arXiv:2601.22112v2 [econ.TH] 3 Feb 2026

分布式竞争

Mark Whitmeyer*

2026年2月4日

摘要

我研究了这样一类对称竞争：每位参与者在承担凸成本的条件下，选择一维绩效指标上的任意分布。我证明了对称均衡的存在性，阐述了均衡必须具备的若干性质，并通过一阶方法给出其刻画。本文还将这一框架应用于研发竞争、产品设计中的寡头竞争以及排序竞赛。

1 引言

许多竞争环境本质上具有分布性。代理人并非选择单一的确定性产出水平，而是选择技术、投资组合、流程和方法，以塑造不同结果出现的概率。代理人试图影响自己抽中极高质量结果的可能性、实现突破的速度、取得卓越表现的频率，或遭遇惨败的概率。他们的回报取决于与同伴的比较——谁是最佳或次佳；谁名列第一、第二或第三；或者谁看起来最强。

*亚利桑那州立大学。电子邮件：mark.whitmeyer@gmail.com。谨以此文献给 KS。机器人（refine.ink）和人类（Teddy Kim 和 Joseph Whitmeyer）都帮助我改进了这篇论文。

我研究一类策略互动，其中每位参与者都选择一维绩效指标上的概率分布，并为生成该分布承担凸成本。收益取决于实现后的绩效概况，奖励较高的实现值，且对所有参与者一视同仁。标准的排序锦标赛和竞赛模型是其中的特例，但我的框架更为广泛，涵盖了许多具有灵活生产方式和内生风险承担的竞争问题。

我的框架对微观基础持不可知立场。我并不从某个特定的底层随机过程（如扩散过程、泊松到达模型等）或参数化技术推导结果分布的可行集，而是允许参与者直接且完全灵活地选择分布，并通过定义在分布之上的一般成本泛函来刻画技术约束。这既能兼容不同应用中的不同基础，又能保持战略逻辑与福利逻辑的透明。

这种一般性也使我得以将一大类形形色色的情形置于同一把宽伞之下。在风险型研发中，企业的项目组合与实验强度选择会产生发现时间的分布。竞争如何影响研究强度与产出？在存在质量竞争的固定价格市场中，企业的设计与质量控制选择决定实现质量的分布。竞争如何影响质量选择？假设这些企业同时也选择价格；在完全竞争极限下，价格是否必然收敛到边际成本？在排序竞赛中，更不平等的奖品安排或更多参赛者将如何塑造产出？

我首先利用 Reny (1999) 中的结果来证明对称纯策略均衡的存在性，尽管不连续性会因平局所导致的支付跳跃而自然出现。其次，我表明在自然条件下，对称均衡必须采取特定的无原子形式。第三，我刻画对称均衡以及相应的对称规划者问题

通过一阶方法。

随后，我探讨了若干值得关注的具体情形。我研究了排序竞赛中奖金不平等与努力之间关系这一经典问题。对于一大类成本函数，我得出一个鲜明结论：奖金越不平等，产出的均值越高，但风险也越大（形式上，结果分布沿递增凸序发生移动）。

我证明，在风险型研发和固定价格质量竞争中，相较于规划者问题，均衡会导致过高的努力水平，从而阐明并解释了经典结果。这意味着研发突破出现得过于频繁，企业的质量选择也过高。在这两种情形下，均衡结果分布与规划者的解可以根据一阶随机占优（FOSD）进行比较：前者中均衡低于规划者，后者中则高于规划者。

最后，我研究寡头企业同时选择价格和（随机）质量时的竞争。这里我想探讨的是：当质量内生时，随着企业数量大幅增加，价格何时会趋近于边际成本。我给出了这一结果成立的一个直观必要条件。值得注意的是，对于其导数满足自然陡峭性条件的分布成本，价格趋近于边际成本意味着不存在产品差异化。也就是说，伯特兰逻辑被颠倒了：边际成本定价意味着产品完全同质。

1.1 路线图

§1.2 通过讨论相关论文完成第一节。§2介绍一般环境。一般结果见§3。在该节中，我证明了均衡存在性，并刻画了基本结构。在§4中，我将分析专门用于排序竞赛。§5 探讨风险型研发，§6 研究竞争企业的质量选择，而§7则仔细考察企业之间的价格与质量竞争。省略的证明分散在若干附录中。

1.2 相关文献

本文与关于竞赛中风险承担的文献密切相关；在这类竞赛中，代理人可以灵活选择均值固定的分布。[1] 借助 Skorokhod 嵌入定理，这个问题在数学上等价于参赛者进行扩散的竞赛。[2] 我的分析与之互为补充：尽管在均值约束下选择风险在许多情境中很自然，但将许多情形建模为代理人任意（但需付出成本地）选择随机产出，也同样合理。更广义地说，还有一些较早的论文对风险承担竞赛进行了更广泛的研究。[3]

当然，经典的全支付竞赛文献——在这类文献中，代理人选择沉没出价或努力，奖品按排名分配，无论是否获胜都要支付支出——也与本文的研究相关。[4] 从本文的视角来看，一旦允许代理人采用混合策略，经典全支付模型中的策略对象就是出价/努力的分布，而标准支出技术意味着预期成本是该分布的一个线性泛函（即，$C(F) = \int c dF$）。因此，标准的全支付环境都包含在内

[1]尤其可参见 Boleslavsky 和 Cotton（2015年，2018年）；Fang 和 Noe（2016年）；Wagman 和 Conitzer（2012年）；Albrecht（2017年）；Au 和 Kawai（2020年）；Spiegler（2006年）；Kim 和 Koh（2022年）；Au 和 Whitmeyer（2023年）。[2]这项文献始于 Seel 和 Strack（2013年），包括 Feng 和 Hobson（2015年，2016年b、a）；Nutz 和 Zhang（2022年）；Whitmeyer（2023年）。[3]以下列举的并非详尽无遗：Dasgupta 和 Stiglitz（1980年）；Bhattacharya 和 Mookherjee（1986年）；Klette 和 De Meza（1986年），他们研究研发竞赛（我将在第5节重新探讨）；Hvide（2002年）；Hvide 和 Kristiansen（2003年）；Goel 和 Thakor（2008年）；Gilpatric（2009年）；Fang 和 Noe（2022年），他们分析晋升竞赛；Basak 和 Makarov（2015年）；Strack（2016年）；Whitmeyer（2019年）；Lacker 和 Zariphopoulou（2019年），他们研究关心他人的投资经理；以及 Robson（1992年）和 Hopkins（2018年），其中相对地位是目标。[4]例如，参见 Hillman 和 Samet（1987年）；Hillman 和 Riley（1989年）；Baye 等人（1996年）；Barut 和

Kovenock (1998); Amann 和 Leininger(1996);Che 和 Gale (2000); Fang 等 (2020).

作为线性分布成本这一特殊情形的竞赛应用 s.

与本文最接近的论文是Kim 等人(2023年)，该文将有成本的努力与均值保持噪声的内生选择（“选择自己的运气”）结合起来，并表明允许策略性风险承担会显著改变标准竞赛设计的结论。在介绍排序竞赛应用（§4）之后，我将详细阐述他们的论文与本文之间的区别。Hwang 等人(2023年）研究寡头企业联合的信息提供与定价问题；形式上，这是一个企业在均值保持收缩约束下定价并灵活选择分布的问题。本文关于联合定价与质量选择的应用（§7）探讨了一个相关问题。

最后，本研究也受到契约与信息经济学领域日益壮大的文献启发。在这些文献中，代理人可以灵活地选择分布，同时承担（Gâteaux）可微的成本。Georgiadis 等人(2024年）在灵活道德风险问题中提出了一种广义的一阶方法。Ravid 等人(2022）研究“交易前学习”，其中买方了解自身估值所需承担的成本具有这种一般的光滑形式。由Krähmer撰写的三篇论文分别研究了有成本的分布选择背景下的敲竹杠、证券设计和垄断监管。[5] Castro-Pires 等人(2025）将灵活分布方法扩展到存在逆向选择的环境中。据我所知，尚无现有论文研究分布的灵活且有成本选择下的博弈。仅此一点便带来了挑战：分布竞争中的均衡存在性并非易事，因为发生平局时，获胜概率通常会随分布变化而不连续。

2 形式化环境

有$n \geq 2$ 名参与者。设$X := [0,1]$，赋予其通常的紧致度量拓扑。我们将$x \in X$ 解释为一维绩效指标，其中较高的

[5]参见 Krähmer（2024年，2025a、b）。

x 更优。每位参与者的策略是X上的博雷尔概率测度μ。等价地，策略是一个累积分布函数（累积分布函数），即右连续、非减函数$F\colon\ [0,1]\to[0,1]$，满足$F(1)=1$：$F(x):=\mu([0,x])$对所有$x\in[0,1]$成立，且$F^{-}(1):=\lim_{x\uparrow 1}F(x)=1-\mu(\{1\})$。令F表示所有此类$F$的集合。每个$F\in$F在$X$上诱导唯一的概率测度$dF$。我们将其支撑集记为$\mathrm{supp}(dF)\subseteq X$。

以下记号和约定贯穿全文。对于向量空间中的集合 A，co(A) 表示其凸包。[6] 对于拓扑空间之间的函数 f，Disc(f) 表示 f 不连续的点集。δ_t 表示 t 处的狄拉克测度 $\in$X。符号 $\otimes$ 表示乘积测度：[7] 对于给定的 F 和勒贝格测度 λ，$\mu_F=$dF $\otimes\lambda$ 是 X $\times[0,1]$ 上的联合分布 (X, U)，其中 X $\sim$dF，且均匀分布 U 相互独立（而 $(\mathrm{dF})^{\otimes n}$ 是 n 重乘积测度）。对测度进行积分，指相对于相应概率测度的勒贝格积分——在一维情况下，这就是通常的勒贝格–斯蒂尔切斯记号。最后，$\mathrm{F}_m\to$F 中的序列意味着诱导测度 $\mathrm{dF}_m\Rightarrow$dF 在 X 上弱收敛。

给定一个策略组合 $(F_1,\ldots,F_n)\in\mathrm{F}^n$，实现绩效 $X_i\sim dF_i$ 是独立抽取的。我们采用均匀分布的平局决胜规则。为辅助平局决胜，令 $U_i\sim$均匀分布 $[0,1]$ 且独立同分布，并且与 $(X_1,\ldots,X_n)$ 独立。令 $(x_i,u_i)_{i=1}^n\in(X\times[0,1])^n$。

参与者i的总收益是一个有界 Borel 函数。

$$\pi_i\colon\ (X\times[0,1])^n\to\mathbb{R}.$$

我们对总收益作出以下假设：

假设2.1。

（P1）有界收益：存在 $\bar{\pi}<\infty$，使得 $0\le\pi_i\le\bar{\pi}$ 对所有 i 均成立。

[6]特别地，对于 $F^1,\ldots,F^m\in$F，$\mathrm{co}\{F^1,\ldots,F^m\}=\left\{\sum_{k=1}^m\lambda_kF^k\colon\ \lambda_k\ge 0,\ \sum_{k=1}^m\lambda_k=1\right\}$.[7]若 μ 是 X 上的测度，且 ν 是 Y上的测度，则 $\mu\otimes\nu$ 是 $X\times Y$ 上的测度，并且在矩形集合上满足 $(\mu\otimes\nu)(A\times B)=\mu(A)\nu(B)$。

（P2）该博弈具有对称性：对于 {1,...,n} 的任意排列 σ，

$$\pi_{\sigma(i)}\left((x_{\sigma(1)},u_{\sigma(1)}),\ldots,(x_{\sigma(n)},u_{\sigma(n)})\right)=\pi_i\left((x_1,u_1),\ldots,(x_n,u_n)\right).$$

(P3) 不连续性只会在平局时出现：对每个i,

$$\mathrm{Disc}\left(\pi_i\right)\subseteq\bigcup_{j\neq i}\left\{(x,u)\in(X\times[0,1])^n:\ x_i=x_j\right\}.$$

(P4) 越高越好：对每个i、每个（x_{-i}，u），以及所有$x_i'\geq x_i$,

$$\pi_i\left((x_i',u_i),(x_{-i},u_{-i})\right)\geq\pi_i\left((x_i,u_i),(x_{-i},u_{-i})\right).$$

(P5) 连续的总奖励：存在一个有界、连续且对称的函数 $\Pi: X^n\to\mathrm{R}$，使得对所有（x,u）$\in(X\times[0,1])^n$,

$$\sum_{i=1}^{n}\pi_i\left((x_1,u_1),\ldots,(x_n,u_n)\right)=\Pi(x_1,\ldots,x_n).$$

如果参与者i选择累积分布函数F_i，则需支付成本$C(F_i)$。我们假设参与者的净收益在总收益和成本之间是可加分离的，并对成本C作如下假设：

假设 2.2。

(C1) C: F $\to$ R 是凸函数，且关于X上相应测度的弱收敛是连续的。

（C2）C 在 F 上盖托可微：对于每个$F\in$F，都存在一个函数c_F：$X\to$R，该函数关于x连续，且对所有$G\in$F,

$$\delta C(F;G-F)=\int_X c_F(x)d\left(G-F\right)(x).$$

(C3) 存在 $\eta_1>0$，使得对于每个 $F\in$F,

$$c_F(1)\geq c_F(0)+\bar{\pi}+\eta_1.$$

在策略组合 $(F_1,\ldots,F_n) \in \mathbf{F}^n$ 下，参与者 i 的（净）期望收益为

$$w_i(F_1,\ldots,F_n) := \int_{(X\times[0,1])^n} \pi_i \, d\left((dF_1 \otimes \lambda) \otimes \cdots \otimes (dF_n \otimes \lambda)\right) - C(F_i),$$

其中， λ 是 $[0,1]$上的勒贝格测度。

2.1 假设讨论

假设 2.1 对环境施加的结构限制极少。有界性 (P1)是一项简单的正则性条件，可确保对于任意分布选择，期望收益ff均有定义。对称性 (P2)只是将我们的分析限定于对称环境。关键的建模限制是 (P3)：只有当参与者的实现值恰好与他人相同时，她的收益ff 才会发生跳变。这符合我们的主要应用场景（排序竞赛、产品竞争、优先权竞赛），因为不连续性恰恰源于平局会改变获胜者。单调性 (P4) 将“表现越好越有利”这一对指标的解释形式化，并排除这样的反常情形：参与者提高自己的实现值反而会降低所得奖品。最后，(P5)是另一种正则性条件，规定待分配奖品的总量取决于实现绩效概况，且连续变化（例如，不取决于辅助性的平局决胜规则）。

假设 2.2 阐明了生产技术。凸性和连续性 (C1)体现了这样一种思想：将概率质量向理想结果转移，会呈现边际成本弱递增的特征；而结果分布的微小变化不会导致成本出现大幅、不连续的波动。可微性 (C2) 提供了一个简洁的边际成本对象 c_F。它是局部转移权重的一阶成本，最终使一阶方法成为可能。最后一个假设 (C3) 大致属于稻田条件，可确保在最高绩效水平上配置概率质量的成本过高，因此永远不会成为最优选择。这排除了上界处的角点解，以及由此可能引发的有害病态情形。

3 结果

3.1 初步结果

我们首先证明对称（纯策略）均衡存在，证明推迟至附录 A.1。[8]

命题 3.1。 在假设 *2.1* 和 *2.2*下，存在一个对称纯策略纳什均衡 $F^* \in \mathcal{F}$。

这些博弈中的一个核心障碍是，收益在平局时会发生不连续跳变：当两个或更多参与者抽到完全相同的绩效水平时，“谁获胜”会突然改变。这一问题表明，尽管存在这些不连续性，对称纯策略均衡仍然存在。其直觉在于，这些不连续性具有严格的结构。根据构造，它们仅源于平局事件，而通过对偏离稍作“平滑化”，这些平局事件基本上可以忽略不计。以这种方式平滑偏离后，偏离者的期望收益会随邻域内对手的策略连续变化，这恰好是我们在这个不连续博弈中证明均衡存在所需要的稳定性。

接下来，我们将证明对称均衡必须具备的其他性质，证明留在附录 A.2中。首先，我们论证没有任何最佳响应会在 1 处放置质量，因此任何对称均衡也不会如此。

引理 **3.2.** 假设 *2.2*。对于任意对称均衡 $F \in \mathcal{F}$，$dF(\{1\}) = 0$.

其次，我们引入一个额外假设，以消除 (0，1) 上的原子。具体而言，(0，1) 上的无原子性通常要求存在严格的平局劣势：当参与者在某个内部水平上与他人并列取得最佳表现时，稍微

[8]在补充附录中，我们证明了由各种 F 子集（例如由均值约束或主序约束生成的子集）所具有的对称均衡存在性。

提高表现，就必须在该平局事件中获得严格更高的期望奖金。这一条件在我们后续的特例中成立，我们也为抽象模型记录了一个直观条件。

假设 3.3。对于 $z = ((x_2,u_2),\ldots,(x_n,u_n)) \in (X \times [0,1])^{n-1}$ 且 $x \in X$，定义参与者 1 的破平局平均奖金

$$\tilde{\pi}_1(x;z) := \int_0^1 \pi_1((x,u_1),z)\,du_1.$$

对于每个 $x_0 \in (0,1)$，存在数值 $\delta(x_0) \in (0,1-x_0]$ 和 $\Delta(x_0) > 0$，使得对所有满足 $\max_{2\le j\le n} x_j = x_0$，的 $z = ((x_2,u_2),\ldots,(x_n,u_n))$，对每个$\varepsilon \in (0,\delta(x_0)]$,

$$\tilde{\pi}_1(x_0+\varepsilon;z) \ge \tilde{\pi}_1(x_0;z) + \Delta(x_0).$$

简言之，该假设引入了一种“过度削价”力量，这在许多我们感兴趣的情形中都很典型：参与者可以通过打破平局，使其总收益发生离散跳跃。这使我们能够排除对称均衡中的内部原子：

引理 3.4。假设 *2.1*、*2.2*和 *3.3*成立。若 $F \in \mathcal{F}$ 是对称均衡，则 $dF(\{x\}) = 0$ 对每个 $x \in (0,1)$。

现在我们来证明参与者的事中收益具有一项有用的连续性性质。回忆一下$\mu_F := dF \otimes \lambda$ 在$X \times [0,1]$上的定义。对于$z = ((x_2,u_2),\ldots,(x_n,u_n)) \in (X \times [0,1])^{n-1}$ 以及 $x \in X</style}$，定义参与者 *1* 在对称对手F 面前的中期预期奖品为

$$a_F(x) := \int_{(X\times[0,1])^{n-1}} \tilde{\pi}_1(x;z)\,d\mu_F^{\otimes(n-1)}(z).$$

那么，对于任意偏离$H \in$F,

$$u_1(H,F,\ldots,F) = \int_X a_F(x)\,dH(x) - C(H).$$

下一个引理记录了在对手不放置原子的点处的连续性：

引理 3.5。 假设 2.1成立。若 $x_0 \in X$ 满足 $dF(\{x0\}) = 0$，则 $aF(\cdot)$ 在 $x0$ 处连续。

接下来，我们将注意力转向对称规划者问题，其中规划者选择$F \in \mathbf{F}$，以最大化对角收益

$$v(F) := u_1(F, \ldots, F).$$

回想一下，在假设2.1中，我们引入记号

$$\sum_{i=1}^{n} \pi_i((x_1, u_1), \ldots, (x_n, u_n)) = \Pi(x_1, \ldots, x_n).$$

因此，规划者的目标是

$$v(F) = \frac{1}{n} \int_{X^n} \Pi(x)\, d(dF)^{\otimes n}(x) - C(F).$$

正如我们在附录引理A.1中所表明的，v 在紧致度量空间$\mathcal{F}$上是连续的，因此它达到最大值。

命题 3.6. 假定假设2.1 与2.2。则存在$G \in \mathcal{F}$ 最大化v 于$\mathcal{F}$。

3.2 均衡与规划者最优刻画

我们现在通过一阶方法刻画均衡与规划者最优解，并将技术细节留待附录B。定义净（对称）收益

$$\Phi(F, x) := a_F(x) - c_F(x).$$

于是，

命题 3.7。 假设 2.1 和 2.2成立。如果 $F \in \mathcal{F}$ 是对称均衡，则存在一个乘子 $\lambda_g \in \mathbb{R}$ 使得

$$\Phi(F, x) \le \lambda_g \ \forall x \in X, \qquad \text{and} \qquad \Phi(F, x) = \lambda_g \ \forall x \in \operatorname{supp}(dF).$$

现在我们将注意力转向规划者。对于 $F \in \mathbb{F}$ 和 $x \in X$，我们定义规划者的中期总奖励

$$A_F(x) := \int_{X^{n-1}} \Pi(x, x_2, \ldots, x_n)\, d(dF)^{\otimes(n-1)}(x_2, \ldots, x_n).$$

命题 3.8。 假设 *2.1* 和 *2.2*。若 $G \in \mathcal{F}$ 在 v 上使 $\mathcal{F}$达到最大值，则存在 $\lambda_p \in \mathbb{R}$ 使得

$$A_G(x) - c_G(x) \leq \lambda_p \ \ \forall x \in X, \quad \textit{and} \quad A_G(x) - c_G(x) = \lambda_p \ \ \forall x \in \operatorname{supp}(dG).$$

均衡经济学和规划者最优解的原理再简单不过。命题 3.7 和3.8 是对标准一阶方法逻辑的直观推广，适用于决策变量不是单个数值而是分布的情形。关键思路是考虑对概率质量进行微小重新分配：从一个结果水平取走 ε 份质量，并将其转移到另一个结果水平。如果这样的局部重新分配会提高预期收益，那么原来的分布就不可能是最优的。因此，在最优解处，每个获得正概率的结果水平都必须带来相同的净边际回报，而未被采用的任何结果水平带来的净边际回报都必须更低。

从经济学角度看，命题 3.7 正是人们熟悉的均衡无差异逻辑。参与者企业只会将权重赋予使私人净边际回报最大化的结果，并且它在实际采用的所有结果之间必须无差异（就净边际而言）。乘子是均衡中共同的“基准”净边际回报，其产生的原因是概率质量属于稀缺资源：在某个 x 上增加权重，必然意味着在别处减少权重。

规划者问题具有相同的结构，但收益方从私人边际收益变为社会边际收益。当规划者将概率质量转移至x时，相关的边际收益是其对总剩余（总奖励）的影响。将概率质量转移至x 的边际成本与博弈中的相同，规划者同样完全采用“使支撑集上的净边际回报相等”这一原则，但使用社会边际收益，而非私人边际收益。

4 专门化 I：排名竞赛

我们首先研究排序竞赛。对于$n \geq 2$，我们将 π_i 专门设定为一场奖品向量为 $\mathbf{v} = (v_1,\ldots,v_n)$的排序竞赛，满足

$$v_1 \geq \cdots \geq v_n = 0, \qquad \text{and} \qquad \sum_{k=1}^{n} v_k = 1,$$

平局时采用均匀随机方式决定胜负。

我们为成本增加一些额外的结构：

假设 4.1。C 的 Gâteaux 导数具有可分形式

$$c_F(x) = \gamma(x) + \beta(F(x)), \qquad \text{for all } F \in \mathcal{F} \text{ and all } x \in [0,1],$$

其中 $\gamma:\ [0,1] \to \mathbb{R}$，且 $\beta:\ [0,1] \to \mathbb{R}$，满足：

1. γ 连续、严格递增、凹，且 $\gamma(0) = 0$。
2. β 是连续、非递减的，且 $\beta(0) = 0$。

我们定义排序收益函数

$$\Psi(q;\mathbf{v}) := \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} q^{n-k} (1-q)^{k-1} v_k, \qquad \forall\ q \in [0,1].$$

对于两个奖品向量 v 和 w，如果 w主序 v，则称

$$\sum_{k=1}^{m} w_k \geq \sum_{k=1}^{m} v_k, \qquad \forall\ m = 1,\ldots,n, \quad \text{with equality at } m = n.$$

我们在附录C中证明以下结果。

引理 *4.2*。假设假设 *4.1* 成立，并取两个满足以下条件的奖品向量 v 和 w：*i.* w 主序 v；*ii.* $v_1 > v_2$ 且 $w_1 > w_2$；*iii.* $\Psi(q;v) - \beta(q)$ 和 $\Psi(q;w) - \beta(q)$ 在 $[0,1]$ 上严格递增。那么，这两个奖品向量下的对称均衡是唯一的。

此外，令 F 和 G 分别表示奖品$\mathbf{v}$ 和$\mathbf{w}$下的（对称）均衡累积分布函数，并令 $X \sim F$ 和 $Y \sim G$。那么，对于$\mathbf{v}$ 和$\mathbf{w}$，对称均衡在 $[0,1]$，上均为无原子，且满足 $0 \in \text{supp}(dF)$、 $0 \in \text{supp}(dG)$ 以及 $dF(\{0\}) = dG(\{0\}) = 0$，且一阶条件的乘子为 $\lambda_F = \lambda_G = 0$。

定理 4.3。 假设 *4.1*成立。则在引理 *4.2*的相同条件下，Y 在X 之上占优，且二者满足递增凸序。

我的练习采用与 Kim 等人(2023年互补的简约形式路径。他们研究的是代理人“选择自己的运气”的竞赛：在其他方面均为标准的排序竞赛中，代理人的实现绩效由努力加上任意无偏噪声产生。他们的主要结果十分引人注目：对于广泛的一类努力成本函数 c，与任何预算相同的其他排序奖金向量相比，赢家通吃奖金方案能使均衡期望产出（以及期望努力）最大化。[9]

他们的关键洞见是采用两步化简，巧妙地将竞赛中的标准部分与允许策略性风险承担所带来的新要素区分开来。他们运用说服工具，推导出一个内生的产出虚拟成本。这通过熟悉的全支付无差异条件确定均衡产出，并使他们能够提炼出将奖品从 v 调整为 w 所带来的结果：（i）奖品效果，保持净虚拟成本不变，仅改变（有上限的）反函数；（ii）虚拟成本效果，保持 Ψ 不变，仅改变净虚拟成本。

第一种作用力正是经典全支付比较静态所强调的（奖品差异越大，分布越分散；在凹成本下，产出也越高）；而第二个括号项则单独体现了新的调整：奖品的变化会反馈影响内生的风险-努力组合，进而影响由此诱导出的虚拟

[9]此外，对于其成本类中的很大范围，他们还得出了更强的分布结论：当c 为凹函数、凸函数或先凸后凹时，赢家通吃下的均衡产出在递增凸序上支配任何更平等的奖金方案下的均衡产出。

成本。我的论文采用一种互补的简约形式路径，其中努力与风险承担相互交织。我的假设（既不推广 Kim 等人 (2023年）的假设，也不被其假设所推广）确保他们所识别的第一种作用力占主导地位，这类似于他们关于努力成本的假设也会产生同样的作用。

将我的发现与 Fang 等人（2020）的结论进行比较也很有意义。在他们的研究中，每位参赛者选择一个努力水平 x，并支付标准的努力成本 c(x)。如果参赛者按照分布 F 进行混合策略，那么其总成本就是期望努力成本，C (F) = $\int$cdF；该成本关于分布 F 呈线性，因此其 Gâteaux 导数与分布无关：对于任意 F，c_F(x) = c(x)。[10]

本研究和 Fang 等人 (2020) 都利用了奖品向量发生主序变化所带来的一个共同结构性推论。也就是说，转向奖金不平等程度更高的奖金方案，会使均衡边际成本分布发生均值保持扩散。随后，均衡产出的变化取决于从边际成本映射回表现的函数的曲率。我的边际成本的加性可分性以及 β 抵消了边际成本对分布的任何依赖所产生的影响。重要的是，在我的一般环境中，这一类条件相当严格；若不满足该条件（即在更一般的 *C*s 下），通过提高奖金不平等来“升高竞争热度”未必会对产出产生直接明了的比较静态影响。

4.1 再度升温

现在我们将讨论范围限定在赢家通吃竞赛中，[11] 其中对于 $n \geq 2$ 名参与者，奖品向量 **v** =(1，0，...，0)，并简要研究进入的影响。我们假设 *C* 具有以下局部边际成本性质：

[10]因此，Fang 等人（2020）的环境属于本文所讨论环境的一个特例，即边际成本不取决于均衡分布。[11]这一限制仅为简化分析。

假设 4.4。C的 Gâteaux 导数满足 $c_F(x) = \kappa(x, F(x))$，对于所有$F \in \mathrm{F}$ 以及所有 $x \in [0,1]$均成立，其中 $\kappa(0, 0) = 0$, $\kappa(x,q)$ 对每个$x \in [0,1]$而言关于 q非递减，且 κ 对每个 $q \in [0,1]$而言关于 x严格递增。

命题 4.5。 设定假设 *4.4* 并特化到赢家通吃竞赛。于是，进入在一阶随机占优的意义上抑制产出：令 F_n 表示对称均衡累积分布函数，$F_{n+1}(x) \geq F_n(x)$ 对所有 $x \in [0,1]$。

正如我们所见，进入比较静态比奖品不平等的比较静态稳健得多。具体而言，Fang 等人 (2020)表明，在赢家通吃下，进入会降低个体努力，且这种抑制效应独立于 c 的凸性而成立。命题 4.5 在本框架内确立了一个类似但严格更一般的结论：在赢家通吃下，增加一名参赛者会使整个对称均衡表现分布在一阶随机占优意义上向下移动，即便边际成本通过一般的局部形式依赖于内生分布 $c_F(x) = \kappa(x, F(x))$。边际成本 c_F在此处可以比在定理 4.3 中取得一般得多的形式，因为该结果本质上涉及二阶随机占优比较（其中曲率至关重要）；而命题4.5 则是一阶随机占优比较（其中曲率并不重要）。

5 专业化 II：风险研发

在赢家通吃专利竞赛中，每家企业都会选择一个关于突破时间的分布$T_i \in [0, \infty]$，其中$T_i = \infty$ 表示永远无法取得突破。实现最短突破时间的企业将获得按（共同）利率$r > 0$折现后的单位奖金。

为了将这个最小化问题嵌入§的抽象环境2 （其中表现越高越好），我们定义如下（递减）同胚

$$x(t) := \frac{1}{1+t}, \quad \forall\, t \in [0, \infty],$$

其反函数为 $t(x) := \frac{1-x}{x}$，并约定 $t(0) := \infty$。由于 $x(\cdot)$ 严格递减，最小化 t 等价于最大化 x。我们直接在时间坐标 t 中陈述结果，并定义 $V(t) := e^{-rt}$，其中 $V(\infty) := 0$。

平局时采用均匀随机决胜。稍微提前行动以打破平局，会在平局事件上带来离散收益，因此在这一特例中，假设 3.3 成立。此外，在重新参数化 $x(t) = 1/(1+t)$ 后，引理 3.2 和引理3.4 表明，任何对称均衡在 $[0,\infty)$ 上都是无原子的。我们引入一类与上一节假设 4.4非常相似的成本。

假设 5.1。存在 $\kappa : [0,\infty) \times [0,1] \to \mathbb{R}$，使得对于所有 $H \in \mathbf{F}$ 和所有 $t < \infty$，$c_H(t) = \kappa(t, H(t))$，且对于每个 t，$\kappa(t,\cdot)$ 均为非递减函数。

对于 $H \in \mathbf{F}$，令 $T_2, \ldots, T_n \sim dH$为独立同分布随机变量，并定义 $M_H := \min\{T_2, \ldots, T_n\}$，以及

$$\widetilde{V}_H(t) := \mathbb{E}[V(M_H)\mathbf{1}\{M_H > t\}], \quad \text{with } \widetilde{V}_H(\infty) := 0.$$

我们将使用简约式净收益

$$\Phi(H,t) := V(t)(1-H(t))^{n-1} - c_H(t), \qquad \forall\, t \in [0,\infty].$$

若 F 为对称均衡，则由引理 3.2 与引理 3.4，dF ({t}) = 0对所有 t $< \infty$ 成立，因此对每个 t $< \infty$，选择确定性时间 t 的偏离者当且仅当 $M_F >$ t 时获胜。于是，其中期预期奖品为 V (t) (1 – F (t))$^{n-1}$，且命题 3.7 中的抽象净收益对象与 Φ(F, t) 在 t $< \infty$ 时一致。

设 F 为对称均衡，并设 G 为规划者问题的解，即最大化v。设 λ_g 为命题3.7 的乘子，并设 λ_p 为命题3.8的乘子，即

$$A_G(t) - c_G(t) \le \bar{\lambda}_p \ \ \forall t \in X, \qquad \text{and} \qquad A_G(t) - c_G(t) = \bar{\lambda}_p \ \ \forall t \in \operatorname{supp}(dG).$$

定义归一化规划者乘子 $\lambda_p := \lambda_p - A_G(\infty)$。现在我们证明，当 $\lambda_p \ge \lambda_g$ 时，均衡在随机意义上早于规划者解。本节的结果证明见附录D。

命题 5.2。 假设 *2.1*、*2.2*和 *5.1*成立。设 F 为一个对称均衡，设 G使 v最大化。若 $\lambda_p \geq \lambda_g$，则 $F(t) \geq G(t)$对所有 $t \in [0, \infty)$。

现在，我们为成本函数引入一个较弱的尾部消失条件：假设 5.3。存在 $c_\infty \in R$，使得 $\lim_{t\to\infty} \sup_{H\in\mathcal{F}} |c_H(t) - c_\infty| = 0$，并令 $c_H(\infty) := c_\infty$。此外，对每个 $H \in F$ 以及每个 $t < \infty$，$c_H(t) > c_\infty$。定理 5.4。假设假设 2.1、2.2、5.1 和 5.3 成立。令 F 为一个对称均衡，令 G 使 v 最大化。那么，对所有 $t \in [0, \infty)$，$F(t) \geq G(t)$。

本节的模型承袭经典专利竞赛传统：企业竞相争夺优先权奖品，并且能够影响的不仅是预期发现时间，还有突破成果的整个分布。Dasgupta 和 Stiglitz (1980) 强调市场结构如何影响研究速度、并行实验室的数量以及研发的风险状况，而 Bhattacharya 和 Mookherjee (1986) 和Klette 和 De Meza (1986) 则指出，相较于社会最优，优先权奖励可能会扭曲投资组合风险和重复投入激励。他们都探讨了竞争如何影响突破的时机——也就是分布。

我的贡献在于，不再局限于采用某种特定的随机搜索技术（风险率、实验室数量或特定的投资组合结构），再推导其所隐含的发明时间分布，而是允许每家企业灵活选择突破时间的任意分布，同时仅对成本作出最低限度的假设。这样做带来了一个简洁而鲜明的结果：均衡突破时间在随机意义上早于规划者所选择的时间，因此，竞争会以稳健的方式低效地加速发现。

6 专业化 III：质量竞争

现在，参与者是企业。设定单位利润率 $m > 0$。每家企业都选择一种产品质量 $Q_i \in [0, 1]$的分布。质量实现后，具有最高实现质量的企业将获得一位代表性消费者的购买，

若出现平局，则公平地打破平局。需求量为 $D(q^*)$，其中 $q^* := \max_i Q_i$，且$D:[0,1] \to \left[0, \bar{D}\right]$是连续且非递减的，并且 $D(0) = 0$。获胜企业获得毛营业利润 $mD(q^*)$；其他企业的利润为 0。企业还需承担分布成本 C。为使符号与上一节保持一致，我们定义反向质量指数

$$T_i := \frac{1 - Q_i}{Q_i} \in [0, \infty], \qquad \text{with the convention } T_i := \infty \text{ if } Q_i = 0.$$

那么 $Q_i = q(T_i)$，其中 $q(t) := \frac{1}{1+t}$对所有 $t \in [0, \infty]$ 均成立，且 $q(\infty) := 0$。由于 $q(\cdot)$ 严格递减，最大化实现质量等价于最小化 T_i，这使该设定与本节第一部分相一致：$V_q(t) := mD\left(\frac{1}{1+t}\right)$对所有$t \in [0, \infty]$均成立，且 $V_q(\infty) = mD(0) = 0$。显然，V_q 连续且非递增。

此外，假设 $D(q) > 0$ 对所有 $q \in (0, 1]$, 因此，在平局事件中，选择略小的 t 即可通过避开平局获得离散收益，所以在这一特例中假设 3.3成立；由此可得（根据引理 3.2 和 3.4），对称均衡在 $[0, \infty$ 上无原子。

我们的结果与定理5.4形成鲜明的类比：

推论6.1。 假设 *2.1*、*2.2*、*5.1*和 *5.3*成立。设 F 为一个对称均衡，设 G 最大化对称规划者目标 v。那么，对于所有 $F(t) \geq G(t)$，均有$t \in [0, \infty)$。

由于$q(t) = 1/(1 + t)$ 严格递减，因此这等价于质量的随机过度供给 （按一阶随机占优的意义）。

关于这种无价格的质量竞争，最后再说明一点：可以将企业视为学校，由学校设计其培养出的学生的质量分布（类似于 Boleslavsky 和 Cotton (2015年)，既可以不设评分环节，也可以将评分“纳入”设计问题）。在这一情境下，推论 6.1 有一项有趣的含义：学校对学生的投资过多，而且培养出的学生质量差异也大于社会最优水平。[12]

[12]这与围绕“资优与天才”项目、“不让一个孩子掉队”等的争论有关。

7 专业化 IV：价格与质量竞争

现在，我们将产品设计内生化，并纳入Perloff 和 Salop(1985)关于寡头价格竞争的开创性模型。参与者仍然是企业。每家企业选择一个产品质量的分布 $F_i \in \mathcal{F}$ ，其中质量取值于 $Q_i \in X := [0,1]$ ，并选择一个价格 $p_i \in P := [0, \bar{p}]$。我们将边际成本标准化为 0，因此 p_i 就是单位加成。为使价格的一阶方法具有合理性，我们引入偏好冲击，以平滑需求。

假设 7.1。取某个 $\sigma \in (0, 1)$。企业抽取$Q_i \sim dF_i$后，代表性消费者会抽取一个独立的 ε_i ，其在 $[0,1]$ 上的累积分布函数为G ，且具有连续密度g。消费者对产品i的价值为 $\hat{Q}_i := (1-\sigma)Q_i + \sigma\varepsilon_i \in [0,1]$。

我们假设完全市场覆盖。也就是说，消费者根据 $\hat{Q}_i - p_i$对企业排名，并从使该值最大的企业购买；若出现平局，则以均匀随机方式决定。企业i售出产品时的毛营业利润为p_i ，否则为 0；此外还要承担分布成本$C(F_i)$。

在假设 7.1下，对于任意 $F \in \mathcal{F}$ ，$\hat{Q}$ 的诱导累积分布函数绝对连续，因此对任意一组策略，发生平局的概率为 0。对于任意 $F \in \mathcal{F}$，记 $\hat{F}$为 $\hat{Q} = (1-\sigma)Q + \sigma\varepsilon$在 $Q \sim dF$和 $\varepsilon \sim G$相互独立时的诱导累积分布函数，并记f为其密度。

固定对称对手（F,p）$\in \mathbf{F} \times P$，并令 $\hat{F}$表示对手有效质量 $\hat{Q}$的诱导累积分布函数。考虑一个选择（H,r）$\in \mathbf{F} \times P$的偏离者，其抽取$Q \sim dH$，并设定价格r。在实现质量q 和偏好冲击 ε的条件下，当且仅当偏离者获胜

$$(1-\sigma)q + \sigma\varepsilon - r > \max_{2 \le j \le n} \left\{ \hat{Q}_j - p \right\},$$

当且仅当对所有$j \ge 2$，$\hat{Q}_j < (1-\sigma)q + \sigma\varepsilon + p - r$。因此，记$\hat{F}(x) := 0$，其中$x < 0$；记$\hat{F}(x) := 1$ ，其中$x > 1$，则偏离者的中期预期利润为

$$a_{F,p}(q;r) := r \cdot \int_0^1 \left(\hat{F}\left((1-\sigma)q + \sigma e + p - r \right) \right)^{n-1} dG(e).$$

对于每个$r \in P$，记

$$W_{F,p}(r) := \max_{H \in \mathcal{F}} \left\{ \int_X a_{F,p}(q;r)\, dH(q) - C(H) \right\}.$$

注意，$W_{F,\,p}(r)$ 已经纳入价格 r 处的最佳分布偏离，因此对r 进行优化即可排除双重偏离。

命题 7.2. 假定假设 *7.1* 与 *2.2*。设 $(F,p) \in \mathcal{F} \times P$ 为具有内点 p 的对称均衡，[13] 并令 $\hat{}F$ 表示 $\hat{}Q = (1-\sigma)Q + \sigma\varepsilon\hat{}$ 在 F 下的诱导累积分布函数，其密度为 f。则，

1. 存在 $\lambda_g \in \mathbb{R}$ 使得

$$p \int_0^1 \left(\hat{F}((1-\sigma)q + \sigma e)\right)^{n-1} dG(e) - c_F(q) \le \lambda_g \quad \forall\, q \in X, \quad \textit{and}$$

$$p \int_0^1 \left(\hat{F}((1-\sigma)q + \sigma e)\right)^{n-1} dG(e) - c_F(q) = \lambda_g \quad \forall\, q \in \operatorname{supp}(dF); \quad \textit{and}$$

2. 均衡价格 $p = {}^{1}{}_{n\mathbb{E}[\hat{}f(\bar{}Q)]}$，其中 $\bar{}Q := \max\left\{\hat{}Q_2, \ldots, \hat{}Q_n\right\}$。

证明。 (1) 将对手固定在 (F,p)。在价格 p 处，偏离者优化

$$\int_X \left[p \int_0^1 \left(\hat{F}((1-\sigma)q + \sigma e)\right)^{n-1} dG(e) \right] dH(q) - C(H)$$

在 $H \in \mathcal{F}$ 上。F 是最佳响应，因此命题3.7 给出所述条件。

(2) 在假设 7.1 下，平局发生的概率为 0，且 $\hat{}F$ 绝对连续，其密度为 f。由于 g 在 $[0,1]$，上连续，因此有界 $\Rightarrow$，同样

[13] 从某种意义上说，将讨论限定在价格和分布均为确定性选择的均衡上并非无关紧要——这种均衡可能并不存在。然而，就本节的主要任务（阐明大市场极限下边际成本定价的含义）而言，这一限制无伤大雅，只是为了便于阐述。具体来说，我在补充附录中证明，在企业共同对价格和质量分布进行随机化的对称均衡中，类似的结果同样成立。

是 $\hat{f}$。考虑仅改变价格 的偏离，同时将分布固定为F （因此 $\hat{F}$ 也固定），并设定价格$r \in P$。其期望总利润为

$$\iota(r) := \int_X a_{F,p}(q;r)\, dF(q) = \int_X r \cdot \left(\hat{F}(z+p-r)\right)^{n-1} d\hat{F}(z).$$

由于（F,p）是针对对手（F,p）的最佳响应，p在P上使 ι最大化。由于p是内点， $\iota'(p) = 0$。此外，令 $\hat{f}(x) := 0$ 表示$x \notin [0,1]$，我们有

$$\partial_r \left[r \cdot \left(\hat{F}(z+p-r)\right)^{n-1} \right] = \left(\hat{F}(z+p-r)\right)^{n-1} - r(n-1)\left(\hat{F}(z+p-r)\right)^{n-2} \hat{f}(z+p-r),$$

对 $\mathrm{d}\hat{F}$-几乎处处的z成立。有界性使我们可以在积分号下求导，因此$\iota'(r) = \int_X \partial_r \left[r \cdot \left(\hat{F}(z+p-r)\right)^{n-1} \right] d\hat{F}(z)$。在 $r = p$ 处取值，得到

$$0 = \iota'(p) = \int_X \left[\left(\hat{F}(z)\right)^{n-1} - p(n-1)\left(\hat{F}(z)\right)^{n-2} \hat{f}(z) \right] d\hat{F}(z).$$

根据对称性， $\frac{1}{n} = \int_X \left(\hat{F}(z)\right)^{n-1} d\hat{F}(z)$。最后， $\bar{Q}$的密度为 $(n-1)\left(\hat{F}(z)\right)^{n-2}\hat{f}(z)$，因此

$$\mathbb{E}\left[\hat{f}\left(\bar{Q}\right)\right] = \int_0^1 \hat{f}(z)(n-1)\left(\hat{F}(z)\right)^{n-2} \hat{f}(z)\, dz = (n-1)\int_0^1 \left(\hat{F}(z)\right)^{n-2} \hat{f}(z)^2\, dz,$$

从而得到 $p = 1/\left(n\mathbb{E}\left[\hat{f}\left(\bar{Q}\right)\right]\right)$。 ■

这一结果的一个显著推论是，均衡边际成本差距由均衡价格确定，并按均衡质量支撑集两端点之间的获胜概率差距进行缩放：

推论 *7.3*。假设假设 *7.1* 和 *2.2*。设 *(F, p)* 是一个满足 $p > 0$ 的对称均衡，并令 $\hat{F}$ 表示在 F 下 $\hat{Q} = (1-\sigma)Q + \sigma\varepsilon$ 的诱导累积分布函数。定义支撑集端点 $\underline{q} := \inf supp(dF)$ 和 $\bar{q} := \sup supp(dF)$。对每个 $q \in X$，定义

$$\omega(q) := \int_0^1 \left(\hat{F}((1-\sigma)q + \sigma e)\right)^{n-1} dG(e).$$

然后，$c_F(\bar{q}) - c_F\left(\underline{q}\right) = p \cdot \left(\omega(\bar{q}) - \omega(\underline{q})\right)$；并且值得注意的是，$0 \le c_F(\bar{q}) - c_F\left(\underline{q}\right) \le p$。

证明。 根据命题 7.2(1)，对于每个 $q \in \text{supp}(dF)$，

$$p\,\omega(q) - c_F(q) = \lambda_g.$$

由于 q，$\bar{q} \in \text{supp}(dF)$，将 q 处的等式减去 $\bar{q}$ 处的等式可得

$$c_F(\bar{q}) - c_F\left(\underline{q}\right) = p \cdot \left(\omega(\bar{q}) - \omega(\underline{q})\right).$$

最后，$\hat{F}(\cdot) \in [0,1] \Longrightarrow 0 \leq \omega(\bar{q}) - \omega(q) \leq 1 \Longrightarrow 0 \leq c_F(\bar{q}) - c_F(q) \leq p$。 ■

这一简单的洞见使我们能够推导出“完全竞争”（许多企业）极限下竞争性定价的一个必要条件。

推论 7.4。 对于每个 $n \geq 2$，令 (F_n, p_n) 为 n 家企业博弈中的对称均衡，并定义 $\underline{q}_n := \inf \text{supp}(dF_n)$ 和 $\bar{q}_n := \sup \text{supp}(dF_n)$。则，

1. 如果 $p_n \to 0 \; as \; n \to \infty$，那么 $c_{F_n}(\bar{q}_n) - c_{F_n}\left(\underline{q}_n\right) \to 0$。
2. *More* 以上，若存在 $\kappa > 0$ 使得对于所有 $F \in \mathcal{F}$ 以及所有 $0 \leq x < y \leq 1$，$c_F(y) - c_F(x) \geq \kappa(y - x)$, *then* $p_n \to 0$ *implies* $\bar{q}_n - \underline{q}_n \to 0$.

证明。 对每个 n，推论 7.3表明

$$c_{F_n}(\bar{q}_n) - c_{F_n}\left(\underline{q}_n\right) = p_n \cdot \left(\omega_n(\bar{q}_n) - \omega_n(\underline{q}_n)\right) \leq p_n,$$

因为 $\omega_n(\cdot) \in [0,1]$。因此 $p_n \to 0 \Longrightarrow c_{F_n}(\bar{q}_n) - c_{F_n}\left(\underline{q}_n\right) \to 0$，由此证明第一个结论。对于第二个结论，在所述的一致陡峭性下，$c_{F_n}(\bar{q}_n) - c_{F_n}\left(\underline{q}_n\right) \geq \kappa\left(\bar{q}_n - \underline{q}_n\right)$，因此 $c_{F_n}(\bar{q}_n) - c_{F_n}\left(\underline{q}_n\right) \to 0 \Longrightarrow \bar{q}_n - \underline{q}_n \to 0$。结合第一个结论即可得到所述结果。 ■

Hwang 等人 (2023年) 也在 Perloff 和 Salop (1985) 的环境中将企业的估值分布内生化。不过，与我的分析不同，他们研究的是分布选择对应于 广告；即信息提供的情形。他们关于大市场的结论是，当企业数量众多时，除非某家企业表现得格外出色，否则很难赢得顾客。这样的竞争压力

促使企业更多地进行揭示：当n足够大时，完全揭示（完全信息）结果是其广告博弈的一个均衡；而在若干扩展中，随着$n \to \infty$，均衡广告会无限接近完全揭示。

我的练习具有相同的总体结构——企业选择价格，以及影响其被选中可能性的第二个边际；但第二个边际是以成本生成的产品质量，而非信息。因此，大市场未必会迫使价格降至边际成本。相反，只有当生产接近均衡质量范围顶端之结果的边际成本变得无限接近底端附近的边际成本时，加价才会消失。若这一成本差距不消失，即使企业众多，正的加价仍会持续存在。

参考文献

B.C. Albrecht. 政治说服. 油印稿，2017年9月。

Erwin Amann与Wolfgang Leininger. 不完全信息下的非对称全支付拍卖：两参与者情形. 《博弈与经济行为》，14(1)：1–18，1996年5月。

Pak Hung Au与Keiichi Kawai. 多个发送者的竞争性信息披露. 《博弈与经济行为》，119：56 – 78，2020。

Pak Hung Au 和 Mark Whitmeyer。吸引与说服：搜索市场中的信息提供。《政治经济学杂志》，131(1):202–245，2023年。

Yasar Barut 和 Dan Kovenock。完全信息下的对称多奖品全支付拍卖。《欧洲政治经济学杂志》，14(4)：627–644，1998年11月。

Suleyman Basak 和 Dmitry Makarov。投资组合经理之间的竞争与资产专业化。《Mimeo》，2015年。

Michael R. Baye、Dan Kovenock 和 Casper G. de Vries。完全信息下的全支付拍卖。《经济理论》，8(2)：291–305，1996年。

Sudipto Bhattacharya 和 Dilip Mookherjee。研发中的投资组合选择。《兰德经济学杂志》，第594–605页，1986年。

Raphael Boleslavsky 和 Christopher Cotton。评分标准与教育质量。《美国经济学会微观经济学期刊》，7(2)：248–279，2015年。

Raphael Boleslavsky 和 Christopher Cotton。项目遴选中的容量限制：通过证据生产展开竞争。《经济理论》，65(2)：385–421，2018年。

Henrique Castro-Pires、Deniz Kattwinkel 和 Jan Knoepfle。谁，以及如何？逆向选择与灵活道德风险。未发表论文，2025年。

Yeon-Koo Che 和 Ian Gale。差异形式竞赛与全支付拍卖的稳健性。《博弈与经济行为》，30(1)：22–43，2000年。

Partha Dasgupta 和 Joseph Stiglitz。不确定性、产业结构与研发速度。《贝尔经济学杂志》，第 1–28 页，1980年。

Dawei Fang 和 Thomas H. Noe。扭转胜算：为基于排名的奖励承担风险。未发表稿，2016年。

Dawei Fang 和 Thomas H Noe。竞争越少，精英主义越强？《劳动经济学杂志》，40(3)：669–701，2022年。

Dawei Fang、Thomas H. Noe 和 Philipp Strack。升温：竞赛中竞争的抑制效应。《政治经济学杂志》，128(5)：1940–1975，2020年。

Han Feng 和 David Hobson。扩散过程建模的竞赛赌博。《经济与金融决策》，38(1)：21–37，2015年。Han Feng 和 David Hobson。随机初始分布下的竞赛赌博。《应用概率年刊》，26(1)：186–215，2016年。Han Feng 和 David Hobson。带有后悔的竞赛赌博。《数理金融》，26(3)：674–695，2016年。

George Georgiadis、Doron Ravid 和 Balázs Szentes。《灵活道德风险问题》。《计量经济学》，92(2):387–409，2024年。

Scott M Gilpatric。竞赛中的风险承担与胡萝卜加大棒的作用。《Eco- nomic Inquiry》，47(2):266–277，2009年。

Anand M Goel 和 Anjan V Thakor。过度自信、首席执行官选拔与公司治理。《金融学杂志》，63(6):2737–2784，2008年。

Arye L. Hillman 和 John G. Riley。政治上可争夺的租金与转移支付。《经济学与政治》，1(1):17–39，1989年3月。

Arye L. Hillman 和 Dov Samet。少数竞争者对可争夺租金的消耗。《公共选择》，54(1):63–82，1987年1月。

Ed Hopkins。不平等与风险承担行为。《博弈与经济行为》，107:316–328，2018年。

Hans K Hvide。《锦标赛奖励与风险承担》。《劳动经济学杂志》，20(4):877–898，2002年。

Hans K Hvide 和 Eirik G Kristiansen。《选拔竞赛中的风险承担》。《博弈与经济行为》，42(1):172–179，2003年。

Ilwoo Hwang、Kyungmin Kim 和 Raphael Boleslavsky。竞争性广告与定价。未发表手稿，2023年1月。

Kyungmin Kim 和 Youngwoo Koh。具有灵活信息获取的拍卖。《博弈与经济行为》，133：256–281，2022年。

Kyungmin Kim、R. Vijay Krishna 和 Dmitry Ryvkin。选择自己的运气：竞赛中的策略性风险承担与努力。未发表稿，2023年9月。

Tor Klette 和 David De Meza。市场是否对风险型研发存在偏见？《兰德经济学杂志》，第133–139页，1986年。

Daniel Krähmer。灵活的不可观察投资中的敲竹杠问题。未发表稿，62024年。

Daniel Krähmer。灵活投资下的最优垄断监管。未发表稿，4 2025a。

Daniel Krähmer。灵活道德风险与有限责任下的证券设计。未发表稿，7 2025b。

Daniel Lacker 和 Thaleia Zariphopoulou。相对绩效标准下最优投资的均值场与 n 人博弈。《数理金融》，29 (4):1003–1038，2019年。

Marcel Nutz 和 Yuchong Zhang。《风险承担竞赛中的奖励设计》。《金融数学学会期刊》，13(1):129–146，2022。

Jeffrey M Perloff 和 Steven C Salop。《产品差异化下的均衡》。《经济研究评论》，52(1):107–120，1985。

Doron Ravid、Anne-Katrin Roesler 和 Balázs Szentes。《交易前学习：忽视免费信息的低效率》。《政治经济学杂志》，130 (2):346–387，2022。

Philip J Reny。《不连续博弈中纯策略和混合策略纳什均衡的存在性》。《计量经济学》，67(5):1029–1056，1999年。

Arthur J Robson。《地位、财富分配以及私人和社会风险态度》。《计量经济学》，第837–857页，1992年。

Christian Seel 和 Philipp Strack。竞赛中的赌博。《经济理论杂志》，148(5):2033–2048，2013年。

Ran Spiegler。对理性预期有限的代理人的竞争。《理论经济学》，1(2):207–231，2006年。

Philipp Strack。竞赛中的风险承担：基金经理薪酬对投资者福利的影响。未发表论文，2016年。

Liad Wagman 和 Vincent Conitzer。选择公平彩票以击败竞争对手。《国际博弈论杂志》，41(1):91–129，2012年。

Mark Whitmeyer。投资经理的相对绩效关注。《金融年鉴》，15(2):205–231，2019年。

Mark Whitmeyer。风险承担竞赛中的参赛成本。《博弈与经济行为》，142:101–112，2023年。

A 存在性与结构性证明

A.1 命题3.1证明，均衡存在性

我们通过一系列引理证明命题3.1 的成立，这些引理验证了 Reny (1999，定理 4.1) 的条件均得到满足，从而保证对称纯策略纳什均衡的存在。对于 $F \in \mathcal{F}$，定义对角收益效用$(F) := u_1(F,\ldots,F)$。

引理 A.1. 在假设 *2.1* 和 *2.2*下，$v\colon \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ 是连续的。

引理 *A.1*的证明。 根据对称性，$\mathbb{E}[\pi_i]$ 对所有 i都相同。对 i求和并利用假设 2.1(P5)可得

$$v(F) = \frac{1}{n}\mathbb{E}\left[\Pi(X_1,\dots,X_n)\right] - C(F) = \frac{1}{n}\int_{X^n} \Pi(x)\, d(dF)^{\otimes n}(x) - C(F).$$

被积函数 Π在紧致集X^n上有界且连续。映射$F \mapsto (dF)^{\otimes n}$ 关于弱收敛是连续的，并且C 根据假设是连续的2.2(C1)。■

下一个引理证明对角拟凹性。

引理 A.2。在假设*2.2*下，对于任意$m \geq 2$、任意$F^1,\dots,F^m \in \mathcal{F}$以及任意$F \in \mathrm{co}\{F^1,\dots,F^m\}$，$v(F) \geq \min_{1\leq k\leq m} u_1(F^k,F,\dots,F)$。

引理*A.2*的证明。固定 $F \in \mathrm{F}$。映射 $H \mapsto u_1(H,F,\dots,F)$ 关于 H是凹的：期望奖品项关于 dH是仿射的，而 $-C(H)$ 是凹的，因为 C是凸的。如果 $F = \sum_{k=1}^m \lambda_k F^k$ 满足 $\lambda_k \geq 0$ 且 $\sum_k \lambda_k = 1$，那么凹性推出

$$v(F) = u_1(F,F,\dots,F) \geq \sum_{k=1}^m \lambda_k u_1(F^k,F,\dots,F) \geq \min_{1\leq k\leq m} u_1(F^k,F,\dots,F).$$

■

我们通过一个无原子平滑装置来验证对角更优回应安全性，该装置由若干引理逐步构建。

引理 A.3. 设 $\hat{H} \in \mathcal{F}$ 满足：对每个 $x \in X$，$d\hat{H}(\{x\}) = 0$ 。那么映射 $F \mapsto u_1(\hat{H}, F, \dots, F)$ 在 $\mathcal{F}$上连续。

引理的证明 *A.3*. 令 $F_m \to F$。那么 $(dF_m \otimes \lambda)^{\otimes(n-1)} \to (dF \otimes \lambda)^{\otimes(n-1)}$，因此

$$(d\hat{H} \otimes \lambda) \otimes (dF_m \otimes \lambda)^{\otimes(n-1)} \to (d\hat{H} \otimes \lambda) \otimes (dF \otimes \lambda)^{\otimes(n-1)}.$$

考虑有界函数 π_1 定义在 $(X \times [0,1])^n$上。根据假设 2.1(P3)，

$$\mathrm{Disc}(\pi_1) \subseteq \bigcup_{j=2}^{n} \left\{(x,u) : x_1 = x_j\right\}.$$

Und在极限乘积测度 $(d\hat{}H \otimes \lambda) \otimes (dF \otimes \lambda)^{\otimes(n-1)}$ 下，对每个 $j \geq 2$ ，

$$\mathbb{P}(x_1 = x_j) = \int_X d\hat{H}(\{x\})\, dF(x) = 0,$$

因为 $d\hat{}H$ 在 X 上是无原子的。因此，极限测度对 $\mathrm{Disc}(\pi_1)$ 赋予零质量。

根据扩展端口曼托定理：若 $M_m \to M$ 弱收敛且 f 有界，并满足 $M(\mathrm{Disc}(f)) = 0$，则 $\int f dM_m \to \int f\, dM$。将其应用于 $f = \pi_1$，可得期望奖品项的收敛。由于 $C(\hat{}H)$ 不依赖于 F，连续性随之成立。■

接下来我们论证，位于 1 处的质量被严格占优。

引理 *A.4*。假定假设 *2.1* 和 *2.2*。固定对手 $(F_2, \ldots, F_n) \in F^{n-1}$ 以及~策略 $H \in F$。令 $\alpha := dH(\{1\})$，并通过将该质量移至 *0* 来定义 $H \in F$：$\widetilde{dH} := dH + \alpha(\delta_0 - \delta_1)$。则，

$$u_1(\widetilde{H}, F_2, \ldots, F_n) \geq u_1(H, F_2, \ldots, F_n) + \eta_1 \alpha.$$

特别地，每个最佳响应都可以选择为 $dH(\{1\}) = 0$。

引理*A.4*的证明。根据假设 2.1(P1)，$0 \leq \pi_1 \leq \bar{\pi}$，因此，将概率 α 从 1 降至 0，预期奖品项最多可减少 $\bar{\pi}\alpha$。

~对于成本，令 $H_s := (1-s)H + sH$，其中 $s \in [0,1]$ 且 $\varphi(s) := C(H_s)$。由于 C 具有凸性，φ 在 $[0,1]$ 上是凸的。由盖托可微性，

$$\varphi'(s) = \delta C(H_s; \widetilde{H} - H) = \int_X c_{H_s}(x) d(\widetilde{H} - H)(x) = \alpha\left(c_{H_s}(0) - c_{H_s}(1)\right).$$

根据假设 2.2(C3)，$c^{H_s}(0) - c^{H_s}(1) \leq -(\bar{\pi} + \eta_1)$ 对所有 s成立，因此，$\varphi'(s) \leq -\alpha(\bar{\pi} + \eta_1)$。对 $s \in [0,1]$ 积分可得

$$C(\widetilde{H}) - C(H) = \varphi(1) - \varphi(0) \leq -\alpha(\bar{\pi} + \eta_1).$$

因此，净收益增益至少为 $-\bar{\pi}\alpha + \alpha(\bar{\pi} + \eta_1) = \eta_1 \alpha$。 ■

现在我们来平滑有利可图的偏离。

引理 A.5。 设假设 *2.1* 和 *2.2*成立。设 $F \in \mathcal{F}$。如果存在 $H^0 \in \mathcal{F}$ 且$\eta > 0$ 使得

$$u_1(H^0, F, \ldots, F) \geq v(F) + \eta,$$

那么存在$\hat{H} \in \mathcal{F}$，使得 $d\hat{H}(\{x\}) = 0$ 对每个满足以下条件的 $x \in X$ 都成立：

$$u_1(\hat{H}, F, \ldots, F) \geq v(F) + \frac{\eta}{2}.$$

引理的证明 *A.5*。 首先，我们移除 1 处的任何质量。令 $\alpha := dH^0(\{1\})$，并令 $\widetilde{H}^0$由H^0通过将 α移至 0 得到，如引理A.4所示。我们有 $u_1(\widetilde{H}0, F, \ldots, F) \geq u_1(H0, F, \ldots, F) \geq v(F) + \eta$。特别地，$d\widetilde{H}^0(\{1\}) = 0$。

接下来令$X_1 \sim d\widetilde{H}^0$。对于 $\delta > 0$，定义平滑后的$\hat{X}_1^\delta$如下：若$X_1 = 1$，则令$\hat{X}_1^\delta = 1$；若$X_1 = x < 1$，则抽取一个独立的$V \sim$均匀分布$[0,1]$，并令

$$\hat{X}_1^\delta := x + V \min\{\delta, 1 - x\}.$$

设$\hat{H}^\delta$为由$\hat{X}_1^\delta$诱导的累积分布函数。那么，对于每个$x \in X</style>\}$，$d\hat{H}^\delta(\{x\}) = 0$，且$\hat{H}^\delta \to \widetilde{H}^0$弱收敛于 $\delta \downarrow 0$。

将对手固定为 F。给定对手的实现值，提高 x_1 根据假设 的奖品收益2.1(P4)。由于$\hat{X}_1^\delta \geq X_1$ 几乎必然成立，因此在$\hat{H}^\delta$下对阵 F时，期望奖品项至少与在 $\widetilde{H}^0$下相同。

根据假设 2.2(C1) 以及$\hat{H}^\delta \to \widetilde{H}^0$,，我们有 $C(\hat{H}^\delta) \to C(\widetilde{H}^0)$。选取 δ使得 $\left|C(\hat{H}^\delta) - C(\widetilde{H}^0)\right| \leq \eta/2$。于是

$$u_1(\hat{H}^\delta, F, \ldots, F) \geq u_1(\widetilde{H}^0, F, \ldots, F) - \frac{\eta}{2} \geq v(F) + \frac{\eta}{2}.$$

设$\hat{H} := \hat{H}^\delta$。 ■

接下来，我们证明 Reny (1999）的对角更优回应安全性。

Le引理 A.6。 在假设 *2.2*下，该博弈是对角更优回应安全的。

引理的证明 *A.6*。 设 $F \in \mathcal{F}$满足 $(F,...,F)$ 不是对称均衡。则存在 $H^0 \in \mathcal{F}$以及 $\eta > 0$使得 $u_1(H^0, F, \ldots, F) \geq v(F) + \eta$。由引理

A.5，可知存在一个在 X 上无原子的 ˆH，使得 u1(ˆH , F, . . . , F) ≥v(F) + η/2。由引理 A.3，映射 G ↦→u1(ˆH, G, . . . , G) 在 F 处连续，因此存在 F 的一个邻域 U，使得对所有 G ∈U，都有 u1(ˆH, G, . . . , G) >v(F)。因此，参与者可以在 F 处沿对角线确保获得严格高于 v(F) 的收益。■

命题 3.1 的证明。该博弈具有对称性，且策略空间为紧致度量策略空间$\mathcal{F}$。由引理 A.2 可知它是对角拟凹的；由引理A.6可知它是对角更优回应安全的。 Reny(1999，定理 4.1）蕴含对称均衡的存在。 ■

A.2 引理3.2、 3.4和3.5 的证明

在本附录中，我们汇集引理 3.2、3.4 和 3.5的证明。

引理3.2 的证明。若 $dF(\{1\}) > 0$，则应用引理 A.4 ，令 $H = F$ 且所有对手都等于 F ，将得到一个有利可图的偏离，这与均衡相矛盾。 ■

引理 3.4 的证明。假设为了导出矛盾，$dF(\{x_0\}) = \alpha > 0$ 对某个 $x_0 \in (0,1)$。令 $a := F(x_0^-) \in [0,1)$ ，于是 $F(x_0) = a + \alpha$。

固定 $\delta \in (0, \delta(x_0)]$。令 ν_δ为 $(x_0, x_0 + \delta]$ 上的均匀概率测度，并定义偏离 $H_{\varepsilon,\delta} \in$ F，使得 $dH_{\varepsilon,\delta} := dF + \varepsilon\left(\nu_\delta - \delta_{x_0}\right)$，该偏离从 x_0 处的原子中移除 ε 份额，并将其连续地重新分布到 $(x_0, x_0 + \delta]$ 上。

首先，我们注意到，期望奖金收益（未扣除成本）是一阶正的。考虑事件 $E := \left\{\max_{2\le j\le n} X_j = x_0\right\}$。由于 $dF(\{x_0\}) = \alpha > 0$，我们有

$$\mathbb{P}(E) = F(x_0)^{n-1} - F(x_0^-)^{n-1} = (a+\alpha)^{n-1} - a^{n-1} > 0.$$

在 E上，如果参与者 1 的实现值 x_0，与至少一名对手并列最高值x_0 。根据假设 3.3，将其实现值移至任意 $x_0 + \varepsilon' \in (x_0, x_0 + \delta]$，其期望奖金（对 u_1 取平均）至少增加 $\Delta(x_0)$。根据假设 2.1(P4)，提高参与者 1 的实现值，绝不会在任何实现情况下减少其奖品。

The因此，转移质量为 ε 的切片所带来的期望奖金收益至少为 st

$$\varepsilon \cdot \Delta(x_0) \cdot \mathbb{P}(E) > 0.$$

其次，我们论证成本变化可以（相对）较小。固定$\delta > 0$。定义$G_\delta \in \mathrm{F}$，使$dG_\delta := dF + \alpha(\nu_\delta - \delta_{x_0})$，从而$H_{\varepsilon,\delta} = (1-s)F + sG_\delta$，其中$s = \varepsilon/\alpha$。由$G_\delta - F$方向上在$F$处的盖托可微性，

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{C(H_{\varepsilon,\delta}) - C(F)}{\varepsilon} = \int_X c_F(x) d(\nu_\delta - \delta_{x_0})(x) = \frac{1}{\delta} \int_{x_0}^{x_0+\delta} c_F(x)dx - c_F(x_0).$$

因此，对于任意 $\kappa > 0$，存在 $\varepsilon > 0$，使得对所有 $0 < \varepsilon < \bar{\varepsilon}$,

$$\left| C(H_{\varepsilon,\delta}) - C(F) - \varepsilon \left(\frac{1}{\delta} \int_{x_0}^{x_0+\delta} c_F(x)dx - c_F(x_0) \right) \right| \le \varepsilon\kappa.$$

由于c_F 是连续的，选择足够小的 $\delta > 0$，使得

$$\left| \frac{1}{\delta} \int_{x_0}^{x_0+\delta} c_F(x)dx - c_F(x_0) \right| \le \Delta(x_0)\mathbb{P}(E)/4.$$

然后令 $\kappa := \Delta(x_0)\mathrm{P}(E)/4$，并选择 $\varepsilon \in (0, \min\{\alpha, \bar{\varepsilon}\})$。对于这些选择，成本增加至多为 $\varepsilon\Delta(x_0)\mathrm{P}(E)/2$。

因此，净增加至少为 $\varepsilon\Delta(x_0)\mathrm{P}(E) - \varepsilon\Delta(x_0)\mathrm{P}(E)/2 > 0$，这是一个严格有利可图的偏离，矛盾。 ■

引理的证明 3.5。 设 $x_m \to x_0$。设 $\mu := dF \otimes \lambda$ 定义在 $X \times [0,1]$上。令 $z = ((x_2,u_2),\ldots,(x_n,u_n)) \in (X \times [0,1])^{n-1}$，定义

$$g_m(z) := \int_0^1 \pi_1((x_m,u_1),z)\,du_1, \quad \text{and} \quad g(z) := \int_0^1 \pi_1((x_0,u_1),z)\,du_1.$$

因此，$a_F(x_m) = \int g_m(z) d\mu^{\otimes(n-1)}(z)$ 以及 $a_F(x_0) = \int g(z) d\mu^{\otimes(n-1)}(z)$。由有界性可知，$|g_m(z)| \le \bar{\pi}$ 对所有 m 和 z均成立。

Let

$$E := \left\{ z\colon\ x_j \neq x_0 \text{ for all } j \in \{2,\ldots,n\} \right\}.$$

由于 $dF(\{x_0\}) = 0$，我们有 $\mu(\{x_0\} \times [0,1]) = 0$，因此 $\mu^{\otimes(n-1)}(E) = 1$。

固定 $z \in E$。那么对于每个 $u_1 \in [0,1]$，点 $((x_0,u_1),z)$ 满足 $x_0 \neq x^j$ 对所有 $j \geq 2$，因此 π_1 根据假设 2.1(P3)，在此处连续。因此，

$$\pi_1((x_m,u_1),z) \to \pi_1((x_0,u_1),z) \quad \text{for each } u_1 \in [0,1].$$

在 u_1 下应用控制收敛定理，可得 $g_m(z) \to g(z)$ 对所有 $z \in E$ 均成立。在 $\mu^{\otimes(n-1)}$ 下再次应用控制收敛定理，可得 $a_F(x_m) \to a_F(x_0)$。 ■

B 一阶方法证明

B.1 辅助引理

引理 B.1。 设 $F \in \mathcal{F}$ 且 $0 \leq a < b \leq 1$。若 $\operatorname{supp}(dF) \cap (a,b] = \varnothing$，则 $dF((a,b]) = 0$，即 F 在 $[a,b]$ 上为常数。

证明。 固定 $k \geq 1$。集合 $[a+1/k, b]$ 是紧致的，且包含于 $(a,b]$，中，因此与 $\operatorname{supp}(dF)$ 不相交。于是 $dF([a+1/k,b]) = 0$。由于 $(a,b] \subseteq (a,a+1/k] \cup [a+1/k,b]$，

$$0 \leq dF((a,b]) \leq dF((a,a+1/k]) = F(a+1/k) - F(a).$$

令 $k \to \infty$，并利用右连续性可得 $dF((a,b]) = 0$。 ■

固定一个有界 Borel 函数 $a\colon X \to \mathrm{R}$。定义

$$J_a(F) := \int_X a(t)\,dF(t) - C(F), \quad \forall\, F \in \mathcal{F}.$$

引理 B.2. 设假设 *2.2(C1)* 和 *(C2)* 成立。若 $F^\star$ 使 J_a 在 $\mathcal{F}$ 上达到最大值，则对每个 $G \in \mathcal{F}$，

$$\int_X (a(t) - c_{F^\star}(t))\, d\left(G - F^\star\right)(t) \leq 0.$$

证明。固定 $\mathrm{G} \in \mathrm{F}$，并令 $\mathrm{F}_\epsilon := (1-\epsilon)\mathrm{F}^\star + \epsilon \mathrm{G}$。映射 $\epsilon \mapsto \int a\mathrm{dF}_\epsilon$ 是仿射的；由 C 的凸性可知，$\epsilon \mapsto -\mathrm{C}(\mathrm{F}_\epsilon)$ 是凹函数。因此，$\epsilon \mapsto \mathrm{J}_a(\mathrm{F}_\epsilon)$ 是凹函数，且在 $\epsilon = 0$ 处取最大值，所以在 0 处的右导数非正。假设 2.2(C2) 给出了 Stieltjes 形式的导数，从而得到所述不等式。■

引理 B.3。 假设 *2.2(C1)* 和 *(C2)*。若 $F^\star$ 使 J_a 在 $\mathcal{F}$ 上达到最大值，则存在 $\lambda \in \mathbb{R}$ 使得，记 $h(t) := a(t) - c_{F^\star}(t)$，

$$h(t) \le \lambda \quad \forall t \in X, \quad and \quad \int_X (\lambda - h(t))\, dF^\star(t) = 0.$$

引理 *B.3* 的证明。 任取 $t \in X$，令 $G_t \in \mathcal{F}$ 在 t 处退化（即 $dG_t = \delta_t$）。由引理 B.2，

$$h(t) - \int_X h(u) dF^\star(u) = \int_X h(u) d(G_t - F^\star)(u) \le 0.$$

令 $\lambda := \int_X h(u) dF^\star(u)$。则 $h \le \lambda$，且 $\int (\lambda - h) dF^\star = 0$ 按定义成立。 ■

引理 B.4。 设 $F \in \mathcal{F}$，设 $h: X \to \mathbb{R}$ 为博雷尔函数，并设 $\lambda \in \mathbb{R}$ 满足 $h \le \lambda$ 且 $\int (\lambda - h) dF = 0$。则：

(i) 若 $dF(\{t_0\}) > 0$，则 $h(t_0) = \lambda$；且

(ii) 若 $t_0 \in \mathrm{supp}(dF)$ 且 h 在 t_0，处连续，则 $h(t_0) = \lambda$。

证明。((i)) 如果 $h(t_0) < \lambda$ 且 $dF(\{t_0\}) > 0$，则 $\int (\lambda - h)\, dF \ge (\lambda - h(t_0)) dF(\{t_0\}) > 0$，矛盾。

((ii)) 如果 $h(t_0) < \lambda$ 且 h 在 t_0，处连续，则存在 ϵ、$\delta > 0$，使得 $h \le \lambda - \epsilon$ 在 $U := (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \cap X$ 上。由于 $t_0 \in \mathrm{supp}(dF)$，$dF(U) > 0$，因此，$\int (\lambda - h) dF \ge \epsilon\, dF(U) > 0$，矛盾。 ■

定义规划者奖金泛函

$$\widetilde{B}(F) := \frac{1}{n} \int_{X^n} \Pi(x)\, d(dF)^{\otimes n}(x), \qquad \forall\, F \in \mathcal{F}. \tag{B1}$$

回顾一下，对于 $F \in$F 和 $x \in$X</style}，

$$A_F(x) := \int_{X^{n-1}} \Pi(x, x_2, \ldots, x_n)\, d(dF)^{\otimes(n-1)}(x_2, \ldots, x_n). \tag{B2}$$

~现在我们计算B的方向导数：

引理 B.5. 对于任意 $F, G \in$ F，

$$\delta\widetilde{B}(F; G - F) = \int_X A_F(x)\, d(G - F)(x).$$

证明。 固定 $F, G \in \mathrm{F}$，并令 $\nu := d(G - F)$ 为 X 上的有限符号测度。对于 $\varepsilon \in [0,1]$，记 $F_\varepsilon := (1-\varepsilon)F + \varepsilon G$，因此 $dF_\varepsilon = dF + \varepsilon\nu$。

根据乘积测度的多重线性，

$$(dF_\varepsilon)^{\otimes n} = (dF + \varepsilon\nu)^{\otimes n} = (dF)^{\otimes n} + \varepsilon \sum_{i=1}^{n} (dF)^{\otimes(i-1)} \otimes \nu \otimes (dF)^{\otimes(n-i)} + O(\varepsilon^2),$$

其中，$O(\varepsilon^2)$表示一个符号测度，其全变差为$O(\varepsilon^2)$，当 $\varepsilon \downarrow 0$时。由于Π 有界，将两边除以 ε 并令 $\varepsilon \downarrow 0$，可得

$$\delta\widetilde{B}(F; G - F) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \int_{X^n} \Pi(x)\, d\left((dF)^{\otimes(i-1)} \otimes \nu \otimes (dF)^{\otimes(n-i)} \right)(x).$$

根据 Π的对称性，求和中的每一项都相等，因此 $1/n$ 与求和相消，从而

$$\delta\widetilde{B}(F; G-F) = \int_X \left(\int_{X^{n-1}} \Pi(x, x_2, \ldots, x_n)\, d(dF)^{\otimes(n-1)}(x_2, \ldots, x_n) \right) \nu(dx) = \int_X A_F(x)\, d(G-F)(x),$$

as claimed. ■

B.2 命题3.7的证明

命题 3.7的证明。将竞争对手固定为 F。根据 a_F的定义，对于任意偏离 $H \in \mathcal{F}$，

$$u_1(H, F, \ldots, F) = \int_X a_F(x)\, dH(x) - C(H).$$

由于 F 是对 (F, . . . , F) 的最佳响应，它在 H ∈F 上最大化 $J_{a_F}(H) := \int_X a_F(x)\, dH(x) - C(H)$。因此，根据引理 B.3，存在 $\lambda_g \in \mathrm{R}$，使得记 $h(x) := a_F(x) - c_F(x)$，

$$h(x) \le \lambda_g \ \ \forall x \in X, \qquad \int_X \left(\lambda_g - h(x) \right) dF(x) = 0.$$

剩下只需证明在 supp(dF) 上等式成立。取 $x_0 \in \mathrm{supp}(dF)$。若 $dF(\{x_0\}) > 0$，则由引理 B.4(i) 可得等式成立。若 $dF(\{x_0\}) = 0$，则引理 3.5 表明 $a_F(\cdot)$ 在 x_0，处连续，而根据假设 2.2(C2)，$c_F(\cdot)$ 连续，因此 $h(\cdot)$ 在 x_0 处连续。由于 $x_0 \in \mathrm{supp}(dF)$，引理 B.4(ii) 推出 $h(x_0) = \lambda_g$。 ■

B.3 命题3.8的证明

命题的证明3.8。根据引理B.5，规划者奖金泛函的方向导数

$$\widetilde{B}(F) := \frac{1}{n}\int_{X^n} \Pi(x)\, d(dF)^{\otimes n}(x)$$

满足

$$\delta\widetilde{B}(G; F-G) = \int_X A_G(x)\, d(F-G)(x) \qquad \forall F \in \mathcal{F}.$$

~由于G最大化$v(F) = B(F) - C(F)$，我们的变分不等式为

$$\int_X (A_G(x) - c_G(x))\, d(F-G)(x) \le 0 \qquad \forall F \in \mathcal{F}.$$

将引理 B.3 应用于有界 Borel 函数 $A_G(x)$，得到 λ_p，其中 $A_G - c_G \le \lambda_p$，且互补条件为 $\int_X \big(\lambda_p - (A_G - c_G)\big) dG = 0$。由于 Π 在紧致集 X^n上连续，根据控制收敛定理，$A_G(x)$ 在 X 上连续。因此，$A_G(\cdot) - c_G(\cdot)$ 连续，而引理 B.4(ii) 蕴含其在 supp(dG) 上取等号。■

C 排序竞赛证明

这里我们证明引理 4.2、定理4.3和命题 4.5。

引理的证明4.2。 我们证明 **v** 的结果，因为**w** 的结果可用类似方法推出。

由于 $v_1 > v_2$，在任何发生争夺最高排名平局的事件中，打破平局都会带来离散收益。因此，假设3.3 成立，所以任何对称均衡在 (0,1) 上都无原子。此外，引理 3.2 意味着 $dF(\{1\}) = 0$。

现在我们证明 $dF(\{0\}) = 0$。反设 $dF(\{0\}) = \alpha > 0$。考虑这样一种偏离：移除该原子的一个 ε 切片，并将其均匀地重新分布到 $(0, \delta]$ 上，其中 $\varepsilon \in (0, \alpha)$ 且 $\delta > 0$ 很小。当所有竞争对手都抽到 0 时（该事件的概率为 $\alpha^{n-1} > 0$），偏离者便从在 0 平局转为成为唯一获胜者。在均匀的平局决胜规则下，完全平局时偏离者的期望奖品为 $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} v_k = \frac{1}{n}$，而作为唯一获胜者时，其

为 v_1。由于 $v_n = 0$ 且 $\sum_k v_k = 1$，我们有 $v_1 > {}^1\!/_n$，因此预期奖品收益至少为 $\varepsilon\alpha^{n-1}\left(v_1 - {}^1\!/_n\right) > 0$。

当然，成本也会发生变化，因此我们利用$c_F(x)$关于x的盖托可微性和连续性：每单位转移质量的一阶成本增加，等于$c_F(x)$在$(0,\delta]$上的平均值与$c_F(0)$之差；通过选择足够小的 δ，可使该差任意小。因此，当 δ 足够小、随后再令 ε 足够小时，这种偏离有利可图，这与均衡矛盾。由此可知，$dF(\{0\}) = 0$。

接下来，我们证明 $0 \in \operatorname{supp}(dF)$。令$\underline{x} := \inf \operatorname{supp}(dF)$。若$\underline{x} > 0$，则由无原子性可知$dF(\{\underline{x}\}) = 0$，因此选择$x = \underline{x}$ 时，几乎必然获得n 排名，因而得到奖品 $v_n = 0$，与选择$x = 0$所得相同。但 γ 严格递增，且 $\beta(0) = 0$，所以

$$c_F(0) = \gamma(0) + \beta(0) = 0 < \gamma(\underline{x}) + \beta(0) = c_F(\underline{x}),$$

并且，因此，$x = 0$ 净收益严格提高，这与假设矛盾。因此，$\underline{x} = 0$ 和$0 \in \operatorname{supp}(dF)$。

接下来，设 F 是一个对称均衡。根据命题 3.7，存在 λ_F 使得

$$a_F(x) - c_F(x) \le \lambda_F \quad \text{for all } x \in [0,1],$$

对所有 $x \in \operatorname{supp}(dF)$，等号成立。由于 $dF(\{0\}) = 0$，在 0 处以正概率出现平局的情况不存在，因此，选择 $x = 0$ 的偏离者几乎必然排在最后，并获得$v_n = 0$，由此 $a_F(0) = 0$。由于 $0 \in \operatorname{supp}(dF)$,

$$\lambda_F = a_F(0) - c_F(0) = -(\gamma(0) + \beta(0)) = 0.$$

现在取 $x \in$属于 $\operatorname{supp}(dF)$。由于 $dF(\{x\}) = 0$，在 x 处出现平局的概率为 0。因此，实现绩效为 x 的参与者排在第k名的概率等于 $\binom{n-1}{k-1}F(x)^{n-k}(1-F(x))^{k-1}$，因此 $a_F(x) = \Psi(F(x);\mathbf{v})$。将其代入一阶条件，并利用 $\lambda_F = 0$ 可得，对于 $x \in$属于 $\operatorname{supp}(dF)$,

$$\Psi(F(x);\mathbf{v}) = \gamma(x) + \beta(F(x)) \quad \Leftrightarrow \quad \gamma(x) = \Psi(F(x);\mathbf{v}) - \beta(F(x)).$$

˜最后，我们证明唯一性。设 F 为任意一个对称均衡，并令˜$X \sim \tilde{}F$。正如我们所论证的，$\tilde{\lambda} = 0$，˜F 在 $[0,1]$ 上无原子，并且

$$\gamma(x) = \Psi\left(\tilde{F}(x); v\right) - \beta\left(\tilde{F}(x)\right) \text{ for all } x \in \operatorname{supp}\left(d\tilde{F}\right).$$

定义 $g_v(q) := \Psi(q; v) - \beta(q)$。由于 ˜X $\in$supp $\left(\text{d } \tilde{}\text{F}\right)$, $\gamma\left(\tilde{}\text{X}\right) = g_v\left(\tilde{}\text{F}\left(\tilde{}\text{X}\right)\right)$几乎必然。因为 ˜F 是连续的，˜F $\left(\tilde{}\text{X}\right)$ ∼均匀分布 ([0,1])。对 F 应用同样的推理可得，γ(X) = g_v(F (X)) 几乎必然，且 F (X) ∼均匀分布 ([0,1])。因此，γ(X) 和 $\gamma\left(\tilde{}\text{X}\right)$具有相同的˜分布。由于 γ 是严格递增的，这意味着 X 和 X 具有相同的分布，因此 ˜F =F。■

现在我们证明该定理。

定理 4.3 的证明。设 X ∼ F，并定义 U := F (X)。由于 F 是连续的，U ∼均匀分布 ([0,1])。回顾我们的定义 g_v(q) := Ψ(q; v) − β(q)，因此上述均衡恒等式意味着 γ (X) = g_v (U) 几乎必然成立。由于根据假设 g_v 是严格递增的，它是 Z := γ (X) 的分位数函数。对 w 作类似处理，使得 T := γ (Y) （其中 Y ∼G）。

定义

$$p_k(q) := \binom{n-1}{k-1} q^{n-k} (1-q)^{k-1}.$$

注意 $\Psi(q; \mathrm{v}) = \sum_{k=1}^{n} v_k p_k(q)$ 对所有 $q \in [0,1]$ 成立。因此，

$$g_w(q) - g_v(q) = \Psi(q; \mathbf{w}) - \Psi(q; \mathbf{v}) = \sum_{k=1}^{n} (w_k - v_k) p_k(q).$$

由于 w 主序于 v，因此 w 可以通过有限次反向庇古—道尔顿转移从 v 得到。对于每个 q，映射 v $\mapsto \Psi(q;$v) 是线性的；对于每个 p，映射 $h \mapsto \int_p 0\, h(q)\, dq$ 也是线性的。因此，只需证明单次反向庇古—道尔顿转移的情形，然后将有限序列中各步骤所得的不等式积分后求和即可。于是，固定 $i < j$ 和 $\delta > 0$，并设 w 是通过将 δ 从排名 i转移至排名 j 而由 v 得到的：

$$w_i = v_i + \delta, \quad w_j = v_j - \delta, \quad \text{and} \quad w_k = v_k \text{ for all } k \neq i, j.$$

那么，

$$\Psi(q;\mathbf{w})-\Psi(q;\mathbf{v})=\delta\Big(p_i(q)-p_j(q)\Big),$$

so

$$g_w(q)-g_v(q)=\delta\Big(p_i(q)-p_j(q)\Big).$$

对于 $q\in(0,1)$,

$$\frac{p_i(q)}{p_j(q)}=\frac{\binom{n-1}{i-1}}{\binom{n-1}{j-1}}\left(\frac{q}{1-q}\right)^{j-i},$$

它关于 q 严格递增。此外，当 $q\downarrow 0$ 时，该比值趋于 0；当 $q\uparrow 1$ 时，该比值趋于 $+\infty$。因此，$p_i(q)-p_j(q)$ 恰好一次由负变正地穿过 0，$g_w(q)-g_v(q)$ 也如此。

接下来，计算均值：

$$\int_0^1 p_k(q)\,dq=\binom{n-1}{k-1}\int_0^1 q^{n-k}(1-q)^{k-1}\,dq=\binom{n-1}{k-1}\mathrm{B}(n-k+1,k)=\frac{1}{n}.$$

因此，

$$\int_0^1\Psi(q;\mathbf{v})\,dq=\sum_{k=1}^n v_k\int_0^1 p_k(q)\,dq=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n v_k=\frac{1}{n}.$$

因此

$$\mathbb{E}[Z]=\int_0^1 g_v(q)\,dq=\frac{1}{n}-\int_0^1\beta(q)\,dq=\int_0^1 g_w(q)\,dq=\mathbb{E}[T].$$

所以Z 和T 的均值相等。

令 $H(p):=\int_0^p(g_w(q)-g_v(q))dq$。由于 g_w-g_v 恰好穿过 0 一次，且从负值变为正值，并且 $\int_0^1(g_w-g_v)\,dq=0$，因此对所有 $p\in[0,1]$，都有 $H(p)\le 0$，并且在 $p=1$处取等号。根据凸序的积分分位数刻画，这意味着 $T\ge_{\mathrm{cx}}Z$。

最后，由于 γ 严格递增且凹，γ^{-1} 存在，并且严格递增且凸。设 u 为任意递增凸函数。那么 $u\circ\gamma^{-1}$ 是凸函数，因此$T\ge_{\mathrm{cx}}Z$ 意味着

$$\mathbb{E}[u(Y)]=\mathbb{E}\Big[u\Big(\gamma^{-1}(T)\Big)\Big]\ge\mathbb{E}\Big[u\Big(\gamma^{-1}(Z)\Big)\Big]=\mathbb{E}[u(X)].$$

因此，$Y\ge_{\mathrm{icx}}X$。 ■

命题4.5的证明。 对于 $n \geq 2$，按照引理 4.2的证明，对称均衡是唯一的，在 $[0,1]$，上无原子，并满足 $0 \in \operatorname{supp}(dF_n)$ 且 $dF_n(\{0\}) = 0$。此外，一阶条件的乘子为 $\lambda_n = 0$。

现在固定 $q \in [0,1]$ 并令 $x := Q_n(q)$，其中 q 为分位数函数

$$Q_n(q) := \inf\{x \in [0,1] : F_n(x) \geq q\}, \qquad \forall\, q \in [0,1].$$

由于 F_n 连续，我们有 $F_n(x) = q$ 且 $x \in \operatorname{supp}(dF_n)$。此外，$dF_n(\{x\}) = 0$，因此在 x 处出现平局的概率为 0；在赢家通吃的情况下，$a_{F_n}(x) = (F_n(x))^{n-1} = q^{n-1}$。由于 $x \in \operatorname{supp}(dF_n)$ 且 $\lambda_n = 0$，由命题 3.7 可得 $a_{F_n}(x) = c_{F_n}(x)$，因此

$$\kappa(Q_n(q), q) = c_{F_n}(x) = a_{F_n}(x) = q^{n-1}.$$

将 $n+1$ 替换为 n 后，我们有

$$\kappa(Q_{n+1}(q), q) = q^n \leq q^{n-1} = \kappa(Q_n(q), q), \qquad \forall q \in [0,1].$$

由于 κ 关于 x 严格递增，因此对所有 q，都有 $Q_{n+1}(q) \leq Q_n(q)$。令 $U \sim$ 均匀分布 $([0,1])$，并定义 $X_n := Q_n(U)$ 和 $X_{n+1} := Q_{n+1}(U)$。则 $X_n \sim F_n$，$X_{n+1} \sim F_{n+1}$，且 $X_{n+1} \leq X_n$ 几乎处处成立，从而对所有 $x \in [0,1]$，都有 $F_{n+1}(x) \geq F_n(x)$。■

D 研发证明

D.1 辅助引理

按照研发部分的术语，(*B1*) 和 (*B2*) 是

$$\widetilde{B}(F) := \frac{1}{n} \int_{X^n} V\left(\min_{1 \leq j \leq n} t_j\right) d\,(dF)^{\otimes n}(t), \qquad \forall\, F \in \mathcal{F},$$

and

$$A_F(t) := \int_{X^{n-1}} V(\min\{t, t_2, \ldots, t_n\})\, d\,(dF)^{\otimes(n-1)}(t_2, \ldots, t_n).$$

等价地，若 $T_2, \ldots, T_n \sim dF$ 为独立同分布，且 $M_F := \min\{T_2, \ldots, T_n\}$，则 $A_F(t) = E[V(\min\{t, M_F\})]$。

~同样由引理 B.5，我们记录B的方向导数：对任意$F,G \in \mathcal{F}$，

$$\delta\widetilde{B}(F;G-F)=\int_X A_F(t)\,d(G-F)(t).$$

对于 $t \in [0,\infty$，定义

$$\widetilde{V}_F(t) := \mathbb{E}[V(M_F)\mathbf{1}\{M_F > t\}],$$

~约定 $V_F(\infty) := 0$。

这使我们可以将 A_F 改写为：

引理 D.1。 对所有 $t \in X$，$A_F(t) = A_F(\infty) + V(t)(1-F(t))^{n-1} - \widetilde{V}_F(t)$。

引理 *D.1* 的证明。 直接地，对所有 $t < \infty$，

$$A_F(t) = \mathbb{E}[V(\min\{t, M_F\})] = V(t)\mathbb{P}(M_F > t) + \mathbb{E}[V(M_F)\mathbf{1}\{M_F \le t\}].$$

此外，

$$A_F(\infty) = \mathbb{E}[V(\min\{\infty, M_F\})] = \mathbb{E}[V(M_F)].$$

因此，

$$A_F(t) = A_F(\infty) + V(t)\mathbb{P}(M_F > t) - \mathbb{E}[V(M_F)\mathbf{1}\{M_F > t\}] = A_F(\infty) + V(t)\mathbb{P}(M_F > t) - \widetilde{V}_F(t)$$

由于$T_2,\ldots,T_n$是独立同分布的，其累积分布函数为F，$\mathbb{P}(M_F > t) = (1-F(t))^{n-1}$。根据$V_F(\infty) = 0$的定义，情形$t = \infty$成立~。 ■

~回顾归一化规划者乘子 $\lambda_p := \lambda_p - A_G(\infty)$。我们记录简约形式的规划者最优性条件：

~ ~引理 D.2. $\Phi(G,t) \le \lambda_p + V_G(t)$对所有 $t \in [0,\infty]$成立，且 $\Phi(G,t) = \lambda_p + V_G(t)$对所有 $t \in \mathrm{supp}(dG)$成立。

引理*D.2*的证明。 我们应用引理D.1 ，取 $F = G$，得到

$$A_G(t) = A_G(\infty) + V(t)(1-G(t))^{n-1} - \widetilde{V}_G(t).$$

~重新整理并定义 $\lambda_p := \lambda_p - A_G(\infty)$，即可得到所述条件。 ■

~最后，我们给出 V_F 的一个有用界：

引理 D.3. 对任意 $F \in \mathcal{F}$ 以及任意 $t \in [0,\infty)$，

$$0 \le \widetilde{V}_F(t) \le V(t)(1-F(t))^{n-1} \le V(t).$$

~特别地，注意当 $t \to \infty$ 时，$V_F(t) \to 0$ 。

引理 *D.3*的证明。 非负性是显然的。在事件 $\{M_F > t\}$ 上，我们有$M_F \ge t$。由于 V是非增的，$V(M_F) \le V(t)$ 在该事件上成立。因此

$$\widetilde{V}_F(t) = \mathbb{E}[V(M_F)\mathbf{1}\{M_F > t\}] \le V(t)\mathbb{P}(M_F > t) = V(t)(1-F(t))^{n-1} \le V(t).$$

~最后，$V(t) \to V(\infty) = 0$ 蕴含 $V_F(t) \to 0$。 ■

D.2 命题5.2的证明

命题 *5.2*的证明。 反设存在 $t_0 \in \text{supp}(dG) \cap [0,\infty)$，使得 $F(t_0) < G(t_0)$。则

$$(1-F(t_0))^{n-1} > (1-G(t_0))^{n-1},$$

并且假设 5.1 意味着 $c_F(t_0) \le c_G(t_0)$。因此， $\Phi(F,t_0) > \Phi(G,t_0)$。

由于 $t_0 \in \text{supp}(dG)$，引理 D.2 得出

$$\Phi(G,t_0) = \lambda_p + \widetilde{V}_G(t_0) \ge \lambda_p,$$

所以 $\Phi(F,t_0) > \lambda_p \ge \lambda_g$，这与命题 3.7矛盾。因此，$F(t) \ge G(t)$ 对所有$t \in \text{supp}(dG) \cap [0,\infty)$。

现在任取一个$t \ge 0$ 并定义

$$S := (\text{supp}(dG) \cap [0,\infty)) \cup \{0\}, \qquad \text{and} \qquad s(t) := \sup\{u \in S : u \le t\}.$$

由引理 B.1，dG ((s (t) , t]) = 0，因此 G (t) = G (s (t))。若 s (t) ∈supp (dG) ∩[0,∞)，则如前所述，F (s (t)) ≥G (s (t))。反之，若 s (t) = 0 ∉supp (dG)，则 dG ({0}) = 0，故 G (0) = 0，显然 F (0) ≥ 0 = G (0)。无论哪种情况，F (s (t)) ≥G (s (t))；又由 F 的单调性可得 F (t) ≥F (s (t)) ≥G (s (t)) = G (t)，证毕。■

D.3 定理5.4 的证明

我们先证明两个引理。

引理D.4。 设假设 *2.1*、*2.2* 和 *5.3*成立。令 $H \in \{F,G\}$，其中 F 是对称均衡，且 G使 v 最大化。那么，要么 $dH(\{\infty\}) > 0$，要么 $\operatorname{supp}(dH) \cap [0,\infty)$无上界。

引理 *D.4* 的证明。 假设 $dH(\{\infty\}) = 0$且 $t := \sup(\operatorname{supp}(dH) \cap [0,\infty)) < \infty$。那么，对所有 $H(t) = 1$的 $t \geq t$以及 $t \in \operatorname{supp}(dH) \cap [0,\infty)$。

若 $H = F$，则由命题 3.7 可得 $\lambda_g = \Phi(F,t) = -c_F(t)$，因为 $F(t) = 1$。对于所有 $t > t$，$\Phi(F,t) = -c_F(t) \leq \lambda_g = -c_F(t)$，因此对于所有 $t > t$，$c_F(t) \geq c_F(t)$。令 $t \to \infty$，得到 $c_\infty \geq c_F(t)$，这与假设 5.3 矛盾。

若 $H = G$，注意对于所有 $t > t$，都有 $G(t) = 1$，因此 $\Phi(G,t) = -c_G(t)$。此外，$M_G \leq t$ 几乎处处成立，所以对于所有 $t \geq t$，$V_G(t) = 0$。然后，根据引理 D.2，

$$-c_G(t) = \Phi(G,t) \leq \lambda_p \qquad \forall t > \bar{t}.$$

在 $t = \bar{t} \in \operatorname{supp}(dG)$ 处，引理 D.2 得出

$$-c_G(\bar{t}) = \Phi(G,\bar{t}) = \lambda_p + \widetilde{V}_G(\bar{t}) = \lambda_p,$$

因为 $\widetilde{V}_G(t) = 0$。因此，$c_G(t) \geq c_G(t)$ 对所有 $t > t$。令 $t \to \infty$，则有$c_\infty \geq c_G(t)$，这与假设 5.3矛盾。

■

引理*D.5.* 假设 *2.1*、*2.2* 和 *5.3* 成立。令 $H \in \{F, G\}$，其中 F 是对称均衡，G 则使 v 最大化。若 $dH(\{\infty\}) > 0$ 或 $\operatorname{supp}(dH) \cap [0,\infty)$ 无上界，则相应的乘子满足 $\lambda = -c_\infty$，其中若 $H = F$，则为 $\lambda = \lambda_g$；若 $H = G$，则为 $\lambda = \lambda_p$。

引理的证明 *D.5*。 若 $H = F$且 $dF(\{\infty\}) > 0$，则 $\infty \in \operatorname{supp}(dF)$ 和命题3.7 意味着

$$\lambda_g = \Phi(F,\infty) = -c_F(\infty) = -c_\infty.$$

若 $H = G$ 且 $dG(\{\infty\}) > 0$，则 $\infty \in \text{supp}(dG)$ 和引理 D.2 给出

$$-c_\infty = \Phi(G, \infty) = \lambda_p + \widetilde{V}_G(\infty) = \lambda_p,$$

$\widetilde{\ }$根据定义，$V_G(\infty) = 0$。

现在假设 $\text{supp}(dH) \cap [0, \infty)$ 在上方无界。选择 $t_k \in \text{supp}(dH) \cap [0, \infty)$，使得 $t_k \to \infty$。在博弈情形 $H = F$ 中，$\text{supp}(dF)$ 上的等式给出

$$\lambda_g = \Phi(F, t_k) = V(t_k)(1 - F(t_k))^{n-1} - c_F(t_k).$$

在规划者情形 $H = G$中，dG在引理 D.2 中的等式给出

$$\lambda_p = \Phi(G, t_k) - \widetilde{V}_G(t_k) = V(t_k)(1 - G(t_k))^{n-1} - c_G(t_k) - \widetilde{V}_G(t_k).$$

在上述两种情形下，$V(t_k)(1 - H(t_k))^{n-1} \to 0$，因为当 $t \to \infty$ 时，$V(t) \to V(\infty) = 0$。此外，根据假设 5.3，$\widetilde{\ }c_H(t_k) \to c_\infty$。此外，引理 D.3 意味着 $0 \le V_G(t_k) \le V(t_k)$，$\widetilde{\ }$因此 $V_G(t_k) \to 0$。所以，$\lambda = -c_\infty$。■

定理 *5.4* 的证明。由引理 D.4 和 D.5，$\lambda_p = \lambda_g = -c_\infty$，因此 $\lambda_p \ge \lambda_g$。应用命题 5.2。■

E 在线附录

E.1 替代可行集

在某些应用中，参与者无法自由选择任意$F \in \mathcal{F}$，而是只能从子集 $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}$ 中选择。例如，这可以描述矩约束（如固定均值），或相对于基准分布定义的均值保持收缩所规定的可行性约束。本小节记录一个充分条件，在该条件下，命题 3.1 的均衡存在性结果可原样推广。

固定一个非空集合 $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}$。考虑与正文第 2 节中相同的$n$人博弈，但每位参与者$i$ 必须选择$F_i \in \mathcal{F}_0$。

假设 E.1。固定 $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}$。

1. $\mathcal{F}_0$ 关于X上诱导测度的弱收敛是紧致且凸的。

2. 对每个$F \in \mathcal{F}_0$、每个$H_0 \in \mathcal{F}_0$以及每个 $\varepsilon > 0$，都存在$H \in \mathcal{F}_0$，使得$d(H(\{x\}), H_0(\{x\})) = 0$ 对每个$x \in X$ 都成立，并且

$$u_1\left(\tilde{H}, F, \ldots, F\right) \geq u_1\left(H_0, F, \ldots, F\right) - \varepsilon.$$

命题 E.2。 设主文中的假设 *2.1* 和 *2.2* 以及假设 *E.1*成立。则策略空间为$\mathcal{F}_0$ 的受限博弈存在一个对称纯策略纳什均衡 $F^* \in \mathcal{F}_0$。

命题 E.2 的证明与命题 3.1 的证明类似，只需将 $\mathcal{F}$替换为 $\mathcal{F}_0$，因此我们仅作简要概述。

命题证明*E.2.* 由假设 E.1(1)，对称策略空间 $\mathcal{F}_0$ 是紧致度量空间。对角拟凹性在 $\mathcal{F}_0$ 上成立，因为对于固定的

对手 F，映射 $H \mapsto u_1(H,F,\ldots,F)$ 在 F 上是凹的（期望奖金项关于 dH 是仿射的，且 $-C$ 因 C 的凸性而为凹），并且 F_0 是凸的。

对于对角更优回应安全性，固定 $F \in \mathcal{F}_0$ 使得（$F,\ldots,F$）不是对称均衡。于是存在 $H_0 \in \mathcal{F}_0$ 以及 $\eta > 0$，满足 u_1（$H_0,F,\ldots,F$）$\geq u_1$（$F,\ldots,F$）$+\eta$。由假设 E.1（2），选取一个无原子的 $\tilde{H} \in \mathcal{F}_0$ 使得

$$u_1\left(\tilde{H},F,\ldots,F\right) \geq u_1\left(H_0,F,\ldots,F\right) - \eta/2,$$

因此 $u_1\left(\tilde{H},F,\ldots,F\right) \geq u_1$（$F,\ldots,F$）$+\eta/2$。正文中的引理 A.3 表明映射 $G \mapsto u_1\left(\tilde{H},G,\ldots,G\right)$ 在 F 处连续，因此 $\tilde{H}$ 严格保证高于 u_1（$F,\ldots,F$）在沿对角线的某个邻域内。Reny（1999，定理 4.1），因此意味着在 $\mathcal{F}_0$ 中存在对称均衡。■

E.1.1 示例。

(i) 固定均值。固定 $m \in [0,1]$ 并定义 $F(m) := \left\{F \in F : \int X \, xdF(x) = m\right\}$。众所周知，F(m) 是 F 的紧凸子集。此外，F(m) 满足假设 E.1(2)：可以将原子拆分为较小的绝对连续分量，并通过在两个内部区间之间转移任意少量的质量，抵消由此产生的任何均值变化。π_1 的有界性和 C 的连续性确保无原子扰动可以被选取得使 $u_1(\cdot, F, \ldots, F)$ 的变化至多为 ε。

(ii) 基准分布的保均值收缩。固定 $G \in F$。对于 $F \in F$，记 $F \preceq_{cx} G$ 表示 G 在凸序上支配 F，并定义 $F_{cx}(G) := \{F \in F : F \preceq_{cx} G\}$。众所周知，$F_{cx}(G)$ 是紧致且凸的。最后，若 $\tilde{H} \preceq_{cx} H_0$ 且 $H_0 \preceq_{cx} G$，则 $\tilde{H} \preceq_{cx} G$。因此，我们可以将假设 E.1(2) 中的平滑化选为 H_0，的一列无原子保均值收缩，且这些收缩始终保持可行。

假设 E.1（2）排除了强制原子的限制（例如，要求支撑位于有限网格上），在这种情况下，并列不连续性通常无法成为平滑后的

离开。

E.2 价格与质量竞争

本附录将正文中的推论 7.3 和 7.4 加以扩展，以允许 i. 价格上的混合策略，以及 ii. 对（F,p）的联合随机化。固定 $n \geq 2$ 并维持假设 7.1，为清晰起见在此重述：

假设 7.1 取某个 $\sigma \in (0,\ 1)$。企业抽取 $Q_i \sim dF_i$ 后，代表性消费者抽取一个独立的 ε_i，其累积分布函数为G，定义在 $[0,1]$ 上，并具有连续的密度g。消费者对产品 i的价值为 $\hat{}Q_i := (1-\sigma)Q_i + \sigma\varepsilon_i \in [0,1]$。

令$X := [0,1]$ 和$P := [0, \bar{}p]$。对于任意$F \in \mathrm{F}$，令 $\hat{}F$ 表示 $\hat{}Q := (1-\sigma)Q + \sigma\varepsilon$的诱导累积分布函数。与 §7 中一样，我们将 $\hat{}F(x) := 0$扩展到$x < 0$，并将 $\hat{}F(x) := 1$扩展到$x > 1$。

令M 为 $\mathrm{F} \times P$上的博雷尔概率测度。在对称博弈中，每个竞争对手独立同分布地抽取 $(F_j, p_j) \sim M$，然后独立同分布地抽取 $Q_j \tilde{} dF_j$和$\varepsilon_j \tilde{} G$，并设定 $\hat{}Q_j := (1-\sigma)Q_j + \sigma\varepsilon_j$。定义竞争对手的净效用$U_j := \hat{}Q_j - p_j$。令 $\tilde{}F_M \colon \mathrm{R} \to [0,1]$表示$U_j$的累积分布函数：

$$\tilde{F}_M(z) := \int_{\mathcal{F}\times P} \hat{F}(z+p)\, dM(F,p).$$

等价地，$\tilde{}F_M(z) = 0$ 当$z < -\bar{}p$ 时，且 $\tilde{}F_M(z) = 1$ 当$z > 1$时。

固定偏离者的价格$r \in P$。给定实现的质量$q \in X$ 和偏好冲击$e \in [0,1]$，当且仅当 $(1-\sigma)q + \sigma e - r > \max_{2\leq j\leq n} U_j$时，偏离者获胜。因此，其中期预期利润为

$$a_M(q;r) := r \cdot \int_0^1 \left(\tilde{F}_M\left((1-\sigma)q + \sigma e - r\right)\right)^{n-1} dG(e).$$

对于每个 $r \in P$，记为

$$W_M(r) := \max_{H\in\mathcal{F}} \left(\int_X a_M(q;r)\, dH(q) - C(H) \right).$$

命题 E.3. 假设正文中的假设 *7.1* 和 *2.2* 成立。固定一个定义在 $\mathcal{F} \times P$ 上的博雷尔概率测度 M，以及一个价格 $r \in P$。令 $F \in \mathcal{F}$ 达到最大值 $W_M(r)$。那么存在 $\lambda_g(r) \in \mathbb{R}$ 使得

$$a_M(q;r) - c_F(q) \le \lambda_g(r)\ \forall q \in X, \quad \textit{and} \quad a_M(q;r) - c_F(q) = \lambda_g(r)\ \forall q \in \operatorname{supp}(dF).$$

证明。 固定对手为 M，并将偏离者的价格固定为 r。在该价格下，偏离者在所有 $H \in$F 中优化 $\int_X a\ ^M(q;\, r)\, dH(q) - C(H)$。由于 F达到此最大值，应用命题 3.7。■

立即可得推论 7.3 的一个混合策略类比：

推论 E.4。 设主文中的假设 *7.1* 和 *2.2* 成立。固定 M 和 r 如命题 *E.3*所述，并令 $F \in \mathcal{F}$ 达到 $W_M(r)$。定义支持集端点 $q := \inf \operatorname{supp}(dF)$和 $\bar{q} := \sup \operatorname{supp}(dF)$；并对每个 $q \in X$,

$$\omega_M(q;r) := \int_0^1 \left(\tilde{F}_M\left((1-\sigma)q + \sigma e - r\right)\right)^{n-1} dG(e).$$

于是 $c_F(\bar{q}) - c_F(\underline{q}) = r \cdot \left(\omega_M(\bar{q};\ r) - \omega_M(\underline{q};\ r)\right)$因此 $0 \le c_F(\bar{q}) - c_F(\underline{q}) \le r$。

证明。根据命题 E.3，对于每个 q $\in$supp (dF)，rω_M(q; r) $-$c$_F$(q) $= \lambda_g$(r)。由于 q, $\bar{q} \in$ supp(dF)，将 q 处的等式减去 $\bar{q}$ 处的等式，可得该恒等式。

最后，$\tilde{F}_M(\cdot) \in [0,1]$意味着 $0 \le \omega_M(\bar{q}; r) - \omega_M(\underline{q}; r) \le 1$，从而证明了该界。■

假设 F 是确定性的，但伴随着随机价格。

推论 E.5。 设主文中的假设 *7.1* 和 *2.2* 成立。假设一个对称均衡的形式为(F, S)，其中 $F \in \mathcal{F}$ 是确定性的，而 S 是 P 上的累积分布函数。令$\underline{p} := \inf \operatorname{supp}(dS)$。则，$c_F(\bar{q}) - c_F(\underline{q}) \le \underline{p}$。

证明。 任取 $p \in \operatorname{supp}(dS)$。由于 (F,p) 以正概率被采用，因此它必定是对手的混合策略的最佳响应。将推论 E.4 应用于 $r = p$。对 $p \in \operatorname{supp}(dS)$ 取下确界，得到不等式 $c_F(\bar{q}) - c_F(\underline{q}) \le \underline{p}$。 ■

由此得到所需的大市场结果：

推论 E.6. 假设主文中的假设 *7.1* 和 *2.2* 成立。对于每个 $n \geq 2$，令(F_n,S_n) 为 n 家企业博弈的一个对称均衡，其中企业选择确定性的 $F_n \in \mathcal{F}$，并通过 S_n 对价格进行混合策略。则，[14]

1. 如果 $\underline{p}_n \to 0$ 当 $n \to \infty$ 时成立，那么 $c^{F_n}(\bar{q}_n) - c_{F_n}\left(\underline{q}_n\right) \to 0$。

2. 此外，如果存在 $\kappa > 0$，使得对于所有 $F \in \mathcal{F}$ 以及所有 $0 \leq x < y \leq 1$,

$$c_F(y) - c_F(x) \geq \kappa(y-x), \textit{ then } \underline{p}_n \to 0 \Longrightarrow \bar{q}_n - \underline{q}_n \to 0.$$

证明。推论 E.5 表明 $c^{F_n}(\bar{q}_n) - c_{F_n}\left(\underline{q}_n\right) \leq \underline{p}_n$，因此 $\underline{p}_n \to 0$ 推出第一个结论。对于第二个结论，陡峭性条件表明 $c^{F_n}(\bar{q}_n) - c_{F_n}\left(\underline{q}_n\right) \geq \kappa\left(\bar{q}_n - \underline{q}_n\right)$，因此由第一个结论可得 $\bar{q}_n - \underline{q}_n \to 0$。■

最后，我们推导价格与质量分布联合混合时的结果。

推论 E.7。设主文中的假设 *7.1* 和 *2.2* 成立。对于每个 $n \geq 2$，令 M_n *be* 为 $\mathcal{F} \times P$ 上的一个对称均衡混合策略。对于任意 $(F, \text{价格}) \in \in \operatorname{supp}(M_n)$，定义 $q(F) :=$ 为 $\inf \operatorname{supp}(dF)$，并定义 $\bar{q}(F) :=$ 为 $\sup \operatorname{supp}(dF)$。那么，若

$$\bar{p}_n := \sup\{p \in P : \exists F \in \mathcal{F} \textit{ with } (F,p) \in \operatorname{supp}(M_n)\} \to 0 \quad \textit{as } n \to \infty,$$

then

$$\sup_{(F,p) \in \operatorname{supp}(M_n)} \left(c_F(\bar{q}(F)) - c_F\left(\underline{q}(F)\right)\right) \to 0.$$

此外，在与推论 *E.6(2)* 相同的一致陡峭性条件下，

$$\sup_{(F,p) \in \operatorname{supp}(M_n)} \left(\bar{q}(F) - \underline{q}(F)\right) \to 0.$$

[14]我们的记号显然可沿用：$\underline{q}_n := \inf \operatorname{supp}(dF_n)$、$\bar{q}_n := \sup \operatorname{supp}(dF_n)$，以及$\underline{p}_n := \inf \operatorname{supp}(dS_n)$。

证明。固定 n 和 (F, p) $\in$supp (M_n)。由于 (F, p) 以正概率被采用，它必定是对手的混合策略 M_n下的最佳响应。将 Corollary E.4 应用于 $M = M_n$ 和 $r = p$，可得 $c_F(\bar{q}(F)) - c_F\left(\underline{q}(F)\right) \leq p$。对 (F, p) $\in$supp (M_n) 取上确界，得到 $\sup_{(F,p)\in\text{supp}(M_n)}\left(c_F(\bar{q}(F)) - c_F\left(\underline{q}(F)\right)\right) \leq \bar{p}_n$；这意味着当 $\bar{p}_n \to 0$ 时，所述收敛成立。最后，陡峭性条件表明，对每个 (F, p) $\in$supp (M_n)，$c_F(\bar{q}(F)) - c_F\left(\underline{q}(F)\right) \geq \kappa\left(\bar{q}(F) - \underline{q}(F)\right)$，因此成本差收敛意味着 $\sup_{(F,p)\in\text{supp}(M_n)}\left(\bar{q}(F) - \underline{q}(F)\right) \to 0$。 ■