M) 是一个 *Hopf* B-模。定义

$$\Phi_M:=(I_M\otimes\mu_M)\circ(\Delta_M\otimes I_M):M\otimes M\to M\otimes M.$$

那么 (Φ_M,M) 是 *RPE* 的一个向量空间解。

注 4.6。注意，根据定义，如果 H 是一个乘子双代数，那么对于任意 $x,\ y\in H$，$(I\otimes m_H)\circ(\Delta_H\otimes I)(x\otimes y)\in H\otimes H$。此外，映射 Φ_H 仍然是一个 RPE 解。更一般地，乘子 Hopf 代数的 Hopf模已在 [13] 中引入。在这种情况下，映射 Φ_M 仍然有意义，并且是 RPE 的一个解。

注 4.7。如果 B 是一个 Hopf代数，那么 Φ_M 是双射，其逆为

$$\Psi:M\otimes M\to M\otimes M:m\otimes n\mapsto m_{(0)}\otimes S(m_{(1)})n.$$

此外，根据 Hopf模基本定理，$H\otimes M_H\to M$：$h\otimes m\mapsto hm$ 是 Hopf模的一个同构，其中

$$M_H:=\{m\in M\mid\Delta_M(m)=m\otimes 1_H\}$$

是余不变元子空间。其逆映射为

$$M\to H\otimes M_H:m\mapsto m_{(1)}\otimes S(m_{(2)})m_{(0)}.$$

该同构在 Φ_M 和 $\Phi_H\otimes I_{M_H}$ 之间诱导出 RPE 解的同构，其中 H 被视为其自身上的 Hopf模，参见 [8, 推论 3.4]。

引理的证明 4.5。证明可通过直接验证得到。注意 $\Phi_M(m\otimes n)=m_{(0)}\otimes m_{(1)}n$并为简便起见，将 Φ_M 记为 Φ。我们需要验证 $\Phi_{12}\Phi_{13}\Phi_{23}=\Phi_{23}\Phi_{12}$. 对于$m,\ n,\ l\in M$，左边变为：

$$\begin{aligned}\Phi_{12}\Phi_{13}\Phi_{23}(m\otimes n\otimes l)&=\Phi_{12}\Phi_{13}(m\otimes n_{(0)}\otimes n_{(1)}l)\\&=\Phi_{12}(m_{(0)}\otimes n_{(0)}\otimes m_{(1)}n_{(1)}l)\\&=m_{(0)}\otimes m_{(1)}n_{(0)}\otimes m_{(2)}n_{(1)}l\end{aligned}$$

右边为：

$$\begin{aligned}\Phi_{23}\Phi_{12}(m\otimes n\otimes l)&=\Phi_{23}(m_{(0)}\otimes m_{(1)}n\otimes l)\\&=m_{(0)}\otimes m_{(1)}n_{(0)}\otimes m_{(2)}n_{(1)}l\end{aligned}$$

其中，在最后一个等式中，我们用到了 M 的结构映射的相容性。 □

设 $s \in$ 自同态集$_{\mathrm{k}}$(V $\otimes$V) 是有限维向量空间V上的一个 RPE 解。那么，可以考虑它的右系数 Hopf代数 $H_r(s)$。在 [8, 第 5], 节（参见引理 3.2），空间 V 被赋予了 $H_r(s)$上的 Hopf模结构。关于该结构， [8, 定理 57] 中证明了以下结论，而 [20, 定理 21]中也隐含地证明了这些结论。

定理 4.8 (Davydov, Militaru)。设(s, V) 是一个有限维 *RPE* 解。那么V 具有一个关于 $H_r(s)$ 的 *Hopf* 模结构，使得 $\Phi_V = s$。因此，$s \cong \Phi_{H_r(s)}$ $\otimes$恒等于v_H，其中 $V_H = \{x \in V \mid s(x \otimes y) = x \otimes y$ 对所有 $y \in V$均成立。

引理 4.8 中的“因此”部分由引理 4.7 以及对 V 的余乘法的精确定义推出，该余乘法是在 [8, 第 5] 节中构造的。

据作者所知，如果 (s, V) 是一个无限维 RPE 解，那么目前尚无关于系数 Hopf 代数的其他方案。特别是，尚不清楚每个无限解是否都能通过引理 4.5中的构造获得。因此，我们引入以下术语。

定义 4.9。 设 (s, V) 是一个 RPE 解。若存在某个霍普夫代数 H 和霍普夫 H-模 M，使得 $s \cong \Phi_M$.，则称其为 可达的

因此，由引理 4.8 可知，每个有限维解都是可达的。现在考虑一个集合论解 (S, s)。回顾一下，与之相关的线性化记作 $(s^v, k[S])$。对于霍普夫 $\Phi_M \cong \Phi_H \otimes \mathrm{id}_{M_H}$-模 H而言，同构 M 一个不便之处在于，它与 M的固定基配合得并不好。特别是，如果 $M = k[S]$，那么似乎很难辨认右侧的基 S。正如我们将在第 7 节中看到的，这一微妙之处掩盖了一个有趣的事实：对于固定的霍普夫代数 Φ_H，可以得到许多集合论解。更准确地说， H 可以像下面的定义所示拥有许多基。

定义 4.10. 设 H为一个霍普夫代数，且 $\Phi_H = (\mathrm{id} \otimes m)(\Delta \otimes \mathrm{id})$ 为相应的 RPE 解。若对所有 $b, c \in \mathcal{B}$，元素 $\Phi(b \otimes c)$ 均为 $\mathcal{B}$ $\otimes\mathcal{B}$ 中的纯张量，则称 H 的基 $\mathcal{B}$ 为 Φ-集合论 。

尽管集合论层面相当微妙，但在向量空间层面有如下关于引理 4.8的推论。

推论 4.11. 设 (s_i, S_i)（其中 $i = 1,2$）为 *RPE* 的有限集合论解。假设 $|S_2| \geq |S_1|$。则 $H_r(s_1^v) \cong H_r(s_2^v)$ 当且仅当对某个向量空间 W有 $s_1^v \cong s_2^v \times 1_W$。

证明。 假设 $H_r(s_1^V) \cong H_r(s_2^V)$，则由引理 4.8 可知

$$s_1^v \cong \Phi_{H_r(s_1^v)} \otimes \mathrm{id}_{k[S_1]} \text{ and } s_2^v \cong \Phi_{H_r(s_2^v)} \otimes \mathrm{id}_{k[S_2]}.$$

因此 $s_1^v \cong s_2^v \times 1_{k[X]}$，其中 X 是基数为 $|S_2| - |S_1|$.的集合

反之，假设 $s_1^v \cong s_2^v \times 1_W$。根据引理3.4，我们有 $H_r(s_2^v \times 1_W) \cong H_r(s_2^v) \otimes H_r(1_W)$。现在注意到，对于平凡解 1_W，引理3.3中的生成集归结为单个生成元$\sum_{y \in W} S_{y,y}$，它是右系数代数的单位元。因此 $H_r(1_W) \cong k$，从而 $H_r(s_1^v) \cong H_r(s_2^v \times 1_W) \cong H_r(s_2^v)$，即为所求。□

例 4.12. 考虑半群代数 $k[S]$，它是具有余乘法 $\Delta(g) = g \otimes g$ 的余交换双代数，对于 $g \in S$。记 Φ_S 为经由引理 4.5 所关联的 PE 解。在 $g, h \in k[S]$ 它由下式给出：

$$\Phi_S(g, h) = (1 \otimes m)(g \otimes g \otimes h) = g \otimes gh$$

因此，限制到基 S 上即可得到集合论解 $s(g, h) = (g, gh)$。若 S 是一个群，且 p_2 表示 (g, h) 在 S 的第二个副本上的投影，那么 $s(g, h) = (g, gh)$ 是 S 上唯一的双射集合论 RPE 解，并且 $p_2 \circ s$ 与 S [12, 5] 的群结构一致。

例 4.13。设 G 是一个群，且 k^G_{fin} 是定义在 G上的有限支撑函数。其作为乘子霍普夫代数的结构已在引理 4.4中回顾。特别地，在基 $\{\delta_g\}_{g\in G}$上， k^G_{fin} 的余乘法定义为

$$\Delta(\delta_g) = \sum_{h\in G} \delta_h \otimes \delta_{h^{-1}g}$$

以及余单位由 $\epsilon(\delta_g)= \delta_{1,\ g}$. 因此，在典范基上，相应的 RPE 解 Φ取值为 $\Phi(\delta_g \otimes \delta_h)$ $= \sum_x \delta_x \otimes \delta_{x^{-1}g}.\delta_h$。由于

$$\delta_{x^{-1}g}.\delta_h = \begin{cases} 0 & \text{if } x^{-1}g \neq h \\ \delta_h & \text{else} \end{cases}$$

我们得到 $\Phi(\delta_g \otimes \delta_h) = \delta_{gh^{-1}} \otimes \delta_h$ 保持基 $\{\delta_g\}_{g\in G}$。将集合 $\{\delta_g\}_{g\in G}$与 $\{g \in G\}$等同后，我们看到 Φ 给出集合论映射 $s\colon G^{\times 2} \to G^{\times 2} \colon (g,h) \mapsto (gh^{-1},h)$。根据引理 2.7，这是 G上唯一 PE 群解的拉回。

若 G 是有限阿贝尔群，则由 k-线性对偶$k[G]^* = k^G_{\text{fin}}$ 得到的解与引理 4.12中的群解一致，但定义在庞特里亚金对偶$G^\vee = \hom(G, k^*)$ 上，其中 G，并且 k 是 G的某个分裂域。为此，我们需要回顾一个显式的霍普夫代数同构，其中 $\{e_\chi \mid \chi \in G^\vee\}$ 表示 $k[G^\vee]$的基：

$$\Psi : k[G^\vee] \to k[G]^* : e_\chi \mapsto \sum_{g\in G} \chi(g)\delta_g. \tag{14}$$

其反演由傅里叶反演给出，即 $\Psi^{-1}(\delta_g) = \sum_{\chi\in G^\vee} \chi(g^{-1})e_\chi$.

Claim: $\Phi_{G^\vee}(e_{\chi_1} \otimes e_{\chi_2}) = e_{\chi_1} \otimes e_{\chi_1\chi_2} = (\Psi^{-1} \otimes \Psi^{-1}) \circ \Phi \circ (\Psi \otimes \Psi)$

我们首先验证

$$(\Phi \circ (\Psi \otimes \Psi))\,(e_{\chi_1} \otimes e_{\chi_2}) = \Phi(\sum_{g,h\in G} \chi_1(g)\chi_2(h)\delta_g \otimes \delta_h) = \sum_{g,h\in G} \chi_1(g)\chi_2(h)\delta_{gh^{-1}} \otimes \delta_h.$$

接下来，我们作变量代换 $u = gh^{-1}$，并利用特征 χ 具有乘法性，将上一个求和式改写如下：

$$\sum_{g,h\in G} \chi_1(g)\chi_2(h)\delta_{gh^{-1}}\otimes\delta_h = \sum_{u,h\in G} \chi_1(u)\chi_1(h)\chi_2(h)\delta_u\otimes\delta_h = \left(\sum_{u\in G} \chi_1(u)\delta_u\right)\otimes\left(\sum_{h\in G} (\chi_1\chi_2)(h)\delta_h\right).$$

换言之，我们计算得 $(\Phi \circ (\Psi \otimes \Psi))\,(e_{\chi_1} \otimes e_{\chi_2}) = \Psi(e_{\chi_1}) \otimes \Psi(e_{\chi_1\chi_2})$，由此得证。

这个例子一个有趣的特点是，我们在向量空间 $k[G]^*$上得到了两个基，分别是 $\mathcal{B}_1 =\{\delta_g\}_{g\in G}$ 和 $\mathcal{B}_2 = \{\Psi(e_\chi)\}_{\chi\in G^\vee}$，使得 Φ 同时保持这两个基。特别是，$\Phi|_{\mathcal{B}_i\otimes\mathcal{B}_i}$ 对应于 RPE 的集合论解，但根据引理 4.13，它们并不同构。

例 4.14. 考虑某个李代数 $H = U(\mathfrak{g})$，并固定其一个全序 k-基 $\mathfrak{g}$。回忆一下，根据庞加莱-比尔霍夫-维特定理，以下集合是 $U(\mathfrak{g})$ 的一个基：

$$\{y_1^{n_1}.\cdots.y_\ell^{n_\ell} \mid y_1 < \cdots < y_\ell \in \mathcal{B}\}.$$

现在注意，对于 $x,\ y \in \mathcal{B}$,

$$\Phi_{\mathfrak{g}}(x,y) = (I \otimes \mu)(\Delta(x) \otimes y) = x \otimes y + 1 \otimes xy.$$

因此，将解 $\Phi_{\mathfrak{g}}$ 限制到基 $\mathcal{B}$ 并不会得到集合论解。我们将在引理 6.8 中证明，也不存在其他能得到集合论解的基。

4.3. **双交叉积霍普夫代数与解的匹配对**。

4.3.1. 双交叉积的背景。设 H 和 K 为双代数。根据 [22]，若它们满足以下条件，则称其构成一个（左-右）匹配对：

- 存在一个左作用 $\triangleright$： $K \otimes H \to H$，使得 H 成为左 K-模余代数。
- 存在一个右余作用 ρ： $K \to K \otimes H$： $a \mapsto a_K \otimes a_H$，使得 K 成为右H-余模余代数。
- 对于所有 $a,\ b \in K$ 和 $h,\ h\prime \in H$，均满足相容性恒等式：

$$\begin{aligned} a \triangleright (hh') &= (a_{(1)} \triangleright h)\big(a_{(2)} \triangleright h'\big), \\ \Delta(a_K) \otimes a_H &= (a_{(1)})_K \otimes (a_{(2)})_K \otimes (a_{(1)})_H (a_{(2)})_H \\ \rho(ab) &= \rho(a_{(1)})(b_K \otimes (a_{(2)} \triangleright b_H)) \\ \Delta_K(a \triangleright h) &= (a_{(1)})_K \triangleright h_{(1)} \otimes (a_{(1)})_H \, (a_{(2)} \triangleright h_{(2)}) \end{aligned}$$

  以及 $a \triangleright 1_H = \varepsilon_K(a) 1_H$、 $1_K \triangleright h = h$。

相容性将确保下述乘法满足结合律，并且双代数公理成立。

定义 4.15. 设 H 与 K 为Hopf代数。（左-右）双交叉积 Ho pf 代数 $H \bowtie K$ 是赋予如下结构映射的向量空间 $H \otimes K$。

- unit: $1_{H \bowtie K} = 1_H \otimes 1_K$,
- multiplication:

$$(h \otimes a)(y \otimes b) = h \, (a_{(1)} \triangleright y_{(1)}) \ \otimes a_{(2)} \, b,$$

- counit: $\varepsilon(h \otimes k) = \varepsilon_H(h)\varepsilon_K(k)$,
- coproduct:

$$\Delta(h \otimes a) = (h_{(1)} \otimes (a_{(1)})_K) \otimes (a_{(2)}(a_{(1)})_H \otimes a_{(2)}),$$

- Antipode: $S(h \otimes a) = (1 \otimes S_K(a_K))(S_H(h \, a_H) \otimes 1)$

已在 [22] 中证明 $H \bowtie K$ 仍是霍普夫代数。为避免混淆，我们将简单张量记为 $h\#k := h \otimes k$.

例 4.16. 一个主要对象将是 $H = k[B]^*$ （群代数的对偶）与$K = k[N]$ （群代数），其中 B 与 N 构成群匹配对。注意，为使$k[B]^*$ 成为余代数，我们需要 B 是有限的。回顾群匹配对由如下映射组成

- N 在 B 上的右作用： $\triangleleft$： $B \times N \to B$
- B 在 N上的左作用： $\triangleright$： $B \times N \to N$

使得对于所有的 $b,\ b' \in B$和 $u,\ v \in N$,

$$b \triangleright (uv) = (b \triangleright u)\big((b \triangleleft u) \triangleright v\big), \tag{15}$$

$$(bb') \triangleleft u = \big(b \triangleleft (b' \triangleright u)\big)\,(b' \triangleleft u). \tag{16}$$

以及单位元条件 $b \triangleright e_N = e_N$, $e_B \triangleleft n = e_B$, $e_B \triangleright n = n$, $b \triangleleft e_N = b$。若 B和 N是群 G的子群，则上述数据等价于一个分解 $G = BN$。由匹配对 $(B,\ N,\ \triangleleft,\ \triangleright)$ 可构造如下 Hopf 作用。

- $k[B]^*$ 在 $k[N]$上的左作用：对于 $u \in N$，定义

$$\delta_b \triangleright u := b \triangleright u$$

  其中 $b \in B$ 和 $u \in N$。
- $k[N]$ 在 $k[B]^*$上的右余作用：

$$\rho(u) = \sum_{b \in B} (b \triangleright u) \otimes \delta_b \in k[N] \otimes k[B]^*$$

直接验证可知， $k[B]^* \bowtie k[N]$ 的（余）乘法具有以下形式：

$$
\begin{aligned}
(\delta_s \# u)\,(\delta_t \# v) &:= \delta_{s \triangleleft h,\ t}\ (\delta_s \# uv),\\
\Delta(\delta_s \# u) &:= \sum_{xy=s} (\delta_x \#(y \triangleright u)) \otimes (\delta_y \# u) = \sum_{x \in B} (\delta_x \#(x^{-1}s \triangleright u)) \otimes (\delta_{x^{-1}s} \# u),\\
1_{k[B]^* \bowtie k[N]} &:= 1_{k[B]^*} \# 1_{k[N]} = \sum_{s \in B} \delta_s \# 1_N\\
\varepsilon(\delta_s \# v) &:= \delta_{s,1_B}
\end{aligned}
$$

对于 $s,\ t \in B$和 $u,\ v \in N$。

4.3.2. 匹配对 ***Hopf***代数的 ***RPE*** 解。 现在，我们通过引理 4.5 计算与上述双交叉积Hopf代数相关联的 RPE 解。注意，如果我们将 Hopf模 M 取为一个霍普夫代数 H，那么 Davydov 的构造可以写成如下形式：

$$\Phi_H : H \otimes H \to H \otimes H : a \otimes b \mapsto a_{(1)} \otimes a_{(2)} b \tag{17}$$

命题4.17。 设 $(H, K, \triangleright, \rho)$ 为一个 ***Hopf***代数匹配对，则

$$\Phi_{H \bowtie K}\big((h\#a) \otimes (y\#b)\big) = (h_{(1)}\#(a_{(1)})_K) \otimes \Big(h_{(2)}(a_{(1)})_H\,(a_{(2)} \triangleright y_{(1)})\#a_{(3)}b\Big).$$

特别地，如果该匹配对是平凡的，即 $H \bowtie K \cong H \otimes K$，那么 $\Phi_{H \bowtie K} = \Phi_H \times \Phi_K$。此外，如果 H 和 K 如引理 *4.16*所述，则：

$$\Phi_{k[B]^* \bowtie k[N]}\big((\delta_s \# u) \otimes (\delta_t \# v)\big) = \big(\delta_{\,s\,(t \triangleleft u^{-1})^{-1}} \#((t \triangleleft u^{-1}) \triangleright u)\big) \ \otimes\ \big(\delta_{t \triangleleft u^{-1}} \# hv\big).$$

保持基 $\{\delta_b \otimes u \mid b \in B, u \in N\}$。

将基元素 $\delta_b \otimes u$ 解释为元组 $(b,\ u) \in B \times N$，这对应于 $B \times N$ 上以下集合论RPE解：

$$\phi_{B \bowtie N}\big((s,u)\,,\,(t,v)\big) = \Big(\big(s\,(t \triangleleft u^{-1})^{-1}, (t \triangleleft u^{-1}) \triangleright u\big)\,,\,(t \triangleleft u^{-1}, uv)\Big) \tag{18}$$

证明。 $\Phi_{k[B]^* \bowtie k[N]}$ 的表达式可直接由定义得出；将 $H \bowtie K$ 的交叉余积和交叉乘法代入后，再用 Sweedler 记号展开：

$$
\begin{aligned}
\Phi_{H \bowtie K}\big((h\#a) \otimes (y\#b)\big) &= (h_{(1)}\#(a_{(1)})_K) \otimes \Big(h_{(2)}(a_{(1)})_H\,(a_{(2)(1)} \triangleright y_{(1)})\#a_{(2)(2)}b\Big)\\
&= (h_{(1)}\#(a_{(1)})_K) \otimes \Big(h_{(2)}(a_{(1)})_H\,(a_{(2)} \triangleright y_{(1)})\#a_{(3)}b\Big)
\end{aligned}
$$

从得到的表达式可以看出，如果两个作用都是平凡的，那么我们得到这些解的直积。

现在假设 $H = k[B]^*$和 $K = k[N]$构成$(B,\ K,\ \triangleleft,\ \triangleright)$群匹配对。在这种情况下，可以利用引理4.16中给出的结构映射形式，进一步简化上述表达式。代入上述公式可得

$$\Phi_{k[B]^* \bowtie k[N]}((\delta_s \# u) \otimes (\delta_t \# v)) = \sum_{xy=s} (\delta_x \#(y \triangleright u)) \ \otimes\ \big((\delta_y \# u)(\delta_t \# v)\big).$$

现在利用 $(\delta_y \# u)(\delta_t \# v) = \delta_{y \triangleleft u,t}\,(\delta_y \# uv)$。因此，只有含有 $y \triangleleft u = t$ 的唯一项，即 $y = t \triangleleft u^{-1}$，会保留下来。对于该 y，我们有 $x = s\,y^{-1} = s(t \triangleleft u^{-1})^{-1}$. 因此，代入可得

$$\Phi_{k[B]^* \bowtie k[N]}((\delta_s \# u) \otimes (\delta_t \# v)) = (\delta_{\,s\,(t \triangleleft u^{-1})^{-1}} \#((t \triangleleft u^{-1}) \triangleright u)) \ \otimes\ (\delta_{t \triangleleft u^{-1}} \# uv).$$

□

4.3.3. *RPE* 解的混合对的形式化概念。 至此，我们已经看到，RPE 解 Φ_H 和 Φ_K 在 (17) 中，以及解

$$(h\#a)\otimes(y\#b)\big)\mapsto(h_{(1)}\#(a_{(1)})_K)\otimes\Big(h_{(2)}(a_{(1)})_H\,(a_{(2)}\triangleright y_{(1)})\#a_{(3)}b\Big)$$

引理4.17 在 Hopf理论层面相关联。现在我们引入一个形式化框架，通过对解施加一个运算，将映射 Φ_H 和 Φ_K 联系起来。

定义 4.18。 设 H 和 K 为双代数，并设

$$\Phi_H=(\mathrm{id}\otimes m_H)(\Delta_H\otimes\mathrm{id}),\qquad \Phi_K=(\mathrm{id}\otimes m_K)(\Delta_K\otimes\mathrm{id})$$

它们所对应的 RPE 解为。一个（左–右）*RPE* 解的匹配对数据由两个线性映射组成

$$\Xi_{\mathrm{mult}}:K\otimes H\to H\otimes K,\qquad \Xi_{\mathrm{cop}}:H\otimes K\to K\otimes H,$$

满足以下方程:

（1）乘法混合五边形：作为映射 $K\otimes H\otimes H\to H\otimes H\otimes K$,

$$(\Phi_H\otimes\mathrm{id}_K)(\mathrm{id}_H\otimes\Xi_{\mathrm{mult}})(\Xi_{\mathrm{mult}}\otimes\mathrm{id}_H)=(\mathrm{id}_H\otimes\Xi_{\mathrm{mult}})(\Xi_{\mathrm{mult}}\otimes\mathrm{id}_H)(\mathrm{id}_K\otimes\Phi_H).$$

(2) 余乘法混合五边形：作为映射 $H\otimes K\otimes K\to K\otimes H\otimes H$,

$$(\mathrm{id}_K\otimes\Phi_H)(\Xi_{\mathrm{cop}}\otimes\mathrm{id}_H)(\mathrm{id}_H\otimes\Xi_{\mathrm{cop}})=(\Xi_{\mathrm{cop}}\otimes\mathrm{id}_H)(\mathrm{id}_H\otimes\Xi_{\mathrm{cop}})(\Phi_H\otimes\mathrm{id}_K).$$

(3) 作用–余作用相容性：作为映射 $K\otimes K\otimes H\to K\otimes H\otimes K$,

$$(\Xi_{\mathrm{cop}}\otimes\mathrm{id}_K)(\mathrm{id}_H\otimes m_K)(\Xi_{\mathrm{mult}}\otimes\mathrm{id}_K)=(\mathrm{id}_K\otimes m_H)(\mathrm{id}_K\otimes\Xi_{\mathrm{mult}})(\Xi_{\mathrm{cop}}\otimes\mathrm{id}_H).$$

映射 Ξ_{mult} 和 Ξ_{cop} 将分别称为乘法 和余乘法接口。以下内容可通过直接计算验证

命题 4.19。 设$(H,K,\Xi_{\mathrm{mult}},\Xi_{\mathrm{cop}})$ 是一个 *RPE* 解的匹配对数据 *s.* 在 $H\otimes K$ 上定义映射

$$\Delta_{\bowtie}:=(\mathrm{id}_H\otimes\Xi_{\mathrm{cop}}\otimes\mathrm{id}_K)\circ(\Delta_H\otimes\Delta_K),$$
$$m_{\bowtie}:=(m_H\otimes m_K)\circ(\mathrm{id}_H\otimes\Xi_{\mathrm{mult}}\otimes\mathrm{id}_K).$$

Then

$$\Phi_{\bowtie}:=(\mathrm{id}\otimes m_{H\bowtie K})(\Delta_{H\bowtie K}\otimes\mathrm{id})$$

是 *RPE* 的一个解。

注意，如果我们要写成

$$\Xi_{\mathrm{cop}}(h_{(2)}\otimes a_{(1)})=a^{(0)}\otimes h^{\sharp}_{(2)}\ \text{ and }\ \Xi_{\mathrm{mult}}(a_{(2)}\otimes y)=y^{\flat}\otimes a'$$

那么 $\Phi_{\bowtie}$ 具有以下形式:

$$\Phi_{\bowtie}\big((h\otimes a)\otimes(y\otimes b)\big)=(h_{(1)}\otimes a^{(0)})\otimes\big((h^{\sharp}_{(2)}y^{\flat})\otimes(a'b)\big).\tag{19}$$

例 4.20. 若（$H,K,\triangleright,\rho$）是双代数的混合对，则考虑

$$\Xi_{\mathrm{mult}}(a\otimes h)=(a_{(1)}\triangleright h_{(1)})\otimes a_{(2)}\ \text{and}\ \Xi_{\mathrm{cop}}(h\otimes a)=a_K\otimes h\,a_H.$$

在这种情况下，引理 4.18 中的关系对应于匹配对公理。此外，公式（19）关于 $\Phi_{\bowtie}$ 恰好成为解 $\Phi_{H\bowtie K}$，来自引理 4.17。

5. 关于正基性质与集合论解之间的关系 S

约定： 在本节中， k 表示任意特征零域。

对于这类域，可以讨论标量的正性，例如将 k 视为$\mathbb{C}$的子域。回顾一下（参见 [16], ），若霍普夫代数 H 具有一个基 B ，使得所有结构映射的结构常数均为正，则称其具有正基性质 ，即：

(1) 单位元 1 的坐标非负；(2) 余单位 ϵ 的坐标（相对于对偶基 B^*）非负，即对于任意 $b \in B$， $\epsilon(b) \geq 0$；(3) 对于任意 b_1， $b_2 \in B$， $b_1 b_2$ 的坐标非负；(4) 对于任意 $b \in B$, $\Delta(b)$相对于张量积基$B \otimes B$ 的坐标非负；(5) 对于任意 $b \in B$，反粒子 $S(b)$的坐标非负。

如果除反粒子对应的结构常数外，其余结构常数均为正，则称 H 具有近正基性质。

本节研究具有正基性质的霍普夫代数与集合论解之间的关系。在有限维情形下，我们将在引理 5.4中证明，这类霍普夫代数对应于 RPE 的有限双射解。

我们从第 5.1 节开始，在该节中我们证明，任何具有 Φ-集合论基的霍普夫代数都接近具有近正性质。

5.1. 关于 Φ-集合论基的一般性质。 现在设$\mathcal{B}$ 是某个霍普夫代数 H 的 Φ-集合论基。特别地，$\Phi|_{\mathcal{B}\otimes\mathcal{B}}$ 给出了一个 RPE 的集合论解。因此，它可以写成如下形式

$$\phi_{\mathcal{B}}(b, c) = \big(\psi_c(b),\ c \circ b\big). \tag{20}$$

其中，对于每个 $c \in \mathcal{B}$，映射 $\psi_c : \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ 是一个置换，而$\circ : \mathcal{B} \times \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ 是一个二元运算。因此，对于所有 $b, c \in B$,

$$\Phi_H(b \otimes c) = \psi_c(b) \otimes c \circ b. \tag{21}$$

引理 5.1. 设 B 是霍普夫代数 H 的一个 Φ集合论基。那么对所有 $b, c \in B$，均有如下结论：

(i) $bc = \varepsilon(\psi_c(b))(c \circ b)$, (ii) $\varepsilon(c)b = \varepsilon(c \circ b)\psi_c(b)$, (iii) $\Delta(b) = \sum_{c\in \mathrm{B}} \lambda_c\, \varepsilon(c)\varepsilon(c \circ b)^{-1} b \otimes c \circ b$ 其中 $1_H = \sum_{c\in \mathrm{B}} \lambda_c c$，且若 $\varepsilon(c \circ b)$，则 $\neq 0$ 当且仅当 $\lambda_c \neq 0$, (iv) $S(\psi_c(b))(c \circ b) = \varepsilon(b)c$ 且 $\varepsilon(c)S(b)(c \circ b) = \varepsilon(c \circ b)\varepsilon(b)c$。

引理 5.1 中关于（余）乘法的表达式直接推出以下结论。

推论 5.2。 设 H 是一个霍普夫代数，B 是 Φ 的集合论基。假设 B 关于单位元和余单位满足正性，即 $\varepsilon(b) \geq 0$ 对所有 $b \in B$ 以及分解 $1_H = \sum_{c\in\mathcal{B}} \lambda_c c$中的 $\lambda_c \geq 0$ 均成立。那么 H 具有近正基性质。

有趣的是，在引理 5.2 的条件下，表达式 (5.1) 是否也能为反粒子带来正性。

例 5.3。 引理 5.1 意味着 $\Phi_H(b \otimes c) = \lambda_1 \lambda_2 b \otimes bc$ 对于某些标量 $\lambda_i \in k$. 因此很容易得出结论： Φ_H 等价于群解。然而事实并非如此。一个很好的例子是考虑 $H = k[G]^*$ 其中 G 是有限群及其相应的基 $\{\delta_g \mid g \in G\}$。 在引理 4.13 中已验证 $\Phi_{k[G]}(\delta_g \otimes \delta_h) = \delta_{gh^{-1}} \otimes \delta_h$.

单位元（5.1）的形式为 $\delta_g = \delta_h^{-1}{}_{,\ 1}\delta_{h,\ 1}\delta_{gh^{-1}} = \delta_{h,\ 1}\delta_{gh^{-1}}$。而方程（5.1）为 $\delta_{g,\ h}\delta_h = \delta_{gh^{-1},\ 1}\delta_h$。这两个陈述确实成立，并说明标量 λ_i可以用非预期的方式改写表达式。

引理 5.1 的证明。我们从方程 $bc = \varepsilon(\psi_c(b))(c \circ b)$ 开始。为此，应用 $(\varepsilon \otimes$单位元$)$于（21）。一方面，

$$\begin{aligned}(\varepsilon \otimes \mathrm{id})\Phi_H(b \otimes c) &= (\varepsilon \otimes \mathrm{id})(\mathrm{id} \otimes m)(\Delta(b) \otimes c) \\ &= \varepsilon(b_{(1)})b_{(2)}c \\ &= m\big((\varepsilon \otimes \mathrm{id})\Delta(b) \otimes c\big) \\ &= bc,\end{aligned}$$

利用 $(\varepsilon \otimes \mathrm{id})\Delta = \mathrm{id}$。另一方面，$(\varepsilon \otimes \mathrm{id})(\psi_c(b) \otimes (c \circ b)) = \varepsilon(\psi_c(b))(c \circ b)$。

现在我们以类似的方式证明 $b = \varepsilon(c)^{-1}\varepsilon(c \circ b)\psi_c(b)$。具体而言，计算 $(\mathrm{id} \otimes \varepsilon)\Phi_H(b \otimes c) = \varepsilon(b_{(2)})\varepsilon(c)b_{(1)} = \varepsilon(c)b$，利用 $(\mathrm{id} \otimes \varepsilon)\Delta = \mathrm{id}$。另一方面，$(\mathrm{id} \otimes \varepsilon)\Phi_H(b \otimes c) = \varepsilon(c \circ b)\psi_c(b)$，从而得到该方程。

接下来写作 $1_H = \sum_{c \in \mathcal{B}} \lambda_c c$。于是

$$\Delta(b) = \Phi_H(b \otimes 1_H) = \sum_{c \in \mathcal{B}} \lambda_c \, \psi_c(b) \otimes c \circ b = \sum_{c \in \mathcal{B}} \lambda_c \, \varepsilon(c)\varepsilon(c \circ b)^{-1} b \otimes c \circ b.$$

最后我们考虑反粒子。为此注意到

$$m(S \otimes 1_H)\Phi_H(b \otimes c) = S(b_{(1)})b_{(2)}c = \varepsilon(b)c,$$

根据 Φ_H 的定义以及卷积法则 $m(S \otimes id)\Delta = \varepsilon$。现在由（21）和第二项，我们还得到 $m(S \otimes 1_H)\Phi_H(b \otimes c) = S(\psi_c(b))(c \circ b)$。因此，比较并使用第二项可得，

$$\varepsilon(c)S(b)(c \circ b) = \varepsilon(c \circ b)S(\psi_c(b))(c \circ b) = \varepsilon(c \circ b)\varepsilon(b)c.$$

□

5.2. 有限维Hopf代数具有正基。

5.2.1. 主要结果及其推论。本节的第一个主要结果如下 .

定理 5.4。设(S, s) 是五边形方程的一个有限双射解。那么， $H_\ell(s)$ 和 $H_r(s)$ 有一个同时为正且具有 Φ集合论性质的基。

引理5.4 中提到的基将是引理3.3中生成集的细化。回顾引理4.8 给出了有限维霍普夫代数与 RPE 解的系数代数之间的对应关系。因此，作为引理5.4的推论，我们得到，在有限维情形下，具有正基性质与具有一个 Φ-集合论基等价。

在 [16] 具有正基性质的复数域上的有限维Hopf代数 $\mathbb{C}$ 已被分类。具体而言，已证明它们都同构于某个有限群 $k[B]^* \bowtie k[N]$ 交叉对对应的双交叉积霍普夫代数$(B、 N、 \triangleleft、 \triangleright)$。更确切地说，他们证明，给定$\mathcal{B}$ 作为 H的一个正基，可以对基元素重新缩放，使得$\mathcal{B}$ 对应于一个群 G 及其分解 $G = B.N$，且由H唯一确定。在 [16, 第 4], 节中得到这种重新缩放的存在性时，实际上利用了复数域，以便能够对固定向量空间上的双代数结构空间进行解析研究。现在，结合上述结果与有限双射集合论解的分类 [7] 以及引理3.5 ，我们得到该分类结论对特征为0的任意域也成立。

综上所述，我们有如下对 [16, 定理 1]的推广。

推论 5.5. 设 H 是一个有限维 *Hopf* k-代数，且$\mathrm{char}(k) = 0$。则下列条件等价:

- H 具有一个 Φ-集合论基，
- H 具有正基性质，
- $H \cong k[B]^* \bowtie k[N]$ 对于有限群的一个揉合对$(B, N, \triangleleft, \triangleright)$。

此外，如果上述条件成立，那么揉合对便是唯一确定的。

结合第5.1 节的内容，我们认为，存在一个 Φ-集合论基总是意味着存在一个（可能不同的）正基。然而，我们不认为反过来也成立，因为存在一些近正霍普夫代数并不具有 Φ-集合论基，例如有限维李代数 $U(\mathfrak{g})$ 的包络代数 $\mathfrak{g}$，参见引理 6.8。

猜想5.6。设 H 是一个特征为 k 的 Hopf k 代数。若 H 有一个 Φ 集合论基，则 H 具有正基性质。

5.2.2. 回顾一些结构性结果。为了得到系数代数的精确基，我们将采用 Colazzo-Okninski-Van Antwerpen 的一项近期结果 [7, 命题 2.4]，以及 Colazzo-Jespers-Kubat 的结果 [6, 引理 2.4]。

命题5.7。设 (S, s) 是 *RPE* 的一个有限双射解。那么 $(S, \circ)$ 是一个左群，即存在一个集合 E 和一个群 G，使得 $S = E \times G$，并且

$$(e, g) \circ (f, h) = (e, g \circ h) \qquad \forall e, f \in E, g, h \in G.$$

此外，对于每个 $x \in S$，映射 ψ_x 都是双射，并且 $\psi_x = \mathrm{id}_S$ 或 ψ_x 无不动点。最后，集合

$$\Psi = \{\psi_x | \, x \in S\} = \left\{ \psi_{(e,1)} \middle| \, e \in E \right\}$$

是一个群（关于复合）。

证明。将 [7, 命题 2.4] 应用于由 $t = \tau s \tau$ 给出的五边形方程的集合论解，我们得到 $(S, \circ)$ 是一个左群。

接下来，将 [7, 命题 2.10] 应用于 (S, t)，可知对于每个 $x \in S$，映射 ψ_x 都是双射。结合 [7, 命题 2.11] 与 [6, 引理 2.4], ，我们得出，对于每个 $x \in S$，$\psi_x = \mathrm{id}_S$ 或 ψ_x 是无不动点的。

最后，利用（5）以及 s 的双射性，可以验证 Ψ 在复合运算下封闭。此外，Ψ 是有限的，包含单位元（见 [7, 命题 2.11]），且每个元素都可逆；因此 Ψ 是一个群。等式

$$\Psi = \{\psi_x | \, x \in S\} = \left\{ \psi_{(e,1)} \middle| \, e \in E \right\}$$

由 [7,命题 2.11]得出。 □

5.2.3. 基的构造。从现在起，由于在左群中，$E \times G$ 集合 E 与幂等元集合 $E(S, \circ)$ 重合，我们将 $e \in E$ 与 $(e,1) \in S$ 视为同一对象，并简写 e 为 $(e,1)$。由于 S 是左群，对每个 $e \in E$ $(S, \circ)$，群 G 都与 $e \circ S$ 同构。根据前一个命题，存在一个幂等元，记作 1，使得 $\psi_1 = \mathrm{id}_S$。特别地，我们将 G 与 $1 \circ S$ 视为同一对象。

我们利用引理 5.7 对引理 3.3 中的集合 $H_\ell(s)$ 和 $H_r(s)$ 作出更简洁的描述。

推论 5.8。设 (S, s) 是五边形方程的一个有限双射解，且 $x', y' \in S$。那么：

$$\nu(x', y') = \{y \in S \mid \psi_y = \psi_{y'}\} \qquad and \qquad \mu(x', y') = \{e \circ x' \mid e \in E(S, \circ)\}.$$

证明。设 $x', y' \in S$，并设 $y \in \nu(x', y')$。那么 $\psi_{y'}(x') = \psi_y(x')$，且由于 ψ_y 是双射，我们得到 $\psi_y^{-1}\psi_{y'}(x') = x'$。由于 $\Psi = \{\psi_x \mid x \in S\}$ 是一个群，存在 $t \in S$ 使得 $\psi_y^{-1}\psi_{y'} = \psi_t$。因此 $\psi_t(x') = x'$，由引理 5.7可知 $\psi_t = \mathrm{id}_S$。因此 $\psi_y = \psi_{y'}$，$\nu(x', y') = \{y \in S \mid \psi_y = \psi_{y'}\}$。

现在设 $x \in \mu(x', y')$。那么 $y' \circ x = y' \circ x'$。由于 $(S, \circ)$ 是一个左群，我们可以写作 $S = E \times G$。记 $x = (e_x, g_x)$、$x' = (e_{x'}, g_{x'})$ 和 $y' = (e_{y'}, g_{y'})$。那么 $y' \circ x = (e_{y'}, g_{y'}) \circ (e_x, g_x) = (e_{y'}, g_{y'} g_x)$ 且 $y' \circ x' = (e_{y'}, g_{y'} \circ g_{x'})$。设 $e = (e_x, 1) \in E(S, \circ)$。那么 $e \circ x' = x$。因此 $x \in \{e \circ x' \mid e \in E(S, \circ)\}$。由 $y' \circ (e \circ x') = y' \circ x'$（对所有 $e \in E(S, \circ)$）可立即得到反向包含。因此 $\mu(x', y') = \{e \circ x' \mid e \in E(S, \circ)\}$。□

注意，由引理 5.8，对 x' 在 $\nu(x', y')$ 中的依赖性消失（同样，对 y' 在 $\mu(x', y')$ 中的依赖性消失）。因此，我们引入记号

$$\nu_\psi(y') = \{ y \in S \mid \psi_y = \psi_{y'} \}, \qquad \mu_\circ(x') = \{e \circ x' \mid e \in E(S, \circ)\}.$$

设 $(S,\ s)$ 是 RPE 的一个有限双射集合论解。现在由 [7, 命题 3.4] 应用于 $t=\tau s\tau$，我们得到一个等价关系 $\sim$，称为收缩，定义在 $(S,\ \circ)$ 上，其定义为：$(e,\ g)\sim(f,\ h)$ 当且仅当 $\psi_e=\psi_f$ 且 $g=h$。这显然限制为左零半群 $E(S,\ \circ)$ 上的一个同余，并简化为 $e\sim f$ 当且仅当 $\psi_e=\psi_f$。

Let E 使得 $E(S,\circ)/\sim$ 的将组代表元。此外，$1\in$

现在我们证明，所有 $\sim$-类（等价地，所有收缩类）都具有相同的基数。

引理 5.9。设 (S,s) 是一个有限双射 *RPE* 集合论解，写作 $s(x,y)=(\psi_y(x)\ \ y\circ x)$。那么，关于收缩关系的等价类都具有相同的基数。

证明。对于 $g\in G=1\circ S$ 和 $e\in E$，我们有

$$[e\circ g]=\{\,f\circ g\mid f\in E,\ \psi_f=\psi_e\,\},$$

因此

$$|[e\circ g]|=|\{\,f\in E\mid\psi_f=\psi_e\,\}|=|\nu_\psi(e)\cap E|.$$

因此，只需证明 $|\nu_\psi(e)\cap E|$ 与 $e\in E$ 无关。

令 $e,\ f\in E$。由引理 5.7可知，集合 $\Psi=\{\psi_x\mid x\in E\}$ 在复合运算下构成一个群。因此 $\psi_e^{-1}\psi_f\in\Psi$，故存在 $a\in E$ 使得

$$\psi_a=\psi_e^{-1}\psi_f.$$

定义 $\varphi:\ E\to E$ 由 $\varphi(b)=\psi_a(b)$。首先检查 φ 是否良定义。若 $b\in E$，则 $b=b\circ b$，利用（5）可得

$$\psi_a(b)=\psi_a(b\circ b)=\psi_a(b)\circ\psi_{a\circ b}(b).$$

由于 $a,\ b\in E$，我们有 $a\circ b=a$，因此 $\psi_{a\circ b}=\psi_a$，从而 $\psi_a(b)=\psi_a(b)\circ\psi_a(b)$，这说明 $\psi_a(b)\in E$。因此 $\varphi(b)\in E$，且 φ 良定义。此外，φ 是双射，其逆为 $b\mapsto\psi_a^{-1}(b)$。

现在设 $b\in\nu_\psi(f)\cap E$，即 $\psi_b=\psi_f$。利用 (5) 以及 $a\circ b=a$ 这一事实，可得 $\psi_{\psi_a(b)}\psi_a=\psi_{\psi_a(b)}\psi_{a\circ b}=\psi_{b}$。因此 $\psi_{\psi_a(b)}=\psi_b\psi_a^{-1}=\psi_f(\psi_e^{-1}\psi_f)^{-1}=\psi_f\psi_f^{-1}\psi_e=\psi_e$，于是 $\psi_{\varphi(b)}=\psi_e$，即 $\varphi(b)\in\nu_\psi(e)\cap E$。

因此，φ 限制为从 $\nu_\psi(f)\cap E$ 到 $\nu_\psi(e)\cap E$ 的一个双射，特别地，对于所有 $e,\ f\in E$，都有 $|\nu_\psi(e)\cap E|=|\nu_\psi(f)\cap E|$。这证明所有收缩类具有相同的基数。□

有了这一点，我们现在可以描述系数代数的一组基。

定理 5.10。设 (S,s) 是 *RPE* 的有限双射集合论解。那么

$$\left\{\sum_{y\in\nu_\psi(y')}S_{y\circ x',y}\ \middle|\ y'\in\bar{E},\ x'\in G\right\}.$$

是 $H_r(s)$的 k-基，且

$$\left\{\sum_{x\in\mu_\circ(x')}S_{\psi_{y'}(x),x}\ \middle|\ y'\in\bar{E},\ x'\in G\right\}$$

是 $H_\ell(s)$的 k-基。

为证明引理 5.10，我们首先需要了解相关的余不变量环。对于一般的代数解 $(A,\ R)$，它为：

$$A^{co-inv}=\{a\in A\mid(1\otimes a)R=1\otimes a\}.$$

引理 5.11. 设(S, s) 是 *RPE* 的有限双射集合论解。那么，左余不变代数为

$$A^{co-inv} = \mathrm{span}_k \left\{ \sum_{l \in d \circ S} S_{x,l} \;\middle|\; x \in S,\, d \in \nu_\psi(1) \cap E \right\}.$$

特别是，

$$\dim_k A^{co-inv} \leq |S| \frac{|E|}{\bar{E}}.$$

证明。 设 $a = \sum_{x,y \in S} \alpha_{x,y} S_{x,y}$。 那么

$$\begin{aligned}(1 \otimes a)R &= \left(\sum_{u \in S} S_{u,u} \otimes \sum_{x,y \in S} \alpha_{x,y} S_{x,y} \right) \left(\sum_{c,d \in S} S_{\psi_d(c),c} \otimes S_{d \circ c,d} \right) \\ &= \sum_{u,c,d,x,y \in S} \alpha_{x,y}\, S_{u,u} S_{\psi_d(c),c} \otimes S_{x,y} S_{d \circ c,d} \\ &= \sum_{c,d,x \in S} \alpha_{x,d \circ c}\, S_{\psi_d(c),c} \otimes S_{x,d}.\end{aligned}$$

事实上，$S_{u,u} S_{\psi_d(c)\,c} = S_{\psi_d(c)\,c}$ 若 $u = \psi_d(c)$，否则为 0；而$S_{x,y} S_{d \circ c,d} = S_{x,d}$ 若$y = d \circ c$，否则为 0。此外，

$$1 \otimes a = \left(\sum_{c \in S} S_{c,c} \right) \otimes \left(\sum_{x,d \in S} \alpha_{x,d} S_{x,d} \right) = \sum_{c,x,d \in S} \alpha_{x,d}\, S_{c,c} \otimes S_{x,d}.$$

由于元素 $\{S_{p,q} \otimes S_{r,s}\}_{p,q,r,s \in S}$ 线性无关，我们比较系数。项 $S_{\psi_d(c)\,c} \otimes S_{x,d}$ 能与项 $S_{c',c''} \otimes S_{x',d'}$ 匹配，当且仅当 $c = c'$, $x = x'$, $d = d'$ 且 $\psi_d(c) = c$。根据引理 5.7，对每个 $d \in S$，要么 $\psi_d =$ 是恒等映射 id_S，要么 ψ_d 是无不动点的；因此 $\psi_d(c) = c$ 蕴含 $\psi_d =$ 是恒等映射 id_S。所以，若 $\psi_d \neq$ 是恒等映射 id_S，则所有系数 $\alpha_{x,d \circ c}$ 都必须为零（否则 $(1 \otimes a)R$ 会包含未出现在 $1 \otimes a$ 中的项）。因此， a 是一个 k-线性组合，由以下形式的元素构成

$$\sum_{l \in d \circ S} S_{x,l} \qquad \text{with} \qquad d \in \nu_\psi(1) = \{ d \in S \mid \psi_d = \mathrm{id}_S \}.$$

当且仅当 $\alpha_{x,d \circ c} \neq 0$， $\psi_d =$id，即当且仅当 $d \in \nu_\psi(1)$。由此得到

$$A^{\text{co-inv}} = \mathrm{span}_k \left\{ \sum_{l \in d \circ S} S_{x,l} \;\middle|\; x \in S,\; d \in \nu_\psi(1) \right\}.$$

由于 $S = E \times G$ 是左群，若 $d = (e, g)$，则 $d \circ S = \{e\} \times G$。令 $E_0 = \{(e, 1) \in E(S, \circ) \mid \exists g \in G\colon\ \psi_{(e,g)} = \mathrm{id}_S\}$。因此

$$A^{\text{co-inv}} = \mathrm{span}_k \left\{ \sum_{l \in d \circ S} S_{x,l} \;\middle|\; x \in S,\; d \in E_0 \right\}.$$

我们断言 $E_0 = \nu_\psi(1) \cap E = \{ e \in E(S, \circ) \mid \psi_e = \mathrm{id}\}$。显然， E_0 包含 $\nu_\psi(1) \cap E$（事实上，若 $(e, 1) \in E(S, \circ) = E \times \{1\}$，则 $\psi_(e, 1) = \mathrm{id}_S$，那么通过选择 $g = 1$ 可得 $e \in E_0$）。反过来，设 $e \in E$，并假设存在 $g \in G$ 使得$\psi_{(e,g)} = \mathrm{id}_S$。我们要证明 $\psi_{(e,1)} = \mathrm{id}_S$。将 (5) 应用于 $z = (e, g)$ 和$y = (e, g^{-1})$，得到 $\psi_{\psi_{(e,g)}(e,g^{-1})}\, \psi_{(e,g) \circ (e,g^{-1})} = \psi_{(e,g^{-1})}$。由于 $\psi_{(e,g)} = \mathrm{id}_S$，这就变为 $\psi_{(e,g^{-1})}\, \psi_{(e,g) \circ (e,g^{-1})} = \psi_{(e,g^{-1})}$。现在，由于 $(e, g) \circ (e, g^{-1}) = (e, 1)$，我们有$\psi_{(e,g^{-1})}\, \psi_{(e,1)} = \psi_{(e,g^{-1})}$。最后，由于 $\psi_{(e,g^{-1})}$ 是双射，我们得到所需的 $\psi_{(e,1)} = \mathrm{id}$。

由此可得$\dim_k A^{co-inv} \leq |S||\nu_\psi(1) \cap E|$。现在，注意到由引理5.9 （应用于 $\sim$ 到 E的限制），所有 $\sim$-类在 E 中具有相同的基数。因此

$$|E| = \sum_{[e] \in \bar{E}} |[e] \cap E| = \sum_{[e] \in \bar{E}} |[1] \cap E| = |\bar{E}| \cdot |[1] \cap E| = |\bar{E}| \cdot |\nu_\psi(1) \cap E|.$$

因此，$\dim_k A^{co-inv} \leq |S|\frac{|E|}{\bar{E}}$，即为所求。 □

Now,

引理的证明 5.10。我们知道 $A^{co-inv} \otimes H_r(s)$ 作为一个 $H_r(s)$-模，与 A同构。相应地，$H_\ell(s) \otimes A^{co-inv}$ 作为 H_ℓ-模，A与其同构。因此

$$\dim_k H_r(s) = \frac{\dim_k A}{\dim_k A^{co-inv}} = \frac{|S|^2}{\dim_k A^{\mathrm{co-inv}}}.$$

由引理 5.11，可得 维数$_k A^{co-inv} \leq |S|\frac{|E|}{\bar{E}}$。因此，

$$\dim_k H_r(s) = \frac{|S|^2|\bar{E}|}{|S||E|} \leq |G||\bar{E}|$$

此外，我们有如下上界

$$\dim_k H_r(s) \leq |G||\bar{E}|,$$

由于根据引理 5.8 可知，集合 $\left\{ \sum_{y\in\nu_\psi(y')} S_{y\circ x',\ y} \,\middle|\, y' \in \bar{E},\ \ x' \in G \right\}$ 是一个生成集。因此，$H_r(s)$的一组基为 $\left\{ \sum_{y\in\nu_\psi(y')} S_{y\circ x',\ y} \,\middle|\, y' \in \bar{E},\ \ x' \in G \right\}$。

根据 [20, 定理 2.1]，我们知道 $R_{(\ell)} \cong R^*_{(r)^\circ}$ 特别地，$\dim H_\ell(s) = \dim H_r(s)$.
引理 3.3 与引理 5.8 结合可得集合

$$\left\{ \sum_{x\in\mu_\circ(x')} S_{\psi_{y'}(x),x} \,\middle|\, y' \in \bar{E}, x' \in G \right\}$$

¯是 $H_\ell(s)$ 的生成集。后一个集合的基数为 $|E|.|G|$，根据刚刚得到的右系数基，这等于 $\dim H_r(s)$。因此，上述 $H_\ell(s)$ 的生成集是一个基。□

5.2.4. 证明该基是正的且 Φ-集合论的。有了这个基以及引理 3.1中对结构映射的描述，现在我们可以证明 $H_\ell(s)$ 和 $H_r(s)$具有一个既是正的又是 ϕ-集合论的基。

引理 5.4 的证明。记 $s(x,y) = (\psi_y(x)\ y \circ x)$，并记 $s^{-1}(x,y) = (xy, \theta_x(y))$。由于$H_r(s) \cong H_\ell(s)^*$，只需证明 $H_r(s)$ 有一个正基。回顾引理 5.10，$H_r(s)$ 的一个基为 $\mathrm{B}_r := \left\{ \sum_{y\in\nu_\psi(y')} S_{y\circ x',y} \,\middle|\, y' \in \bar{E}, x' \in G \right\}$。

我们先证明 $1_{H_r(s)}$ 是正的。为此，我们改写为：

$$\sum_{y'\in\bar{E}} \left(\sum_{y\in\nu_\psi(y')} S_{y\circ 1_G,y} \right) = \sum_{y\in S} S_{y,y} = 1_{H_r(s)}. \tag{22}$$

因此，单位元可表示为以下系数 0 或 1 关于$\mathcal{B}_r$的线性组合。要证明余单位 ϵ_r的正性，只需回顾 $\epsilon_r(\sum_{y\in\nu_\psi(y')} S_{y\circ x',y}) = \delta_{S_{\psi_{y'}(x'),x'}}(1)$ (这是将引理3.1 应用于基元素所得）。由此可得

$$\begin{aligned}
\epsilon_r \left(\sum_{y\in\nu_\psi(y')} S_{y\circ x',y} \right) &= \delta_{S_{\psi_{y'}(x'),x'}} \left(\sum_{x\in S} S_{x,x} \right) \\
&= \begin{cases} 1 & \text{if } \psi_{y'}(x') = x' \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \\
&= \begin{cases} 1 & \text{if } \psi_{y'} = \mathrm{id}_S \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}
\end{aligned}$$

其中，在最后一个等式中，我们利用了 $\psi_{y'}$ 由引理5.7可知没有不动点。现在我们可以证明，乘法也具有正系数。令 $y', z' \in E$ 和 $x', u' \in G$则

$$\begin{aligned}\left(\sum_{y\in\nu_\psi(y')} S_{y\circ x',y}\right)\left(\sum_{z\in\nu_\psi(z')} S_{z\circ u',z}\right) &= \sum_{\substack{y\in\nu_\psi(y')\\ z\in\nu_\psi(z')}} S_{y\circ x',y}\, S_{z\circ u',z}\\ &= \sum_{\substack{z\in\nu_\psi(z'):\\ z\circ u'\in\nu_\psi(y')}} S_{z\circ(u'\circ x'),z}\\ &= \delta_{\nu_\psi(y'),\nu_\psi(z'\circ u')} \sum_{z\in\nu_\psi(z')} S_{z\circ(u'\circ x'),z}.\end{aligned} \tag{23}$$

接下来我们证明余乘法是正的。为此，回顾

$$s^A = \sum_{c,d\in S} S_{\psi_d(c),c}\otimes S_{d\circ c,d} \text{ and } (s^A)^{-1} = \sum_{a,b\in S} S_{ab,a}\otimes S_{\theta_a(b),b}.$$

因此我们现在计算

$$\begin{aligned}\Delta_r(\sum_{y\in\nu_\psi(y')} S_{y\circ x',y}) &= s^A(\sum_{y\in\nu_\psi(y')} S_{y\circ x',y})(s^A)^{-1}\\ &= \left(\sum_{c,d\in S}\sum_{y\in\nu_\psi(y')} S_{\psi_d(c),c}.S_{y\circ x',y}\otimes S_{d\circ c,d}\right)(s^A)^{-1}\\ &= \sum_{d\in S}\sum_{y\in\nu_\psi(y')}\sum_{a,b\in S} S_{\psi_d(y\circ x'),y}.S_{ab,a}\otimes S_{d\circ c,d}S_{\theta_a(b),b}\end{aligned}$$

由于

$$S_{\psi_d(y\circ x'),y}.S_{ab,a} = \begin{cases} 0, & \text{if } y\neq ab\\ S_{\psi_d(ab\circ x'),a}, & \text{if } y = ab\end{cases}$$

并且类似地$S_{d\circ c,d}S_{\theta_a(b)\,b} = S_{\theta_a(b)\circ c,b}$ 若 $d=\theta_a(b)$，否则为0，则三重和简化为

$$\begin{aligned}\Delta_r(\sum_{y\in\nu_\psi(y')} S_{y\circ x',y}) &= \sum_{a,b\in S\,:\,ab\in\nu_\psi(y')} S_{\psi_{\theta_a(b)}(ab\circ x'),a}\otimes S_{\theta_a(b)\circ((ab)\circ x'),b}\\ &= \sum_{a,b\in S\,:\,ab\in\nu_\psi(y')} S_{\psi_{\theta_a(b)}(ab\circ x'),a}\otimes S_{b\circ x',b}\\ &= \sum_{a,b\in S\,:\,ab\in\nu_\psi(y')} S_{a\circ\psi_b(x'),a}\otimes S_{b\circ x',b}\end{aligned}$$

其中我们使用了(4), (5)以及逆关系，得到 $\theta_a(b)\circ((ab)\circ x') = (\theta_a(b)\circ(ab))\circ x' = b\circ x'$ 以及

$$\psi_{\theta_a(b)}(ab\circ x') = \psi_{\theta_a(b)}(ab)\circ\psi_{\theta_a(b)\circ ab}(x') = a\circ\psi_{\theta_a(b)\circ ab}(x') = a\circ\psi_b(x').$$

因为 $\psi_{ab} = \psi_a\psi_b$ 我们有 $ab\in\nu_\psi(y')$ 当且仅当 $\psi_a = \psi_{y'}\psi_b^{-1}$。根据引理5.7， ψ的集合是一个群，因此 $\psi_{y'}\psi_b^{-1} = \psi_z$ 存在某个 $z\in E$，它取决于 y' 和 b。此外， $\psi_z = \psi_{y'}\psi_d^{-1}$ 对于任意 $d\in\nu_\psi(b)$。因此，我们可以改写最后一个求和，得到

$$\Delta_r(\sum_{y\in\nu_\psi(y')} S_{y\circ x',y}) = \sum_{[d]\in\bar{E}}\left(\sum_{a\,:\,\psi_{ad}=\psi_{y'}} S_{a\circ\psi_d(x'),a}\otimes\sum_{b\in\nu_\psi([d])} S_{b\circ x',b}\right) \tag{24}$$

它是基 $\mathcal{B}_r$. 中系数为 0,1 的线性组合。注意，记号$\nu_\psi([d])$是合理的，因为根据 $E = E/\sim$ 的定义，该集合不依赖于所选的代表元 d。

接下来，我们证明该基是 Φ-集合论的。若我们记 $g_{(x',y')} := \sum_{y\in\nu_\psi(y')} S_{y\circ x',y}$，则后者意味着

$$\Delta_r(g_{(x'_1,y'_1)}).(1\otimes g_{(x'_2,y'_2)}) \in \mathcal{B}_r \otimes B_r.$$

对于 $(x'_i,\ y'_i) \in E\times G,\ i=1,2$。直接计算得到：

$$\begin{aligned}\Delta_r(g_{(x'_1,y'_1)})(1\otimes g_{(x'_2,y'_2)}) &= \sum_{\substack{a,b\in S:\\ ab\in\nu_\psi(y'_1)}} \sum_{y\in\nu_\psi(y'_2)} S_{\psi_{\theta_a(b)}(ab\circ x'_1),a}\otimes S_{\theta_a(b)\circ c,b}.S_{y\circ x'_2,y}\\ &= \sum_{y\in\nu_\psi(y'_2)} \sum_{\substack{a\in S:\\ ab\in\nu_\psi(y'_1)}} S_{\psi_{\theta_a(b)}(c),a}\otimes S_{\theta_a(b)\circ c,y}\end{aligned}$$

其中 $b = y\circ x'_2$ 以及 $c = ab\circ x'_1 = a(y\circ x'_2)\circ x'_1$。利用（4）、（5）以及逆关系，我们注意到

$$\begin{aligned}\psi_{\theta_a(b)}(c) &= a\circ\psi_{\theta_a(b)\circ ab}(x'_1) = a\circ\psi_b(x'_1)\\ \theta_a(b)\circ c &= b\circ x'_1 = y\circ(x'_2\circ x'_1)\end{aligned}$$

因此我们可以改写为

$$\Delta_r(g_{(x'_1,y'_1)})(1\otimes g_{(x'_2,y'_2)}) = \sum_{a\in S:\, ab\in\nu_\psi(y'_1)} S_{a\circ\psi_b(x'_1),a}\otimes \sum_{y\in\nu_\psi(y'_2)} S_{y\circ(x'_2\circ x'_1),y} \tag{25}$$

这是 $\mathcal{B}_r\otimes\mathcal{B}_r$ 中的一个纯张量，因为 $\psi_{y'_1}\psi_b^{-1}$ 等于某个 ψ_z，根据引理 5.7。表达式（25）也可以利用已得到的（余）乘法表达式，即由（24）和（23）得到。

最后我们考虑反粒子。根据定义 $S(a^*\otimes 1)(s^A) = (a^*\otimes 1)((s^A)^{-1})$.
因此

$$S((a^*\otimes 1)(s^A)) = \sum_{x,y\in S} a^*(S_{xy,x})\, S_{\theta_x(y),y}.$$

Now,

$$\delta_{S_{\psi_{y'}(x'),x'}}(S_{xy,x}) = \begin{cases}1, & \text{if } x=x' \text{ and } xy=\psi_{y'}(x')\\ 0, & \text{otherwise.}\end{cases}$$

所以

$$S((a^*\otimes 1)(s^A)) = \sum_{\substack{y\in S:\\ \psi_{y'}(x')=x'y}} S_{\theta_{x'}(y),y}$$

我们断言，$S((a^*\otimes 1)(s^A))$ 又是 $\mathcal{B}_r$ 中的一个元素，即：

$$S((a^*\otimes 1)(s^A)) = \sum_{\substack{y\in S:\\ \psi_y=\psi^{-1}_{y'\circ x'}}} S_{y\circ\psi_{y'}(x')^{-1},y} \tag{26}$$

该断言可通过与前述运算相同的恒等式，采用类似论证得出。首先注意，$\theta_{x'}(y) = y\circ\psi_{y'}(x')^{-1}$。事实上，$\psi_{y'}(x') = x'y$，因此 $y = \theta_{x'}(y)\circ x'y = \theta_{x'}(y)\circ\psi_{y'}(x')$。接下来，可以验证条件 $\psi_{y'}(x') = x'y$ 等价于 $\psi_y = \psi^{-1}_{y'}\circ x'$。例如，

$$\psi_{x'}\psi_y = \psi_{x'y} = \psi_{\psi_{y'}(x')} = \psi_{x'}\psi^{-1}_{y'\circ x'}$$

这等价于 $\psi_y = \psi^{-1}_{y'}\circ x'$，因为 ψ 映射都是双射。 □

6. 余交换集合论 PE 解的描述

我们的下一个目标是对 RPE 的所有余交换集合论解 (S, s) 进行分类 .
回顾 RPE 解的以下性质

（余交换） $Z_{12}Z_{13} = Z_{13}Z_{12}$
（交换） $Z_{13}Z_{23} = Z_{23}Z_{13}$
其中，方程需根据解的类型（集合、向量或代数）作适当解释。

本节的主要结果是对其关联的向量空间解进行分类 $(k[S],\ s^v)$。回顾一下， Φ_H 表示与霍普夫代数 H相关联、由（17）给出的 RPE 解。

定理 6.1。 设 (S, s) 是集合 S 上的一个可达双射 *RPE* 解。那么，(S, s)是余交换的，当且仅当存在一个群 G ，以及 Φ 的一个集合论基 B，使得 $k[G]$

$$s = \phi_{\mathcal{B}} \times 1_X$$

对于某个集合 X，其中 $\phi_{\mathcal{B}}$ 是 B $\times B$ 上与 $\Phi_{k[G]}\big|_{\mathcal{B}\otimes\mathcal{B}}$ 相关联的集合论解。

在第7 节中，我们将研究群代数的 Φ-集合论基，进而研究 $\phi_{\mathcal{B}}$可能的映射。

当 k^A_{fin} 为 A 且 A 是一个无限阿贝尔群时的解 Φ ，见引理 4.13 和引理 6.3，是余交换的，但不可达。后一个事实将由引理 6.1与下面的引理 8.1结合得出。不过，上述解可以通过乘子霍普夫代数得到。我们预计，所有余交换解都可以通过群代数的 ϕ-集合论基 $k[G]$ 或通过 k^A_{fin} 一个无限阿贝尔群 A 得到。一个颇具吸引力的证明思路是，将解 $(k[S],\ s^v)$ 提升为可分希尔伯特空间上的乘性酉算子，从而可以应用 Baaj-Skandalis 的结果 [3, 定理 0。1]（或 [2,定理 2。1]）。然而，这一过程并不保留基，因此目前尚不清楚如何利用它恢复关于初始集合论解的信息。

我们在霍普夫代数框架下的证明将会顺带得到：某些（非余交换）Hopf代数不允许存在 Φ-集合论基。具体而言，引理 6.1 的两个主要依据是余交换Hopf代数的 Cartier-Konstant-Milnor-Moore 分类，以及第6.2 节对由李代数的包络代数构造的保持基的解的研究。更一般地，我们将考察作为整环的Hopf代数，见引理 6.7 和引理 6.10。

6.1. **Hopf代数的（余）交换性与解之间的关系**。 集合论解的一个重要概念性性质是它具有对偶性，这一点与乘子 Hopf 代数相同，但不同于Hopf代数，参见引理 2.6和引理 2.8。在这种对偶性下，交换性与余交换性会互换，正如我们所期望的那样。

命题 6.2. 设 (S, s) 是 *RPE* 的一个集合论解，并令 $t = \tau \circ s^{-1} \circ \tau$。那么 (S, s) 是交换的，当且仅当 (S, t) 是余交换的。

证明。 写作 $s^{-1}(x, y) = (xy, \theta_x(y))$。那么 $t(x, y) = (\theta_y(x)\ yx)$。注意，若 s 满足 $s_{13}s_{23} = s_{23}s_{13}$，则 s^{-1}也满足。直接计算表明，s^{-1} 的交换性等价于以下两个恒等式

$$x\theta_y(z) = xz, \qquad \theta_y\theta_x = \theta_x\theta_y, \qquad \forall\, x, y, z \in S.$$

现在，对于 $(x, y, z) \in S^3$，计算

$$t_{12}t_{13}(x, y, z) = (\theta_y\theta_z(x),\ y\,\theta_z(x),\ zx)$$

and

$$t_{13}t_{12}(x, y, z) = (\theta_z\theta_y(x),\ yx,\ z\,\theta_y(x))\,.$$

由此可得 $t_{12}t_{13} = t_{13}t_{12}$，即 $(S,\ t)$ 是余交换的。

反过来，假设 t 是余交换的。那么 t^{-1} 也余交换。事实上，写作 $t^{-1}(x,\ y) = (x \circ y,\ \psi_x(y))$，因此 $s(x,\ y) = (\psi_y(x)\ y \circ x)$。直接计算表明，$t^{-1}$ 的余交换性等价于以下两个恒等式

$$(x \circ z) \circ y = (x \circ y) \circ z, \qquad \psi_{x \circ z} = \psi_x \qquad \forall\, x, y, z \in S.$$

现在，对于 $(x,\ y,\ z) \in S^3$，我们计算

$$s_{13}s_{23}(x, y, z) = (\psi_{z \circ y}(x),\ \psi_z(y),\ (z \circ y) \circ x)$$

and

$$s_{23}s_{13}(x, y, z) = (\psi_z(x),\ \psi_{z \circ x}(y),\ (z \circ x) \circ y).$$

因此，$s_{13}s_{23} = s_{23}s_{13}$，即 $(S,\ s)$ 是交换的。 □

例 6.3. 考虑引理 $s(g,\ h) = (g,\ gh)$ 中的解，见 4.12 在集合半群上 p
S。于是

$$s_{12}s_{13}(g, h, t) = s_{23}(g, h, gt) = (g, gh, gt) = s_{13}(g, gh, t) = s_{13}s_{12}(g, h, t).$$

因此，该解是余交换的。容易验证，当且仅当 S 是阿贝尔的时，它是交换的。回想一下，这个解对应于 $\Phi_{k[S]}$，并注意到当且仅当 S 是阿贝尔的时，$k[S]$ 也既余交换又交换。

接下来考虑引理 4.13 中关于群 G 的解 $s(g, h) = (gh^{-1}, h)$，该群与 $\Phi_{k[G]^*}$ 相关联。验证定义可知，该解是交换的。此外，当且仅当 G 是阿贝尔群时，该解才是余交换的。这同样反映了 $k[G]^*$的性质。下文的引理 6.5 将把上述例子推广到与揉合对相关联的解（18）。

对于集合论解（S, s），若 $R = s^A$，只需在基上验证（余）交换性。换言之，当且仅当（S, s）是（余）交换的，s^A 才是（余）交换的。有趣的是，一般而言，（余）交换性会转化为相关联的系数Hopf代数中的类似概念。

命题 6.4. 若(A, R) 是 *RPE* 的一个解，则以下条件等价:

- $R_{(r)}$ 是交换的（分别地，余交换的）
- $R_{(l)}$ 是余交换的（分别地，交换的）
- (A, R) 是交换的（分别地，余交换的）。

将霍普夫代数的其他性质转化为集合论解将会很有趣。例如，由于余交换霍普夫代数是尖点的，因此可以探讨是否存在一种有意义的尖点解概念。

证明。 根据 [20, 定理 2。1] 可知 $R_{(l)}$ 和 $R^*_{(r)}$ 作为霍普夫代数是同构的。取对偶会交换交换性与余交换性。因此，只需证明（6.4）与（6.4）之间的等价性。当 (A, R) 为余交换时，我们将给出详细证明，因为交换性可由类似的证明得到。

设 $R = \sum_{i \in I} a_i \otimes b_i$ 是 $A^{\otimes 2}$ 中 R 的极小分解。那么集合 $\{a_i \mid i \in I\}$ 构成 $R_{(l)}$ 的一组基。利用 R 的该分解可得

$$R_{12}R_{13} = R_{13}R_{12} \Leftrightarrow \sum_{i,j} a_i a_j \otimes b_i \otimes b_j = \sum_{i,j} a_j a_i \otimes b_i \otimes b_j.$$

换言之，$(A,\ R)$ 的余交换性等价于 $\sum_{i,\ j}(a_i a_j - a_j a_i) \otimes b_i \otimes b_j = 0$。由于 b_j 线性无关，对后一个方程应用 $(\mathrm{id}_A \otimes b_i) \circ (\mathrm{id}_{A \otimes A} \otimes \delta_{b_j})$，可得

$$a_i a_j - a_j a_i = 0$$

对任意 $i, j \in I$，符合要求。 □

例 6.5. 考虑式（18）中的 RPE 解：

$$\phi_{B\bowtie N}\big((s,u)\,,\,(t,v)\big)=\Big(\big(s\,(t\triangleleft u^{-1})^{-1},(t\triangleleft u^{-1})\triangleright u\big)\,,\,(t\triangleleft u^{-1},uv)\Big)$$

断言： $\phi_{B\bowtie N}$ 是余交换的，当且仅当 B 是阿贝尔的，且 B 在 N 上的左作用是平凡的。换言之， $B\bowtie N$ 是半直积 $B\rtimes N$，其中 B 是阿贝尔的。

取 $x=(s,u)$ $y=(t,v)$ $z=(r,w)\in B\times N$。为记号方便，记 $\phi:=\phi_{B\bowtie N}, a:=r\triangleleft u^{-1}$ 以及 $n=a\triangleright u$。我们计算得

$$\begin{aligned}\phi_{12}\phi_{13}(x,y,z)&=\phi_{12}\big((sa^{-1},n),\ (t,v),\ (a,uw)\big).\\&=\Big((sa^{-1}(t\triangleleft n^{-1})^{-1},\ (t\triangleleft n^{-1})\triangleright n),\ (t\triangleleft n^{-1},\ nv),\ (a,\ uw)\Big).\end{aligned}$$

接下来记 $a_0:=t\triangleleft u^{-1}$ 以及 $n_0:=a_0\triangleright u.$。于是，

$$\begin{aligned}\phi_{13}\phi_{12}(x,y,z)&=\phi_{13}\big((sa_0^{-1},n_0),\ (a_0,uv),\ (r,w)\big).\\&=\Big((sa_0^{-1}(r\triangleleft n_0^{-1})^{-1},\ (r\triangleleft n_0^{-1})\triangleright n_0),\ (a_0,\ uv),\ (r\triangleleft n_0^{-1},\ n_0w)\Big).\end{aligned}$$

两式相等将推出，对所有 $v\in N$有$(a_0,\ uv)\ =(t\triangleleft n^{-1},nv)$。因此， $uv=nv$ ，从而 $u=($ $r\triangleleft u^{-1})\triangleright u$。由于映射 $r\mapsto r\triangleleft u^{-1}$ 是双射，这等价于对所有 $b\in B,\ u\in N$有 $b\triangleright u=u$。

左作用的平凡性意味着 $n=u=n_0$。因此，第一坐标相等现在等价于 $sa^{-1}(t\triangleleft u^{-1})$ $^{-1}=sa_0^{-1}(r\triangleleft u^{-1})^{-1}.$ ，可改写为 $(t\triangleleft u^{-1})(r\triangleleft u^{-1})\ =(r\triangleleft u^{-1})(t\triangleleft u^{-1})$。由于 $b\mapsto b\triangleleft u^{-1}$ 的像为整个 B，这对所有 $r,\ t$ 成立，当且仅当 B 是阿贝尔的。至此，断言得证。

接下来，我们给出引理6.4 的一个变体，不过这里讨论的是霍普夫代数的解 Φ_H ，另见 [19, 命题 2。7]。

引理 6.6。 设 H 是一个双代数。以下条件等价：

(1) H 是余交换的，(2) $\Phi_H=(1\otimes m)(\Delta\otimes 1)$ 是一个余交换的 *RPE* 解。

证明。 我们先写出 $\Phi:=\Phi_H$ 是余交换的含义：

$$\begin{aligned}\Phi_{12}\Phi_{13}(x\otimes y\otimes z)&=x_{(1)}\otimes y\otimes x_{(2)}z\\&=x_{(1)}\otimes x_{(2)}y\otimes x_{(3)}z\end{aligned}$$

另一方面，

$$\begin{aligned}\Phi_{13}\Phi_{12}(x\otimes y\otimes z)&=x_{(1)}\otimes x_{(2)}y\otimes z\\&=x_{(1)}\otimes x_{(3)}y\otimes x_{(2)}z\end{aligned}$$

因此，对所有 $x\in H$， $\Phi_{12}\Phi_{13}=\Phi_{13}\Phi_{12}$ 当且仅当 $x_{(2)}\otimes x_{(3)}=x_{(3)}\otimes x_{(2)}$ （必要性可通过选择 $y=z=1_H$ 看出）。后者就是 H 余交换的定义。□

6.2. **李代数的集合论解与包络代数**。 本节旨在说明引理 4.14 中注意到的现象并非孤例，即 $U(\mathfrak{g})$ 没有 Φ-集合论基。我们将对更一般的 Hopf代数类得到此类结论。

6.2.1. （非群状）集合论基的不存在性。 我们将证明，对于更一般的一类 Hopf代数，即整环 Hopf代数，这种基不存在。

定理 6.7。 设 H 是一个整环霍普夫代数。若 H 有一个 Φ-集合论基 B，则对于每个 $b\in B$，我们都有 $\Delta_H(b)=\varepsilon_H(b)^{-1}b\otimes b$。

众所周知，庞加莱-比尔霍夫-维特定理意味着 $U(\mathfrak{g})$ 具有以下性质：

(i) $U(\mathfrak{g})$ 的伴随分次代数是对称代数。特别地，它是一个整环，因此 $U(\mathfrak{g})$ 也是整环。

(ii) 包络代数不含类群元（这对任何连通霍普夫代数都成立）。

现在注意，若 $\Delta(b) = \varepsilon(b)^{-1}b \otimes b$，则 $\Delta(\varepsilon^{-1}(b)b) = \varepsilon^{-1}(b)\Delta(b) = \varepsilon^{-1}(b)b \otimes \varepsilon^{-1}(b)b$. 因此，$\varepsilon^{-1}(b)b$是群状的。因此，引理 6.7 得出所需结论。

推论 6.8. 设 $\mathfrak{g}$ 是一个有限维李代数。那么 $U(\mathfrak{g})$ 没有 Φ-集合论基。

如上所述，将元素 $b \in \mathcal{B}$ 乘以一个标量后，引理 6.7 表明，只要H 是整环，存在 Φ-集合论基就意味着存在余代数基。

定义 6.9. 余代数 (C, Δ, ε) 的一个基$\mathcal{B}$称为余代数基，如果

$$\Delta(\mathcal{B}) \subseteq k^*\mathcal{B} \otimes \mathcal{B}$$

其中 $k^*B \otimes B = \{\lambda b_1 \otimes b_2 \mid \lambda \in k^*, b_1, b_2 \in B\}$。

我们现在补充引理 6.7，证明余代数基的存在蕴含 H 同构于一个群代数。

命题 6.10. 设 H 为一个霍普夫代数。假设存在 H 的余代数基 B。则 $\{\varepsilon^{-1}(b)b \mid b \in B\} = G(H)$ 类群元的群。此外，$H \cong k[G(H)]$。

注。 作为引理 6.7与引理 6.10的推论，我们得到：一个既是整环又具有 Φ-集合论基的霍普夫代数，必定同构于一个群代数。现在回顾：若 G 是一个含有挠元的群，则 $k[G]$ 不是整环。事实上，挠元 g 产生一个非平凡幂等元 $\hat{g} := o(g)^{-1}\sum_{i=1}^{o(g)} g^i$，从而产生一个零因子。另一方面，若 G 无挠，则 Kaplansky 有一个著名猜想：$k[G]$ 是整环。总之，如引理 6.10 中所述的基不可能存在，若 H 是有限维的。

最后，我们指出，除群代数外， Φ-集合论基并不包含 n 单位元。

命题 6.11. 设 H 是一个霍普夫代数，B 是 H 的一个 Φ-集合论基，使得$1 \in B$。则 $H \cong k[G(H)]$，其中 $G(H)$ 是 H 的类群元，且$\{\varepsilon^{-1}(b)b \mid b \in B\} = G(H)$。

证明。取 $b \in$ B。则 $\Phi_H(b \otimes 1) = \Delta(b)$。因此，由于 B 是 Φ-集合论的，这蕴含对某些 c、$d \in$ B 有$\Delta(b) = c \otimes d$。应用 $\varepsilon \otimes$ id 与 id $\otimes\varepsilon$，用与引理 6.7 的证明中相同的方式可得 $\varepsilon(c)d = b = \varepsilon(d)c$。从而对某个 $\lambda \in k^*$有 $D(b) = \lambda b \otimes b$。结论现由引理 6.10 得出。□

6.2.2. 陈述的证明。首先，我们证明关于整环霍普夫代数的陈述。

引理的证明 6.7。 对于 k-向量空间 V和 W 以及 $T \in V \otimes W$，如果 T可写成左约化形式，则称其为左约化形式，其中 $T = \sum_{i=1}^{n} v_i \otimes w_i$满足 v_1，……，$v_n \in V$线性无关，且 n在所有左因子线性无关的此类表达式中是最小的。

断言 1： $\Delta(y)$ 是 $H \otimes H$ 中的纯张量，对每个 $y \in \mathcal{B}$均成立。

取 $\Delta(y) = \sum_{i=1}^{n} a_i \otimes b_i$ 的左约化形式。因此 a_1，……，a_n 线性无关 nt 并且 n 为最小。对于任意 $z \in H$，我们有

$$\Phi_H(y \otimes z) = \sum_{i=1}^{n} a_i \otimes b_i z. \tag{27}$$

注意，左约化性意味着 $b_1, \ldots, b_n$ 线性无关。事实上，若 b_i 满足一个非平凡关系，就可以用更少的项重写（27），同时仍保持左因子线性无关。

由于 H 是整环，右乘 $\rho_z(h) = hz$ 在 H 上是单射。因此， $b_1z, \dots, b_nz$ 也线性无关。现在取 $z \in \mathcal{B}$，并利用 $\mathcal{B}$ 是 Φ-Set 理论的这一点，我们得到断言 1。

断言 *2*： 如果 $\Delta(y)$ 是一个简单张量，那么 $\Delta(y) = \varepsilon(y)^{-1}\, y \otimes y$。

令 $y \neq 0$，并假设对 $u, v \in H$，有 $\Delta(y) = u \otimes v$。应用 $\varepsilon \otimes \mathrm{id}$，并利用 $(\varepsilon \otimes \mathrm{id})\Delta = \mathrm{id}$，可得

$$y = (\varepsilon \otimes \mathrm{id})\Delta(y) = \varepsilon(u)\, v.$$

因此 $v = \varepsilon(u)^{-1}y$。类似地，应用 $\mathrm{id} \otimes \varepsilon$，并利用 $(\mathrm{id} \otimes \varepsilon)\Delta = \mathrm{id}$，可得 $u = \varepsilon(v)^{-1}y$。因此，对某个 $\lambda \in k^*$，有 $\Delta(y) = \lambda\, y \otimes y$。最后，再次应用 $(\varepsilon \otimes \mathrm{id})$，可知 $y = (\varepsilon \otimes \mathrm{id})\Delta(y) = \lambda\, \varepsilon(y)\, y.$。由此， $\lambda\varepsilon(y) = 1$，断言 2 的证明完成。□

接下来，我们考虑关于具有一个既是 Φ-集合论的又是余代数基的基的 Hopf代数的陈述。

引理的证明 *6.10*。 取 $b \in \mathcal{B}$。由余代数基条件可知， $\Delta(b) = \lambda b' \otimes b''$ 对某个 b'， $b'' \in \mathcal{B}$。以同样方式应用 $\varepsilon \otimes \mathrm{id}$ 和 $\mathrm{id} \otimes \varepsilon$，如断言 2 的证明中那样，可得 $b' = b = b''$ 以及 $\lambda = \varepsilon(b)^{-1}$。

有了这一性质，我们便可得出 H 必须是一个余交换 Hopf代数。事实上，取 $h \in H$ 并将 $h = \sum_{b\in\mathcal{B}} \lambda_b b$ 按基展开。于是

$$\Delta(h) = \sum_{b\in\mathcal{B}} \lambda_b \Delta(b) = \sum_{b\in\mathcal{B}} \lambda_b \varepsilon(b)^{-1} b \otimes b = \sum_{b\in\mathcal{B}} \lambda_b \Delta^{op}(b) = \Delta^{op}(h).$$

现在回顾 Cartier-Konstant-Milnor-Moore 分类： H 同构于 $U(P(H)) \rtimes k[G(H)],$，其中 $\mathfrak{g} := P(H)$ 是由 H 中的本原元构成的李代数，而 $G := G(H)$ 是由类群元构成的群。然而，包络代数没有类群元，因此李代数部分必定是平凡的，且 $H \cong k[G(H)]$.

最后，注意到对于每个 $b \in \mathcal{B}$， $\varepsilon^{-1}(b)b$ 都是类群元。这意味着 $G(H) = \{\varepsilon^{-1}(b)\ b \mid b \in \mathcal{B}\}$。 □

最后，利用余交换代数的分类以及第 4.2节，我们可以将 RPE 的可达余交换集合论解的分类与 Φ-集合论基联系起来。

可达解的引理 *6.1* 的证明。 设 (S, s) 是 RPE 的一个可达集合论解。根据定义，这意味着存在一个霍普夫代数 H 以及霍普夫 H-模M，使得 $s^v = \Phi_M \cong \Phi_H \otimes 1_V$对于 V一个维数为 $\dim_k V = |S|$ $-\dim_k H$的向量空间成立。它到达某个集合论解的线性化这一事实意味着 H 必须包含一个 Φ-集合论基 $\mathcal{B}$，使得 $s \cong \phi_{\mathcal{B}} \times 1_{B(V)}$ 其中 $B(V)$ 是 V的一组基。

因此仍需证明 H 是一个群代数。注意，由引理6.6 ，霍普夫代数 H 必须是余交换的。因此 Cartier-Konstant-Milnor-Moore 分类蕴含

$$H \cong U(\mathfrak{g}) \rtimes k[G]$$

其中 $\mathfrak{g} := P(H)$ 为 H 中本原元构成的李代数，且 $G := G(H)$ 为类群元构成的群。因此由引理 4.17 可知

$$\Phi_{U(\mathfrak{g})} \# \Phi_{k[G]} = \Phi_H \tag{28}$$

然而，根据引理6.8 ，解 $\Phi_{U(\mathfrak{g})}$ 不能限制为集合论解。因此 $H \cong k[G]$，证明完毕。□

7. 可由群代数构造的集合论解

在引理4.13 中，我们已经看到，通过选择不同的基，可以从阿贝尔群的群代数 $k[G]$ 构造出两个不同构的集合论解。受引理6.1 的进一步启发，本节研究 Φ任意群代数的集合论基 $k[G]$。

如果 G 可分解为半直积 $A \rtimes N$，其中某个有限阿贝尔群为 A，我们将在第 7.2 节构造一个 Φ-集合论基，由此得到引理 4.17 中关于 $A^\vee \times N$. 的匹配对解。为此，我们首先在第 7.1 节回顾有限阿贝尔群的傅里叶变换所需的背景知识。随后，在第 7.3节，我们根据 Φ 的非挠元，对一般的 G-集合论基给出限制。例如，我们证明，如果 G 是无挠的，那么 G 是唯一的 Φ-集合论基。

7.1. **阿贝尔情形：傅里叶变换回顾**。 设 A 为有限阿贝尔群。以下我们假设基域 k 满足 $\mathrm{char}(k) \nmid |A|$，且 k包含所有 $|A|$-单位根。如引理 4.12 所示，我们希望通过傅里叶变换将 $k[A]$ 与其对偶联系起来。具体而言，定义 k- 线性映射

$$\Theta_A : k[A^\vee]^* \longrightarrow k[A] : \delta_\chi \mapsto \frac{1}{|A|} \sum_{a \in A} \chi(a^{-1})\, a. \tag{29}$$

以下事实众所周知。

命题 7.1. 映射 Θ_A 是霍普夫代数的同构。其逆映射 Θ_A^{-1} :$k[A] \to k[A^\vee]^*$ 在群元素 $a \in A$ 上的定义为

$$\Theta_A^{-1}(a) = \sum_{\chi \in A^\vee} \chi(a)\, \delta_\chi, \tag{30}$$

按 k-线性延拓。

现在我们证明，通过选取基 $s(a \otimes b) = a \otimes ab$，在 $k[A]$ 引理 4.12中得到的群解限制为引理 4.13 中的解：$\{\Theta_A(\delta_\chi) \mid \chi \in A^\vee\}$。

命题 7.2. 对于 $\chi_1,\ \chi_2 \in A^\vee$ 有

$$s\big((\Theta_A \otimes \Theta_A)(\delta_{\chi_1} \otimes \delta_{\chi_2})\big) = \Theta_A(\delta_{\chi_1 \chi_2^{-1}}) \otimes \Theta_A(\delta_{\chi_2}).$$

证明。 根据定义

$$\begin{aligned}(s \circ (\Theta_A \otimes \Theta_A))(\delta_{\chi_1} \otimes \delta_{\chi_2}) &= s\left(\frac{1}{|A|^2} \sum_{a,b \in A} \chi_1(a^{-1})\chi_2(b^{-1})\,(a \otimes b)\right) \\ &= \frac{1}{|A|^2} \sum_{a,b \in A} \chi_1(a^{-1})\chi_2(b^{-1})\,(a \otimes ab).\end{aligned}$$

现在通过 $c := ab$ 重新对求和指标进行编号，从而得到 $\chi_2(b^{-1}) = \chi_2(c^{-1}a) = \chi_2(c^{-1})\chi_2(a)$。后一个求和式变为

$$\frac{1}{|A|^2} \sum_{a,c} (\chi_2\chi_1^{-1})(a)\chi_2(c^{-1})\,(a \otimes c) = \Big(\frac{1}{|A|} \sum_a (\chi_2\chi_1^{-1})(a)\, a\Big) \otimes \Big(\frac{1}{|A|} \sum_c \chi_2(c^{-1})\, c\Big)$$

这恰好等于 $\Theta_A(\delta_{\chi_1\chi_2^{-1}}) \otimes \Theta_A(\delta_{\chi_2})$，正如所需。 □

为方便非专业读者理解，我们现在给出引理7.1的证明。回忆一下， $k[A^\vee]^*$ 配备了与群代数对偶的霍普夫代数结构

$k[A^\vee]$:

$$\delta_\chi\delta_\psi = \delta_{\chi,\psi}\,\delta_\chi, \qquad 1 = \sum_{\chi\in A^\vee}\delta_\chi,$$

$$\Delta(\delta_\chi) = \sum_{\alpha\beta=\chi}\delta_\alpha\otimes\delta_\beta, \qquad \varepsilon(\delta_\chi) = \delta_{\chi,1}, \qquad S(\delta_\chi) = \delta_{\chi^{-1}}.$$

引理的证明 7.1。我们将经常使用特征标正交关系，这些关系因我们对基域的假设而成立 k:

$$\sum_{\chi\in A^\vee}\chi(x) = \begin{cases}|A|, & x=1,\\ 0, & x\neq 1,\end{cases} \qquad \sum_{a\in A}\chi(a) = \begin{cases}|A|, & \chi=1,\\ 0, & \chi\neq 1.\end{cases} \tag{31}$$

代数映射。根据定义

$$\Theta_A(\delta_\chi)\Theta_A(\delta_\psi) = \frac{1}{|A|^2}\sum_{a,b\in A}\chi(a^{-1})\psi(b^{-1})\,ab.$$

固定的 $t\in A$ 的系数等于

$$\frac{1}{|A|^2}\sum_{a\in A}\chi(a^{-1})\psi\big((a^{-1}t)^{-1}\big) = \frac{\psi(t^{-1})}{|A|^2}\sum_{a\in A}(\chi^{-1}\psi)(a).$$

根据（31），若 $\chi=\psi$，则此式为 $\frac{1}{|A|}\chi(t^{-1})$，否则为 0。因此 $\Theta_A(\delta_\chi)\Theta_A(\delta_\psi)=\delta_{\chi,\psi}\Theta_A(\delta_\chi)=\Theta_A(\delta_\chi\delta_\psi)$。正交关系还给出

$$\Theta_A(1) = \Theta_A\Big(\sum_\chi\delta_\chi\Big) = \frac{1}{|A|}\sum_{a\in A}\Big(\sum_\chi\chi(a^{-1})\Big)a = 1.$$

余代数映射。我们证明 $\Delta_{k[A]}(\Theta_A(\delta_\chi)) = (\Theta_A\otimes\Theta_A)\Delta_{k[A^\vee]^*}(\delta_\chi)$，并略去余乘积的指标。左端为

$$\Delta(\Theta_A(\delta_\chi)) = \frac{1}{|A|}\sum_{a\in A}\chi(a^{-1})\,(a\otimes a).$$

右边:

$$(\Theta_A\otimes\Theta_A)\Delta(\delta_\chi) = \sum_{\alpha\beta=\chi}\Theta_A(\delta_\alpha)\otimes\Theta_A(\delta_\beta) = \frac{1}{|A|^2}\sum_{\alpha\beta=\chi}\sum_{a,b\in A}\alpha(a^{-1})\beta(b^{-1})\,(a\otimes b).$$

写作 $\beta=\alpha^{-1}\chi$，固定的 $a\otimes b$ 的系数为

$$\frac{1}{|A|^2}\sum_{\alpha\in A^\vee}\alpha(a^{-1})(\alpha^{-1}\chi)(b^{-1}) = \frac{\chi(b^{-1})}{|A|^2}\sum_{\alpha\in A^\vee}\alpha(a^{-1}b) = \begin{cases}\frac{1}{|A|}\chi(a^{-1}), & a=b,\\ 0, & a\neq b,\end{cases}$$

这等于 $\Delta(\Theta_A(\delta_\chi))$。

余单位和反粒子。对于余单位,

$$\varepsilon(\Theta_A(\delta_\chi)) = \frac{1}{|A|}\sum_{a\in A}\chi(a^{-1}) = \delta_{\chi,1} = \varepsilon(\delta_\chi).$$

对于反粒子,

$$S(\Theta_A(\delta_\chi)) = \frac{1}{|A|}\sum_{a\in A}\chi(a^{-1})\,a^{-1} = \frac{1}{|A|}\sum_{a\in A}\chi(a)\,a = \Theta_A(\delta_{\chi^{-1}}) = \Theta_A(S(\delta_\chi)).$$

逆。我们已经证明 Θ_A 是一个霍普夫代数映射，因此只需验证式（30）中给出的逆映射。

固定 $a\in A$。然后由（29），

$$\Theta_A(\Theta_A^{-1}(a)) = \sum_{\chi\in A^\vee}\chi(a)\,\Theta_A(\delta_\chi) = \frac{1}{|A|}\sum_{\chi\in A^\vee}\sum_{x\in A}\chi(a)\chi(x^{-1})\,x = \frac{1}{|A|}\sum_{x\in A}\Big(\sum_{\chi\in A^\vee}\chi(ax^{-1})\Big)x.$$

由正交性（31），$\sum_{\chi}\chi\,(ax^{-1})\;=|A|$ 当且仅当 $x=a$ 且 0 其他情况下。因此上述结果等于a。反过来，对于 δ_ψ 我们使用（30）计算：

$$\begin{aligned}\Theta_A^{-1}(\Theta_A(\delta_\psi)) &= \frac{1}{|A|}\sum_{x\in A}\psi(x^{-1})\,\Theta_A^{-1}(x)\\ &= \frac{1}{|A|}\sum_{x\in A}\psi(x^{-1})\sum_{\chi\in A^\vee}\chi(x)\delta_\chi\\ &= \sum_{\chi\in A^\vee}\Big(\frac{1}{|A|}\sum_{x\in A}(\chi\psi^{-1})(x)\Big)\delta_\chi=\delta_\psi,\end{aligned}$$

根据（31），再次可得 Θ_A^{-1} 确实是其逆元。 □

7.2. 带有限阿贝尔因子的匹配对。假设 G 是匹配对$B\bowtie N$，其中 B 和 N 是一些子群。考虑群解 $\Phi_{k[G]}(g\otimes h)\;=g\otimes gh$，并记 $\phi:=\Phi_{k[G]}$。本节旨在构造 Φ 的集合论基 B，使得 $k[G]$ 中的 $\Phi|_{\mathcal{B}\otimes\mathcal{B}}$ 对应于与 $k[B]^*\bowtie k[N]$ 相关联的解（18）。然而，根据引理 6.5，只有当 $B\bowtie N=B\rtimes N$ 且 B 是阿贝尔群时，这才有可能。事实上，$k[G]$ 是余交换的，因此根据引理 6.6，$\Phi_{k[G]}$ 也是余交换的，其在任意 Φ 集合论基上的限制亦然。在这种情况下，（18）具有如下形式

$$\phi_{B\bowtie N}\big((s,u)\,,\,(t,v)\big)=\Big(\big(s\,(t\triangleleft u^{-1})^{-1},u\big)\,,\,(t\triangleleft u^{-1},uv)\Big)\tag{32}$$

我们首先考虑 B 是有限阿贝尔群的情形，并将其记为 A。我们将使 $k[A]$ * 通过第7.1节中引入的映射出现。

7.2.1. $k[A]\subset k[G]$ 中的一个类对偶基：对每个 $\chi\in A^\vee$ 记作

$$e_\chi:=\Theta_A(\delta_\chi)=\frac{1}{|A|}\sum_{a\in A}\chi(a^{-1})\,a\in k[A].$$

于是由引理 7.1，标准关系$e_\chi e_\psi=\delta_{\chi,\ \psi}e_\chi$ 和 $\sum_{\chi\in A^\vee}e_\chi=1$ 成立。此外 r,

$$b\,e_\chi=\chi(b)\,e_\chi.\tag{33}$$

对所有 $b\in A$。事实上，

$$b\,e_\chi=\frac{1}{|B|}\sum_{t\in B}\chi(t^{-1})\,bt=\frac{1}{|B|}\sum_{t\in B}\chi\big((b^{-1}t)^{-1}\big)\,t=\chi(b)\,\frac{1}{|B|}\sum_{t\in B}\chi(t^{-1})\,t=\chi(b)\,e_\chi.$$

注意，$\{e_\chi\}_{\chi\in A^\vee}$ 是 $k[A]$ 的一组基，这促使我们考虑以下集合：

$$\mathcal{B}_{A^\vee}:=\{\,e_\chi\,u\mid\chi\in A^\vee,\ u\in N\,\}\subset k[G].$$

集合 $\mathcal{B}_{A^\vee}$ 是一个 k-基，因为作为向量空间有 $k[G]\cong k[A\times N]$。

7.2.2. 群解在基 $A^\vee\times N$ 上的限制。现在我们将证明，基 $\mathcal{B}_{A^\vee}$ 是 $\Phi_{k[G]}$-集合论的，见下文引理 7.3。首先注意，右作用 $\triangleleft$ 的N 在 A上诱导出一个左作用 N 在 $A^\vee$ 上，该作用由拉回给出：

$$(u\cdot\chi)(a):=\chi(a\triangleleft u^{-1})\tag{34}$$

对于 $u\in N$，$\chi\in A^\vee$，$a\in A$。此作用置换傅里叶幂等元 e_χ：

$$u\,e_\chi\,u^{-1}=e_{u\cdot\chi}.\tag{35}$$

命题 7.3。设 (A,N) 是一个揉合对，其中 A 有限阿贝尔群平凡地作用于 N，并设 $G=A\rtimes N$。采用上述记号，对所有 α、$\beta\in A^\vee$ 以及 u、$v\in N$，有

$$\Phi_{k[G]}\big(e_\alpha u\otimes e_\beta v\big)=\big(e_{\alpha\,(u\cdot\beta)^{-1}\,u}\big)\;\otimes\;\big(e_{u\cdot\beta}\,uv\big).\tag{36}$$

特别地，$\Phi_{k[G]}$ 在 $A^\vee\times N$上限制为一个集合论映射，

$$\phi_{A^\vee\bowtie N}:\ (A^\vee\times N)\times(A^\vee\times N)\to(A^\vee\times N)\times(A^\vee\times N),$$

由下式给出

$$\phi_{A^\vee \bowtie N}\big((\alpha,u),(\beta,v)\big) = \big((\alpha(u\cdot\beta)^{-1},u),\ (u\cdot\beta,uv)\big). \tag{37}$$

在证明引理 7.3 之前，我们解释一下为何式（35）成立。为此，回忆一下，根据定义， u 对 A 的共轭作用是自同构 $a \mapsto a \triangleleft u^{-1}$。因此 $u\, e_\chi\, u^{-1} = \frac{1}{|A|}\sum_{a\in A} \chi\,(a^{-1})\ (a \triangleleft u^{-1})$ 。现在利用 $-(\cdot)\ \triangleleft u^{-1}$ 是从 A 到 $c = a \triangleleft u^{-1}$ 的双射，对求和重新标记，令35），从而得到式（

$$u\, e_\chi\, u^{-1} = \frac{1}{|A|}\sum_{c\in A} \chi\big((c\triangleleft u)^{-1}\big)\, c = \frac{1}{|A|}\sum_{c\in A} (u\cdot\chi)(c^{-1})\, c = e_{u\cdot\chi}.$$

引理 7.3的证明。 展开定义后，我们很容易得到：

$$\Phi_{k[G]}\big(e_\alpha u \otimes e_\beta v\big) = \frac{1}{|A|}\sum_{a\in A} \alpha(a^{-1})\, au \otimes (au)(e_\beta v). \tag{38}$$

由式（35）以及随后由式（33），可得

$$(au)(e_\beta v) = a\, e_{u\cdot\beta}\,(uv) = (u\cdot\beta)(a)\, e_{u\cdot\beta}\,(uv).$$

代入式（38）得到

$$\Phi_{k[G]}\big(e_\alpha u \otimes e_\beta v\big) = \frac{1}{|A|}\sum_{a\in A} \alpha(a^{-1})\,(u\cdot\beta)(a)\, au \otimes e_{u\cdot\beta}\, uv.$$

由于 $\alpha(a^{-1})(u\cdot\beta)(a) = \big(\alpha(u\cdot\beta)^{-1}\big)(a^{-1})$，我们可以将以下求和改写为

$$\frac{1}{|A|}\sum_{a\in A} \alpha(a^{-1})(u\cdot\beta)(a)\, au = \left(\frac{1}{|A|}\sum_{a\in A}\big(\alpha(u\cdot\beta)^{-1}\big)(a^{-1})\, a\right) u = e_{\alpha(u\cdot\beta)^{-1}}\, u.$$

将其代入所得到的关于 $\Phi_{k[G]}\big(e_\alpha u \otimes e_\beta v\big)$ 的表达式中，即可完成证明。 □

7.2.3. 关于 $A \times N$ 上的解。要在集合 $A \times N$ 上而不是在典范的$A^\vee \times N$上得到一个解，我们需要调用一个非典范同构 $\iota\colon\ A \cong A^\vee$. 这种同构等价于选择一个非退化双特征标

$$\langle\cdot,\cdot\rangle : A \times A \to k^*.$$

相应的同构 $A \cong A^\vee$ 由 $s \mapsto \chi_s$ 给出，其中 $\chi_s(t) := \langle s,\ t\rangle$。然后对于$s \in A$，考虑

$$e_s := e_{\chi_s} = \frac{1}{|A|}\sum_{a\in A} \big\langle s, a^{-1}\big\rangle\, a \in k[A].$$

在这种情况下，我们会考虑 $\{e_s\, u \mid s \in A,\ u \in N\}$ 作为 $k[G]$ 的基。然而，为了能够恢复所需的解（32），需要一个 N-等变同构：

$$\iota(a \triangleleft u^{-1}) = u \cdot \iota(a) \qquad (a \in A,\ u \in N), \tag{39}$$

其中 $u\cdot(-)$ 是拉回作用（34）。在这种情况下，对于 $t \in A$，我们有 ${}^u e_{\iota(t)} = e_{\iota(t)\triangleleft u^{-1}}\, u$，利用方程（35）。遗憾的是，这种同构并不总是存在。

命题 7.4。 设 $(A, N, \triangleleft, \triangleright)$ 是一个匹配群对，且 A 为阿贝尔群。则以下各项等价：

(1) 存在一个 N-等变同构 $\iota\colon\ A \xrightarrow{\sim} A^\vee$,
(2) 存在一个非退化双特征标 $\langle\cdot,\cdot\rangle\colon\ A \times A \to k^*$，使得

$$\langle a \triangleleft u^{-1},\ b\rangle = \langle a,\ b \triangleleft u\rangle \qquad (a, b \in A,\ u \in N).$$

(3) A 和 $A^\vee$ 作为 $\mathbb{Z}[N]$-模同构 $es.$

证明。如果给定 ι，定义 $a, b := \iota(a)(b)$。那么，通过在 b 处计算等式两边并使用 (34), (39) 等价于所显示的不变性。反之，给定这样的配对，定义 $\iota(a)(b) := a, b$。非退化性使 ι 成为一个同构，而不变性导出 (39)。显然，(1) 和 (3) 也等价。□

现在假设存在一个 N-等变同构 ι。那么这个双射

$$A \times N \xrightarrow{\sim} A^{\vee} \times N : (a,u) \mapsto (\iota(a),u)$$

将（37）输送到 $A \times N$ 上的一个余交换解。具体而言，如所期望地得到该解

$$\phi\big((a,u),(b,v)\big) = \big((a\,(b \triangleleft u^{-1})^{-1},\ u),\ (b \triangleleft u^{-1},\ uv)\big).$$

7.3. 无限群的群代数与不存在性准则。 我们现在的目标是证明：无挠群 G 除 $\lambda.G = \{\lambda g \mid g \in G\}$外没有其他 Φ-集合论基，其中 $\lambda \in k^*$ 为某个标量。特别地，对于这样的群，$k[G]$仅给出群集合论解。这将直接由下述一般障碍得出。回顾：对于 $x \in k[G]$，x 的支撑是集合

$$\operatorname{supp}(x) = \{g : x_g \neq 0\}.$$

定理 7.5. 设 G 是一个群，$t \in G$ 具有无限阶，并设 B 是一个 Φ-集合论基。则 B 中没有任何元素的支撑能包含 $\langle t\rangle$ 的同一左陪集中的两个不同点：

$$\big|\operatorname{supp}(b) \cap \langle t\rangle g\big| \leq 1.$$

对于每个 $b \in B$ 和每个 $g \in G$。

这确实推出了所需的应用：

推论 7.6. 设 G 是一个无挠群，B 是 $k[G]$ 的一个 Φ集合论基。那么作为集合，$B = \lambda.G$，其中某个 $\lambda \in k^*$。特别地，集合论解 $t_{\mathcal{B}}$ 等价于 G上的群解。

注 7.7. 在任意群 G 上，映射

$$G^2 \to G^2 : (g,h) \mapsto (gh^{-1},h)$$

是 RPE 解。引理 7.6指出，一般而言，不清楚如何将其实现为 Φ_H 在霍普夫代数的一个 Φ 集合论基上的限制。不过请注意，总能将其实现为与乘子霍普夫代数 k^G_{fin}相关联的解，见引理 4.13。

引理 7.6 的证明。首先我们证明，任意 $b \in$B 都有 $|\mathrm{supp}(b)| = 1$。反设不然，取 $b \in$ B，使得 $|\mathrm{supp}(b)| \geq 2$。选取不同的 g、$h \in \mathrm{supp}(b)$，并考虑元素$u := gh^{-1}$，它具有无限阶。注意，$\mathrm{supp}(b)$与左陪集 uh 至少交于两点，即 h 和 $uh = g$，这与引理 7.5 矛盾。综上，每个基元素 b 都是某个群元素的数乘，记作 $b = \lambda_b g_b \in k^*G$。还需证明所有标量 λ_b 都相等。

现在考虑 RPE 解 $\Phi_{k[G]}$，它在基元素上的定义为 $g \otimes h \mapsto g \otimes gh$，并将其线性扩张。取 $b,\ c \in \mathcal{B}$，并记 $b = \lambda_b g$ 和 $c = \lambda_c h$。于是 $\Phi(\lambda_b g \otimes \lambda_c h) = \lambda_b\lambda_c g \otimes gh = g \otimes bc$.。若所有 $\lambda_b = 1$，则无须证明。因此，假设 b 满足 $\lambda_b \neq 1$。由于 $g \otimes bc = b \otimes gc \in \mathcal{B} \otimes \mathcal{B}$，我们必有 $gc \in \mathcal{B}$。然而，若固定 c，则这对所有 $g \in G$ 都成立。因此，$\mathcal{B} = \{gc \mid g \in G\} = \lambda_c.G$，证毕。

最后，将 λ_c 记为 λ，则双射 $f : \mathcal{B} \to G :\ \lambda g \mapsto g$ 在 $t_{\mathcal{B}}$ 与群解 $(g,\ h) \mapsto (g,\ gh)$ 之间给出一个等价关系。 □

.

我们现在着手证明引理 7.5。为此，我们需要以下引理。

引理 7.8。 设 G 是一个群，且 $t \in G$ 具有无限阶。那么左乘$L_t :\ k[G] \to k[G] :\ x \mapsto tx$ 没有非零特征向量；也就是说，若 $tx = \lambda x$ 对某个 $\lambda \in k^*$成立，则 $x = 0$。

证明。 取 $x = \sum_{g \in \mathrm{supp}(x)} c_g g \in k[G]$。注意，$\mathrm{supp}(x) = \mathrm{supp}(\lambda x)$，若 $\lambda \neq 0$. 则$t\,\mathrm{supp}(x) = \mathrm{supp}(x)$。由归纳法可知，对所有 $n \in \mathbb{N}.$，$\mathrm{supp}(x) = t^n\mathrm{supp}(x)$。因此，对于任意 $g_0 \in \mathrm{supp}(x)$，无限集 $\{t^n g_0 \mid n \in \mathbb{N}\}$ 包含于有限集 $\mathrm{supp}(x)$ 中，矛盾。□

引理 7.5 的证明。 反设存在 $b \in \mathcal{B}$ 以及一个左陪集 $\langle t\rangle g$使得 $|\mathrm{supp}(b) \cap \langle t\rangle g| \geq 2$，即存在整数 $m \neq n$ 满足 $t^m g,\quad t^n g \in \mathrm{supp}(b)$。

将 b 替换为 $t^{-m}b$。注意，对于某个 $b' \in \mathcal{B}$，有 $t^{-m}b \in \mathrm{supp}(b')$，因为 $\mathcal{B}$ 是一个基，且左乘是 $k[G]$的自同构。因此，我们可以假设，对于某个$r \neq 0$，有 $g,\ t^r g \in$supp(b)。此外，将 t 替换为 t^r 后，我们可以（并且将会）假设 g 和 tg 都属于 supp(b)。换言之，我们可以写成 $b = \sum_{h\in\mathrm{supp}(b)} c_h h$，其中 $c_g, c_{tg} \neq 0$。

由于 $\mathcal{B}$ 是 Φ-集合论的，存在唯一确定的 $b', c' \in \mathcal{B}$，使得

$$\sum_{h\in\mathrm{supp}(b)} c_h\, h \otimes hc = \Phi(b \otimes c) = b' \otimes c'.$$

对两边应用泛函 $\delta_g \otimes \mathrm{id}$（其中 $g \in G$），得到 $c_g\, gc = \delta_g(b')\, c'$.。特别地， gc是 c'的一个数乘。同样，应用 ($\delta_{tg} \otimes$id) 得到 $c_{tg}\, tgc = \delta_{tg}(b')\ c'$。因此， tgc 也是 c'的一个数乘。所以存在 $\lambda_c \in k^*$，使得

$$tgc = \lambda_c\, gc.$$

因此 gc 是 t左乘的特征向量。由于 g 是 $k[G]$中的单位元，映射$x \mapsto gx$ 是 $k[G]$的向量空间自同构，因此 $gc \neq 0$。这与引理 7.8矛盾。因此不存在这样的 b，证明完毕。 □

8. 群代数上解的分类定理

设 $\mathcal{B}$ 是 Φ的集合论基 $k[G]$，其中 G 是任意群。本节旨在证明，它必定来自一个分裂 $G = A \rtimes N$，如引理 7.3 所示；特别是，相应的集合论解 $\phi_{\mathcal{B}}$ 具有式（36）给出的形式。

定理 8.1。 设 G 是一个群，B 是 Φ的集合论基。那么存在$A, N \leq G$ 使得

(1) $G \cong A \rtimes N$，其中 A 是有限阿贝尔群；(2) $\mathcal{B}$是基 $\mathcal{B}_{A^\vee} = \{ e_\chi u \mid \chi \in A^\vee,\ u \in N\}$的一个数乘；(3) $A = \{b \in \mathcal{B} \mid 1 \in \mathrm{supp}(b)\}$ 是 $\mathcal{B}$中的幂等元；(4) $\phi_{\mathcal{B}} := \Phi|_{\mathcal{B}\otimes\mathcal{B}}$ 等价于解 (36)。

在第 8.1节中，我们记录了关于 $\mathcal{B}$ 中元素的支撑以及解的坐标 $\phi_{\mathcal{B}}$的非常有用的事实。随后，在第 8.2 节中，我们构造 A 并得到所需的性质。由引理 G 是 A 的分裂扩张，而 G/A 由引理8.1得到。至此，解的描述便显而易见。注意， N 不是规范的，即它取决于 A 在 G中的一个补的选择。

8.1. **关于基元素的支撑**。 引理 7.5说明了理解 Φ-集合论基的基元素支撑所具有的重要作用。本节记录一些进一步的观察，这些观察将有助于证明引理 8.1。

回忆一下，我们曾记为

$$\Phi(b \otimes c) = \psi_c(b) \otimes (c \circ b).$$

现在我们考察坐标 $\psi_c(b)$ 和 $c\circ\ b$ 的支撑。

引理 8.2. 设 S 是一个幺半群，且 B 是 Φ 的一个集合论基。设 $b, c \in B$。则下述结论成立

(1) supp($c \circ b$) $\subseteq$ supp(b)supp(c).(2) 对于每个 $g \in$ supp(b) 都有[1] $\delta_g(b)$ $gc = \delta_g(\psi_c(b))(c\circ b)$。因此

$$g\,\mathrm{supp}(c) = \mathrm{supp}(c \circ b).$$

(3) supp(b) =supp($\psi_c(b)$)。(4) 如果 $1 \in$ supp(b), 那么 supp($c \circ b$) = supp(c)。(5) 如果 $1 \in$ supp(c), 那么 supp(b) $\subseteq$ supp($c\circ b$)。

[1]我们用 $\delta_g(x)$ 表示 x 相对于基 G 的分解中 g 的系数，其中 $x \in k[G]$ 。

此外，如果 S 是一个群，则存在一个常数 M，使得 $|\mathrm{supp}(b)| \le M$ 对所有 $b \in B$.

例 8.3。设 G 是一个可分解为 $A \rtimes N$ 的群，其中 A 是有限阿贝尔群。考虑第 7.2 节中引入的基 $\mathrm{B}_{A^\vee} := \{ e_\chi u \mid \chi \in A^\vee,\ u \in N \}$。因此，对任意 $\chi \in A^\vee$. ，$\mathrm{supp}(e_\chi u) = Au$ 是 A 的一个陪集。现在回忆 $e_\chi := \frac{1}{|A|} \sum_{a \in A} \chi(a^{-1})\, a \in k[A]$. 。由引理 7.3 可得

$$\Phi_{k[G]}\big(e_\alpha u \otimes e_\beta v\big) = \big(e_{\alpha\,(u\cdot\beta)^{-1}}\, u\big) \ \otimes\ \big(e_{u\cdot\beta}\, uv\big).$$

因此 $\psi_{e_\beta v}(e_\alpha u) = e_{\alpha\,(u\cdot\beta)^{-1}}\, u$ 其支撑为 Au，这证实了引理8.2。

引理8.2的证明。陈述（1）可直接由引理5.1得出。

接下来考虑（2）。为简化记号，记 $d := c \circ b \in \mathcal{B}$，并将 $b = \sum_{g \in \mathrm{supp}(b)} b_g g$ 写作。因此 $\Phi(b \otimes c) = \sum_{g \in G} b_g\, g \otimes gc$。将泛函 $\delta_g \otimes \mathrm{id}$ 应用于$\Phi(b \otimes c) = \psi_c(b) \otimes d$，对任意 $g \in G$，可得

$$(\delta_g \otimes \mathrm{id})\Phi(b \otimes c) = 1 \otimes b_g\, gc \ \text{and}\ (\delta_g \otimes \mathrm{id})(\psi_c(b) \otimes d) = 1 \otimes \delta_g(\psi_c(b)) \cdot d$$

其中 $\delta_g(\psi_c(b))$ 等于将 $\psi_c(b)$ 表示为关于 G 的表达式时 g 的系数。因此，$b_g\, gc = \delta_g(\psi_c(b))\, d$. 这意味着，$\delta_g(b) \neq 0$ 当且仅当 $\delta_g(\psi_c(b)) \neq 0$，即我们得到了（3）。这也说明，由于标量倍数不会改变支撑，$g\mathrm{supp}(c) = \mathrm{supp}(c \circ b)$，从而完成了对（2）的证明。

陈述（4）直接由（2）得到，只需取 $g = 1$，并注意到标量倍数不会改变支撑。注意，（2）还意味着 $g\mathrm{supp}(c) = \mathrm{supp}(c \circ b)$，因此$g \in \mathrm{supp}(c \circ b)$，如果 $1 \in \mathrm{supp}(c)$。换言之，陈述（2）蕴含（5）。

最后，我们证明当 S 是一个群时常数的存在性。取 $b \in \mathrm{B}$ 和 $g \in \mathrm{supp}(b)$。固定一个 $c \in \mathrm{B}$。根据（2），$gc = \lambda_g\, c \circ b$ 对某个 $\lambda_g \neq 0$ 成立。因此，$\mathrm{supp}(gc) = \mathrm{supp}(c \circ b)$。但是 $\mathrm{supp}(gc) = g\mathrm{supp}(c)$，所以 $g \in \mathrm{supp}(c \circ b)\mathrm{supp}(c)^{-1}$。因此，$\mathrm{supp}(b) \subseteq \mathrm{supp}(c \circ b)\mathrm{supp}(c)^{-1}$。根据（2），我们有 $|\mathrm{supp}(c \circ b)| = |\mathrm{supp}(c)|$，因此对于任意固定的 c，$|\mathrm{supp}(b)| \le |\mathrm{supp}(c)|^2$。于是我们可以取 $M = |\mathrm{supp}(c)|^2$。□

8.2. **有限阿贝尔群 A的构造**。在本文余下部分，我们作如下假设。

约定：基域的特征为 $\mathrm{char}(k) = 0$，且包含足够多的单位根（实际上，这意味着它包含一个本原 $|A|$ 次单位根，其中 $|A|$ 对应于下文构造的有限群 A）。

8.2.1. 的描述 A。回顾一下，$B_1 := \{ b \in \mathcal{B} \mid 1 \in \mathrm{supp}(b) \}$。现在考虑有限集

$$A := \bigcup_{b \in B_1} \mathrm{supp}(b) \tag{40}$$

在引理 8.6 中，我们将证明 A 是一个有限阿贝尔群。我们先证明它是一个有限群。

引理 8.4。集合 A 在 (40) 中定义，是 G的一个子群。此外，对于所有 $b, c \in B_1$，我们有 $\mathrm{supp}(b) = \mathrm{supp}(c)$。特别地，$A$ 和 B_1 都是有限的。

证明。我们先证明 A 对乘法封闭。根据定义，它包含单位元，因此这就意味着 A 是一个子幺半群。

令 a、$a' \in A$，并选取 b、$c \in B_1$，使得 $a \in \mathrm{supp}(b)$ 且 $a' \in \mathrm{supp}(c)$。考虑 $\Phi(b \otimes c) = b' \otimes c'$，其中 b'、$c' \in \mathrm{B}$。由引理 8.2 可知，$a\mathrm{supp}(c) = \mathrm{supp}(c')$。特别地，$aa' \in \mathrm{supp}(c')$。此外，由于 $b \in B_1$，$\mathrm{supp}(c')$ 也 $= \mathrm{supp}(c)$，它是 A 的子集，因为 $c \in B_1$. 。因此，$aa' \in A$，如所求。

现在我们证明 B_1 中的所有元素具有相同的支撑。固定 $c \in B_1$，并取 $h \in A$。根据定义，存在 $b \in \mathrm{B}_1$，使得 $h \in \mathrm{supp}(b)$。由引理 8.2.(2)，结合 $g = 1$，我们得到 $c \circ b = c$ 作为两个基元素，不可能互为数乘。现在再次对 h 应用引理 8.2.(2)，得到 $h\mathrm{supp}(c) = \mathrm{supp}(c)$。由于右边包含 1，这意味着 $h \in \mathrm{supp}(c)$。由于 h 是任意的，这表明 $A = \mathrm{supp}(c)$，证毕。

由于一个元素的支撑是有限的，我们得到 A 是有限的。此外，根据定义，所有 $b \in B_1$ 都属于 $k[A]$，而后者是有限维的。因此， B_1 的线性无关性推出 $|B_1| \leq |A| < \infty$.

最后，我们可以证明 A 在取逆元运算下也是闭的。事实上，取 $h \in A$。由于 $hA = h$ supp(c) $=$ supp(c) $= A$ 且 $1 \in A$，元素 h 在 A 中有逆元，证明完毕。□

接下来，我们将特征群 $A^\vee := \mathrm{Hom}(A, k^*)$ 与 B_1联系起来。注意，引理 8.4表明，对于每个 $\delta_g(b) \neq 0$， $g \in A$ 和 $b \in B_1$，其中 $\delta_g(b)$ 表示 b相对于基 G的系数。因此，对于每个 $c \in B_1$，我们都有一个定义良好的函数

$$\chi_c : A \to k^* : g \mapsto \frac{\delta_g(\psi_c(b_0))}{\delta_g(b_0)}. \tag{41}$$

对于某个固定的 $b_0 \in \mathcal{B}_1$

引理 8.5。 对于每个 $c \in B_1$ 和每个 $g \in A$，都有如下结论

(1) $g\,c = \chi_c(g)\,c$和 $\chi_c(g)$ 与 b_0 的选取无关。(2) 映射 χ_c 是群同态，即 $\chi_c \in A^\vee$。(3)权空间

$$V_{\chi_c} := \{x \in k[A] \mid gx = \chi_c(g)x \quad for\ all\ g \in A\}$$

是 $V_{\chi_c} = k.\sum_{g\in A} \chi$1-维的$g^{-1}(g)$。

(4) 映射 $\iota : B_1 \to A^\vee : c \mapsto \chi_c$ 是单射。

证明。取 $c \in B_1$ 和 $g \in A$。选取满足 $g \in$ supp(b) 的 $b \in \mathrm{B}_1$。引理 8.2.(2)给出$c \circ b = c$，并且有 $\delta_g(b)\ gc = \delta_g(\psi_c(b))\ (c \circ b) = \delta_g(\psi_c(b))\ c$，这表明对于标量 $\alpha := \delta_g(\psi_c(b))/\delta_g(b) \in k^*$，有 $gc = \alpha\, c$。然而，根据引理 8.4，对于所有 $b \in B_1$，都有 $g \in$supp(b)。因此，对于所有 b，分式 $\delta_g(\psi_c(b))/\delta_g(b)$ 相同，第一部分得证。

对于乘法性，设 $g, h \in A$。则 $(gh)c = \chi_c(h)\,gc = \chi_c(h)\chi_c(g)c,$，因此 $\chi_c(gh)$ $=\chi_c(g)\chi_c(h)$。此外 $\chi_c(1) = 1$。故 $\chi_c \in \mathrm{Hom}(A, k^*) = A^\vee$。

现在我们证明 ι的单射性。设 c、 $d \in B_1$，并假设 $\chi_c = \chi_d$。由第一部分，对每个 $g \in A$，我们有 $gc = \chi_c(g)c = \chi_d(g)c$，类似地有 $gd = \chi_d(g)d$。因此c 与 d 都位于 $V_\chi := \{x \in k[A] \mid gx = \chi(g)x$ 对所有 $g \in A\}$中，其中 $\chi := \chi_c = \chi_d$。该特征子空间是1维的：事实上，若 $x = \sum_{g\in A} x_g g \in V_\chi$，则关系 $hx = \chi(h)x$蕴含对所有 g、 $h \in A$有 $x_{hg} = \chi(h)x_g$，因此 x 由单个系数 x_1确定。故$V_\chi = k \cdot \left(\sum_{g\in A} \chi(g^{-1})g\right)$。因此 c 与 d 互为数乘。由于B是一个基，两个不同的基元素不能是非平凡数乘，故 $c = d$。因此 ι 是单射。□

现在考虑由 B_1 生成的子空间，

$$K := \mathrm{span}_k\{b \mid b \in B_1\}.$$

根据定义， $K \subseteq k[A]$。关键的是，事实证明它们相等。

命题 8.6。 采用上述记号，我们有如下结论：

- A 是阿贝尔的，
- $K :=$ 张成空间$\{b \mid b \in B_1\} = k[A]$。

因此，映射 $\iota : B_1 \to A^\vee$ 引理 *8.5* 中的映射是双射。

引理 8.6 的证明。固定 $b \in B_1$ 和 $c \in B_1$。由于 $1 \in$ supp(b)，将引理 8.2 (2) 应用于 $g = 1$，得到 $c \in k^*(c \circ b)$。由于 B 是 Φ–集合论的，元素 $c \circ b$ 本身就是基 B 中的一个元素。基元素不可能是另一个基元素的非平凡数乘，因此 $c \circ b = c$。因此，对于每个 $g \in$ supp(b)，引理 8.2 (2) 给出 $gc \in k^*(c \circ b) = k^* c$. 因此，对于每个 $g \in$ supp(b)，左乘算子

$$L_g : K \to K, \qquad x \mapsto gx$$

保持每一个 – 1 dimensional sub空间 kc with $c \in B_1$ (i.e. L_g is di$_{\text{agona}}$ l in the basis B_1)。根据定义，$A = \bigcup_{b\in\mathcal{B}_1}\text{supp}(b)$，因此对每个 $g \in A$，相同结论都成立：对所有 $c \in B_1$，都有 $gc \in k^*c$，所以每个 L_g 在 K的基 B_1 下都是对角的。对角算子彼此可交换，因此对所有 $g, h \in A$，作为 K的端同态，我们有 $L_gL_h = L_hL_g$。但是 $L_gL_h = L_{gh}$ 且 $L_hL_g = L_{hg}$，因此 $L_{gh} = L_{hg}$。容易看出 $1 \in K$，故在单位元处取值可得 $gh = hg.$。因此 A 是阿贝尔的。

现在我们来考虑 K 与 $k[A]$的等式。根据定义，我们有 $K \subseteq k[A]$。为证明反向包含，取 $g \in A$，并写作 $1 = \sum_{c\in B_1} \lambda_c c$，其中 $\lambda_c \in k$。在左侧乘以 g，得到 $g = \sum_{c\in B_1} \lambda_c\, gc.$。由引理 8.5 可知 $gc = \chi_c(g)c$ 对每个$c \in B_1$都成立。因此 $g = \sum_{c\in B_1} \lambda_c\, \chi_c(g)\, c \in K.$。因此，每个基元素 $g \in A$ 都属于 K，所以$k[A] \subseteq K$。

关于 ι 的论断由引理 8.5 提供的单射性$|B_1| = |A|$ 以及上文第一部分得到的事实推出。□

命题 8.7。群 A 是 G的正规子群。

证明。只需证明，对于 G中 A 的一个陪集代表元 u，有 $uAu^{-1} \subseteq A$。

由于 $u \in N$ 是由来自出现的标签的生成元构成的乘积，因此只需对一个生成元证明该包含关系。于是设 Au 出现，即 $\mathcal{B}_{Au} \neq \varnothing$，并取 $b \in \mathcal{B}_{Au}$。由引理 8.10，$\text{span}(\mathcal{B}_{Au}) = k[A]u$。特别地，存在 $x \in k[A]$ 使得

$$b = xu.$$

在 $k[G]$中左乘 u^{-1}：

$$u^{-1}b = u^{-1}xu.$$

由于 $x \in k[A]$，$u^{-1}xu$ 的支撑包含于 $u^{-1}Au$。因此 $u^{-1}b$ 属于 $k[u^{-1}Au]$。现在将 $u^{-1}b$按基展开$\mathcal{B}$:

$$u^{-1}b = \sum_i \lambda_i b_i, \qquad \lambda_i \neq 0,\ b_i \in \mathcal{B}.$$

根据引理8.10，每个 b_i 的支撑都包含在单个左 A陪集内。此外，由于左边的项支撑在 $u^{-1}Au$中，求和中出现的每个 b_i 都必须满足$\text{supp}(b_i) \subseteq u^{-1}Au.$

此处我们使用假设 $K = k[A]$。由于 $b \in k[A]u$，我们可以选取这样的一个 b，使得 $u \in \text{supp}(b)$（如有需要，可用同一纤维中的另一个基元素替换 b：该纤维张成 $k[A]u$，而群元素 u 本身属于 $k[A]u$，因此必有某个基元素对 u 的系数有贡献）。于是，$u^{-1}b$ 中 $\mathbf{1}$ 的系数非零，即 $1 \in \text{supp}(u^{-1}b)$。因此，展开式中至少有一个基元素 b_i 满足$1 \in \text{supp}(b_i)$，故 $b_i \in \mathcal{B}_1$。因此，根据 A的定义，$\text{supp}(b_i) \subseteq A$，但同时 $\text{supp}(b_i) \subseteq u^{-1}Au$。所以 $\text{supp}(b_i) \subseteq A \cap u^{-1}Au$，尤其是 $A \cap u^{-1}Au$ 非空。

令 b 遍历 $k[A]u$ 的一个生成集，并重复上述论证，可迫使所有 A 都包含在 $u^{-1}Au$中。更具体地说：对每个 $a \in A$，选取 $x = a \in k[A]$，并考虑一个元素 $b \in \text{span}(\mathcal{B}_{Au})$，其中 $b = au$。将 $u^{-1}b = u^{-1}(au) = u^{-1}au$ 在基$\mathcal{B}$ 下展开，至少会得到 $\mathcal{B}_1$ 中的一个元素（因为它在 $\mathbf{1}$ 处的系数非零，当且仅当$u^{-1}au = 1$；而让 a 遍历 A，能覆盖足够多的系数，从而迫使包含关系成立）。由此得到$A \subseteq u^{-1}Au$。因此 $uAu^{-1} \subseteq A$，进而 $uAu^{-1} = A$。□

8.2.2. 关联解所建立的联系 $A^\vee$ 与 B_1。由于$\mathcal{B}$ 是 $k[G]$ 的一个 Φ-集合论基，其中 G 是一个群，因此关联的 RPE 解 $\phi_{\mathcal{B}}(x, y) = (\psi_y(x)\ y \circ x)$ 是余交换的。直接计算可知，这等价于满足

$$y \circ \psi_z(x) = y \circ x, \tag{42}$$

$$\psi_y\psi_z = \psi_z\psi_y \tag{43}$$

对于所有 $x,\ y,\ z \in \mathcal{B}$。

命题 8.8. 设 B 是 $k[G]$ 的一个 Φ 集合论基。则有如下结论：

(1) 对每个 $z \in B$，映射 ψ_z 限制为集合 B_1 上的一个双射。
(2)解 $\phi_{\mathcal{B}}$ 限制后是如下形式的双射解

$$\phi_{\mathcal{B}}|_{B_1 \times B_1} : (b, c) \mapsto (\psi_c(b), c)$$

(3)群

$$\Gamma = \langle \psi_z|_{B_1} \mid z \in B \rangle$$

是一个有限阿贝尔群。

证明。由引理 8.2.(3)，我们有 $\mathrm{supp}(\psi_z(b)) = \mathrm{supp}(b)$，因此 $\psi_z(B_1) \subseteq B_1$。由于 $1 \in \mathrm{supp}(b)$，引理 8.2 (4) 蕴含，对所有 $c \in B$，$\mathrm{supp}(c \circ b) = \mathrm{supp}(c)$。反过来也成立，即 $\psi_c(b) \in B_1$ 蕴含 $b \in B_1$，因此 $c \in B_1$ 当且仅当 $c \circ b \in B_1$。于是解 $\phi_{\mathcal{B}}$ 可以限制，从而得到一个解

$$\phi_{B_1} := \phi_{\mathcal{B}}|_{B_1 \times B_1} : B_1^2 \to B_1^2.$$

由于 $\phi_{\mathcal{B}}$ 是单射，ϕ_{B_1} 也将是单射。它也是满射，因为 $\phi_{\mathcal{B}}$ 是满射，而且 $B_1 \otimes B_1$ 只能通过 $B_1 \otimes B_1$ 中的元素到达。接下来注意，事实上，若 $1 \in \mathrm{supp}(b)$，则由引理 8.2 (4)，$c \circ b = c$，因为两个基元素不可能互为数乘。因此 $\phi_{B_1}(b, c) = (\psi_c(b)\ c)$。由于后者是双射，映射 ψ_c 必定是双射。这样我们就得到了前两个陈述。

这是 Γ阿贝尔群这一点可由（43）推出。此外，引理 B_1 中得到的有限性8.4 保证了 Γ的有限性。□

引理 A 中得到的性质8.6 可与引理5.1 和引理8.5 结合起来，从而确定 B_1 为 $k[A]$的傅里叶幂等元。作为推论，我们得到了引理 $\phi_{\mathcal{B}}|_{B_1 \times B_1}$ 中的集合论解8.8的描述。

推论 8.9。对于 $b \neq c \in B_1$，我们有

$$bc = 0 = cb\ ,\ b^2 = \varepsilon(\psi_b(b))\, b \ and\ \varepsilon(\psi_c(c)) = \varepsilon(\psi_b(b)) \neq 0.$$

此外，$\varepsilon(\psi_b(b))^{-1} b = \frac{1}{|A|} \sum_{g \in A} \chi_b(g^{-1}) g$，其中 χ_b 定义于(41)，是幂等元。因此，$\phi_{\mathcal{B}}|_{B_1 \times B_1}$ 等价于解

$$A^\vee \times A^\vee \to A^\vee \times A^\vee : (\chi_1, \chi_2) \mapsto (\chi_1 \chi_2^{-1}, \chi_2).$$

注意，上述推论表明，元素 $b \in B_1$ 具有以下形式：$\lambda\, e_\chi$，其中$\chi \in A^\vee$, $e_\chi := \frac{1}{|A|} \sum_{g \in A} \chi(g^{-1}) g$，且 λ 是一个与 b 无关的非零标量。

引理的证明 8.9。由引理 5.1 可知 $bc = \varepsilon(\psi_c(b))\, c \circ b$. 另一方面，正如在若干证明中已经指出的，$c \circ b = c$ 根据引理 8.2.(2)。因此，若 $b = c$，便得到关于 b^2 的结论。当 $b \neq c$ 时，我们利用 $k[A]$ 由引理 8.6可知是阿贝尔的，因此也有K。具体而言，我们总共得到

$$\varepsilon(\psi_c(b))c = bc = cb = \varepsilon(\psi_b(c))b.$$

由于 b 和 c 是不同的基元素，因此这意味着 $\varepsilon(\psi_c(b)) = \varepsilon(\psi_b(c)) = 0$. 因此$bc = 0 = cb$，这正是所需的结论。

现在，引理 8.5 还推出：$b \in V_{\chi_b} := \{x \in k[A] \mid gx = \chi_b(g)x$ 对所有 $g \in A\}$。此外，这个共同的 A-特征子空间是一维的，其基为傅里叶幂等元$e_{\chi_b} := \frac{1}{|A|} \sum_{g \in A} \chi_b(g^{-1}) g$. 因此，对某个 $\lambda \in k^*$，有 $b = \lambda\, e_{\overline{\chi_b \circ}}$ 然而，我们先前已得到 $b^2 = \varepsilon(\psi_b(b))b$，这意味着 $\lambda^2 e_{\chi_b} = \varepsilon(\psi_b(b))\lambda\, e_{\chi_b}$. 因此，$\lambda = \varepsilon(\psi_b(b))$。

现在我们证明，对于所有 $b \in B_1$.，标量 $\varepsilon(\psi_b(b))$ 都相等。由引理 8.6，群代数 $k[A]$ 以 B_1 为 k-基。此外，由引理 8.8，$k[G]$ 的典范解 $\Phi_{k[G]}(g \otimes h) = g \otimes gh$ 在 $k[A]^{\otimes 2} \to k[A]^{\otimes 2}$. 上限制为群解。由引理 7.2 可知，在基 $\{e_\chi := \frac{1}{|A|} \sum_{g \in A} \chi(g^{-1})$ $g \mid \chi \in A^\vee\}$ 上，有 $\Phi_{k[G]}(e_{\chi_1} \otimes e_{\chi_2}) = e_{\chi_1 \chi_2^{-1}} \otimes e_{\chi_2}$。因此，利用先前得到的 $b \in B_1$ 的表达式，我们有

$$\Phi_{k[G]}(b \otimes c) = \Phi_{k[G]}\big(\varepsilon(\psi_b(b))e_{\chi_b} \otimes \varepsilon(\psi_c(c))e_{\chi_c}\big) = \varepsilon(\psi_b(b))e_{\chi_b \chi_c^{-1}} \otimes c.$$

由于 B_1 得以保留，右侧是 $B_1 \otimes B_1$ 中的一个纯张量。因此， $\varepsilon(\psi_b(b))^{e_{\chi_b}\chi_c^{-1}} \in B_{1\circ}$ 现在注意到，出现的标量与 c 无关，因此只有当对所有 $c.$， $\varepsilon(\psi_b(b)) = \varepsilon(\psi_c(c))$ 时，后者才可能成立。我们将这个常数值记为 κ。换言之，除相差一个公倍数外， κ, B_1 与基 $\{e_\chi \mid \chi \in A^\vee\}$ 重合。双射 $B_1 \to \{e_\chi \mid \chi \in A^\vee\} : b \mapsto \kappa^{-1}b$ 由此给出引理 8.8 中的集合论解 $\phi_{\mathcal{B}}|_{B_1 \times B_1}$ 与陈述中所写的解之间所需的等价关系。□

8.3. 任意基元素的描述。 至此，我们已经得到了所需的有限阿贝尔群 A。群 N 将是 A 在 G中的补。首先考虑一个集合 $\mathcal{T}_A^G \subseteq G$，即 A 在 G中的右[2] 陪集代表元。为了证明可以选择这样的代表元构成一个子群，我们需要先用 G 显式描述所有基元素 $b \in \mathcal{B}$。分裂将在下一节中完成。

对于 $u \in \mathcal{T}_A^G$，定义

下面的引理表明 $\mathcal{B} = \bigsqcup_{u \in \mathcal{T}_A^G} B_{u_\circ}^{B_u} := \{b \in \mathcal{B} \mid \operatorname{supp}(b) \subseteq uA\}.$

引理 8.10. 对每个 $b \in B$，存在唯一的 $g \in \mathcal{T}_A^G$，使得 $\operatorname{supp}(b) \subseteq gA$。此外，$\operatorname{span}(B_g) = g\,k[A] := \{gx \mid x \in k[A]\}$。

证明。 换言之，我们需要证明 $b \in k[A]u$ 对某个 $u_\circ$ 取 $c \in B_{1\circ}$ 由 A的定义，我们有 $\operatorname{supp}(c) \subseteq A_\circ$ 现在注意到，对于 $b \in B$，由引理 8.2可知两者

$$\operatorname{supp}(b) \subseteq \operatorname{supp}(c \circ b) \text{ 和 } g\operatorname{supp}(c) = \operatorname{supp}(gc) = \operatorname{supp}(c \circ b)_\circ$$

因此，综上 $\operatorname{supp}(b) \subseteq g\operatorname{supp}(c) \subseteq gA_\circ$ 显然，我们可以取 g 属于 $\mathcal{T}_A^G$，唯一性随即由 Ag 构成一个划分这一事实得出。

接下来证明 $\operatorname{span}(B_g) = g\,k[A]_\circ$ 根据定义，$\operatorname{span}(B_g) \subseteq g\,k[A]$。反过来，取 $ga \in g\,k[A]$，并将 $ga = \sum_{b \in \mathcal{B}} \lambda_b b$ 按基 $\mathcal{B}$展开。由第一部分可知，每个基元素的支撑都包含在单个左 A–陪集中。由于该和的支撑包含在gA中，因此只能出现来自 B_g 的基元素。因此，对于所有 a，都有 $ga \in \operatorname{span}(B_g)$，从而得到另一重包含。

□

现在，我们希望按照引理 8.10 的思路强化引理8.9，即证明每个$b \in \mathcal{B}$ 都具有如下形式: $\lambda e_\chi u$ 其中 $\chi \in A^\vee$， $u \in \mathcal{T}_A^G$，且标量 λ 与所选取的 b无关。

命题 8.11。 设 $b \in \mathcal{B}$ 并考虑唯一的 $g \in A$ 使得 $\operatorname{supp}(b) \subseteq Ag$ 由引理 *8.10*给出。则存在唯一的 $\chi \in A^\vee$ 使得 $b \in$ 张成空间$_k\{e_\chi g\}$。

证明。 由引理 8.6 和引理 8.5 群代数 $k[A]$ 可分解为

$$k[A] = \bigoplus_{\chi \in A^\vee} V_\chi \text{ and } V_\chi = \operatorname{span}_k\{e_\chi\}.$$

因此， $k[A]g = \bigoplus_{\chi \in A^\vee}$ 张成空间$_k\{e_\chi g\}$。于是，我们可以将 b 分解为 $b = \sum_{\chi \in A^\vee} \alpha_\chi\, e_\chi g$, 其中 $e_{\chi_1} g \neq e_{\chi_2} g$ 对于 $\chi_1 \neq \chi_2$. 我们需要证明至多只有一个系数 α_χ 可以非零。

由引理 8.9 和引理 8.6，对每个 $\chi \in A^\vee$，存在一个 $c \in B_1$ 使得 $c = \lambda e_\chi$ 其中某个非零标量与 c 或 χ无关。将这个 c 记作 c_χ。引理 5.1 和引理8.12 可得

$$c_\chi g = g c_{g^{-1}.\chi} = \frac{\delta_g(\psi_{c_{g^{-1}.\chi}}(b))}{\delta_g(b)} c_{g.\chi} \circ b$$

因此

$$b = \sum_{\chi \in A^\vee} \alpha_\chi \lambda^{-1} \frac{\delta_g(\psi_{c_{g^{-1}.\chi}}(b))}{\delta_g(b)} c_{g^{-1}.\chi} \circ b$$

[2]右侧的选择只是为了在最后与引理中的解相匹配7.3。然而，由于 A is 正规，它们也构成左陪集代表元。

其中 $\lambda^{-1}\delta_g(\psi_{c_{g^{-1}\cdot\chi}}(b))\delta_g(b)^{-1} \neq 0$。由于所有基元素 $c_{g^{-1}\cdot\chi} \circ b$ 各不相同，根据线性无关性可知，只有一个 α_χ 非零，证毕。

□

由于 A 由引理8.7可知是正规子群，因此 G 通过共轭作用于 A。此外，由引理8.6可知 A 是阿贝尔群，因此 G 的作用可通过 G/A 分解，而后者与$\mathcal{T}_A^G$同构。将诱导出的特征 $A^\vee$ 作用记为

$$(u \cdot \chi)(a) \;:=\; \chi(u^{-1}au)$$

对 $u \in \mathcal{T}_A^G$， $a \in A$ 以及 $\chi \in A^\vee$。在幂等元 e_χ 上， G对 A 和 $A^\vee$ 的作用关系如下。特别地，由引理8.9可知，这也描述了 G 在 B_1上的作用。

引理 8.12。 对所有的 $u \in G$ 和 $\chi \in A^\vee$，均有 $u\, e_\chi\, u^{-1} = e_{u\cdot\chi}$。

证明。 利用引理 A 在 G 中是正规子群这一事实（由引理8.7 可知），并作变量代换 $a' = uau^{-1} \in A$，我们计算得

$$ue_\chi u^{-1} = \frac{1}{|A|}\sum_{a\in A}\chi(a^{-1})\,(uau^{-1}) = \frac{1}{|A|}\sum_{a'\in A}\chi\big((u^{-1}a'u)^{-1}\big)\,a' = \frac{1}{|A|}\sum_{a'\in A}(u\cdot\chi)(a'^{-1})\,a'$$

这确实等于 $e_{u\cdot\chi}$. □

8.4. **半直积与引理 8.1 的证明收尾**。 回忆一下， A 是 G 中的正规子群，因此我们可以考虑商群 $Q = G/A.$。用 Q来表述，选择一个横截集 $\mathcal{T}_A^G$等同于选择一个截面 $\tau\colon\ Q \to G$。换言之，我们将G视为扩张 $1 \to A \to G \to Q \to 1$。每个元素 $g \in G$都具有如下形式: $g = a\,\tau(q)$，其中 $q \in Q$。乘法由下式给出:

$$(a_1\tau(q_1)).(a_2\tau(q_2)) = a_1a_2^{q_1}\sigma(q_1,q_2)\tau(q_1q_2)$$

对于某个映射 $\sigma\colon\ Q\times Q \to A$。可以假设 σ是归一化的，因此对于所有 $q \in Q$，有 $\sigma(q,1) = 1 = \sigma(1,q)$。现在我们证明这个扩张是分裂的，也就是证明对于所有 $q_i \in Q.$，元素 $\sigma(q_1,q_2) = 1$。在这种情况下， $\tau(Q)$ 是 G 的一个补 A。为此，我们用引理 8.11 中得到的形式，计算解 $\Phi_{k[G]}$ 在 Φ-集合论基 B 上的限制。作为副产品，我们还将得到 $\phi_{\mathcal{B}}$ 具有式 (37) 给出的形式，从而同时完成引理 8.1 的证明。

引理 8.13. 采用上述记号，对所有 χ、$\psi \in A^\vee$ 和 p、$q \in Q$，我们有

$$\Phi_{k[G]}(e_\chi\tau(p)\otimes e_\psi\tau(q)) = (p\cdot\psi)(\sigma(p,q))\left(e_{\chi(p\cdot\psi)^{-1}}\tau(p)\otimes e_{p\cdot\psi}\tau(pq)\right).$$

注。 在引理 8.13中，我们特意尚未使用 $\mathcal{B}$ 是一个 Φ-集合论基这一点。这是为了表明，非分裂扩张应与“几乎”是集合论解的情形相关联，也就是说，纯张量 $\mathcal{B}\otimes\mathcal{B}$ 被映射为 $\mathcal{B}\otimes\mathcal{B}$的标量倍。

引理 *8.13*的证明。 首先注意到

$$\Delta(e_\chi) = \sum_{\alpha\beta=\chi} e_\alpha\otimes e_\beta. \tag{44}$$

这在引理 4.13中是隐含的，但我们现在明确说明。首先，根据定义$\Delta(e_\chi) = \frac{1}{|A|}\sum_{a\in A}\chi($ $a^{-1}(a\otimes a)$。 接下来，根据傅里叶反演恒等式 $a = \sum_{\alpha\in A^\vee}\alpha(a)e_\alpha$，我们得到

$$a\otimes a = \sum_{\alpha,\beta}\alpha(a)\beta(a)\,e_\alpha\otimes e_\beta = \sum_{\alpha,\beta}(\alpha\beta)(a)\,e_\alpha\otimes e_\beta.$$

因此

$$\Delta(e_\chi) = \sum_{\alpha,\beta}\left(\frac{1}{|A|}\sum_{a\in A}\chi(a^{-1})(\alpha\beta)(a)\right)e_\alpha\otimes e_\beta.$$

内层求和为1 ，当 $\alpha\beta=\chi$ 且0 ，否则。根据特征标正交性，可得表达式（44）。

现在注意到 (44) 意味着 $\Delta(e_\chi\tau(p))=\Delta(e_\chi)\Delta(\tau(p))=\Delta(e_\chi)(\tau(p)\otimes\tau(p))$。因此

$$\Phi_{k[G]}(e_\chi\tau(p)\otimes e_\psi\tau(q))=\sum_{\alpha\beta=\chi} e_\alpha\tau(p)\otimes(e_\beta\tau(p))(e_\psi\tau(q) \tag{45}$$

由引理 8.12， $ue_\beta u^{-1}=e_{u\cdot\beta}$ 对任意 $u\in G$。此外，由于 G 在 $A^\vee$上的作用可经由 G/A分解，故有 $\tau(p)\cdot\beta=p\cdot\beta$。因此

$$(e_\beta\tau(p))(e_\psi\tau(q))=e_\beta e_{p\cdot\psi}\tau(p)\tau(q)=e_\beta e_{p\cdot\psi}\sigma(p,q)\tau(pq).$$

由于 $e_\beta e_{p.\psi}=\delta_{\beta,\ p\cdot\psi}e_{p\cdot\psi}$ 并且 $ae_{\chi'}=\chi'(a)e_{\chi'}$ 对任意 $a\in A$ 和 $\chi'\in A^\vee$，(45) 化简为

$$\begin{aligned}\Phi_{k[G]}(e_\chi\tau(p)\otimes e_\psi\tau(q))&=e_{(p\cdot\psi)^{-1}\chi}\tau(p)\otimes\sigma(p,q)e_{p\cdot\psi}\tau(pq)\\&=(p\cdot\psi)(\sigma(p,q))\,e_{(p\cdot\psi)^{-1}\chi}\tau(p)\otimes e_{p\cdot\psi}\tau(pq)\end{aligned}$$

这恰好就是所需的形式。 □

现在我们利用 Φ-集合论方法，从引理 8.13 推导出所需的最终陈述。

推论 8.14。 以下结论成立：

- B 等于集合 $\{\lambda e_\chi\tau(p)\mid\chi\in A^\vee, p\in Q\}$,
- $\sigma\equiv 1$,
- G 是 A 与 $\tau(Q)$ 的半直积;
- $\phi_{\mathcal{B}}$ 等价于该解

$$\phi_{A^\vee\bowtie N}\big((\alpha,u),(\beta,v)\big)=\big((\alpha(u\cdot\beta)^{-1},u),\ (u\cdot\beta,uv)\big).$$

证明。由引理 8.11 可知，每个 $b\in\mathrm{B}$ 都具有 $\alpha_b e_\chi\tau(p)$ 的形式，其中 $\alpha\in k^*$、$\chi\in A^\vee$ 和 $p\in\mathrm{T}_A^G$。设 $c\in\mathrm{B}$ 是另一个基元素，将其写作 $\alpha_c e_\psi\tau(q)$。首先考虑 $c\in B_1$，即 $\tau(q)=1$，而 $\alpha_c=\lambda$ 是引理 8.9 中的公标量。对于这样的 c，由于 σ 取为归一化的， $\sigma(p,q)=\sigma(p,1)=1$。因此，引理 8.13 表明

$$\begin{aligned}\Phi_{k[G]}(b\otimes c)&=\alpha_b\lambda\Phi_{k[G]}(e_\chi\tau(p)\otimes e_\psi)\\&=\alpha_b\lambda\left(e_{\chi(p\cdot\psi)^{-1}}\tau(p)\otimes e_{p\cdot\psi}\right)\\&=\alpha_b e_{\chi(p\cdot\psi)^{-1}}\tau(p)\otimes c\end{aligned}$$

由于$\mathcal{B}$ 是 Φ-集合论的，这意味着 $\alpha_b e_{\chi(p\cdot\psi)^{-1}}\in\mathcal{B}$。然而，通过改变 c，或者换言之改变 ψ，可以在固定 χ 和 p 的情况下，通过元素 $e_{\chi(p\cdot\psi)^{-1}}$ 得到所有 $e_{\chi'}$。这意味着所有标量 α_b 都必须等于 λ. 。因此$\mathcal{B}$ 确实是基$\{e_\chi\tau(p)\mid\chi\in A^\vee,\ p\in Q\}$ 的一个公倍数。

现在取 $c\in\mathcal{B}\setminus B_1$，并利用所有标量 $\alpha_b=\lambda$ 结合引理 8.13 得到

$$\begin{aligned}\Phi_{k[G]}(b\otimes c)&=\lambda^2\Phi_{k[G]}(e_\chi\tau(p)\otimes e_\psi\tau(q))\\&=\lambda^2(p\cdot\psi)(\sigma(p,q))\left(e_{\chi(p\cdot\psi)^{-1}}\tau(p)\otimes e_{p\cdot\psi}\tau(pq)\right).\\&=(p\cdot\psi)(\sigma(p,q))\left(\lambda e_{\chi(p\cdot\psi)^{-1}}\tau(p)\otimes\lambda e_{p\cdot\psi}\tau(pq)\right)\end{aligned}$$

根据先前得到的$\mathcal{B}$ 的描述，我们知道 $\lambda e_{\chi(p\cdot\psi)^{-1}}\tau(p)$ 和 $\lambda e_{p\cdot\psi}\tau(pq)$ 是基元素。因此，由于 $\mathcal{B}$ 是 Φ-集合论的，标量 $(p\cdot\psi)(\sigma(p,q))$ 必须都等于 1。然而，对于任意 $p,q\in Q$，都可以选取一个 ψ，使得 $p\cdot\psi$ 不包含 $\sigma(p,q)$ 于其核中。因此，元素 $\sigma(p,q)$ 在 A 中都等于单位元。换言之，该扩张是分裂的。

总之，我们证明了存在一个子群 N，使得 G，且 $G=A\rtimes N$。对于这样的补，基 $\mathcal{B}$ 具有如下形式：$\{\lambda e_\chi g\mid\chi\in A^\vee, g\in N\}$。现在

考虑从 $\mathcal{B}$ 到 $\{e_\chi g \mid \chi \in A^\vee, g \in N\}$ 的双射，我们得到 $\phi_{\mathcal{B}}$ 等价于在（36）中构造的解。□

参考文献

[1] S. Baaj 和 G. Skandalis. 乘法酉算子与 C^*-代数交叉积的对偶. Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (*4* 26 4 452 488, 1993 2), ( ): – . S. Baaj 和 G. Skandalis. 乘法酉算子与 C^*-代数交叉积的对偶. Ann. Sci. École Norm. Sup. (*4* 26 4 425 488, 1993 3, 4, 5, 26), ( ): – . S. Baaj 和 G. Skandalis. 交换乘法酉算子. C. R. Math. Acad. Sci. Paris, 336(4):299– 304, 2003. 4, 26[4] M. Castelli. 关于五边形方程的交换集合论解. Semigroup Forum, 2026. 2[5] F. Catino, M. Mazzotta, 和 M. M. Miccoli. 群上的五边形方程集合论解. Comm. Algebra, 48 1 83 92, 2020 13 ( ): – . I. Colazzo, E. Jespers, 和 Ł Kubat. 五边形方程的集合论解. Comm. Math. Phys., 380 2 1003 1024, 2020 2, 20 ( ): – . I. Colazzo, J. Okniński, 和 A. Van Antwerpen. 五边形方程的双射解, 2024. 2, 3, 19, 20, 21[8] A. A. Davydov. 五边形方程与矩阵双代数. Comm. Algebra, 29(6):2627–2650, 2001. 2, 3, 5, 9, 10, 12, 13[9] R. Kashaev. 完全非交换离散Liouville方程. RIMS Kôkyûroku Bessatsu, B28 98, 2011 89 2 : – .
[10] 8 4 63 74, 1996 2 R. M. Kashaev. 海森堡双与五边形关系. Algebra i Analiz, ( ): – . R. M. Kashaev 和 N. Reshetkhin. 对称可因子化群与五边形方程的集合论解. 载于 Israel mathematical conference proceedings. 量子群. 纪念 Joseph Donin 会议论文集, Haifa, Israel, July 5–12, 2004, 页码 267–279. Providence, RI: American Mathematical Society (AMS), 2007 2 . R. M. Kashaev 和 S. M. Sergeev. 关于五边形、十项式和四面体关系. Comm. Math. Phys., 195 2 309 319, 1998 13 ( ): – . Hideki Kurose, Alfons Van Daele, 和 Yinhuo Zhang. 乘子 Hopf 代数的余表示论. II. Int. J. Math., 11(2):233–278, 2000. 12[14] J. Kustermans 和 S. Vaes. 局部紧量子群. Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4), 33 6 837 934, 2000 2 ( ): – . J.-H. Lu, M. Yan, 和 Y.-C. Zhu. 关于集合论Yang–Baxter方程. Duke Math. J., 104 1 1 18, 2000 2 ( ): – . Jiang-Hua Lu, Min Yan, 和 Yongchang Zhu. 关于具有正基的Hopf代数. J. Algebra, 237 2 421 445, 2001 2, 3, 18, 19 ( ): – . S. Mac Lane. 工作数学家的范畴., Grad. Texts Math. 第5卷. New York, NY: Springer, 第2版, 1998. 2
[18] 6 2 206 214, 1994 2 J. M. Maillet. 关于五边形方程和四面体方程. St. Petersbg. Math. J., ( ): – . G. Militaru. Hopf模范畴与Hopf 方程. Comm. Algebra, ( ): –3097, 1998 28. [20] G. Militaru. 海森堡双、五边形方程、有限维Hopf代数的结构与分类. J. London Math. Soc. (*2* 69 1 44 64, 2004 2, 3, 5, 9, 10, 13, 23, 27), ( ): – . R. Street. 单体范畴中的融合算子与余循环体. Appl. Categ. Structures, 6 191, 1998 2 177 2 ( ): – . [22] M. Takeuchi. 群的匹配对与Hopf代数的双交叉积. Commun. Algebra, 9 841 882, 1981 15 : – . T. Timmermann. 量子群与对偶导论：从Hopf代数到乘法酉算子及其他. EMS Textb. Math. Zürich: European Mathematical Society, 2008 11 . S. L. Woronowicz. 从乘法酉算子到量子群. Internat. J. Math., ( ):127 149, 1996 2 – .

（Ilaria Colazzo）利兹大学数学学院纯数学系，英国利兹 电子邮件地址： I.Colazzo@leeds.ac.uk
（Geoffrey Janssens）布鲁塞尔自由大学数学系，普莱因兰大道2号，1050 伊克塞尔，比利时 电子邮件地址： geofjans@vub.ac.be