arXiv:2601.22122v1 [math.AP] 29 Jan 2026

几何视角下的微局部最大拟椭圆性：I

Omar Mohsen[1]

[1] 巴黎西岱大学、索邦大学、法国国家科学研究中心、雅克·阿达马数学研究所—巴黎左岸，F-75013 巴黎，法兰西
omar.mohsen@imj-prg.fr

摘要

给定光滑流形上的一些满足 Hörmander 条件的向量场，我们定义了一种双分次伪微分演算，其中包含经典伪微分演算，以及一种适用于由这些向量场诱导的次黎曼结构的伪微分演算。

我们的方法基于几何构造（奇点消解）以及算子代数的方法。我们全面发展了这一演算，包括索伯列夫空间、波前集和主符号等。

特别地，利用这一演算，我们证明主符号的可逆性蕴含微局部最大拟椭圆性。这使我们得以肯定地解决 Helffer 和 Nourrigat 猜想的微局部版本。

目录

Intr导论 **2**

1 Q拟李群胚 **10**

1.1 微分结构.10 1.2 拟李群胚.18 1.3 李代数丛.21 1.4 卷积代数.23 1.5 L^1-巴拿赫代数.24 1.6 拟李群胚上的分布.26 1.7 拟李群胚的表示论.28 1.8 全 C^*-代数与约化 C^*-代数.30 1.9 自同构.32

2 多重分次次黎曼几何 3 **4**

2.1 多重分次次黎曼结构.35 2.2 多重分次次黎曼几何中的切丛.36 2.3 切群胚.39 2.4 切群胚的示例.42 2.5 Debord-Skandalis作用.43 2.6 不变光滑函数.44 2.7 微分算子代数上的多重分次.46 2.8 弱交换次黎曼结构.48

3 第2章结果的证明 50

3.1 第2.2节结果的证明.50 3.2 关键引理.54 3.3 第2.3节结果的证明.61 3.4 第2.5节结果的证明.64 3.5 第2.6节结果的证明.65 3.6 第 2.7 节结果的证明.71 3.7 第 2.8 节结果的证明.75

4 多重分次伪微分演算 7 **9**

4.1 多重分级伪微分算子.79 4.2 切群胚的表示论.81 4.3 主符号.84 4.4 索伯列夫空间.85 4.5 最大假椭圆性与主定理.86

4.6 参数扩张.88 4.7 示例.89

5 第4章结果的证明 92

5.1 第4.1节中结果的证明.92 5.2 第 4.2 节中结果的证明.97 5.3 第 4.3 节中结果的证明.101
5.4 零阶算子的 C^*-代数.104 5.5 第 4.4 节中结果的证明.111 5.6 第 4.6 节中结果的证明.112
5.7 第 4.5 节中结果的证明.113

附录 **120**

A 基里洛夫轨道方法 121 B 最大次椭圆性的抽象定理 124

引言

设 M 为光滑流形，$\Omega^{\frac{1}{2}}$ 是 TM 上的半密度丛。伪微分算子P: $C^\infty(M,\Omega^{\frac{1}{2}}) \to C^\infty(M,\Omega^{\frac{1}{2}})$ 称为亚椭圆的，如果对于任意分布 $w \in C^{-\infty}(M,\Omega^{\frac{1}{2}})$ 在M 上，

$$\operatorname{singsupp}(P(w)) = \operatorname{singsupp}(w).$$

等价地，如果 $P(w)$在开子集 $U \subseteq M$上光滑，那么 w在 U上也光滑。类似地，如果P 满足以下条件，则称其在一个锥上微局部亚椭圆（该锥是在 $\mathbb{R}^\times_+$-膨胀下闭的子集）：

$$\mathrm{WF}(P(w)) \cap \Gamma = \mathrm{WF}(w) \cap \Gamma, \quad \forall w \in C^{-\infty}(M,\Omega^{\frac{1}{2}}).$$

如果 P在 $T^*M\backslash 0$上微局部亚椭圆，那么它就是亚椭圆的。微局部亚椭圆性的一个众所周知的充分条件是， P 的经典主符号在 Γ上处处不为零。

在我们之前的工作 [AMY22], 中，我们将椭圆算子的主要正则性定理推广到了次黎曼背景，从而给出了微分算子具有亚椭圆性的一般充分条件，并回答了 Helffer-Nourrigat 猜想的整体版本和局部版本。在本文中，我们沿两个方向同时推广我们的定理：首先，我们将定理微局部化，从而解决 Helffer-Nourrigat 猜想的微局部版本。其次，我们将定理推广到我们称之为多参数次黎曼几何的情形。

我们先介绍定理的背景。为简单起见，我们将在双参数情形下描述定理的背景。本文讨论更一般的 ν-参数情形，其中 $\nu \in \mathbb{N}$ 是任意的。

设 $X_1, \cdots, X_n$ 个满足 Hörmander 条件的向量场，也就是说，对于任意 $x \in M$，切空间 T_xM由在 x处取值的 $X_1(x), \cdots, X_n(x)$ 以及 $[X_i, X_j](x)$ 和更高阶迭代李括号线性张成。设 $a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{N}$为任意自然数，将其视为与每个向量场 X_i相关联的权。

设 $s \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{N}$ 满足对所有 i都有 $a_i | t$ 。我们定义适配于向量场 $X_1, \cdots, X_n$及其权 $a_1, \cdots, a_n$的索引为 $H^{(s,\ t)}(M)$ 的索列夫空间如下：对于任意 $w \in C^{-\infty}(M, \Omega^1_2)$,

$$w \in H^{(s,t)}(M) \iff Q(X_1, \cdots, X_n)u \in L^2_{\mathrm{loc}}(M) \forall Q,$$

其中 $Q(x_1, \cdots, x_n)$ 是任意一个加权次数为 $\leqslant t$ 的非交换形式多项式，其中每个变量 x_i 的权重为 a_i，其系数为阶为 $\leqslant s$的经典伪微分算子。

在本文中，我们通过一种插值型过程将这些索伯列夫空间扩展到 $s, \ t \in \mathbb{R}$ 。我们证明这些索伯列夫空间满足以下 Sobolev引理：

$$C^\infty(M,\Omega^{\frac{1}{2}}) = \bigcap_{s\in\mathbb{R}} H^{(s,t)}_{\mathrm{loc}}(M) = \bigcap_{t\in\mathbb{R}} H^{(s,t)}_{\mathrm{loc}}(M), \quad \forall s,t \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

这些索伯列夫空间通过以下关系，既推广了经典局部索伯列夫空间 $H^s_{\text{classical}}(M)$ ，也推广了我们在 [AMY22] $H^t_{\text{sub-Riemannian}}(M)$ 中定义的索伯列夫空间

$$H^s_{\text{classical}}(M) = H^{(s,0)}_{\text{loc}}(M), \quad H^t_{\text{sub-Riemannian}}(M) = H^{(0,t)}_{\text{loc}}(M), \quad \forall s,t \in \mathbb{R}.$$

我们还定义了一个双分次伪微分演算 $\Psi^{(k,\ l)}(M)$，其中 $k,\ l \in \mathbb{C}$。该演算既包含经典伪微分演算，也包含一种适配于由向量场 $X_1,\ \cdots,\ X_n$ 及其权 $a_1,\ \cdots,\ a_n$所定义的次黎曼结构的伪微分演算。更准确地说，我们有以下性质：

i. 若 $k \in \mathbb{C},\ l \in \mathbb{N}$，则对于任意 $Q(x_1,\ \cdots,\ x_n)$ 加权次数为 $\leqslant l$ 、其系数为阶数 $\leqslant k$ 的经典伪微分算子的非交换形式多项式，都有$Q(X_1,\ \cdots,\ X_n) \in \Psi^{(k,\ l)}(M)$。特别地，若 P是阶数为 $k \in \mathbb{C}$ 的经典伪微分算子，则 $P \in \Psi^{(k,\ 0)}(M)$；对于任意 i, $X_i \in \Psi^{(0,\ a_i)}(M)$。

ii. 如果 P是我们在 [AMY22] 中定义的演算里一个 $k \in \mathbb{C}$阶算子，那么 $P \in \Psi^{(0,\ k)}(M)$。例如，对于任意满足 $2a_i | s$ 对所有 i都成立的 $s \in \mathbb{N}$ ，以及广义赫尔曼德平方和

$$\Delta_{\text{SubRiem}} = \sum_{i=1}^{n} (X_i^* X_i)^{\frac{s}{2a_i}} \in \Psi^{(0,s)}(M)$$

在 $\Psi^{(0_{\text{中}},\ -s)}(M)$存在拟逆。

因此，这种演算允许我们将黎曼几何中的算子（如椭圆算子）与次黎曼几何中的算子（如广义赫尔曼德平方和及其拟逆）结合起来。这种演算体系的融合，加上我们的定义具有相当强的几何性（见第2章），以及我们的演算具有主符号（我们很快就会给出定义），使得这种演算有助于将次黎曼几何中的问题转化为经典的伪微分算子问题，反之亦然，也有助于在两者之间应用同伦类型论证。例如，形如 $\Delta^t \Delta^{1-t}{}_{\text{次黎曼}} \in \Psi^{(2t,\ s(1-t))}(M)$的同伦。我们为这类算子定义了适当的索伯列夫空间，使其在这些空间上具有弗雷德霍姆性；而通常情况下，弗雷德霍姆性可以通过我们的主符号来判定，这也是我们演算的主要优势之一。我们将在即将发表的文章中运用这一点。

我们演算中的算子在上文所定义的索伯列夫空间之间连续作用：

$$P \in \Psi^{(k,l)}(M) \implies P\left(H^{(s+\Re(k),t+\Re(l))}_{\text{loc}}(M)\right) \subseteq H^{(s,t)}_{\text{loc}}(M), \quad \forall k,l \in \mathbb{C}, s,t \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

受微局部 hypo 椭圆性的启发，我们定义波前集的一种细化。设$s,t \in \mathbb{R}$, $w \in C^{-\infty}(M, \Omega^{\frac{1}{2}})$。集合波前集$_{(s,t)}(w)$是 $T^*M \backslash 0$中如下定义的锥：

$$(\xi,x) \notin \text{WF}_{(s,t)}(w) \iff \exists w' \in C^{-\infty}(M,\Omega^{\frac{1}{2}}), w' \in H^{(s,t)}_{\text{loc}}(M) \text{ and } (\xi,x) \notin \text{WF}(w-w').$$

换言之，$(\xi,x) \notin$ 波前集$_{(s,t)}(M)$，如果 w属于 $H^{(s,t)\text{ 局部}}(M)$ 在 (ξ,x)附近的微局部意义下。集合波前集$_{s,t}(w)$是 $T^*M \backslash 0$中的闭锥。这些波前集通过该关系恢复经典波前集

$$\text{WF}(w) = \overline{\bigcup_{s,t \in \mathbb{R}} \text{WF}_{(s,t)}(w)}. \tag{3}$$

Furt此外，正如所料，波前集$_{(s,\ t)}(w) = \varnothing$ 当且仅当 $w \in H^{(s,\ t)\text{ 局部}}(M)$。我们可以微局部化（ 2)

如下：

$$\mathrm{WF}_{(s,t)}(P(w)) \subseteq \mathrm{WF}_{(s+\Re(k),t+\Re(l))}(w), \quad \forall P \in \Psi^{(k,l)}(M), k,l \in \mathbb{C}, s,t \in \mathbb{R}.$$

现在我们来介绍本文关注的主要定义

定义 0.0.1. 称 $P \in \Psi^{(k}{}_{,l)\ \mathrm{loc}}\ (M)$ 在锥 $\Gamma \subseteq T^*M\backslash 0$ 上是阶为$(R(k),R(l))$的微局部最大拟椭圆，如果

$$\mathrm{WF}_{(s,t)}(P(w)) \cap \Gamma = \mathrm{WF}_{(s+\Re(k),t+\Re(l))}(w) \cap \Gamma, \quad \forall w \in C^{-\infty}(M, \Omega^{\frac{1}{2}}), s,t \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

如果 P 在 $(R(k),R(l))$ 阶上是最大拟椭圆的，也就是说，它在 $T^*M\backslash 0$上是微局部最大拟椭圆的。由 (3) 可知，在 Γ 上的微局部最大拟椭圆性蕴含其在 Γ上的微局部 hypo 椭圆性。

我们的演算的主要优势在于，我们定义了一个能够检测微局部最大拟椭圆性的主符号。现在，让我们来定义这个主符号。由于主符号是局部对象，为简单起见，我们可以假设在 Hörmander 条件中只需要深度为 $\leqslant N \in \mathbb{N}$ 的迭代对易子。这在局部总是成立，或者当 M 是紧集时成立。为简化论述，在引言中我们还将只讨论算子$P = Q(X_1, \cdots, X_n) \in \Psi^{(k,l)}(M)$，其中 Q 是加权次数为$\leqslant l \in \mathbb{N}$ 的非交换形式多项式，其系数是阶为 $\leqslant k \in \mathbb{C}$ 的经典伪微分算子（当 $k = 0$ 时，这些恰好是微局部 Helffer-Nourrigat 猜想中出现的算子）。

~ ~令 $\mathfrak{g}$为深度为 N、具有 n 个生成元 X_1、$\cdots$、$X_n \in \mathfrak{g}$ 的自由幂零李代数，并令 G 为与 $\mathfrak{g}$ 对应的单连通幂零李群。令 π 为作用于希尔伯特空间 $L^2(\pi)$上的 G 的不可约酉表示，$C^\infty(\pi) \subseteq L^2(\pi)$ 为光滑向量子空间，$\mathrm{d}\pi : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}(C^\infty(\pi))$ 为 π的微分。我们将主符号定义为

$$\sigma^{(k,l)}(P,\pi,\xi,x) = Q_{\xi,x,\max}(\mathrm{d}\pi(\tilde{X}_1)\cdots\mathrm{d}\pi(\tilde{X}_n)) : C^\infty(\pi) \to C^\infty(\pi), \tag{5}$$

其中 $Q_{\xi,x,\max}$ 是由 Q 构造的齐次多项式：我们去掉其中所有低阶项，并将所有系数 L 替换为 $\sigma^k_{\mathrm{classical}}(L,\xi,x) \in \mathbb{C}$，即 L 在 (ξ,x)处的经典主符号。这里显然存在一个问题：它是否良定义？先验地说，(5) 取决于将 P表示为关于 $X_1,\cdots,X_n$的多项式的方式。 P的不同表示可能会使 $\sigma^{(k}{}_{,l)}(P,\pi,\xi,x)$取值不同。在第 4.2 节中，我们为每个 $(\xi,x) \in T^*M\backslash 0$定义一个集合 $\widehat{\ }\mathrm{HN}^{\mathrm{Nonsing}}_{(\xi\ x)}$，其中包含 G 的不可约酉表示，我们称之为 (ξ,x)处的 Helffer-Nourrigat 锥。现在可以陈述本文的主定理。

定理A。设

- M 是一个光滑流形。
- $X_1,\cdots,X_n$ 是满足 *Hörmander* 条件的向量场。
- $k,l \in \mathbb{C}$和 $P \in \Psi^{(k,\ l)}(M)$。

那么，对于任意的 $(\xi、\ x) \in T^*M\backslash 0$和 $\pi \in \widehat{\ }\mathrm{HN}^{\mathrm{Nonsing}}_{(\xi\ x)}$，，$\sigma^{(k,\ l)}(P、\ \pi、\ \xi、\ x)$：$C^\infty(\pi) \to C^\infty(\pi)$ 是良定义的。设

$$\Gamma = \left\{(\xi,x) \in T^*M\backslash 0 : \forall \pi \in \widehat{\mathrm{HN}}^{\mathrm{Nonsing}}_{(\xi,x)},\ \sigma^{(k,l)}(P,\pi,\xi,x) : C^\infty(\pi) \to C^\infty(\pi)\ \textit{is injective}\right\}$$

以下结论成立：

i. 锥 Γ 是开的，且 $\Gamma \subseteq \{(\xi, x) \in T^*M\backslash 0 : \ (-\xi, \xi; \ x, x) \in$ 波前集$(P)\}$，其中波前集(P) 是 P 的 *Schwartz*核的波前集。

ii. 算子 P 在 Γ 上是微局部最大拟椭圆的，阶为 $(R(k), R(l))$，即，

$$\mathrm{WF}_{(s,t)}(P(w)) \cap \Gamma = \mathrm{WF}_{(s+\Re(k),t+\Re(l))}(w) \cap \Gamma. \tag{6}$$

此外，若 Γ' 是满足(6) 的任意锥（将 Γ 替换为 Γ'），其中某些 $s, t \in \mathbb{R}$成立，则 $\Gamma' \subseteq \Gamma$。因此， Γ 是 P 微局部最大拟椭圆的最大锥。

iii. 对任意闭锥 $\Gamma' \subseteq \Gamma$，存在一个连续的 P': $C^{-\infty}(M, \Omega^{\frac{1}{2}}) \to C^{-\infty}(M, \Omega^{\frac{1}{2}})$，使得对于任意 t, $s \in \mathbb{R}$ 和 $w \in C^{-\infty}(M, \Omega^{\frac{1}{2}})$,

$$\mathrm{WF}_{(s,t)}(P'(w)) \subseteq \mathrm{WF}_{(s-\Re(k),t-\Re(l))}(w), \quad \mathrm{WF}(P'(P(w)) - w) \cap \Gamma' = \varnothing. \tag{7}$$

特别地，由(3)，波前集$(P'(w)) \subseteq$波前集(w)。因此， $P'(C^{\infty}(M, \Omega^{\frac{1}{2}})) \subseteq C^{\infty}(M, \Omega^{\frac{1}{2}})$。

iv. 对于任意紧支撑的 $P'' \in \Psi^{(k,l)}(M)$，存在 $\chi \in \Psi^0_{\mathrm{classical}}(M)$一个零阶经典伪微分算子0, $C > 0$以及 $R \in C_c^{\infty}(M \times M, \Omega^{\frac{1}{2}})$一个平滑算子，使得 χ在 Γ 上是椭圆的，并且

$$\left\|\chi(P''(w))\right\|_{L^2(M)} \leqslant C \left(\|P(w)\|_{L^2(M)} + \|R(w)\|_{L^2(M)} \right), \quad \forall w \in C_c^{\infty}(M, \Omega^{\frac{1}{2}}). \tag{8}$$

若 $\Gamma = T^*M\backslash 0$，则可以假设 $\chi = \mathrm{Id}$。

v. 若 M是紧的且 $\Gamma = T^*M\backslash 0$，则对于任意 $s, t \in \mathbb{R}$, P: $H^{(s+\Re(k),t+\Re(l))}(M) \to H^{(s,t)}(M)$，它模紧算子左可逆。

vi. 若 $(\xi, x) \in \Gamma$, $\pi \in \widehat{\ }\mathrm{HN}^{\mathrm{Nonsing}}_{(\xi\ x)}$，则这些算子

$$\sigma^{(k,l)}(P, \pi, x) : C^{-\infty}(\pi) \to C^{-\infty}(\pi)$$
$$\sigma^{(k,l)}(P, \pi, x) : C^{\infty}(\pi) \to C^{\infty}(\pi)$$

存在连续左逆。这里， $C^{-\infty}(\pi)$ 是 $C^{\infty}(\pi)$的拓扑对偶，其中包含 $L^2(\pi)$，称为 π的分布向量空间。映射 $\sigma^{(k,l)}(P, \pi, x) : C^{-\infty}(\pi) \to C^{-\infty}(\pi)$ 是利用对偶定义的。

注记 0.0.2. 下面是关于定理A的一些注记。

i. 若 P是一个 $k \in \mathbb{C}$阶经典伪微分算子，并将其视为 $\Psi^{(k,0)}(M)$的元素，则 $\sigma^{(k,0)}(P, \pi, \xi, x) = \sigma^k_{\mathrm{classical}}(P, \xi, x)$ 是经典主符号。在这种情况下，定理A就是椭圆算子的微局部化主要正则性定理。若 $k = 0$ 且$\Gamma = T^*M\backslash 0$，则定理A是 [AMY22]的主定理。它实际上比 [AMY22] 的主定理强得多，因为我们无法在 [AMY22]中得到 **(7)**。

ii. 我不知道拟逆 P'是否属于 $\Psi^{(-k,-l)}(M)$。这个问题将在一篇即将发表的文章中探讨。

iii. 如果处处加入向量丛系数，即考虑两个复向量丛 E, F，以及算子 P: $C^{\infty}(M, E \otimes \Omega^{\frac{1}{2}}) \to C^{\infty}(M, F \otimes \Omega^{\frac{1}{2}})$，本文的所有结果同样成立。在这种情况下，主符号 $\sigma^{(k,l)}(P, \pi, \xi, x)$是一个从$C^{\infty}(\pi) \otimes E_x$到 $C^{\infty}(\pi) \otimes F_x$的算子。理论可以相当直接地推广。为简化上述记号，我们决定省略向量丛。

iv. 定理 A.iii 是最优的，因为除非 $\Gamma = T^*M\backslash 0$，否则我们不能取 $\Gamma' = \Gamma$；在这种情况下， Γ 是闭的。

推论 0.0.3。 *Helffer-Nourrigat* 猜想的微局部版本 *[HN85，猜想 2.3]* 是正确的。

证明。 他们的猜想是：当 $k = 0$ 、 P 和 P'' 是加权次数为 $\leqslant l \in \mathbb{N}$ 、其系数为 0 阶经典伪微分算子的非交换形式多项式时，(8) 成立。

□

我们证明了该演算中索伯列夫空间、主符号和波前集的许多性质；完整的一般性陈述见第4章。其中许多性质很好地推广了经典伪微分演算中的众所周知性质。但有些性质并不如预期。事实上，它们在经典演算中没有对应物，例如定理 4.4.6，见前一段。我们还请读者参阅第 4.7 节，在那里我们计算了一个具体例子中的主符号；在该例中，定理 4.4.6 对某些薛定谔型算子的可对角化性产生了微妙而有趣的影响。

近年来，不同作者对多参数拟微分演算开展了一些研究，例如参见 Street 的著作 [Str14; Str23] 以及其中的参考文献。Street 的工作在不同的索伯列夫型空间上考察了（8）。特别地，证明了如下结果：

定理 0.0.4 （[Str23，命题 8.2.12 和推论 6.9。2]）。 不等式 （8）成立于 L^2-范数下，当且仅当对于所有 $p \in]1、+\infty[$，将 L^2-范数替换为 L^p-范数后该不等式仍成立。

Street 还定义了多参数拟微分演算。该演算通过对核的估计来定义，这是一种更偏解析的方法。我们预计我们的演算包含于 Street 的演算中，而且证明这一点并不困难。我们相当确定这种包含映射是严格的。

我们的方法与文献中先前方法之间的主要区别，在于系统地使用了群胚，并大量借鉴了 C^*-代数的技术。现在我们概述定理A的证明的主要步骤，并至少解释为什么我们的证明篇幅较长。论证分为三个主要部分。

i. **群胚的构造**。 第一步是在第2章和第3章中构造空间 $\mathbb{G}$ 。这个空间是 [Moh24]引入的群胚的推广（而后者本身又是孔涅切切群胚 [Con94], 、van Erp 和 Yuncken [EY17] 以及 Choi 和 Ponge [CP19]的群胚的推广）。群胚 $\mathbb{G}$ 为由向量场 X_1、.....、 X_n 及其迭代括号生成的分布秩变化所产生的奇点提供了一种消解。与 [Moh24] 的构造相比，这一构造的新颖之处在于，该群胚还考虑了微局部层次上的秩变化。这部分证明纯粹属于几何范畴，不涉及伪微分算子。

这一步存在若干技术难点。一个主要问题是，空间 $\mathbb{G}$ 并非光滑流形，而是 Sikorski [Sik 72] 和 Aronszajn [Aro67]意义下的微分空间。因此，讨论 $\mathbb{G}$上的光滑函数是有意义的，但光滑函数通常没有泰勒级数展开（这正是我不知道 P'是否属于 $\Psi^{(-k,-l)}(M)$的主要原因）。为此，我们引入一类特殊的光滑函数，称为不变光滑函数。这些函数的表现如同光滑流形上的光滑函数。

所有这些难点，再加上 $\mathbb{G}$ 的复杂定义，导致第2章和第3章篇幅较长。例如，我们请读者参阅第 2.4 节，其中在一个相当简单的情形下构造了群胚：$M = \mathbb{R}^2$，且对于某个 $n \in \mathbb{N}$，$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}$ 和 $X_2 = x^n \frac{\partial}{\partial y}$。在这种情形下，可以清楚地看到群胚定义是多么微妙。 —

定义群胚 $\mathbb{G}$ 的想法相当简单。将 $M \times \mathbb{R}_+^\times$ 嵌入一个足够大的格拉斯曼流形中，该流形能够涵盖所有需要解消的不同奇点，然后取此嵌入之像的闭包。这一想法在代数几何中由来已久，通常称为纳什解消。

ii. **伪微分演算的构造**。第二步是构造演算 $\Psi^{(k,\ l)}(M)$。这一构造受到 Debord 和 Skandalis[DS14; DS15] 以及 van Erp 和 Yuncken [EY19], 的工作的启发，他们利用孔涅切群胚 [Con94], 为经典伪微分演算发展了类似的方法。这部分论证相当直接，是对 Debord、Skandalis、van Erp 和 Yuncken 的论证的推广。由于演算具有多参数结构，证明稍长一些，但在我看来，并没有新的概念性困难。

这部分主要见第 5.1 节和第 5.3 节。

iii. **使用 C^*-代数的第一类技巧**。第三步，也是最后一步，是证明定理A。这部分在很大程度上依赖于 C^*-代数理论中的论证。主要困难在于，定理A中的 Γ 是通过在 $C^\infty(\pi)$ 上的单射性来定义的。若改为假设在空间 $C^{-\infty}(\pi)$ 上具有单射性，这一步就会简单一些。从在$C^\infty(\pi)$ 上的单射性转到在 $C^{-\infty}(\pi)$ 上的单射性，在某种意义上是一种亚椭圆性陈述。需要证明，若 $C^{-\infty}(\pi)$ 中的一个向量属于象征映射的核，那么该向量实际上是光滑的。事实上，若使用基里洛夫轨道方法来构造 G 的表示，那么象征映射就是某个欧几里得空间 $\mathbb{R}^k$上的伪微分算子，而上述关于核由光滑向量组成的陈述就是一种亚椭圆性陈述；详见第 4.7 节，其中通过一个例子明确地展示了这一点。

这部分证明依赖于 C^*I 型代数的结构理论，更确切地说，依赖于我们在 [Moh26] 中证明的一个抽象极大亚椭圆性定理。这个抽象结果表明，在 C^*I 型代数中，可以将单射性从光滑向量推广到分布向量。

我们之前的工作 [AMY22] 采用了类似的方法。主要区别在于，这里的群胚更为复杂，因此在证明的前两部分带来了一些技术上的困难。证明的第三部分是新的，与我们在 [AMY22] 中使用的论证不同。

对于只想了解论证总体结构的读者，在 [Moh26 第 2], 节中，我们补充了 Helffer 和 Nourrigat 的定理 [HN79] （即他们对 Rockland猜想的解决）的证明；该定理是定理A的一个特例。 [Moh26 第 2] 节要短得多，也简单得多。主要的简化之处在于，步骤1变得平凡，因为空间 $\mathbb{G}$ 被单连通幂零李群取代。因此，第二步和第三步都更容易理解，尽管论证的总体结构基本保持不变。

在即将发表的文章中，我们将进一步介绍演算的应用。

文章结构：我们尽可能地让本文内容自成一体。我们不要求读者熟悉我们此前的工作 [AMY22; Moh24]。事实上，与我们此前的工作 [AMY22], 不同，本文不依赖于也不要求读者熟悉

[RS76；HN79；Chr+92；Heb98]中的结果。严格来说，我们甚至不假设读者了解 Hörmander 的平方和定理 [Hör67]（我们本可以作此假设，但这并不会简化证明）。由于上文提到的抽象极大亚椭圆性定理，我们可以绕过 [RS76；HN79；Chr+92；Heb98] 中的所有结果。

我们采用群胚和 C^*-代数中的技术。这些技术是非交换几何领域的研究者在过去 30 年间发展起来的。我们在文章开篇加入了一章，介绍群胚和 C^*-代数所需的工具。本章主要依据 Renault 的著作 [Ren80] 以及 Connes 的著作 [Con94]。

最后，为了让文章更易于阅读，我们将第2章和第4章中的证明分别移至第3章和第5章。这样，读者就能更容易地找到本文的所有结果。此外，我们尽可能使第5章独立于第3章。这样，只对伪微分演算感兴趣的读者便可直接阅读第4章和第5章，无需通读第3章。

我们还增加了一个附录，介绍幂零李群的基里洛夫轨道方法（见附录 A），以及 [Moh26], 中的抽象最大亚椭圆性结果（见附录 B）。

致谢：本研究部分得到法国国家科研署项目 OpART（法国国家科研署- 23-CE40-0016）的资助。

我谨向以下人士致谢，感谢他们在这项工作中给予的帮助与支持：Iakovos Androulidakis、Claire Debord、Nigel Higson、Bernard Helffer、Francis Nier、Pierre Pansu、Georges Skandalis、Stéphane Vassout、Robert Yuncken。

第 1 章

拟李群胚

约定与记号：

i. 我们使用 $\mathbb{N}=\{1,\ 2,\ \cdots\}$, $\mathbb{Z}_+=\mathbb{N}\cup\{0\}$, $\mathbb{R}_+=\{x\in\mathbb{R}:\ x\geqslant 0\}$, $\mathbb{R}_+^\times=\{x\in\mathbb{R}:\ x>0\}$. ii. 如果 $n,\ m\in\mathbb{Z}$ 满足 $n\leqslant m$，那么 $[\![n,\ m]\!]:=[n,\ m]\cap\mathbb{Z}$。

iii. 除非另有说明，函数、向量空间和向量丛均为复数的。

iv. 希尔伯特空间总是可分的。内积 $\langle\xi,\ \eta\rangle$ 关于 η 是线性的，关于 ξ.

1.1 微分结构

在本章中，我们回顾由 Sikorski [Sik72] 与 Aronszajn [Aro67],提出的微分结构空间概念；关于微分空间的现代论述，参见 [Śni13；CŚ21] 。

定义 1.1.1. 拓扑空间 M 上的微分结构是连续复值函数空间 $C(M)$ 的一个非空子集 $C^\infty(M)$, 满足：

i. 对每个满足 $x\neq y$ 的 $x,y\in M$，存在 $f\in C^\infty(M)$ 使得 $f(x)\neq f(y)$。

ii. 若 $f_1,\cdots,f_n\in C^\infty(M)$ 且 $F\in C^\infty(\mathbb{C}^n)$，则 $F(f_1,\ldots,f_n)\in C^\infty(M)$。

iii. 若 $f\colon M\to\mathbb{C}$ 是一个函数，使得对每个 $x\in M$，存在 x的一个邻域 U 以及 $g\in C^\infty(M)$，使得 $f_{|U}=g_{|U}$，则 $f\in C^\infty(M)$。

微分空间是一个豪斯多夫、局部紧、第二可数[1] 并配备微分结构的空间。根据乌雷松度量化定理，微分空间可度量化。我们用$C_c^\infty(M)$ 表示 $C^\infty(M)$ 中具有紧支集的函数所构成的子空间。根据斯通–魏尔施特拉斯定理，$C_c^\infty(M)$ 是 $C_0(M)$的稠密 $*$-子代数。

命题 1.1.2 ([Śni13，定理 2.2。4])。 设 $(U_i)_{i\in I}$ 是微分空间M的一个开覆盖。存在一个由光滑函数组成的可数族 f_n： $M\to[0,1]$，使得：

- 对于所有 $n\in\mathbb{N}$，都存在一个 $i\in I$，使得支集$(f_n)\subseteq U_i$。
- 和 $\sum_{n\in\mathbb{N}}f_n$ 局部有限，且其和等于1。

[1]有些作者在微分空间的定义中只纳入这些条件的一部分。

生成集： 设 M 为一个拓扑空间，$\mathcal{F} \subseteq C(M)$ 为满足定义 1.1.1.i 的一个子集。我们将由$\mathcal{F}$ 生成的微分结构定义为如下函数的集合 $f\colon M \to \mathbb{C}$，使得对于每个 $x \in M$，都存在 U的一个邻域，其中 x, $f_1, \cdots, f_n \in \mathcal{F}$，$F \in C^\infty(\mathbb{C}^n)$ 使得 $f_{|U} = F(f_1, \cdots, f_n)_{|U}$。

子空间： 如果 $A \subseteq M$ 是微分空间 M 的局部闭子集，那么 $C^\infty(A)$ 表示函数 f 的空间，其中 $A \to \mathbb{C}$ 满足：对每个 $x \in A$，都存在 x 的一个开邻域 U 和 $g \in C^\infty(M)$，使得 $f_{|U\cap A} = g_{|U\cap A}$。根据命题 1.1.2，如果 A 是闭的，那么 $f \in C^\infty(A)$ 当且仅当存在 $g \in C^\infty(M)$ 使得 $f = g_{|A}$。条件 A 是局部闭的，是为了确保 A 是局部紧的。读者可以验证 A 是一个微分空间。从现在起，微分空间的任何局部闭子集都配备这一微分结构。

定义 1.1.3. i. 微分空间之间的映射 $f\colon M \to M'$ 是光滑的，如果对于任意 $g \in C^\infty(M')$, $g \circ f \in C^\infty(M)$。

ii. 微分同胚是其逆映射光滑的光滑同胚。

iii. 闭（开）光滑嵌入是闭（开）拓扑嵌入，且它到其像的映射是微分同胚。

iv. 若存在包含 x 的开邻域 $U \subseteq M$，使得 $f_{|U}\colon U \to M'$ 是开光滑嵌入，则称光滑映射 $f\colon M \to M'$ 在 $x \in M$ 处是局部微分同胚。

根据定义 1.1.1.i，光滑映射自动是连续的。

注 1.1.4. 由于局部紧空间的子空间 A 局部紧，当且仅当 A 是局部闭的，因此微分空间之间的拓扑嵌入的像是局部闭的。因此，该像继承了一个微分结构。这为定义 1.1.3.iii 提供了依据。

若对于某个 $n \in \mathbb{N}$，M 局部微分同胚于 $\mathbb{R}^n$，则称微分空间是光滑流形。

定理 1.1.5。 设 M 为一个微分空间。以下条件等价：

i. 存在某个 $n \in \mathbb{N}$，使得存在一个闭光滑嵌入 $M \hookrightarrow \mathbb{R}^n$。 *ii.* 存在有限个 f_1、$\cdots$、$f_n \in C^\infty(M)$，使得对于任意 $f \in C^\infty(M)$，存在$F \in C^\infty(\mathbb{C}^n)$，满足 $f = F(f_1$、$\cdots$、$f_n)$。 *iii.* 存在 $n \in \mathbb{N}$，使得对于任意 $x \in M$，都可以找到一个以 x为中心的开邻域 $U \subseteq M$、f_1、$\cdots$、$f_n \in C^\infty(U)$，使得对于所有 $f \in C^\infty(M)$，存在 $F \in C^\infty(\mathbb{C}^n)$，满足$f_{|U} = F(f_1$、$\cdots$、$f_n)$。

如果 M 满足上述条件，我们称其为有限维微分空间。如果 M 是局部有限维的[2]，即每个 $x \in M$ 都有一个有限维的开邻域，我们就称其为局部有限维。

证明。 $i \Rightarrow ii \Rightarrow iii$ 的推论显然。我们对 $iii \Rightarrow i$ 的证明不同于惠特尼的证明。惠特尼定理的经典证明基于萨德定理。我们的证明则基于勒贝格覆盖维数。事实上，我们的证明是拓扑惠特尼嵌入定理证明的一种变体，见 [Mun00，定理 50.5]。固定满足第三个条件的 $N \in \mathbb{N}$。将 $f_1, \cdots, f_N$ 替换为它们的实部和虚部后，我们可以假设（将 N加倍后） $f_1, \cdots, f_N$均为实值。我们固定一个真光滑映射 $\rho\colon M \to \mathbb{R}$。例如，若 $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$是与平凡开覆盖相关的命题 1.1.2 中的映射，则 $\rho = \sum_n n f_n$ 是真光滑的。

[2]在文献中有时称为亚笛卡尔空间。

引理 1.1.6。 对于任意 $x \in M$，存在 x的一个开邻域 U 以及一个光滑嵌入$U \to \mathbb{R}^N$。

证明。 设 U和 $f_1, \cdots, f_N \in C^\infty(U)$ 如条件 3 中所述。我们定义

$$\phi : U \to \mathbb{R}^N, \quad \phi(y) = (f_1(y), \cdots, f_N(y)).$$

映射 ϕ 限制在 x的任意紧邻域 $V \subseteq U$ 上时，都是光滑嵌入。 □

引理 1.1.6 与 [Eng78, 定理 3.1.14 及推论 3.1.20]共同推出， M 的勒贝格覆盖维数为 $\leqslant N$。由引理 1.1.6 和 [Eng78, 命题 3.2.2.b], ，我们可以找到 M 的一个局部有限可数开覆盖 $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 以及光滑嵌入 $f_n : U_n \to \mathbb{R}^N$，使得任意两个 $N+1$ 的交集 $U_{n_1} \cap \cdots \cap U_{n_{N+1}}$ 均为空。更精确地说，首先取任意一个开覆盖，使其元素都能光滑嵌入到 $\mathbb{R}^N$中；然后利用仿紧性将该覆盖替换为一个局部有限细化，再利用林德勒夫性质将其替换为一个可数子覆盖，最后应用 [Eng78, 命题 3.2.2.b]。通过修改 f_n，我们可以设 $\mathrm{Im}(f_n) \subseteq \mathbb{R}^N \backslash 0$。令

$$\tilde{f}_n : U_n \to \mathbb{R}^{N+1}\backslash 0, \quad \tilde{f}_n(x) = \left(f_n(x), \|f_n(x)\|^2\right).$$

˜注意到 f_n 具有如下性质:

$$\forall x, y \in U_n, \lambda \in \mathbb{R}_+, \quad \tilde{f}_n(x) = \lambda \tilde{f}_n(y) \implies x = y \tag{1.1}$$

由于 M 是正规空间，我们可以找到一个开覆盖 $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$，使得 $\overline{V_n} \subseteq U_n$。对于每个 $n \in \mathbb{N}$, 根据命题 1.1.2，存在 $\xi_n : M \to [0, 1]$ 一个光滑函数，使得 $\xi_n = 1$ 在 V_n上成立，且 $\mathrm{supp}(\xi_n) \subseteq U_n$。令 $g_n = \xi_n \tilde{f}_n : M \to \mathbb{R}^{N+1}$ 在 U_n 之外延拓为 0；根据定义 1.1.1.iii，该函数是光滑的。由 (1.1),

$$\forall x, y \in M, n \in \mathbb{N}, \quad g_n(x) = g_n(y) \text{ and } g_n(x) \neq 0 \implies x = y \tag{1.2}$$

由于 $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是局部有限覆盖，因此这些和

$$h_l := \sum_{n=1}^{+\infty} n^l g_n : M \to \mathbb{R}^{N+1}, \quad l \in \mathbb{Z}_+$$

是局部有限的，因而是光滑的。现在我们可以定义

$$\phi : M \to \mathbb{R}^{2N^2+2N+1}, \quad \phi(x) = (h_0(x), \cdots, h_{2N-1}(x), \rho(x)).$$

我们将证明 ϕ 是一个闭光滑嵌入。对于每个 $x \in M$，令 $S_x = \{n \in \mathbb{N} : x \in U_n\}$。根据我们对 $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$的假设， $|S_x| \leqslant N$。令

$$W_x = \bigcap_{n\in S_x} U_n \cap \bigcap_{n\notin S_x} \mathrm{supp}(g_n)^c.$$

集合 W_x 是开集，因为 $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是一个局部有限覆盖。为说明这一点，设 $U \subseteq M$ 为一个满足 $|\{n \in \mathbb{N} : U \cap U_n \neq \varnothing\}| < \infty$ 的开集。那么，对于任意满足 $U \cap U_n = \varnothing$ 的 $n \in \mathbb{N}$，我们有

$U \cap$ 支集$(g_n)^c = U$。因此，

$$U \cap W_x = \bigcap_{n \in S_x} (U \cap U_n) \cap \bigcap_{\{n \in S_x^c : U \cap U_n \neq \varnothing\}} (U \cap \operatorname{supp}(g_n)^c)$$

这是一个有限交。因此，我们已证明 W_x 是局部开的。所以 W_x 是开的。由 W_x、 $x \in W_x$ 和 $g_{n|W_x} = 0$ 对所有 $n \notin S_x$的构造。

现在我们可以证明 ϕ 是单射的。设 x， $y \in M$ 满足 $\phi(x) = \phi(y)$。我们有

$$n \notin (S_x \cup S_y) \implies g_{n|W_x \cup W_y} = 0. \tag{1.3}$$

若 s_1， $\cdots$， s_k是 $S_x \cup S_y$的元素，则利用恒等式

$$\begin{pmatrix} h_0(z) \\ h_1(z) \\ \vdots \\ h_{k-1}(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ s_1 & \cdots & s_k \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ s_1^{k-1} & \cdots & s_k^{k-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{s_1}(z) \\ g_{s_2}(z) \\ \vdots \\ g_{s_k}(z) \end{pmatrix} \quad \forall z \in W_x \cup W_y,$$

我们可以找到一个可逆线性映射 L，使得

$$L \circ \phi = (g_{s_1}, \cdots, g_{s_k}, h_k, \cdots, h_{2N-1}, \rho) \quad \text{on } W_x \cup W_y. \tag{1.4}$$

由于 x， $y \in W_x \cup W_y$，由(1.4)，我们推出对所有 $n \in S_x \cup S_y$有 $g_n(x) = g_n(y)$。由于 x 对某个 $n \in \mathbb{N}$属于 $V_n \subseteq U_n$， 从而 $g_n(x) = g_n(y)$ 且 $g_n(x) \neq 0$。由(1.2)， $x = y$。

由于 ρ 是真的，从而 ϕ 是一个闭拓扑嵌入。尚需证明 ϕ^{-1} 是光滑的。在 $V_n \cap W_x$上， $g_n = \tilde{f}_n$，因此由(1.4)， ϕ 在 $V_n \cap W_x$ 上的逆映射由$f_n^{-1} \circ \pi \circ L$ 给出，其中 π 是到满足 f_n的坐标上的投影。这是光滑的，因为 f_n 是一个光滑嵌入。

□

从现在起，所有微分空间都假定为局部有限维的。

乘积： 设 M_1 与 M_2 为微分空间。我们赋予 $M_1 \times M_2$ 由 $\{(x,\ y) \mapsto f(x) :\ f \in C^\infty(M_1)\} \cup \{(x,\ y) \mapsto g(y) :\ g \in C^\infty(M_2)\}$生成的微分结构。若 M_1 与 M_2 为光滑流形，则 $C^\infty(M_1 \times M_2)$ 与通常的 $C^\infty(M_1 \times M_2)$一致。

不交并： 若 M_1 与 M_2 为微分空间，则 $M_1 \sqcup M_2$ 是一个微分空间，带有 $C^\infty(M_1 \sqcup M_2) = \{f \in C(M_1 \sqcup M_2) :\ f_{|M_1} \in C^\infty(M_1),\ f_{|M_2} \in C^\infty(M_2)\}$。

切向量、切丛与向量场： 设 M 为一个微分空间。 M 在 $x \in M$ 处的切向量是一个 $\mathbb{C}$-线性映射 $X : C^\infty(M) \to \mathbb{C}$， 使得

$$X(fg) = X(f)g(x) + f(x)X(g), \quad X(\overline{f}) = \overline{X(f)}, \quad \forall f, g \in C^\infty(M).$$

所有切向量组成的空间记为 T_xM。利用泰勒公式的标准技巧，参见 [Hör90，引理 7.1 的证明。4]，若 f_1， $\cdots$， $f_n \in C^\infty(M)$ 且 $F \in C^\infty(\mathbb{C}^n)$，则

$$X(F(f_1, \cdots, f_n)) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial x_i}(f_1(x), \cdots, f_n(x)) X(f_i). \tag{1.5}$$

利用同样的技巧，

$$\forall f \in C^\infty(M), \quad x \notin \operatorname{supp}(f) \implies X(f)(x) = 0. \tag{1.6}$$

由 (1.5)、(1.6)，且由于 M 是局部有限维的， T_xM 是有限维实向量空间。我们定义切丛为

$$TM := \{(X, x) : x \in M, X \in T_xM\}.$$

设 $\pi\colon TM \to M$为自然投影。若 $f \in C^\infty(M)$，则我们定义

$$\mathrm{d}f : TM \to \mathbb{C}, \quad \mathrm{d}f(X, x) = X(f).$$

我们赋予 TM 最弱拓扑，使得 $\pi\colon TM \to M$ 以及 $\mathrm{d}f$ 对任意$f \in C^\infty(M)$都是连续的。设 $C^\infty(TM)$为由 $\{f \circ \pi, \mathrm{d}f\colon f \in C^\infty(M)\}$生成的微分结构。可以证明 TM 是局部有限生成微分空间，见 [Śni13，第 3.3] 节。光滑映射 $f\colon M_1 \to M_2$ 对每个 $x \in M_1$诱导一个线性映射

$$\mathrm{d}f_x : T_xM_1 \to T_{f(x)}M_2, \quad \mathrm{d}f_x(X)(g) = X(g \circ f), \quad \forall g \in C^\infty(M_2),$$

以及一个光滑映射 $\mathrm{d}f\colon TM_1 \to TM_2$。

若 M_1, M_2 是微分空间，则 $T(M_1 \times M_2)$ 自然微分同胚于 $TM_1 \times TM_2$。 M 上的向量场是一个线性映射 $X\colon C^\infty(M) \to C^\infty(M)$，使得

$$X(fg) = X(f)g + fX(g), \quad X(\overline{f}) = \overline{X(f)}, \quad \forall f, g \in C^\infty(M).$$

我们用$\mathcal{X}(M)$表示向量场空间。由于导子的交换子仍是导子，$\mathcal{X}(M)$是一个李代数。将 X与每一点 $x \in M$处的赋值映射复合，便得到一个截面 $M \to TM$。这定义了向量场与光滑截面 $M \to TM$ 之间的一个双射，见 [Śni13，命题3.3.5]。

例 1.1.7. 设 $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\colon \ xy = 0\}$。可以验证，若$(x, y) \neq 0$，则$\dim(T_{(x,y)}M) = 1$，且 $\dim(T_0M) = 2$。 M上的向量场具有形式 $X = f(x, y)x\frac{\partial}{\partial x} + g(x, y)y\frac{\partial}{\partial y}$，其中 $f, g \in C^\infty(M)$。由此可知，若 X是向量场，则 X在 $(0, 0)$ 处为零。特别地，$\{X(x)\colon \ X \in \mathcal{X}(M)\}$通常是 T_xM的真子空间。

定义 1.1.8（向量丛）。微分空间 M 上的实向量丛由一个微分空间 E、一个光滑映射 $\pi\colon E \to M$，以及对每个 $x \in M$ 都赋予 $E_x := \pi^{-1}(x)$实有限维向量空间结构组成，并满足：对于每个 $x \in M$，存在 x的一个开邻域 U，$k \in \mathbb{Z}_+$，以及一个微分同胚 $\phi\colon \mathbb{R}^k \times U \to \pi^{-1}(U)$，使得：

- 对于所有 $(v, \ x) \in \mathbb{R}^k \times U$, $\pi(\phi(v, \ x)) = x$。
- 对于所有 $x \in U$, $\phi(\cdot, \ x)\colon \mathbb{R}^k \to E_x$是一个线性同构。

复向量丛的定义类似。我们用 $C^\infty(M, \ E)$ 表示光滑截面的空间。我们用 $C_c^\infty(M, \ E)$ 表示紧支撑光滑截面的子空间。

直和、张量积、拉回等经典构造可直接推广到微分空间上的向量丛。空间 TM 一般不是实向量丛，因为$\dim(T_xM)$一般依赖于 x。可以证明，若$\dim(T_xM)$是局部常值的，则 TM是实向量丛，见 [Śni13，命题 3.3.15]。

命题 1.1.9. 若 $E \to M$ 是有限维微分空间 M 上的实向量丛，且 $x \in M \mapsto \dim(E_x) \in \mathbb{Z}_+$ 有界，则 $C^\infty(M,\ E)$ 是有限生成的$C^\infty(M,\ \mathbb{R})$-模。

证明。 E^* 的全空间满足定理 1.1.5.iii。因此，根据定理 1.1.5，存在一个闭光滑嵌入 ϕ：$E^* \to \mathbb{R}^n$，其中 n 足够大。将 ϕ 的微分限制在 M 上，可得到一个从 E^* 到平凡向量丛 $M \times \mathbb{R}^n$的光滑丛嵌入。取其伴随，可得到 $C^\infty(M,\ E)$的生成元。

□

浸没： 我们称微分空间之间的光滑映射 f：$M_1 \to M_2$ 在 $x \in M_1$ 处是浸没，如果存在一个光滑映射 g：$M_1 \to \mathbb{R}^n$，其中某个 $n \in \mathbb{Z}_+$ 满足

$$M_1 \to M_2 \times \mathbb{R}^n, \quad y \mapsto (f(y), g(y))$$

在 $x \in M_1$处是局部微分同胚，即 f 在局部是一个投影，其纤维是欧几里得空间的开子集。若映射 f 在每个 $x \in M_1$处都是浸没，则称其为浸没。

若 f 是浸没，$x \in M_1$，则 $\mathrm{d}f_x$：$T_xM_1 \to T_{f(x)}M_2$ 是满射；对于每个 $y \in M_2$，$f^{-1}(y)$ 都是光滑流形，其在 $x \in f^{-1}(y)$ 处的切空间等于 $\ker(\mathrm{d}f_x)$。此外，配备了来自 TM_1的子空间拓扑和微分结构的 $\ker(\mathrm{d}f)$，是 M_1上的一个实向量丛。两个浸没的复合仍是浸没。

注 1.1.10. 若 $X \in \mathcal{X}(M)$ 是一个向量场，则其从 $x \in M$出发、在时刻 t 的流记为 $e^{tX} \cdot x$。一般而言，该流可能并非对任意 $t \neq 0$都良定义。但若 f：$M \to M'$是一个浸没，$X \in C^\infty(M,\ \ker(\mathrm{d}f))$，则该流在 $M \times \mathbb{R}$中的 $(x,\ 0)$ 的某个邻域内存在。

命题 1.1.11. 设 $f : M_1 \to M_2$ 和 $g : M_2 \to M_3$ 是微分空间之间的光滑映射。若 f 和 $g \circ f$ 是浸没，且 f 是满射，则 g 是浸没。

证明。 设 $x_0 \in M_2$。根据假设，存在 $n, m \in \mathbb{Z}_+$, h：$M_2 \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$，以及一个光滑映射，使得 $h(x_0, 0) = 0$，且映射

$$\phi : M_2 \times \mathbb{R}^n \to M_3 \times \mathbb{R}^m, \quad \phi(x, y) = (g(x), h(x, y))$$

在 $(x_0, 0)$ 处是局部微分同胚。因此，它在 $(x_0, 0)$ 处的微分是一个线性同构，并且其限制给出一个线性同构 $L : \ker(\mathrm{d}g_{x_0}) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$。设 π：$M_2 \times \mathbb{R}^n \to M_2$ 为自然投影，ψ 为局部定义的映射

$$\psi : M_3 \times \ker(\mathrm{d}g_{x_0}) \times \mathbb{R}^n \to M_3 \times \mathbb{R}^m, \quad \psi(x, a, b) = \phi\Big(\pi\left(\phi^{-1}(x, L(a, 0))\right), b\Big)$$

映射 ψ 具有形式 $\psi(x, a, b) = (x, \kappa(x, a, b))$，其中 κ 是某个光滑映射。此外，$\mathrm{d}\kappa_{(g(x_0),0,0)}(0, a, b) = L(a, b)$。参数化逆映射定理（将 M_3 视为参数空间）蕴含 ψ 在 $(g(x_0), \mathbf{0}, 0)$ 处是局部微分同胚。因此，映射

$$M_3 \times \ker(\mathrm{d}g_{x_0}) \to M_2, \quad (x, a) \mapsto \pi(\phi^{-1}(x, L(a, 0)))$$

在 $(g(x_0),\ 0)$ 处是局部微分同胚，其逆映射的形式为 $x \mapsto (g(x),\ \varphi(x))$ 其中某个光滑映射 φ：$M_2 \to$ 核$(\mathrm{d}g_{x_0})$。结论得证。 □

取 $M_3 = \{\mathrm{pt}\}$，命题 1.1.11 表明：如果 M 是一个微分空间，使得对于某个 $n \in \mathbb{Z}_+$，$M \times \mathbb{R}^n$ 是一个光滑流形，那么 M 是一个光滑流形。下面的定理是布尔巴基商定理 [Bou67, 第 5.9 节5]的一个变体。

商空间：

定理 1.1.12。设 M 为一个微分空间，$R \subseteq M \times M$ 为一个等价关系，$\pi\colon\ M \to M/R$ 为商映射，$C^\infty(M/R) = \{f\colon\ M/R \to \mathbb{C}\colon\ f \circ \pi \in C^\infty(M/R)\}$。假设满足以下条件：

i. 集合 R 是 $M \times M$的闭子集。

ii. 自然投影 $(x,\ y) \in R \mapsto x \in M$ 是浸没。

于是，配备商拓扑的 M/R 是豪斯多夫、局部紧且第二可数的，并且 $C^\infty(M/R)$ 是 M/R,上的局部有限维微分结构，而 π是浸没。

证明。设 $U \subseteq M$为一个开子集，$x_0 \in \pi^{-1}(\pi(U))$。于是，对某个 $y_0 \in U$，有 $(x_0,\ y_0) \in R$。由于$(x,\ y) \in R \mapsto x \in M$ 是浸没，而浸没容许局部截面，故存在局部定义的光滑映射 $s\colon\ M \to M$，使得 $s(x_0) = y_0$，并且对所有 $x \in$ 定义域(s)，有 $(x,\ s(x)) \in R$。因此，$s^{-1}(U)$是包含于 $\pi^{-1}(\pi(U))$中的 x_0的邻域。所以，π是开的。因此，由于 R 是闭的，M/R是豪斯多夫的。由此亦得 M/R 是第二可数且局部紧的。

现在我们证明 $C^\infty(M/R)$ 是 M/R上的微分结构。若 $U \subseteq M$ 是一个开集，$f\colon\ \pi(U) \to \mathbb{C}$ 是一个函数，那么由于对于上述任意截面 s 都有 $f \circ \pi \circ s = f \circ \pi$，我们推得

$$f \circ \pi \in C^\infty(U) \iff f \circ \pi \in C^\infty(\pi^{-1}(\pi(U))). \tag{1.7}$$

容易看出定义 1.1.1.ii 和定义 1.1.1.iii 成立。因此我们需要证明定义 1.1.1.i。固定 $x_0 \in M$。由于 $(x,\ y) \in R \mapsto x \in M$在 $(x_0,\ x_0)$处是浸没，存在 $g\colon\ R \to \mathbb{R}^n$ 一个光滑映射，使得 $g(x_0,\ x_0) = 0$，并且映射

$$\psi : R \to M \times \mathbb{R}^n, \quad (x, y) \mapsto (x, g(x, y))$$

在 $(x_0,\ x_0)$处是局部微分同胚。由于 R 是闭的，我们可以将 g 延拓为 $M \times M$上的光滑映射。令 $g'(y) = g(x_0,\ y)$。我们断言映射

$$\phi : R \to M \times \mathbb{R}^n, \quad (x, y) \mapsto (x, g'(y))$$

在 (x_0, x_0) 处是局部微分同胚。为此，注意到映射 $\phi \circ \psi^{-1}\colon\ M \times \mathbb{R}^n \to M \times \mathbb{R}^n$ 具有 $(x,\ t) \mapsto (x, k(x, t))$ 的形式，其中某个光滑映射 k 满足 $k(x_0, t) = t$。参数化逆映射定理（以 M 为参数空间）表明，$\phi \circ \psi^{-1}$ 在 $(x_0, 0)$ 处是局部微分同胚。因此，ϕ 在 (x_0, x_0) 处是局部微分同胚。

令 V 为 x_0 的一个开邻域，使得 ϕ 在 $(V \times V) \cap R$ 上是开嵌入；令 U 为由以下方式定义的 x_0 的开邻域

$$U = \{y \in V : (y, 0) \in \phi((V \times V) \cap R)\}.$$

集合 $\pi(V \cap g'^{-1}(0))$ 是 $\pi(x_0)$ 的开邻域，因为 $\pi(V \cap g'^{-1}(0)) = \pi(U)$。映射 π 在 $V \cap g'^{-1}(0)$ 上是单射，因为 ϕ 在 $(V \times V) \cap R$ 上是单射。令 $h\colon\ \pi(V \cap g'^{-1}(0)) \to M$ 为 π 在 $V \cap g'^{-1}(0)$ 上的逆映射。在 U 上，$h \circ \pi$ 由 $\phi(y$、$h \circ \pi(y)) = (y$、$0)$ 简单定义。因此，映射 $h \circ \pi$ 在 U 上是光滑的。由 (1.7)，$h \circ \pi \in C^\infty(\pi^{-1}(\pi(U)))$。现在，设 $x_1 \in M$ 使得 $(x_0$、$x_1) \notin R$。我们将 U 替换为 x_0 的一个足够小的邻域，使得 $x_1 \notin \pi^{-1}(\pi(U))$；这是可能的，因为 π 是开集，而 R 是闭集。由于通过将 U 替换为一个更小的相对紧邻域，h 是单射，我们可以假设 h 是到其像上的同胚。因此，$h(U)$ 是局部闭的，即 $h(U) = A \cap B$，其中 $A \subseteq M$ 是开集，$B \subseteq M$ 是闭集。设 $g \in C_c^\infty(M)$ 使得 $g(x_0) = 1$ 且 $\mathrm{supp}(g) \subseteq A$。因此，$\mathrm{supp}(g) \cap h(U) = \mathrm{supp}(g) \cap B$ 是

紧的。由于 h 是到其像上的同胚， $g\circ h$ 是紧支撑的。我们将 $g\circ h$ 在 $\pi(U)$ 之外延拓为 0，从而得到 M/R。由定义 1.1.1.iii， $g\circ h\circ\pi\in C^\infty(M)$。因此， $g\circ h\in C^\infty(M/R)$。注意， $g\circ h(\pi(x_0))=1$ 且 $g\circ h(\pi(x_1))=0$。因此， $C^\infty(M/R)$ 满足定义 1.1.1.i。

现在我们证明 π 在 x_0处是一个浸没。我们断言，映射

$$M\to M/R\times\mathbb{R}^n,\quad x\mapsto(\pi(x),g'(x))$$

在 x_0处是一个局部微分同胚。事实上，一个局部逆映射是映射

$$M/R\times\mathbb{R}^n\to M,\quad (z,t)\mapsto y,\quad \text{where } (h(z),y)=\phi^{-1}(h(z),t)$$

最后，由于 M 是局部有限维的， M/R 也是局部有限维的。 □

弗雷歇拓扑： 设 M 是一个微分空间， $K\subseteq M$ 是一个紧子集。由于 K 是紧的且 M 是局部有限维的，因此 K 是有限维的。取 $f_1,\ \cdots,\ f_n\in C^\infty(K)$，使得对每个 $f\in C^\infty(K)$，存在某个 $F\in C^\infty(\mathbb{C}^n)$，使得 $f=F(f_1,\ \cdots,\ f_n)$。我们可以定义半范数

$$\|f\|_{C^m,K}=\inf\{\|F\|_{C^m(\mathbb{C}^n)}:f=F(f_1,\cdots,f_n)\},\quad m\in\mathbb{Z}_.\tag{1.8}$$

显然，$\|\cdot\|_{C^m,\ K}$在等价意义下不依赖于 $f_1,\ \cdots,\ f_n$的选择。我们赋予$C^\infty(M)$ 由$\|\cdot\|_{C^m,\ K}$ 生成的拓扑，其中 $m\in\mathbb{Z}_+$、 $K\subseteq M$ 变化。根据一个标准的对角化论证， $C^\infty(M)$ 是完备的，因此是一个弗雷歇空间。我们赋予 $C_c^\infty(M)$ 使映射 $C^\infty(K)\to C_c^\infty(M)$ 对任意紧子集 K属于 M 时均连续的最强拓扑。由此， $C_c^\infty(M)$成为一个LF空间（弗雷歇空间的归纳极限）。如果 $E\to M$是一个向量丛，那么我们类似地在 $C^\infty(M,\ E)$ 和 $C_c^\infty(M,\ E)$上定义拓扑。

密度： 若 $E\to M$ 是微分空间 M 上的实向量丛，且 $k\in\mathbb{C}$，则 $\Omega^k(E)$ 表示 E 的 k-密度向量丛。它在 $x\in M$ 上的纤维是由所有满足如下条件的函数 $\phi:\Lambda^{\mathrm{rank}(E_x)}E_x\backslash 0\to\mathbb{C}$ 构成的一维复向量空间： $\phi(\lambda v)=|\lambda|^k\phi(v)$ 对所有$v\in\Lambda^{\mathrm{rank}(E_x)}E\backslash 0$ 和 $\lambda\in\mathbb{R}^\times$均成立。以下结论成立：

- 若 $\phi\in C^\infty(M,\ \Omega^k(E))$，则 $|\phi|\in C^\infty(M,\ \Omega_{\mathbb{R}^{(k)}}(E))$。
- 若 $\phi\in C^\infty(M,\ \Omega^k(E))$，$\psi\in C^\infty(M,\ \Omega^l(E))$，则 $\phi\psi\in C^\infty(M,\ \Omega^{k+l}(E))$。
- 若 $k\in\mathbb{R}$，则称 $\phi\in C^\infty(M,\ \Omega^k(E))$ 为正的，若对所有 $x\in M$，$\mathrm{Im}(\phi_x)\subseteq\mathbb{R}_+$。

以下经典命题的证明留给读者。

命题 1.1.13。 *i.* 如果 $E\to M$ 是一个实向量丛， k、$l\in\mathbb{C}$，那么存在自然同构

$$\Omega^{k+l}(E)\simeq\Omega^k(E)\otimes\Omega^l(E),\quad \Omega^k(E^*)\simeq\Omega^k(E)^*\simeq\Omega^{-k}(E),\quad \overline{\Omega^k(E)}\simeq\Omega^{\overline{k}}(E)\tag{1.9}$$

ii. 如果 $0\to E\to F\to G\to 0$ 是实向量丛的一个短正合列， $k\in\mathbb{C}$，那么存在自然同构

$$\Omega^k(F)\simeq\Omega^k(E)\otimes\Omega^k(G).\tag{1.10}$$

推论 1.1.14. 若 X、Y、Z 是微分空间，且 $f\colon X\to Y$、 $g\colon Y\to Z$ 是浸没，则对任意 $k\in\mathbb{C}$，

$$\Omega^k(\ker(\mathrm{d}(g\circ f)))\simeq\Omega^k(\ker(\mathrm{d}f))\otimes f^*(\Omega^k(\ker(\mathrm{d}g))).$$

证明. 映射 $g\circ f$ 是浸没，因为 f,g 是浸没。由于 $f,g,g\circ f$ 是浸没，$\ker(\mathrm{d}f),\ker(\mathrm{d}g),\ker(\mathrm{d}(g\circ f))$ 是实向量丛。该推论由命题 1.1.13.ii 应用于短正合列得出

$$0\to\ker(\mathrm{d}f)\to\ker(\mathrm{d}(g\circ f))\to f^*(\ker(\mathrm{d}g))\to 0 \qquad \square$$

沿纤维积分： 若 M 是一个微分空间，$f\in C^\infty(M\times\mathbb{R}^n)$ 使得自然投影支集$(f)\to M$为真，则 $x\mapsto\int f(x,y)dy\in C^\infty(M)$。这可由定理 1.1.5 轻易推出（或直接由定义 1.1.1 得出）。

设 $f:\ M_1\to M_2$ 为微分空间之间的浸没，E 为 M_2上的向量丛。借助命题 1.1.2，我们可以定义一个沿纤维积分映射

$$f_*:C_c^\infty(M_1,\Omega^1(\ker(\mathrm{d}f))\otimes f^*(E))\to C_c^\infty(M_2,E) \tag{1.11}$$

映射 f_* 关于上文所定义的 LF-拓扑是连续的。

设 $X\in C^\infty(M_1,$核$(\mathrm{d}f))$。对任意 $k\in\mathbb{C}$，我们定义李导数

$$\mathcal{L}_X:C^\infty(M_1,\Omega^k(\ker(\mathrm{d}f))\otimes f^*(E))\to C^\infty(M_1,\Omega^k(\ker(\mathrm{d}f))\otimes f^*(E)) \tag{1.12}$$

如下：局部地，$M_1=M_2\times\mathbb{R}^n$ 且 f 是投影映射。因此，若$\mathrm{vol}^k:\ \Lambda^n\mathbb{R}^n\backslash 0\to\mathbb{C}$ 表示将 $e_1\wedge\cdots\wedge e_n$ 映为1的典范元素，则

$$\mathcal{L}_X(g\mathrm{vol}^k\otimes s)=X(g)\mathrm{vol}^k\otimes s+kg\mathrm{div}(X)\mathrm{vol}^k\otimes s,\quad g\in C^\infty(M_2\times\mathbb{R}^n),s\in C^\infty(M_2,E),$$

其中 $\mathrm{div}(X)\in C^\infty(M_2\times\mathbb{R}^n)$ 表示 X的散度，即若 $X=\sum X_i\frac{\partial}{\partial t_i}$ 且 $X_i\in C^\infty(M_2\times\mathbb{R}^n)$，则 $\mathrm{div}(X)=\sum_{i=1}^n\frac{\partial X_i}{\partial t_i}$。

光滑映射的拉回： 我们称微分空间之间的光滑映射图表

$$\begin{array}{ccc} M_1 & \xrightarrow{f} & M_2 \\ \downarrow{\scriptstyle\pi_1} & & \downarrow{\scriptstyle\pi_2} \\ \tilde{M}_1 & \xrightarrow{\tilde{f}} & \tilde{M}_2 \end{array}$$

is a ˜为拉回图，当且仅当它满足交换性，且映射 $(\pi_1,f):M_1\to M_1\times_{\tilde{f},\pi_2}M_2$ 是微分同胚 .

˜**命题 1.1.15.** 在拉回图中，若 f 是浸没，则 f 也是浸没，且映射 $\mathrm{d}\pi_1:$ 核$(\mathrm{d}f)\to\pi_1^*($核$(\mathrm{d}f))$ 是同构。此外，若 $E\to M_2$是向量丛，则

$$f_*(h\circ\pi_1)=\tilde{f}_*(h)\circ\pi_2,\quad\forall h\in C_c^\infty(\tilde{M}_1,\tilde{f}^*(E)\otimes\Omega^1(\ker(\mathrm{d}\tilde{f})), \tag{1.13}$$

其中 $f_*(h\circ\pi_1)$ 是良定义的，因为 $f_{|\,\mathrm{supp}(h\circ\pi_1)}:$ 支集$(h\circ\pi_1)\to M_2$ 是真。

˜ ˜ ˜ ˜证明。 由于 f是浸没，我们可以假设 $M_1=M_2\times\mathbb{R}^n$ 与 f是自然投影。该命题现在可以直接证明。 $\square$

1.2 拟李群胚

群胚是所有态射均可逆的小范畴。我们用

- G态射的集合。

- $G^{(0)}$ 对象的集合。
- $s,\ r\colon G\to G^{(0)}$ 分别将态射映射到其定义域和值域的映射。
- $\iota\colon G\to G$ 逆映射。通常，$\gamma\in G$ 的逆映射记为 γ^{-1}。
- $u: G^{(0)}\to G$ 恒等映射。通常，我们将 $G^{(0)}$ 与 $u(G^{(0)})$等同。
- $G^{(2)}:=\{(\gamma',\ \gamma)\in G\times G\colon\ s(\gamma')=r(\gamma)\}$ 可复合对的集合。
- $m\colon\ G^{(2)}\to G$ 复合映射。通常，我们用 $\gamma'\gamma$ 代替 $m(\gamma',\ \gamma)$。

我们用 $G\rightrightarrows G^{(0)}$ 表示一个群胚。如果 $A,\ B\subseteq G^{(0)}$ 是子集，那么

$$G_A:=s^{-1}(A),\quad G^B:=r^{-1}(B),\quad G_A^B:=G_A\cap G^B.$$

If A 或者 B 是单点集 $\{x\}$ 和 $\{y\}$，那么为简便起见，我们使用 G_x、G^x 和 G_x^y。我们还定义

$$AB:=\{\gamma\gamma':(\gamma,\gamma')\in G^{(2)}\cap(A\times B)\},\quad A^{-1}:=\{\gamma^{-1}:\gamma\in A\},\quad \forall A,B\subseteq G.$$

例 1.2.1. i. 集合 X 上的平凡群胚是唯一满足 $G=G^{(0)}=G^{(2)}=X$的群胚，且所有结构映射都是恒等映射。

ii. 集合 X 上的对偶群胚是唯一满足 $G^{(0)}=X$ 的范畴，并且对每个 $x,\ y$，都存在一个从 x 到 y的唯一态射。因此，$G=X\times X$，且结构映射为

$$s(y,x)=x,\quad r(y,x)=y,\quad \iota(y,x)=(x,y),\quad u(x)=(x,x),\quad m((z,y),(y,x))=(z,x).$$

更一般地，如果 $R\subseteq X\times X$ 是一个等价关系，那么 $R\rightrightarrows X$ 是一个群胚，其结构映射是对 $X\times X\rightrightarrows X$的结构映射的限制。

iii. 如果 $G^{(0)}=\{\bullet\}$，那么群胚就是一个群。更一般地，如果 $s=r$，那么群胚就是 $G^{(0)}$上的一个群丛。

iv. 设 Γ 是一个群，S 是 Γ 的一组在共轭下封闭的子群。我们定义群胚

$$G=\{\gamma H\eta:\gamma,\eta\in\Gamma,H\in S\},\quad G^{(0)}=S$$

注意，由于 S 在共轭下封闭，

$$\gamma H\eta=\gamma\eta(\eta^{-1}H\eta)=(\gamma H\gamma^{-1})\gamma\eta$$

是 $\eta^{-1}H\eta\in S$ 的一个左陪集，也是 $\gamma H\gamma^{-1}\in S$ 的一个右陪集。结构映射为

$$s(A)=A^{-1}A,\quad r(A)=AA^{-1},\quad u(H)=H,\quad \iota(A)=A^{-1},\quad m(B,A)=BA$$

注意，若 $A=\gamma H\eta$，则 $s(A)=\eta^{-1}H\eta$ 是 S 的一个元素。对 r 和 m 也可进行类似计算。若 $S=\{H\}$，其中 H 是一个正规子群，则 $G=\Gamma/H$ 是 Γ 对 H 的商。一般而言，我们称群胚 G 为 Γ 对 S 的商。该群胚在本文中发挥着基础性作用。Bradd、Higson 和 Yuncken 也在不同背景下使用过它，参见 [BHY25a; BHY25b]。

定义 1.2.2. 拟李群胚 是一个群胚 $G\rightrightarrows G^{(0)}$，它带有豪斯多夫、局部紧、第二可数拓扑，以及定义在 G 和 $G^{(0)}$ 上的局部有限维微分结构，使得

i. 映射 u、 r、 s、 ι 和 m 都是光滑的，其中 $G^{(2)}$ 配备从 $G \times G$ 继承的微分结构。

ii. 源映射 s: $G \to G^{(0)}$ 是浸没。

注记 1.2.3. 如果 $G^{(0)}$ 是光滑流形，那么 G 也是光滑流形，因为 s 是浸没。在这种情况下，$G \rightrightarrows G^{(0)}$ 称为李群胚。

命题 1.2.4. *i.* 恒等映射 u: $G^{(0)} \to G$ 是闭光滑嵌入。

ii. 映射 ι： $G \to G$ 是微分同胚。

iii. 映射 m： $G^{(2)} \to G$ 和 r： $G \to G^{(0)}$ 是浸没。

证明。 i. 映射 u 是光滑嵌入，因为 $s \circ u = \mathrm{Id}$。它是闭的，因为如果 $u(x_n) \to \gamma \in G$，那么 $u(x_n)u(x_n)^{-1} \to \gamma\gamma^{-1}$。但由于 G 是豪斯多夫的，且 $u(x_n)u(x_n)^{-1} = u(x_n)$，因此可得 $\gamma = \gamma\gamma^{-1} \in u(G^{(0)})$。

ii. 映射 ι 是自身的逆映射。

iii. 由于 $r = s \circ \iota$，可知 r 是浸没。令 $(\gamma_0, \gamma_1) \in G^{(2)}$。由于 s 在 γ_1处是浸没，我们可以找到 g： $G \to \mathbb{R}^n$，使得 ϕ： $x \in G \mapsto (s(x), g(x)) \in G^{(0)} \times \mathbb{R}^n$ 在 γ_1处是局部微分同胚。映射

$$G^{(2)} \to G \times \mathbb{R}^n, \quad (\gamma, \gamma') \mapsto (\gamma\gamma', g(\gamma'))$$

在 (γ_0, γ_1)处是局部微分同胚。一个局部逆映射是映射

$$G \times \mathbb{R}^n \to G^{(2)}, \quad (\gamma, l) \mapsto (\gamma\phi^{-1}(s(\gamma), l)^{-1}, \phi^{-1}(s(\gamma), l)).$$

因此， m 是浸没。 □

拟李群胚的态射： 设 $G \rightrightarrows G^{(0)}$ 和 $H \rightrightarrows H^{(0)}$ 为拟李群胚。拟李群胚的态射是一个光滑映射 f: $H \to G$，同时也是范畴的函子，即若 $(\gamma, \gamma') \in H^{(2)}$，则 $(f(\gamma), f(\gamma')) \in G^{(2)}$ 且 $f(\gamma\gamma') = f(\gamma)f(\gamma')$。

拟李子群胚 若 $H \subseteq G$，且包含映射是拟李群胚的态射，则称 $H \rightrightarrows H^{(0)}$ 是 $G \rightrightarrows G^{(0)}$的拟李子群胚。

饱和子集： $G^{(0)}$ 的局部闭子集 A 称为饱和的，若 $G_A = G^A$。此时， $G_A \rightrightarrows A$ 是 G的拟李子群胚。

拉回： 如果 $G \rightrightarrows G^{(0)}$ 是一个拟李群胚， f: $X \to G^{(0)}$ 是一个光滑映射，那么我们可以定义拉回群胚 $f^*(G) \rightrightarrows X$：

$$f^*(G) = \left\{(y, \gamma, x) \in X \times G \times X : \gamma \in G_{f(x)}^{f(y)}\right\}, \quad r(y, \gamma, x) = y, \quad s(y, \gamma, x) = x$$
$$u(x) = (x, f(x), x), \quad (y, \gamma, x)^{-1} = (x, \gamma^{-1}, y), \quad (z, \gamma, y) \cdot (y, \eta, x) = (z, \gamma\eta, x).$$

群胚在空间上的作用： 设 X 是一个微分空间。 $G \rightrightarrows G^{(0)}$在 X 上的光滑作用由光滑映射 σ：$X \to G^{(0)}$ 和 $(\gamma,\ x) \in G \times_{s,\ \sigma} X \mapsto \gamma \cdot x \in X$ 构成，并满足

$$\sigma(\gamma \cdot x) = r(\gamma), \quad \eta \cdot (\gamma \cdot x) = (\eta\gamma) \cdot x, \quad \sigma(x) \cdot x = x, \quad \forall x \in X, \gamma \in G_{\sigma(x)}, \eta \in G_{r(\gamma)}.$$

给定这样的光滑作用，可以将拟李群胚 $G \ltimes X \rightrightarrows X$ 定义为

$$G \ltimes X = \{(y, \gamma, x) \in X \times G \times X : \sigma(x) = s(\gamma), y = \gamma \cdot x\} \subseteq \sigma^*(G) \tag{1.14}$$

并赋予子空间拓扑、子微分结构和子群胚结构。

真子集： 若子集 $A \subseteq G$ 的映射 $^{s|A}$,$^{r|A}$： $A \to G^{(0)}$ 是真映射，则称其为真子集。真子集必为闭集。若 $E \to G$ 是向量丛，则 $C^\infty_{\text{proper}}(G, E)$表示真支撑截面的空间。

1.3 李代数丛

定义 1.3.1。设 M 是一个微分空间。 M 上的李代数丛是一个实向量丛$A \to M$，并配备一族 $\mathbb{R}$-线性映射 ρ_x： $A_x \to T_xM$ （其中 $x \in M$），以及 $C^\infty(M, A)$ 上的李代数结构，使得

$$[X, fY] = f[X, Y] + \rho(X)(f)Y, \tag{1.15}$$

其中 ρ： $A \to TM$ 是由族 $(\rho_x)_{x\in M}$ 诱导的映射，称为锚映射。

由 (1.15)， ρ是一个光滑映射。通过考察 $[[X, Y], fZ]$ 并利用 (1.15)，可以推出

$$\rho([X, Y]) = [\rho(X), \rho(Y)], \quad \forall X, Y \in C^\infty(M, A) \tag{1.16}$$

例 1.3.2. 若 f: $M \to M'$是一个浸没，则 $\ker(\mathrm{d}f)$是一个李代数丛，其中ρ: $\ker(\mathrm{d}f) \to TM$是包含映射。

拟李群胚的李代数丛： 设 $G \rightrightarrows G^{(0)}$ 为一个拟李群胚。向量丛 $\ker(\mathrm{d}s)$ 到 $G^{(0)}$ 的限制称为 G 的李代数丛，并记为 $A(G)$。 [3]锚映射 ρ： $A(G) \to TG^{(0)}$ 是 $\mathrm{d}r$ 到 $A(G^0)$的限制。现在我们将在 $C^\infty(G^{(0)}, A(G))$上定义一个李代数结构。对任意 $\gamma \in G$，令

$$R_\gamma : G_{r(\gamma)} \to G_{s(\gamma)},\ R_\gamma(\gamma') = \gamma'\gamma, \quad L_\gamma : G^{s(\gamma)} \to G^{r(\gamma)},\ L_\gamma(\gamma') = \gamma\gamma'$$

映射 R_γ 和 L_γ 是微分同胚，因为它们的逆映射是 $R_{\gamma^{-1}}$ 和 $L_{\gamma^{-1}}$。 R_γ 和 L_γ 的微分诱导出同构

$$(\mathrm{d}R_\gamma)_{\gamma'} : \ker(\mathrm{d}s)_{\gamma'} \to \ker(\mathrm{d}s)_{\gamma'\gamma}, \quad (\mathrm{d}L_{\gamma'})_\gamma : \ker(\mathrm{d}r)_\gamma \to \ker(\mathrm{d}r)_{\gamma'\gamma}, \quad \forall(\gamma', \gamma) \in G^{(2)}. \tag{1.17}$$

映射 ι 从 G^x 到 G_x诱导出一个微分同胚。因此，它的微分给出一个同构

$$\ker(\mathrm{d}r) \simeq \iota^*(\ker(\mathrm{d}s)). \tag{1.18}$$

[3]可以将 $A(G)$ 定义为 $\ker(\mathrm{d}r)_{|G^{(0)}}$。这取决于约定。它应与将李群的李代数选为右不变向量场还是左不变向量场的约定保持一致。按照我们的约定，李群的李代数与右不变向量场相对应，因此 BCH公式中会出现一个负号，见 (2.2)。

同构 (1.17) 和 (1.18) 诱导出同构

$$\begin{aligned}&\ker(\mathrm{d}s)\simeq r^*(A(G)),\quad \ker(\mathrm{d}s)_\gamma \xrightarrow{(\mathrm{d}R_{\gamma^{-1}})_\gamma} r^*(A(G))_\gamma\\&\ker(\mathrm{d}r)\simeq s^*(A(G)),\quad \ker(\mathrm{d}r)_\gamma \xrightarrow{\mathrm{d}\iota_{s(\gamma)}\circ(\mathrm{d}L_{\gamma^{-1}})_\gamma} s^*(A(G))_\gamma.\end{aligned}\tag{1.19}$$

命题1.3.3。 设 $X\in C^\infty(G^{(0)},A(G))$。存在唯一的 $X_R\in C^\infty(G,$ 核$(\mathrm{d}s))$，称为与 X 相关联的右不变向量场，使得:

i. X_R 在 $G^{(0)}$ 上的限制等于 X。

ii. For any $(\gamma',\gamma)\in G^{(2)}$, $\mathrm{d}R_\gamma(X_R(\gamma'))=X_R(\gamma'\gamma)$, *i.e.,* $\mathrm{d}R_\gamma\circ X_R=X_R\circ R_\gamma$.

此外，

$$\mathrm{d}r\circ X_R=\rho(X)\circ r.\tag{1.20}$$

证明。 向量场 X_R 必须由公式 $X_R(\gamma)=\mathrm{d}R_\gamma(X(r(\gamma)))$定义。这就证明了唯一性。显然， X_R 满足 i 和 ii。由于 $r\circ R_\gamma=r$，可得（1.20）。 □

命题1.3.4。 存在唯一的李括号，定义在 $C^\infty(G^{(0)},A(G))$ 上，并满足以下恒等式:

$$[X,Y]_R=[X_R,Y_R],\quad \rho([X,Y])=[\rho(X),\rho(Y)],\quad [X,fY]=f[X,Y]+\rho(X)(f)Y$$

其中 $X,Y\in C^\infty(G^{(0)},A(G))$ 和 $f\in C^\infty(G^{(0)})$。

证明. 唯一性由第一个恒等式即可看出。关于存在性，我们需要如下引理。

引理1.3.5. 若 $f\colon M\to M'$是光滑映射， X， $Y\in$**X** (M)且 X'， $Y'\in$**X** (M')使得d $f\circ X=X'\circ f$与$\mathrm{d}f\circ Y=Y'\circ f$，则$\mathrm{d}f\circ[X,\ Y]=[X',\ Y']\circ f$。

证明. 两边都是函数 $M\to TM'$。二者都将元素 (Z,x)映为形如$(Z',f(x))$的元素，其中存在某个 $Z'\in T_{f(x)}M'$。因此，为证明两边相等，只需验证对任意 $g\in C^\infty(M')$，两边与dg复合后相等。我们有

$$\begin{aligned}\mathrm{d}g\circ\mathrm{d}f\circ[X,Y]=\mathrm{d}(g\circ f)\circ[X,Y]=[X,Y](g\circ f)&=X(Y(g\circ f))-Y(X(g\circ f))\\&=X(Y'(g)\circ f)-Y(X'(g)\circ f)\\&=X'(Y'(g))\circ f-Y'(X'(g))\circ f\\&=[X',Y'](g)\circ f=\mathrm{d}g\circ[X',Y']\circ f.\end{aligned}$$

结论随之成立。 □

设 $X,Y\in C^\infty(G^{(0)},A(G))$。由引理1.3.5， $[X_R,Y_R]\in C^\infty(G,$核$(\mathrm{d}s))$。设 $[X,Y]\in C^\infty(G^{(0)},A(G))$为 $[X_R,Y_R]$在 $G^{(0)}$上的限制。由命题1.3.3和引理1.3.5，$[X,Y]_R=[X_R,Y_R]$。对两边取dr，并利用(1.20)和引理1.3.5，我们推出 $\rho([X,Y])=[\rho(X),\rho(Y)]$。最后，显然 $(fY)_R=f\circ rY_R$。因此，

$$\begin{aligned}[X,fY]_R=[X_R,f\circ rY_R]=f\circ r[X_R,Y_R]+X_R(f\circ r)Y_R&=f\circ r[X,Y]_R+\rho(X)(f)\circ rY_R\\&=(f[X,Y])_R+(\rho(X)(f)Y)_R.\end{aligned}$$

因此， $[X,\ fY]=f[X,\ Y]+\rho(X)(f)Y$。 □

设 $X \in C^\infty(G^{(0)},\ A(G))$。该截面

$$X_L := -\,\mathrm{d}\iota \circ X_R \circ \iota \in C^\infty(G, \ker(\mathrm{d}r)) \tag{1.21}$$

称为与 X 相关联的左不变向量场。(1.21) 中符号的选择是为了确保 (1.26) 成立。我们有

$$\mathrm{d}L_\gamma \circ X_L = X_L \circ L_\gamma, \quad [X,Y]_L = -[X_L, Y_L], \quad [X_R, Y_L] = 0, \quad \forall \gamma \in G, X, Y \in C^\infty(G^{(0)}, A(G)).$$

恒等式 $\mathrm{d}R_\gamma \circ X_R = X_R \circ R_\gamma$ 和 $\mathrm{d}L_\gamma \circ X_L = X_L \circ L_\gamma$ 表明，只要流有定义，我们就有

$$m(e^{tX_R} \cdot r(\gamma), \gamma) = e^{tX_R} \cdot \gamma, \qquad m(\gamma, e^{tX_L} \cdot s(\gamma)) = e^{tX_L} \cdot \gamma. \tag{1.22}$$

由此可知，若 X 紧支撑，则 X_R 和 X_L 完备。

例 1.3.6。设 M 为光滑流形，$G = M \times M \rightrightarrows G^{(0)}$ 为对偶群胚。在这种情况下，$A(G) = TM$，且我们的符号约定意味着李括号与向量场的李括号一致。若 $X \in \mathcal{X}(M)$，则 $X_R,\ X_L \in \mathcal{X}(M \times M)$ 由下式给出

$$X_R(x,y) = (X(x), 0), \quad X_L(x,y) = (0, -X(y)). \tag{1.23}$$

1.4 卷积代数

设 $G \rightrightarrows G^{(0)}$ 为拟李群胚。对于任意 $k,\ l \in \mathbb{C}$，我们定义

$$\Omega^{k,l}(G) := \Omega^k(\ker(\mathrm{d}s)) \otimes \Omega^l(\ker(\mathrm{d}r)), \quad \Omega^k(G) := \Omega^{k,k}(G).$$

由 (1.19),

$$\Omega^{k,l}(G) \simeq r^*(\Omega^k(A(G))) \otimes s^*(\Omega^l(A(G))). \tag{1.24}$$

为简化记号，我们通常用 $C^\infty(G、\Omega^{k、\,l})$ 代替 $C^\infty(G、\Omega^{k、\,l}(G))$。

伴随： 我们将 $f \in C^\infty(G、\Omega^{k、\,l})$ 的伴随定义为

$$f^*(\gamma) := f(\gamma^{-1})^* \in C^\infty(G, \Omega^{\bar{l},\bar{k}}).$$

卷积： 现在我们定义 G 上两个函数的卷积。

引理 1.4.1. 实向量丛之间存在自然同构

$$m^*\left(\Omega^{k_1,k_4}(G)\right) \otimes \Omega^{k_2+k_3}(\ker(\mathrm{d}m)) \simeq \pi_1^*\left(\Omega^{k_1,k_2}(G)\right) \otimes \pi_2^*\left(\Omega^{k_3,k_4}(G)\right), \quad \forall k_1,k_2,k_3,k_4 \in \mathbb{C},$$

其中 $\pi_i:\ G^{(2)} \to G$ 是自然投影，而 $m:\ G^{(2)} \to G$ 是乘法映射。

证明。令 $l_1,\ l_2,\ l_3: G^{(2)} \to G^{(0)}$ 为映射 $l_1(\gamma,\ \gamma') = r(\gamma)$, $l_2(\gamma,\ \gamma') = s(\gamma)$, $l_3(\gamma, \gamma') = s(\gamma')$。显然，我们有

$$\begin{aligned}\pi_1^*\left(\Omega^{k_1,k_2}(G)\right) \otimes \pi_2^*\left(\Omega^{k_3,k_4}(G)\right) &\simeq l_1^*\left(\Omega^{k_1}A(G)\right) \otimes l_2^*\left(\Omega^{k_2+k_3}A(G)\right) \otimes l_3^*\left(\Omega^{k_4}A(G)\right) \\ &\simeq m^*\left(\Omega^{k_1,k_4}(G)\right) \otimes \Omega^{k_2+k_3}(l_2^*\left(A(G)\right))\end{aligned}$$

还需证明 $l_2^*(A(G)) \simeq$ 核$(\mathrm{d}m)$。对于任意 $(\gamma,\ \gamma') \in G^{(2)}$，映射

$$G_{l_2(\gamma,\gamma')} \to m^{-1}(\gamma\gamma'),\quad \gamma'' \mapsto (\gamma\gamma''^{-1}, \gamma''\gamma')$$

是一个微分同胚，其在 $l_2(\gamma,\ \gamma')$ 处的微分诱导出所需的同构。 □

设 $f \in C^\infty(G,\ \Omega^{k_1,\ k_2})$、$g \in C^\infty(G,\ \Omega^{1-k_2,\ k_3})$。由引理 1.4.1，我们定义

$$f \boxtimes g(\gamma,\gamma') = f(\gamma)g(\gamma') \in C^\infty\left(G^{(2)}, m^*\left(\Omega^{k_1,k_3}(G)\right) \otimes \Omega^1(\ker(\mathrm{d}m))\right).$$

若 f 或 g 适当支撑，则 $m : \mathrm{supp}(f \boxtimes g) \to G$ 是真映射。因此，我们可以定义 e

$$f * g := m_*(f \boxtimes g) \in C^\infty(G, \Omega^{k_1,k_3}).$$

此外，若 f 和 g 都适当支撑，则 $f \boxtimes g$ 也适当支撑。我们感兴趣的主要情形是 $k_1 = k_2 = k_3 = \frac{1}{2}$。 -

命题 1.4.2。 </style}空间 、$\Omega^{\frac{1}{2}}$）是一个 $*$-代数，并且

$$\mathrm{supp}(f * g) \subseteq \mathrm{supp}(f)\,\mathrm{supp}(g),\quad \mathrm{supp}(f^*) = \mathrm{supp}(f)^{-1},\quad \forall f, g \in C^\infty_{\mathrm{proper}}(G, \Omega^{\frac{1}{2}}). \tag{1.25}$$

李代数丛的作用： 若 $X \in C^\infty(G,\ \ker(\mathrm{d}s))$ 或 $X \in C^\infty(G,\ \ker(\mathrm{d}r))$，则由 (1.24) 和 (1.12)，可得一个映射

$$\mathcal{L}_X : C^\infty(G, \Omega^{k,l}) \to C^\infty(G, \Omega^{k,l}),\quad \forall k, l \in \mathbb{C}.$$

因此，若 $X \in C^\infty(G^{(0)}, A(G))$，则我们有映射

$$\mathcal{L}_{X_R}, \mathcal{L}_{X_L} : C^\infty(G, \Omega^{k,l}) \to C^\infty(G, \Omega^{k,l}),\quad \forall k, l \in \mathbb{C}.$$

使用记号

$$X * f := \mathcal{L}_{X_R}(f),\quad f * X := \mathcal{L}_{X_L}(f),\quad \forall f \in C^\infty(G, \Omega^{k,l}).$$

若 $f, g \in C^\infty_{\mathrm{proper}}(G, \Omega^{\frac{1}{2}})$，则

$$X * (f * g) = (X * f) * g,\quad (f * X) * g = f * (X * g),\quad (X * f)^* = -f^* * X. \tag{1.26}$$

1.5 L^1-巴拿赫代数

在本节余下部分，我们固定一个满足下述条件的正截面 $\omega \in C^\infty(G, \Omega^{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}})$

$$\omega(\gamma_1\gamma_2) = \omega(\gamma_1)\omega(\gamma_2),\ \forall(\gamma_1,\gamma_2) \in G^{(2)},\quad \omega(\gamma) = 1,\ \forall \gamma \in G^{(0)}. \tag{1.27}$$

例 1.5.1。 若 $\eta \in C^\infty(G^{(0)}, \Omega^{\frac{1}{2}}(A(G)))$ 是一个处处不为零的正截面，则$\omega(\gamma) = \eta(r(\gamma))\eta(s(\gamma))^{-1}$ 满足 (1.27)。并非所有满足 (1.27) 的 $\omega \in C^\infty(G, \Omega^{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}})$都来自某个截面 $\eta \in C^\infty(G^{(0)}, \Omega^{\frac{1}{2}}(A(G)))$。我们将考虑这类截面，见命题 2.5.2。

If $f \in C_c^\infty(G,\ \Omega^{-\frac{1}{2}})$，那么 $|f|\omega \in C_c(G,\ \Omega^{1,\ 0})$。根据 (1.19)，我们可以沿纤维对 $|f|\omega$ 积分 s.

类似地，我们可以沿 r 的纤维对 $|f|\omega^{-1}$ 积分。我们定义

$$\|f\|_{L^1(G,\omega)} := \max\left(\|s_*(|f|\omega)\|_{C^0(G^{(0)})}, \left\|r_*(|f|\omega^{-1})\right\|_{C^0(G^{(0)})}\right) \tag{1.28}$$

$C_c^\infty(G, \Omega^{\frac{1}{2}})$ 在范数 $\|\cdot\|_{L^1(G,\omega)}$ 下的完备化记为 $L^1(G, \omega)$。我们有：

$$\|f * g\|_{L^1(G,\omega)} \leqslant \|f\|_{L^1(G,\omega)} \|g\|_{L^1(G,\omega)}, \quad \|f^*\|_{L^1(G,\omega)} = \|f\|_{L^1(G,\omega)}, \quad \forall f, g \in C_c^\infty(G, \Omega^{\frac{1}{2}}).$$

特别地，$L^1(G, \omega)$ 是一个 Banach $*$-代数。

命题 1.5.2 (近似单位元)。存在 $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq C_c^\infty(G, \Omega^{\frac{1}{2}})$，使得存在一个由自伴元构成的序列

i. 若 $K \subseteq G^{(0)}$ 是紧的，则序列 支集$(g_n) \cap s^{-1}(K)$ 最终递减，且其集合论极限等于 K，即 $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{m\geqslant n}$支集$(g_m) \cap s^{-1}(K) = K$。*ii.* 对任意 $f \in C_c^\infty(G, \Omega^{\frac{1}{2}})$，$g_n * f$和 $f * g_n$在 $C_c^\infty(G, \Omega^{\frac{1}{2}})$-拓扑下收敛到 f。*iii.* 对任意 $f \in C_{\text{proper}}^\infty(G, \Omega^{\frac{1}{2}})$，$g_n * f$和 $f * g_n$在 $C^\infty(G, \Omega^{\frac{1}{2}})$-拓扑下收敛到 f。*iv.* 对任意 $f \in L^1(G, \omega)$，$g_n * f$和 $f * g_n$在 $L^1(G, \omega)$-拓扑下收敛到 f。

在连续情形下，这一结果归功于 Renault [Ren87，引理 3.2]。

证明。为简化叙述，我们只讨论 $G^{(0)}$ 是紧的情形。一般情形可类似地利用 $G^{(0)}$上的单位分解处理。由命题 1.1.9，存在一个有限族 $X_1, \cdots, X_k \in C^\infty(G^{(0)}, A(G))$，它生成 $C^\infty(G^{(0)}, A(G))$。向量场 $X_{1R}, \cdots, X_{kR}$是完备的，见 (1.22)。映射

$$\phi : \mathbb{R}^k \times G^{(0)} \to G, \quad \phi(t_1, \cdots, t_k, x) = e^{t_1 X_{1R}(x) + \cdots + t_k X_{kR}} \cdot x$$

由于 s 是浸没，因此它在 $\{0\} \times G^{(0)}$ 的某个邻域内是浸没。为此，设ψ：$G \to \mathbb{R}^n \times G^{(0)}$ 是一个形如 $\gamma \mapsto (g(\gamma), s(\gamma))$的局部微分同胚。映射 $\psi \circ \phi$:$\mathbb{R}^k \times G^{(0)} \to \mathbb{R}^n \times G^{(0)}$ 具有如下形式：$(t, x) \mapsto (h(t, x), x)$，其中 h是某个光滑映射。h 在 $(0, x)$ 处沿 t 方向的微分是满射。因此，由参数化逆映射定理可推出，$\psi \circ \phi$ 是浸没，这意味着 ϕ 是浸没。

由 (1.22)，$\phi(t, x)^{-1} = \phi(-t, r(\phi(t, x)))$。我们将满足 ϕ 在 (t, x) 处以及在 $(-t, \phi(t, x))$ 处是良定义的浸没的 (t, x) 的集合记为 U。由于 $s \circ \phi(t, x) = x$，由推论 1.1.14 可得一个典范同构 Ω^1(核(微分ϕ)) $\otimes \phi^*(\Omega^{1,0}(G)) \simeq \mathbb{C}$。因此，我们有一个沿纤维积分映射

$$\phi_* : C_c^\infty(U) \to C_c^\infty(G, \Omega^{1,0}).$$

设 $(t, x) \in U$。指数映射 $\gamma \in G_x \mapsto e^{t_1 X_{1R} + \cdots + t_k X_{kR}} \cdot \gamma \in G_x$ 定义了从 x 到 $\phi(t, x)$ 的局部微分同胚。因此，它在 x 处的微分是一个线性同构 核(微分$s)_x \to$ 核(微分$s)_{\phi(t,\ x)}$。因此，它定义了 $\Omega^{1,-1}(G)_{\phi(t,\ x)}$ 的一个元素。元素 $\omega^2(\phi(t, x))$ 也定义了 $\Omega^{1,-1}(G)_{\phi(t,\ x)}$ 的一个元素。取商后，我们得到一个光滑函数 $\kappa : U \to \mathbb{R}_+^\times$。有

$$\phi_*(h)^* = \phi_*(\tilde{h}\kappa)\omega^{-2}, \quad \forall h \in C_c^\infty(U), \tag{1.29}$$

其中 $\tilde{h}(t, x) = \overline{h(-t, r(\phi(t, x)))}$。此外，$\tilde{\kappa} = \frac{1}{\kappa}$和$-\kappa(0, x) = 1$。现在，设 $(h_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq C_c^\infty(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}_+)$ 为一个函数序列，使得 $\int_{\mathbb{R}^k} h_n(t)dt = 1$、$h_n(t) = h_n(-t)$，并且

序列 $(\text{支集}(h_n))_{n\in\mathbb{N}}$ 递减，其交集等于 $\{0\}$，且支集$(h_n)\times G^{(0)}\subseteq U$。我们将 h_n 视为定义在 $\mathbb{R}^k\times G^{(0)}$ 上的函数，它们不依赖于 x。令

$$g_n=\phi_*(h_n\kappa^{\frac{1}{2}})\omega^{-1}$$

显然， g_n 是实值的。由 (1.29)， $g^*=g$。命题 1.5.2.i 可由包含映射$G^{(0)}\subseteq$支集$(g_n)\subseteq\phi($支集$(h_n))$推出。令 $f\in C_c^\infty(G,\Omega^{\frac{1}{2}})$。我们有

$$\begin{aligned}f(\gamma)-f*g_n(\gamma)&=f(\gamma)-\int_{G_{s(\gamma)}}f(\gamma\eta^{-1})\omega(\eta^{-1})g_n(\eta)\\&=f(\gamma)-\int_{\mathbb{R}^k}f(\gamma\phi(t,s(\gamma))^{-1})\omega(\phi(t,s(\gamma))^{-1})h_n(t)\kappa^{\frac{1}{2}}(t,s(\gamma))\\&=\int_{\mathbb{R}^k}\Big(f(\gamma)-f(\gamma\phi(t,s(\gamma))^{-1})\omega(\phi(t,s(\gamma))^{-1})\kappa^{\frac{1}{2}}(t,s(\gamma))\Big)h_n(t)\end{aligned}$$

映射 $\psi(t,\gamma)=f(\gamma)-f(\gamma\phi(t,s(\gamma))^{-1})\omega(\phi(t,s(\gamma))^{-1})\kappa^{\frac{1}{2}}(t,s(\gamma))\in C^\infty(\mathbb{R}^k\times G,\Omega^{\frac{1}{2}})$ 满足 $\lim_{t\to0}\psi(t,\gamma)=\psi(0,\gamma)=0$，其中极限是在 $C_c^\infty(G,\Omega^{\frac{1}{2}})$的拓扑中取得的。这证明了命题 1.5.2.ii。命题 1.5.2.iii 可用类似的论证得出。最后，命题 1.5.2.iv 由命题 1.5.2.ii 以及 $\|g_n\|_{L^1(G,\omega)}\leqslant\int_{\mathbb{R}^k}h_n\kappa^{1/2}\leqslant\sup\kappa^{1/2}_{|\text{支集}(h_1)}$ 一致有界这一事实得出。

□

1.6 拟李群胚上的分布

本节中，我们定义拟李群胚 $G\rightrightarrows G^{(0)}$ 上的分布代数 $C_r^{-\infty,s}(G,\Omega^{\frac{1}{2}})$。如果 $G\rightrightarrows G^{(0)}$ 是李群胚，那么 $C_r^{-\infty,s}(G,\Omega^{\frac{1}{2}})$ 已由 Lescure、Manchon 和 Vassout[LMV17] 引入。

定义 1.6.1。一个 $u\in C_r^{-\infty,s}(G,\Omega^{\frac{1}{2}})$ 元由两个函数 $u*\cdot,\ \cdot*u\colon C_c^\infty(G,\Omega^{\frac{1}{2}})\to C_c^\infty(G,\Omega^{\frac{1}{2}})$ 组成，使得

$$(f*u)*g=f*(u*g),\quad\forall f,g\in C_c^\infty(G,\Omega^{\frac{1}{2}}).$$

命题 1.6.2。设 $u\in C_r^{-\infty,s}(G,\Omega^{\frac{1}{2}})$。映射 $u*\cdot$ 和 $\cdot*u$ 是连续的 $\mathbb{C}$-线性映射。此外，自然映射 $C^\infty_{\text{proper}}(G,\Omega^{\frac{1}{2}})\to C_r^{-\infty,s}(G,\Omega^{\frac{1}{2}})$ 是单射。

证明。设 $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 为命题 1.5.2中的近似单位元。我们有

$$u*f=\lim_{n\to+\infty}g_n*(u*f)=\lim_{n\to+\infty}(g_n*u)*f$$

由于 $g_n*u\in C_c^\infty(G,\Omega^{\frac{1}{2}})$，映射 $f\in C_c^\infty(G,\Omega^{\frac{1}{2}})\mapsto(g_n*u)*f\in C_c^\infty(G,\Omega^{\frac{1}{2}})$ 是连续的。根据 $C_c^\infty(G,\Omega^{\frac{1}{2}})$上LF拓扑的定义，线性映射 $C_c^\infty(G,\Omega^{\frac{1}{2}})\to C_c^\infty(G,\Omega^{\frac{1}{2}})$ 连续当且仅当其对每个紧子集 $K\subseteq G$的限制 $C^\infty(K,\Omega^{\frac{1}{2}})$ 是连续的。现在， $u*\cdot\colon C^\infty(K,\Omega^{\frac{1}{2}})\to C_c^\infty(G,\Omega^{\frac{1}{2}})$ 的连续性由一致有界原理得出，见[Rud91，定理2.8]。包含映射 $C^\infty_{\text{proper}}(G,\Omega^{\frac{1}{2}})\hookrightarrow C_r^{-\infty,s}(G,\Omega^{\frac{1}{2}})$ 的单射性由命题 1.5.2.iii得出。

□

空间 $C_r^{-\infty,s}(G,\Omega^{\frac{1}{2}})$ 自然构成一个 $*$-代数，其乘积和伴随定义为

$$(u*v)*f:=u*(v*f),\quad f*(u*v):=(f*u)*v,\quad u^**f:=(f^**u)^*,\quad f*u^*:=(u*f^*)^*,$$

其中 $f \in C_c^\infty(G,\Omega^{\frac{1}{2}}), u, v \in C_r^{-\infty,s}(G,\Omega^{\frac{1}{2}})$。此外，$C^\infty_{\mathrm{proper}}(G,\Omega^{\frac{1}{2}})$是$*$-子代数，且是$C_r^{-\infty,s}(G,\Omega^{\frac{1}{2}})$的子代数。事实上，在命题 1.6.6 中，我们将证明它是一个双边理想。我们在空间$C_r^{-\infty,s}(G,\Omega^{\frac{1}{2}})$上赋予最弱拓扑，使得对于任意 $f \in C_c^\infty(G,\Omega^{\frac{1}{2}})$，映射

$$C_{r,s}^{-\infty}(G,\Omega^{\frac{1}{2}}) \to C_c^\infty(G,\Omega^{\frac{1}{2}}), \quad u \mapsto f * u, \quad u \mapsto u * f$$

是连续的。命题 1.6.2 的证明表明，$C_c^\infty(G,\Omega^{\frac{1}{2}})$在$C_r^{-\infty,s}(G,\Omega^{\frac{1}{2}})$中稠密。

例 1.6.3。 i. 由 (1.26)，我们有一个线性映射 $C^\infty(G^{(0)}, A(G)) \to C_r^{-\infty,s}(G,\Omega^{\frac{1}{2}})$。

ii. 设 $f \in C^\infty(G^{(0)})$。我们定义$\delta_f \in C_r^{-\infty,s}(G,\Omega^{\frac{1}{2}})$如下

$$\delta_f * g := (f \circ r) \cdot g, \quad g * \delta_f := g \cdot (f \circ s), \quad g \in C_c^\infty(G,\Omega^{\frac{1}{2}}), \tag{1.30}$$

其中 $\cdot$是逐点乘法。这定义了一个 $*$-代数包含映射

$$C^\infty(G^{(0)}) \hookrightarrow C_{r,s}^{-\infty}(G,\Omega^{\frac{1}{2}}). \tag{1.31}$$

显然，δ_1是$C_r^{-\infty,s}(G,\Omega^{\frac{1}{2}})$的单位元。若 $f \circ r = f \circ s$，则 δ_f属于$C_r^{-\infty,s}(G,\Omega^{\frac{1}{2}})$的中心。若 $G \rightrightarrows G^{(0)}$ 是一个李群胚，则 δ_f 是等于 f、支集为 $G^{(0)}$的分布。

iii. 如果 $G = M \times M \rightrightarrows M$是光滑流形 M上的对偶群胚，那么$C_r^{-\infty,s}(M \times M,\Omega^{\frac{1}{2}})$的一个元素是在 $M \times M$上的、取值于$\Omega^{\frac{1}{2}}(T(M \times M))$的分布 u，满足

$$x \mapsto \int_M u(x,y)f(y) \in C_c^\infty(M,\Omega^{\frac{1}{2}}(TM)), \quad y \mapsto \int_M u(x,y)f(x) \in C_c^\infty(M,\Omega^{\frac{1}{2}}(TM)),$$

对所有 $f \in C_c^\infty(M,\Omega^{\frac{1}{2}}(TM))$均成立。这类分布也称为半正则 [Trè67，第 532] 页。

命题 1.6.4。 存在一种唯一的方式，为每个$u \in C_r^{-\infty,s}(G,\Omega^{\frac{1}{2}})$关联一个真子集支集$(u) \subseteq G$，使得以下结论成立：

i. 如果 $u \in C^\infty_{\mathrm{proper}}(G,\Omega^{\frac{1}{2}})$，那么 支集$(u)$ 等于 u 作为光滑截面的支集。

ii. 如果$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq C_r^{-\infty,s}(G,\Omega^{\frac{1}{2}})$收敛于 u，那么 支集$(u) \subseteq \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{\bigcup_{m\geqslant n}}$支集$(u_m)$。

iii. 若 $u, v \in C_r^{-\infty,s}(G,\Omega^{\frac{1}{2}})$，则 $\mathrm{supp}(u * v) \subseteq \mathrm{supp}(u)\,\mathrm{supp}(v)$ 且 $\mathrm{supp}(u^*) = \mathrm{supp}(u)^{-1}$。

证明。 设 $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq C_c^\infty(G,\Omega^{\frac{1}{2}})$ 如命题 1.5.2 中所述。若可以定义满足上述性质的 $\mathrm{supp}(u)$，则由命题 1.5.2.i 可得

$$\mathrm{supp}(u) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{\bigcup_{m\geqslant n} \mathrm{supp}(u * g_m)}. \tag{1.32}$$

这证明了唯一性。为证明存在性，我们利用 (1.32) 定义 $\mathrm{supp}(u)$。命题 1.6.4.i 的证明是直接的。现在证明 $s_{|\mathrm{supp}(u)} : \mathrm{supp}(u) \to G^{(0)}$ 是真映射。设 $K \subseteq G^{(0)}$ 为紧集，且 $h \in C_c^\infty(G^{(0)})$ 在 K 上恒等于 1。只需证明 $\mathrm{supp}(u * g_n * \delta_h)$ 一致紧支撑。由命题 1.5.2.i，$g_n * \delta_h$ 一致紧支撑。因此结论由以下引理得出。

引理 1.6.5。 若 $T\colon C_c^\infty(G,\Omega^{\frac{1}{2}}) \to C_c^\infty(G,\Omega^{\frac{1}{2}})$是连续线性映射，则对于任意紧集 $K \subseteq G$，存在紧集 $K' \subseteq G$，使得对于任意 $f \in C_c^\infty(G,$ 若 $\Omega^{\frac{1}{2}})$满足支集$(f) \subseteq K$，则支集$(Tf) \subseteq K'$。

证明。否则，我们可以找到一个序列 $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq C_c^\infty(G,\Omega^{\frac{1}{2}})$，使得 $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 一致紧支撑，但 $(T(f_n))_{n\in\mathbb{N}}$ 并非一致紧支撑。根据标准对角论证，我们可以找到一个序列 $c_n \in \mathbb{R}_+^\times$，使得 $\sum_n c_n f_n$ 在 $C_c^\infty(G,\Omega^{\frac{1}{2}})$中收敛，但 $\sum_{n\in\mathbb{N}} c_n T(f_n)$ 并非紧支撑。这与 T的连续性矛盾。 □

现在我们证明，对于所有 $f \in C_c^\infty(G,\Omega^{\frac{1}{2}})$，$\mathrm{supp}(u)$ 是 G 的满足 $\mathrm{supp}(u*f) \subseteq A\,\mathrm{supp}(f)$ 的最小闭子集 A。对于一个包含关系，设 $f \in C_c^\infty(G,\Omega^{\frac{1}{2}})$。于是，$u * g_n * f \to u * f$。因此，

$$\mathrm{supp}(u*f) \subseteq \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{\bigcup_{m\geqslant n} \mathrm{supp}(u*g_n*f)} \subseteq \left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{\bigcup_{m\geqslant n} \mathrm{supp}(u*g_n)}\right) \mathrm{supp}(f),$$

第二个包含关系中，我们用到了 $\mathrm{supp}(f)$ 是紧集这一事实。对于另一个包含关系，设 A 是 G 的一个闭子集，且对于所有 $f \in C_c^\infty(G,\Omega^{\frac{1}{2}})$，都有 $\mathrm{supp}(u*f) \subseteq A\,\mathrm{supp}(f)$。那么，对于任意 $n\in\mathbb{N}$，$\mathrm{supp}(u*g_n) \subseteq A\mathrm{supp}(g_n)$。因此，

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{\bigcup_{m\geqslant n} \mathrm{supp}(u*g_n)} \subseteq \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{\bigcup_{m\geqslant n} A\,\mathrm{supp}(g_n)} \subseteq A\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{\bigcup_{m\geqslant n} \mathrm{supp}(g_n)}\right) = A$$

这里用到了命题 1.5.2.i。由支集的这一新描述可轻易推出命题 1.6.4.ii，以及 $\mathrm{supp}(u*v) \subseteq \mathrm{supp}(u)\,\mathrm{supp}(v)$。这里我们用到 $\mathrm{supp}(u)\mathrm{supp}(v)$ 是闭集这一事实；这可由 s 的真性推出：$\mathrm{supp}(v) \to G^{(0)}$。用类似的论证可以证明 $\mathrm{supp}(u) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{m\geqslant n} \mathrm{supp}(g_m * u)$。因此，$\mathrm{supp}(u^*) = \mathrm{supp}(u)$，且 $\mathrm{supp}(u)$ 是真映射。 □

命题 1.6.6. $C_{\mathrm{proper}}^\infty(G,\Omega^{\frac{1}{2}})$ 是 $C_r^{-\infty,s}(G,\Omega^{\frac{1}{2}})$的双边理想。

证明. 令 $u \in C_r^{-\infty,s}(G,\Omega^{\frac{1}{2}})$ 和 $f \in C_{\mathrm{proper}}^\infty(G,\Omega^{\frac{1}{2}})$，$h \in C_c^\infty(G^{(0)})$。由于 f是适当支撑的，$f*h \in C_c^\infty(G,\Omega^{\frac{1}{2}})$。因此，$(u*f)*\delta_h \in C_c^\infty(G,\Omega^{\frac{1}{2}})$。取不同的函数 h，可推出 $u*f \in C^\infty(G,\Omega^{\frac{1}{2}})$。根据命题 1.6.4，它是适当支撑的。 □

我们用 $C_{cr}^{-\infty,s}(G,\Omega^{\frac{1}{2}})$表示 $C_r^{-\infty,s}(G,\Omega^{\frac{1}{2}})$ 中由紧支撑分布构成的子空间。

限制到饱和子集：设 $A \subseteq G$ 为饱和子集。由于对任意 $x\in A$、$(G_A)_x = G_x$和 $(G_A)^x = G^x$，可知 $\Omega^{\frac{1}{2}}(G_A)$等于$\Omega^{\frac{1}{2}}(G)$到 G_A的限制。通过对 G_A取限制，我们得到一个 $*$-代数同态

$$C_{\mathrm{proper}}^\infty(G,\Omega^{\frac{1}{2}}) \to C_{\mathrm{proper}}^\infty(G_A,\Omega^{\frac{1}{2}}), \quad f \mapsto f_{|G_A}.$$

该映射延拓为一个 $*$-代数同态

$$C_{r,s}^{-\infty}(G,\Omega^{\frac{1}{2}}) \to C_{r,s}^{-\infty}(G_A,\Omega^{\frac{1}{2}}), \quad u \mapsto u_{|G_A}, \tag{1.33}$$

其中 $u_{|G_A} * f = (u*g)_{|G_A}$和 $f * u_{|G_A} = (g*u)_{|G_A}$，其中 $f \in C_c^\infty(G_A,\Omega^{\frac{1}{2}})$和 $g \in C_c^\infty(G,\Omega^{\frac{1}{2}})$是 f的任一延拓。$u_{|G_A} * f$和 $f * u_{|G_A}$不依赖于 g 的选择这一事实，可利用分布例 1.6.3.ii容易得出，参见命题 1.6.6的证明。注意

$$\mathrm{supp}(u_{|G_A}) = \mathrm{supp}(u) \cap G_{|A}, \quad \forall u \in C_{r,s}^{-\infty}(G,\Omega^{\frac{1}{2}}). \tag{1.34}$$

1.7 准李群胚的表示论

约定与记号：以下内容将在本文中始终使用。

- 若 V， W为拓扑向量空间，则$\mathcal{L}(V$， $W)$ 表示连续线性映射 $V \to W$的空间。我们用$\mathcal{L}(V)$ 表示 V的连续自同态空间。
- 若 M 是一个光滑流形，则 $L^2(M)$ 表示由内积 $\langle f, g\rangle = \int_M \bar{f}g$定义的空间$C_c^\infty(M,\Omega^{\frac{1}{2}}(TM))$的希尔伯特空间完备化。

定义 1.7.1. 设 H 为希尔伯特空间。拟李群胚$G \rightrightarrows G^{(0)}$ 在 H 上的酉表示是一个 $*$-代数同态 π: $C_c^\infty(G, \Omega^{\frac{1}{2}}) \to \mathcal{L}(H)$，当$C_c^\infty(G, \Omega^{\frac{1}{2}})$ 赋予 LF 拓扑，且 $\mathcal{L}(H)$赋予强算子拓扑时，该同态是连续的。若 π满足以下条件，则称其为非退化表示:

$$\pi(C_c^\infty(G, \Omega^{\frac{1}{2}}))H := \left\{ \sum_{i\in I} \pi(f_i)\xi_i : I \text{ a finite index set }, (f_i)_{i\in I} \subseteq C_c^\infty(G, \Omega^{\frac{1}{2}}), (\xi_i)_{i\in I} \subseteq H \right\}$$

在 H中稠密。我们将只考虑非退化表示。将空间 H 记作 $L^2(\pi)$较为方便。

例 1.7.2. 设 $x \in G^{(0)}$。我们定义 G 在 $L^2(G_x)$ 上作用的正则表示 Ξ_x 为$\Xi_x(f)g = f * g$。

注 1.7.3。 设 $\gamma \in G$。光滑微分同胚 R_γ: $G_{r(\gamma)} \to G_{s(\gamma)}$ 在 $\Xi_{s(\gamma)}$ 与 $\Xi_{r(\gamma)}$之间诱导出酉等价。

光滑向量: 若 $u \in C_r^{-\infty}{}_{,\ s}(G,\ \Omega^{\frac{1}{2}})$ 且 $\xi \in L^2(\pi)$，则 $\pi(u)\xi$表示$L^2(\pi)$中的唯一向量（若存在），使得

$$\langle \pi(u)\xi, \pi(f)\eta\rangle = \langle \xi, \pi(u^* * f)\eta\rangle, \quad \forall \eta \in L^2(\pi), f \in C_c^\infty(G, \Omega^{\frac{1}{2}}). \tag{1.35}$$

π的非退化性保证了唯一性。令

$$C_c^\infty(\pi) := \left\{ \xi \in L^2(\pi) : \forall u \in C_{r,s}^{-\infty}(G, \Omega^{\frac{1}{2}}),\ \pi(u)\xi \text{ exists} \right\}.$$

$C_c^\infty(\pi)$ 配备由半范数族 $\xi \mapsto \|\pi(u)\xi\|_{L^2(\pi)}$ 给出的完备局部凸拓扑，其中 $u \in C_r^{-\infty}{}_{,\ s}(G,\ \Omega^{\frac{1}{2}})$。由于$\pi(C_c^\infty(G,\ \Omega^{\frac{1}{2}}))L^2(\pi) \subseteq C_c^\infty(\pi)$，空间 $C_c^\infty(\pi)$ 在 $L^2(\pi)$ 中稠密。

定义 1.7.4。 我们将 $C^{-\infty}(\pi)$ 记为连续反线性映射 $C_c^\infty(\pi) \to \mathbb{C}$的空间。 $\xi \in C^{-\infty}(\pi)$ 在 $\eta \in C^\infty(\pi)$ 上的作用记为 $\langle \eta,\ \xi\rangle$。

注 1.7.5。 也可以定义 $C^\infty(\pi) := \left\{ \xi \in L^2(\pi) : \forall u \in C_{c\,r}^{-\infty}{}_{,\ ,\ s}(G,\ \Omega^{\frac{1}{2}}),\ \ \pi(u)\xi \text{存在} \right\}$，并将 $C_c^{-\infty}(\pi)$作为其连续对偶。

我们有显然的包含映射

$$C_c^\infty(\pi) \subseteq L^2(\pi) \subseteq C^{-\infty}(\pi).$$

若 $u \in C_r^{-\infty}{}_{,\ s}(G, \Omega^{\frac{1}{2}})$，则 $\pi(u)C_c^\infty(\pi) \subseteq C_c^\infty(\pi)$。根据对偶性，我们定义

$$\pi(u) : C^{-\infty}(\pi) \to C^{-\infty}(\pi), \quad \langle \eta, \pi(u)\xi\rangle := \langle \pi(u^*)\eta, \xi\rangle, \quad \forall \eta \in C_c^\infty(\pi), \xi \in C_c^{-\infty}(\pi). \tag{1.36}$$

根据里斯表示定理的论证，若 $f \in C_c^\infty(G,\ \Omega^{\frac{1}{2}})$，则 $\pi(f)C^{-\infty}(\pi) \subseteq C_c^\infty(\pi)$。现在我们陈述 Dixmier-Malliavin 定理 [DM78]。Dixmier-Malliavin 定理的原始版本

是针对李群陈述的。Francis [Fra22] 将其推广到了李群胚。该证明也适用于拟李群胚。

定理1.7.6 (Dixmier-Malliavin 定理)。 若 $f \in C_c^\infty(G, \Omega^{\frac{1}{2}})$ 且 U 是 $G^{(0)}$的开邻域，则 f 可写成形如 $g_1 * h_1 + \cdots + g_n * f_n$的和，其中 g_i、$h_i \in C_c^\infty(G$、$\Omega^{\frac{1}{2}})$、支集$(g_i) \subseteq$ 支集(f) 且 支集 $(h_i) \subseteq U$ 对所有 $i \in [\![1$、$n]\!]$均成立。

定理1.7.7 (Dixmier-Malliavin 定理)。 设 $\xi \in C_c^\infty(\pi)$。存在 ξ_1、$\cdots$、$\xi_n \in C_c^\infty(\pi)$以及 f_1、$\cdots$、$f_n \in C_c^\infty(G$、$\Omega^{\frac{1}{2}})$，使得 $\xi = \pi(f_1)\xi_1 + \cdots + \pi(f_n)\xi_n$。

连续情形下的以下定理归功于 Renault [Ren80]。现代证明可参见 [AS09]，该证明使用了 C^*-模。

定理 1.7.8。 设 $\omega \in C^\infty(G, \Omega^{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}})$ 是满足 (1.27) 的正截面。对于 G 的任意表示 π，以及 $f \in C_c^\infty(G, \Omega^{\frac{1}{2}})$, $\|\pi(f)\|_{\mathcal{L}(L^2(\pi))} \leqslant \|f\|_{L^1(G,\omega)}$。

1.8 完备与约化 C^*-代数

对于任意 $f \in C_c^\infty(G, \Omega^{\frac{1}{2}})$，我们定义

$$\|f\|_{C^*G} := \sup\{\|\pi(f)\| : \pi \text{ non-degenerate representation of } G\}$$
$$\|f\|_{C_r^*G} := \sup\{\|\Xi_x(f)\| : x \in G^{(0)}\}.$$

定理 1.7.8 表明，对于所有 $f \in C_c^\infty(G, \Omega^{\frac{1}{2}})$，都有 $\|f\|_{C^*G} < +\infty$。用范数 $\|\cdot\|_{C^*G}$ 和 $\|\cdot\|_{C_r^*G}$ 对 $C_c^\infty(G, \Omega^{\frac{1}{2}})$ 进行完备化后，分别记为 C^*G 和 C_r^*G。由定理 1.7.8，对于任意满足 (1.27) 的 ω，

$$\|f\|_{C_r^*G} \leqslant \|f\|_{C^*G} \leqslant \|f\|_{L^1(G,\omega)}, \quad \forall f \in C_c^\infty(G, \Omega^{\frac{1}{2}}). \tag{1.37}$$

因此，我们有自然的 $*$-同态

$$L^1(G,\omega) \xrightarrow{i} C^*G \xrightarrow{j} C_r^*G.$$

映射 j 是满射，因为其像是稠密的，并且它是 $*$-代数之间的 C^*-同态。根据命题 1.5.2，映射 $j \circ i$ 是单射。

命题 1.8.1。 设 $A \subseteq G^{(0)}$ 是一个稠密子集。对于任意 $f \in C_r^*G$,

$$\|f\|_{C_r^*G} = \sup\{\|\Xi_x(f)\| : x \in A\}$$

证明。设 B 是 $C_c^\infty(G, \Omega^{\frac{1}{2}})$ 的 C^*-代数完备化，其中范数由 $\sup\{\|\Xi_x(f)\| : x \in A\}$ 给出。我们有一个满射 $*$-同态 $C_r^*G \to B$。我们需要证明该映射是单射。

引理 1.8.2。 如果 $f \in C_r^*G$ 和 $g \in C_c^\infty(G, \Omega^{\frac{1}{2},0})$，那么

$$G^{(0)} \to \mathbb{R}_+, \quad x \mapsto \left\|\Xi_x(f) g_{|G_x}\right\|_{L^2(G_x)} \tag{1.38}$$

是一个连续函数。

证明。若 $f \in C_c^\infty(G, \Omega^{\frac{1}{2}})$，则根据 $f * g \in C_c^\infty(G, \Omega^{\frac{1}{2}, 0})$ 的连续性和控制收敛定理，可知 (1.38) 连续。由 $C_c^\infty(G, \Omega^{\frac{1}{2}})$ 在 $C_r^*(G)$ 中的稠密性，结论得证。 □

设 $f \in C_r^* G$，使得对所有 $x \in A$ 都有 $\Xi_x(f) = 0$。若 $g \in C_c^\infty(G, \Omega^{\frac{1}{2}, 0})$，则根据引理 1.8.2 以及 A 的稠密性，$\Xi_x(f) g_{|G_x}$ 对所有 $x \in G^{(0)}$ 都为零。因此，由形如 $g_{|G_x}$ 的元素在 $L^2(G_x)$ 中的稠密性可知，$\Xi_x(f)$ 对所有 $x \in G^{(0)}$ 都为零。因此，$f = 0$。 □

设 $A \subseteq G^{(0)}$ 是一个闭饱和子集。限制映射 $C_c^\infty(G, \Omega^{\frac{1}{2}}) \to C_c^\infty(G_A, \Omega^{\frac{1}{2}})$ 和包含映射 $C_c^\infty(G_{A^c}, \Omega^{\frac{1}{2}}) \to C_c^\infty(G, \Omega^{\frac{1}{2}})$ 构成一个短正合列

$$0 \to C^* G_{A^c} \to C^* G \to C^* G_A \to 0. \tag{1.39}$$

它们还扩展为一个包含映射和一个满射

$$C_r^* G_{A^c} \hookrightarrow C_r^* G \twoheadrightarrow C_r^* G_A. \tag{1.40}$$

一般而言，(1.40) 在中间项处并不正合。

定义 1.8.3。如果一个拟李群胚 $G \rightrightarrows G^{(0)}$ 的自然满射 $C^* G \to C_r^* G$ 是同构，我们就称它具有弱包含性质（WCP）。

命题 1.8.4。设 $G \rightrightarrows G^{(0)}$ 是一个拟李群胚，$A \subseteq G^{(0)}$ 是一个闭饱和子集。若 G_A 和 G_{A^c} 具有 *WCP*，则 G 具有 *WCP*。

证明。 这由 (1.39) 和 (1.40) 立即得出。 □

命题 1.8.4 的逆命题不成立，参见 [Wil15]。因此，若一个拟李群胚对任意局部紧饱和子集 $A \subseteq G^{(0)}$ 都具有弱包含性质（WCP），我们就称它具有稳定弱包含性质（SWCP）。C. Anantharaman-Delaroche 猜想 SWCP 等价于拓扑可和性，参见 [Ana21]。下述命题显然是命题 1.8.4 的推论。

命题 1.8.5。设 $G \rightrightarrows G^{(0)}$ 是一个拟李群胚，$A \subseteq G^{(0)}$ 是一个闭饱和子集。当且仅当 G 具有 *SWCP* 时，群胚 G_A 和 G_{A^c} 具有 *SWCP*。

下述命题将在第 5.2 节中使用。

命题 1.8.6。设 G 是一个可和李群，它作用于微分空间 X，$H \rightrightarrows X$ 是一个拟李群胚。若存在一个满射下沉 $f\colon\ G \rtimes X \to H$，它是拟李群胚的一个态射，且在 X 上等于恒等式，那么 $H \rightrightarrows X$ 具有 *SWCP* 性质。

证明。 X 的饱和子集也是群胚 H 的饱和子集，因为 f 是满射。饱和子集就是 X的一个 G-不变子集。因此，不失一般性，我们只需证明 H 具有 WCP。拓扑可和性蕴含 WCP 性质，参见 [AR00，命题 6.1.8 和命题 3.3.5]。群胚 $G \rtimes X$ 具有拓扑可和性，见 [AR00，推论 2.2.10]。由 [AR00，命题 5.1.2] 可知，$H \rightrightarrows X$ 也具有拓扑可和性。

□

纤维化 C^*-代数及乘子。我们将使用C^*-代数乘子理论。更多详情请参阅 [Wil07, 第2节。3] 或 [Lan95] 。若 A 是一个C^*-代数，则将其乘子 C^*-代数记为 $\mathcal{M}(A)$ 。回顾一下，A 的乘子是一个线性映射 $T\colon\ A \to A$，且存在一个映射 $T^*\colon\ A \to A$（称为伴随），满足

$$T(ab) = T(a)b, \quad T(a)^* b = a^* T^*(b), \quad T^*(ab) = T^*(a)b, \quad \forall a, b \in A.$$

映射 T^* 是唯一的。由闭图定理可知，其存在性意味着 T 有界。代数 $\mathcal{M}(A)$ 配备 T 的算子范数后，是一个 C^*-代数。

我们还将采用 Kasparov [Kas88]意义下的纤维化 C^*-代数理论。关于该理论的介绍，请参阅 [Bla96] 和 [Wil07 的附录] 。设 C^*-代数 A定义在局部紧空间 X 上，则其纤维化是一个单位的 $*$-同态 $C_b(X) \to Z\mathcal{M}(A)$，其中 $C_b(X)$ 是定义在 X上的有界连续函数代数，$Z\mathcal{M}(A)$ 是乘子代数的中心。 A 在 $x \in X$ 处的纤维是 C^*-代数 $A_x := A/I_xA$, 其中 $I_x = \{f \in C_0(X) : f(x) = 0\}$， I_xA是由形如 fa 的元素的线性张成的闭包，其中 $f \in I_x$、 $a \in A$。

群胚的纤维化： 设 $G \rightrightarrows G^{(0)}$ 为一个拟李群胚， X 为一个微分空间，$\rho : G^{(0)} \to X$ 为满足 $\rho \circ r = \rho \circ s$的光滑映射。在这种情况下，对于每个局部闭子集$A \subseteq X$， $\rho^{-1}(A)$ 都是一个饱和子集。因此，我们可以构造拟李群胚 $G_{\rho^{-1}(A)} \rightrightarrows \rho^{-1}(A)$。

映射

$$C_c^\infty(X) \to \mathcal{L}(C_c^\infty(G)), \quad f \mapsto (g \mapsto \delta_{f\circ\rho} * g)$$

可扩张为一个含单位元的 $*$-同态 $C_b(X) \to \mathcal{M}(C^*G)$ 因此， C^*G 是一个 $C_0(X)$-C^*-代数 .

命题 1.8.7. 若 $G \rightrightarrows G^0$ 具有 *SWCP*，则对任意 $x \in X$，C^*G 在 x处的纤维（作为一个 $C_0(X)$-C^*-代数）等于 $C^*G_{\rho^{-1}(x)}$。

证明。 由 (1.39) 可知，只需证明 $I_xC^*G = C^*G_{\rho^{-1}(\{x\}^c)}$。群胚 $G_{\rho^{-1}(F^c)}$ 具有 WCP。显然的包含映射 $C_c^\infty(G_{\rho^{-1}(\{x\}^c)}) \hookrightarrow C_c^\infty(G, \Omega^{\frac{1}{2}})$ 映入 I_xC^*G。根据最大 C^*-代数的定义，这个包含映射可扩张为一个 $*$-同态 $C^*G_{\rho^{-1}(\{x\}^c)} \to I_xC^*G$。它是满射，因为其像稠密。包含映射 $C_c^\infty(G_{\rho^{-1}(\{x\}^c)}) \hookrightarrow C_c^\infty(G, \Omega^{\frac{1}{2}})$ 也可扩张为一个单射 $*$-同态 $C_r^*G_{\rho^{-1}(\{x\}^c)} \to C_r^*G$。由于 $G_{\rho^{-1}(\{x\}^c)}$ 具有 WCP，$C^*G_{\rho^{-1}(\{x\}^c)} = C_r^*G_{\rho^{-1}(\{x\}^c)}$。因此，映射 $C^*G_{\rho^{-1}(\{x\}^c)} \to I_xC^*G$ 是单射 □

若没有 SWCP，命题 1.8.7 一般不成立。

1.9 自同构

拟李群胚 G 的自同构是一个拟李群胚 α 态射： $G \to G$它是一个微分同胚。 α 的微分诱导出在 $A(G)$ 上的作用

$$\alpha_* : A(G)_x \to A(G)_{\alpha(x)}, \quad \alpha_*(X) = \mathrm{d}\alpha_x(X) \tag{1.41}$$

以及在 $C^\infty(G^{(0)}, A(G))$ 上的作用，其定义为

$$\alpha_* : C^\infty(G^{(0)}, A(G)) \to C^\infty(G^{(0)}, A(G)), \quad \alpha_*(X)(x) = \alpha_*(X(\alpha^{-1}(x))).$$

根据 (1.41)，对于任意 k， $l \in \mathbb{C}$，我们得到一个映射

$$\alpha_* : \Omega^{k,l}(G)_\gamma \to \Omega^{k,l}(G)_{\alpha(\gamma)}, \quad \gamma \in G$$

它通过以下方式诱导出在 $C_c^\infty(G, \Omega^{\frac{1}{2}})$ 上的作用

$$\alpha_*(f)(\gamma) = \alpha_*(f(\alpha^{-1}(\gamma))).$$

此作用按如下公式延拓到 $C_r^{-\infty, s}(G, \Omega^{\frac{1}{2}})$

$$\alpha_*(u) * f = \alpha_*(u * (\alpha^{-1})_*(f)), \quad f * \alpha_*(u) = \alpha_*((\alpha^{-1})_*(f) * u).$$

映射 $\alpha_*: C_r^{-\infty,\,s}(G,\,\Omega^{\frac{1}{2}}) \to C_r^{-\infty,\,s}(G,\,\Omega^{\frac{1}{2}})$ 是一个 $*$-代数自同构，并满足

$$\mathrm{supp}(\alpha_*(u)) = \alpha(\mathrm{supp}(u)), \quad \forall u \in C_{r,s}^{-\infty}(G, \Omega^{\frac{1}{2}}). \tag{1.42}$$

对于任意 $f \in C_c^\infty(G, \Omega^{\frac{1}{2}})$,

$$\|\alpha_*(f)\|_{C^*G} = \|f\|_{C^*G}\,, \quad \|\alpha_*(f)\|_{C_r^*G} = \|f\|_{C_r^*G}\,. \tag{1.43}$$

因此， α_* 延拓为一个 $*$-代数自同构 $\alpha_*: C_r^*G \to C_r^*G$ 和 $\alpha_*: C^*G \to C^*G$.

第2章

多重分次次黎曼几何

记号与约定：本文余下部分中，我们固定一个无边界的光滑流形 M 以及一个自然数 $\nu \in \mathbb{N}$，它表示多参数的数量。

i. 若 $t \in \mathbb{R}_+^\nu$, $k \in \mathbb{C}^\nu$，则

$$t^k := t_1^{k_1} \cdots t_\nu^{k_\nu} \in \mathbb{C} \tag{2.1}$$

按照约定，对于所有 $z \neq 0$，$0^0 = 1$ 且 $0^z = 0$。记号 (2.1) 仅用于以下两种情形之一：$t \in \mathbb{R}_+^\nu$ 且 $k \in \mathbb{Z}_+^\nu$，或 $t \in (\mathbb{R}_+^\times)^\nu$ 且 $k \in \mathbb{C}^\nu$。依赖这一约定的关键事实是，若 $k \in \mathbb{Z}_+^\nu$，则映射 $t \in \mathbb{R}_+^\nu \mapsto t^k \in \mathbb{C}$ 是光滑的。

ii. 设 $k, l \in \mathbb{C}^\nu$。若 $l - k \in \mathbb{Z}_+^\nu$，我们使用偏序 $k \preceq l$。由此得到关系：若$k \preceq l$ 且 $k \neq l$，则 $k \prec l$。符号 $\preceq$ 和 $\prec$ 专用于该偏序。

iii. 若 $\mathfrak{g}$ 是幂零李代数且 $a, b \in \mathfrak{g}$，则我们记为

$$\mathrm{BCH}(a,b) := a + b - \frac{[a,b]}{2} + \frac{1}{12}[a,[a,b]] - \frac{1}{12}[b,[a,b]] + \cdots \tag{2.2}$$

a 与 b 的 Baker-Campbell-Hausdorff 乘积。由于 $\mathfrak{g}$ 是幂零的，它是一个有限和。我们通常用记号 $a \cdot b$ 代替 BCH(a, b)。我们的 BCH公式与经典公式相差一个符号，也就是说，它是反李代数的 BCH公式。关于我们作此选择的动机，请参见（2.3）。 a 的逆映射，即 $-a$，通常记作 a^{-1}。

iv. 我们回顾一下，若 $X \in \mathcal{X}(M)$和 $x \in M$，则 $e^X \cdot x$表示 X从 x出发在时间 1 处的流（若存在）。因此， X 在时间 t 处的流等于 $e^{tX} \cdot x$。**我们强调，我们从不使用时变流**。在全文中，我们将使用配备线性映射 6 : $V \to \mathcal{X}(M)$的实向量空间V。为简化记号，我们将用 $e^v \cdot x$ 代替 $e^{\natural(v)} \cdot x$。这不会引起混淆，因为映射 6 的含义可由上下文确定。若 v, $w \in V$，则我们写作 $e^v e^w \cdot x$ 而非 $e^v \cdot (e^w \cdot x)$。我们指出，在某些情况下，V 将是一个幂零李代数。我们在 BCH公式中的符号约定意味着，若 6 : $V \to \mathcal{X}(M)$ 是李代数同态，则

$$e^{\mathrm{BCH}(v,w)} \cdot x = e^v e^w \cdot x. \tag{2.3}$$

一般来说，6 : $V \to \mathcal{X}(M)$ 不会是李代数同态。它只会保留某些 e

李括号，并允许存在某个误差项，见 (3.4)。这会给 (2.3) 增加一个误差项，最终由引理 3.2.3 解决，见 (3.18)。

2.1 多重分次次黎曼结构

定义 2.1.1. 在 M 上深度为 $N \in \mathbb{N}^\nu$ 的 ν-分次次黎曼结构是一族$(\mathcal{F}^k)_{k\in\mathbb{Z}_+^\nu}$，由$\mathcal{X}(M)$的有限生成 $C^\infty(M,\ \mathbb{R})$-子模组成，满足：

i. 对任意 $k,\ l \in \mathbb{Z}_+^\nu$，若 $k \preceq l$，则$\mathcal{F}^k \subseteq \mathcal{F}^l$。

ii. 有$\mathcal{F}^0 = 0$ 以及

$$\mathcal{F}^{(N_1,0,\cdots,0)} = \mathcal{F}^{(0,N_2,0,\cdots,0)} = \cdots = \mathcal{F}^{(0,\cdots,0,N_\nu)} = \mathcal{X}(M). \tag{2.4}$$

iii. 对任意 $k,\ l \in \mathbb{Z}_+^\nu$,

$$[\mathcal{F}^k, \mathcal{F}^l] \subseteq \mathcal{F}^{k+l}. \tag{2.5}$$

注意到，若对某个 $i \in [\![1,\ \nu]\!]$有 $N_i \leqslant k_i$，则$\mathcal{F}^k = \mathcal{X}(M)$。因此，要定义深度为 N的 ν-分次次黎曼结构，只需对所有 $i \in [\![1,\ \nu]\!]$ 以及 $k \neq 0$、且满足 $k_i < N_i$的 $k \in \mathbb{Z}_+^\nu$ 定义$\mathcal{F}^k$。

注记 2.1.2. 要使任何 ν-分次次黎曼结构的例子存在，$\mathcal{X}(M)$必须是有限生成的 $C^\infty(M,\mathbb{R})$-模。这一点总是成立的，见命题 1.1.9。

例 2.1.3. i. 椭圆算子理论对应于平凡滤过，其中$\nu = 1$ 和 $N = 1$。

ii. 设 $X_1, \cdots, X_d$是一族满足深度为 $N \in \mathbb{N}$的 Hörmander 条件的向量场，即对于任意 $x \in M$, T_xM都由长度为 $\leqslant N$的 X_i迭代对易子线性张成。我们定义一个深度为 N 的 1-分次次黎曼结构，规定 $\mathcal{F}^i$ 是由使用向量场 $X_\bullet$构成的所有长度为 $\leqslant i$ 的迭代李括号生成的模。

iii. 设 $X_1, \cdots, X_d$和 $Y_1, \cdots, Y_{d'}$是两族向量场，分别满足深度为 $N \in \mathbb{N}$ 和 $N' \in \mathbb{N}$ 的 Hörmander 条件。我们定义一个深度为 (N, N') 的 2-分次次黎曼结构，规定 $\mathcal{F}^{(i,j)}$是由使用向量场 $X_\bullet$和 $Y_\bullet$构成的长度为 $\leqslant i + j$的迭代李括号生成的模，并且向量场 $X_\bullet$出现 $\leqslant i$次，向量场 $Y_\bullet$出现 $\leqslant j$次。

拉回：可以沿浸没拉回 ν-分次次黎曼结构。设ϕ：$M' \to M$是光滑淹没，$\mathcal{F} \subseteq \mathcal{X}(M)$是一个 $C^\infty(M,\ \mathbb{R})$-子模。我们定义 $\phi^*(\mathcal{F})$为$\mathcal{X}(M')$的 $C^\infty(M',\ \mathbb{R})$-子模，由所有满足以下条件的 $X \in \mathcal{X}(M')$组成：存在$X_1,\ \cdots,\ X_n \in \mathcal{F}$和 $g_1,\ \cdots,\ g_n \in C^\infty(M')$使得

$$\mathrm{d}\phi(X) = \sum_{i=1}^n g_i X_i \circ \phi \in C^\infty(M', \phi^*(TM)).$$

命题2.1.4。若 $F^\bullet$ 是定义在 M 上的深度为 N的 ν-分次次黎曼结构，则 $\phi^*(F^\bullet)$是定义在 M'上的深度为 N的 ν-分次次黎曼结构。

证明。 令 $k \in \mathbb{Z}_+^\nu$, $X_1, \cdots, X_n \in \mathcal{F}^k$为生成元。我们将证明 $\phi^*(\mathcal{F}^k)$ 是有限生成的。由于 ϕ是浸没，对于每个 $i \in [\![1, n]\!]$，都存在 $X_i' \in \mathcal{X}(M')$使得 $\mathrm{d}\phi(X_i') = X_i \circ \phi$。根据命题 1.1.9，$C^\infty(M',$ $\ker(\mathrm{d}\phi))$是一个有限生成的 $C^\infty(M',\mathbb{R})$-模。令 $Y_1, \cdots, Y_m \in$

$C^\infty(M', \ker(\mathrm{d}\phi))$ 为一些生成元。显然， $X'_1, \cdots, X'_n, Y_1, \cdots, Y_m$ 生成 $\phi^*(\mathcal{F}^k)$。最后，只需验证 (2.5) 在生成元上成立，这由引理1.3.5得出。 □

在本章余下部分中，我们固定一个 ν-分次次黎曼结构 $\mathcal{F}^\bullet$ 于 M 上。

多重分次基： 模 $\mathcal{F}^\bullet$ 是有限生成的。众所周知，避免使用线性基时，线性代数会简单得多。不过，我们仍需使用$\mathcal{F}^\bullet$的生成元。因此，为了避免使用涉及指标的复杂记号，我们引入以下概念。

定义2.1.5。一个 ν-分次基是一个二元组 $(V, \natural)$，其中 $V = \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}^\nu_+} V^k$ 是一个 ν-分次有限维实向量空间，$\natural : V \to \mathcal{X}(M)$ 是一个 $\mathbb{R}$-线性映射，满足：

i. 有 $V^0 = 0$。

ii. 对每个 $k \in \mathbb{Z}^\nu_+$， $\natural(V^k) \subseteq \mathcal{F}^k$。

iii. 对每个 $k \in \mathbb{Z}^\nu_+$，$\mathcal{F}^k$ 等于由 $\natural\left(\bigoplus_{l\preceq k} V^l\right)$生成的 $C^\infty(M, \mathbb{R})$-模。

Dil在 ν-分次基： 设 $(V, \natural)$ 是一个 ν-分次基， $\lambda \in \mathbb{R}^\nu_+$。我们定义膨胀

$$\alpha_\lambda : V \to V, \quad \alpha_\lambda\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^\nu_+} v_k\right) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^\nu_+} \lambda^k v_k, \quad \text{where } v_k \in V^k \text{ and } \lambda^k \text{ is defined in (2.1).} \tag{2.6}$$

注记2.1.6。本文将定义多种不同的膨胀。为避免混淆，它们都记作 α_λ。需要特别注意的是，有些膨胀在 $\lambda \in \mathbb{R}^\nu_+$ 上良定义，而另一些仅在 $\lambda \in (\mathbb{R}^\times_+)^\nu$上良定义；例如，参见第2.6节，更具体地说是定理2.6.6，其中这一区别起着重要作用。

赋值映射： 对于任意 $x \in M$ 和 $t \in \mathbb{R}^\nu_+\backslash 0$，我们定义

$$\natural_{x,t} : V \to T_xM, \quad \natural_{x,t}(v) := \natural(\alpha_t(v))(x).$$

映射 $\natural_{x,0}$ 的定义更为微妙，将在下一节给出。由（2.4）可知，对于任意 $x \in M$ 和 $t \in \mathbb{R}^\nu_+\backslash 0$，映射 $\natural_{x,t}$都是满射。因此，$\ker(\natural_{x,t})$ 定义了 $\mathrm{Grass}(V)$中的一个元素；$\mathrm{Grass}(V)$是 V 的线性子空间构成的格拉斯曼流形，这些子空间的余维数等于 $\dim(M)$。由于映射$\natural_{x,t}$ 关于 x和 t光滑依赖，因此以下包含映射是光滑的：

$$M \times \mathbb{R}^\nu_+\backslash\{0\} \to \mathrm{Grass}(V) \times M \times \mathbb{R}^\nu_+, \quad (x, t) \mapsto (\ker(\natural_{x,t}), x, t). \tag{2.7}$$

我们无法将这个包含映射延拓到 $t = 0$，因为对每个固定的 x，$\lim_{t\to 0}\ker(\natural_{x,t})$ 都存在，但一般而言，它关于 x 并不一致。我们将在下一节通过爆破过程解决这个问题。本质上，我们将取 (2.7) 的像的闭包，并将其记为 $\mathbb{G}^{(0)}$，即我们的爆破空间。

2.2 多重分次次黎曼几何中的切丛

摘要： 在本节中，我们定义了 $A(\mathcal{G})$ 中的切丛，其中 ν表示分次次黎曼几何。该切丛在研究多参数极大亚椭圆微分算子时发挥着基础性作用。例如：

i. $A(\mathcal{G})$ 的对偶与多参数极大亚椭圆微分算子的主符号的定义域自然相关，见（4.11）。ii. $A(\mathcal{G})$ 的庞特里亚金特征类以一种类似于阿蒂亚-辛格指标公式的方式进入我们的指标公式，但由于主符号的非交换性，这种方式更为微妙。这是本系列文章第二部分的内容。iii. 将 $A(\mathcal{G})$ 的密度丛平凡化，会导出多参数极大亚椭圆微分算子的热核渐近行为和维尔定律中的首项。这是本系列文章第三部分的内容。

$A(\mathcal{G})$ 的特别之处在于，其底空间不是 M ，而是 M的拓扑爆破，我们将其记为$\mathcal{G}^{(0)}$。我们还构造了一个实向量丛 $A(\mathbb{G}) \to \mathbb{G}^{(0)}$ ，它在丛 $TM \to M$ 与 $A(\mathcal{G}) \to \mathcal{G}^{(0)}$之间建立了一个变形。正如记号所示，丛 $A(\mathcal{G})$ 和 $A(\mathbb{G})$ 分别是我们在第2.3节构造的拟李群胚$\mathcal{G} \rightrightarrows \mathcal{G}^{(0)}$ 和 $\mathbb{G} \rightrightarrows \mathbb{G}^{(0)}$的李代数丛。这将使 $A(\mathcal{G})$ 和 $A(\mathbb{G})$的光滑截面空间具有切丛所应有的李括号。

多重分次密切群：引入以下记号很有用

$$\mathcal{F}^{\prec k} := \sum_{l \in \mathbb{Z}_+^\nu, l \prec k} \mathcal{F}^l, \quad \forall k \in \mathbb{Z}_+^\nu.$$

Clearly，$\mathcal{F}^{\prec k} \subseteq \mathcal{F}^k$和$\mathcal{F}^{\prec k}$ 是一个有限生成的 $C^\infty(M,\mathbb{R})$-模。按照约定，$\mathcal{F}^{\prec 0} = 0$.

定义 2.2.1。该 ν-分次密切李代数在$\mathcal{F}^\bullet$ 于 x 是向量空间

$$\mathfrak{g}_x := \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}_+^\nu} \frac{\mathcal{F}^k}{\mathcal{F}^{\prec k} + C_x^\infty(M,\mathbb{R})\mathcal{F}^k}, \text{ where } C_x^\infty(M,\mathbb{R}) = \{f \in C^\infty(M,\mathbb{R}) : f(x) = 0\}. \tag{2.8}$$

若 $X \in \mathrm{F}^k$，则 $[X]_{k,x}$ 表示其在 $\mathrm{F}^k/(\mathrm{F}^{\prec k} + C_x^\infty(M,\mathbb{R})\mathrm{F}^k)$ 中的类。若 $f \in C^\infty(M,\mathbb{R})$，则 $[fX]_{k,x} = f(x)[X]_{k,x}$。该恒等式连同模 F^k有限生成这一事实，蕴含 $\mathrm{F}^k/(\mathrm{F}^{\prec k} + C_x^\infty(M,\mathbb{R})\mathrm{F}^k)$ 是有限维实向量空间。由于当对某个 $i \in [\![1,\nu]\!]$ 有 $k_i \geqslant N_i$ 时 $\mathrm{F}^k = \mathrm{X}(M)$，我们推得 $\mathfrak{g}_x$ 是有限维向量空间。我们通过如下公式在 $\mathfrak{g}_x$ 上定义李括号

$$[[X]_{k,x}, [Y]_{l,x}] := [[X,Y]]_{k+l,x}, \quad \forall X \in \mathcal{F}^k, Y \in \mathcal{F}^l. \tag{2.9}$$

空间 $\mathfrak{g}_x$ 是幂零李代数，因为当对某个 $i \in [\![1,\nu]\!]$ 有$k_i > N_i$ 时，商 $\mathcal{F}^k/(\mathcal{F}^{\prec k} + C_x^\infty(M,\mathbb{R})\mathcal{F}^k)$ 为零。此处我们利用假设 $\mathcal{F}^0 = 0$。空间 $\mathfrak{g}_x$ 成为一个李群，其 $a, b \in \mathfrak{g}_x$ 的乘积等于 $\mathrm{BCH}(a,b)$。由于 $\mathfrak{g}_x$ 是 ν-分次向量空间，我们可以像 (2.6) 中那样定义 $\alpha_\lambda : \mathfrak{g}_x \to \mathfrak{g}_x$。由 (2.9) 与 (2.2)， α_λ 是李代数同态和李群同态。

切锥：令 $x \in M$, $(V, \natural)$ 为一个 ν 分次基。我们定义线性映射

$$\natural_{x,0} : V \to \mathfrak{g}_x, \quad \natural_{x,0}\left(\sum_{k \in \mathbb{Z}_+^\nu} v_k\right) = \sum_{k \in \mathbb{Z}_+^\nu} [\natural(v_k)]_{k,x}, \quad v_k \in V^k. \tag{2.10}$$

根据定义2.1.5.iii，$\natural_{x,\,0}$ 是满射。它也与膨胀作用可交换。

引理 2.2.2. 设 $L \in \mathrm{Grass}(V)$, $(x_n, t_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq M \times \mathbb{R}^\nu_+\backslash\{0\}$ 是一个满足以下条件的序列

$$(\ker(\natural_{x_n,t_n}), x_n, t_n) \to (L, x, 0) \in \mathrm{Grass}(V) \times M \times \mathbb{R}^\nu_+.$$

那么，核$(\natural_{x,\ 0}) \subseteq L$。

对于 V 中的线性子空间 L，当且仅当存在某个子空间 $L' \subseteq \mathfrak{g}_x$，使得 ker$(\natural_{x,\ 0}) \subseteq L$ 时，$L = \natural^{-1}_{x,\ 0}(L')$。在这种情况下，$L' = \natural_{x,\ 0}(L)$。现在我们可以定义切锥

定义 2.2.3。余维数为 dim(M) 的线性子空间 $L \subseteq \mathfrak{g}_x$，如果存在一个序列 $(x_n, t_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq M \times \mathbb{R}^\nu_+\backslash\{0\}$，使得 $(\text{核}(\natural_{x_n,\ t_n}),\ x_n,\ t_n) \to (\natural^{-1}_{x,\ 0}(L),\ x,\ 0)$ 属于 Grass$(V) \times M \times \mathbb{R}^\nu_+$，则称其为 x 处的切锥。我们将 x 处切锥的集合记为 $\mathcal{G}^{(0)}_x$。

注记 2.2.4。在定义 2.2.3 中，要求 t_n 为非负数相当重要。如果我们改为考虑 $t_n \in \mathbb{R}^\nu\backslash 0$，通常会得到更多的切锥，例如参见 (2.21) 之后关于 ζ 的条件。

由于 Grass(V) 是紧的，对于任意满足 $x_n \to x, t_n \to 0$ 的序列 $(x_n, t_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq M \times \mathbb{R}^\nu_+\backslash\{0\}$，都存在一个子列，使得 ker$(\natural_{x_n,t_n})$ 收敛到 V 的某个子空间。引理 2.2.2 表明，ker$(\natural_{x_n,t_n})$ 的极限必为 $\natural^{-1}_{x,0}(L)$ 的形式，其中 $L \subseteq \mathfrak{g}_x$ 是余维数为 dim(M) 的线性子空间。因此，对于所有 $x \in M$，$\mathcal{G}^{(0)}_x$ 都非空。所有切锥的集合记为

$$\mathcal{G}^{(0)} := \{(L, x) : x \in M, L \in \mathcal{G}^{(0)}_x\}$$

我们还定义集合

$$\mathbb{G}^{(0)} := M \times \mathbb{R}^\nu_+\backslash\{0\} \sqcup \mathcal{G}^{(0)} \times \{0\}.$$

对于任意 ν-分次基 $(V, \natural)$，我们有如下单射

$$\begin{aligned} \mathrm{Grass}(\natural) : \mathbb{G}^{(0)} &\hookrightarrow \mathrm{Grass}(V) \times M \times \mathbb{R}^\nu_+ \\ (x,t) &\mapsto (\ker(\natural_{x,t}), x, t), \qquad (x,t) \in M \times \mathbb{R}^\nu_+\backslash\{0\} \\ (L,x,0) &\mapsto (\natural^{-1}_{x,0}(L), x, 0), \qquad (L,x,0) \in \mathcal{G}^{(0)} \times \{0\} \end{aligned} \tag{2.11}$$

根据切锥的定义，其像是闭的。我们赋予 $\mathbb{G}^{(0)}$ 和 $\mathcal{G}^{(0)}$ 从 Grass$(V) \times M \times \mathbb{R}^\nu_+$ 继承的子空间拓扑和子微分结构。先验地，$\mathbb{G}^{(0)}$ 取决于 ν-分次基 $(V, \natural)$ 的选择。下一定理将表明，事实并非如此。

定理 2.2.5. *i.* 对任意 $x \in M$，集合 G^0_x 不依赖于 ν 分次基 $(V, \natural)$ 的选择。此外，$\mathbb{G}^{(0)}$ 和 $G^{(0)}$ 上的拓扑与微分结构也不依赖于 ν 分次基 $(V, \natural)$ 的选择。

ii. 自然投影

$$\pi_{\mathbb{G}^{(0)}} : \mathbb{G}^{(0)} \to M \times \mathbb{R}^\nu_+, \quad \pi_{\mathbb{G}^{(0)}}(x,t) = (x,t), \quad \pi_{\mathbb{G}^{(0)}}(L,x,0) = (x,0) \tag{2.12}$$

是真光滑满射映射。

iii. 包含映射 $M \times \mathbb{R}^\nu_+\backslash\{0\} \hookrightarrow \mathbb{G}^{(0)}$ 是一个开光滑嵌入，且其像稠密。

本文始终用记号 $\pi_{\mathbb{G}^{(0)}}$ 表示投影映射 (2.12)。现在，我们根据序列来描述 $\mathbb{G}$ 的拓扑，这可由定理 2.2.5.i 直接得到。

命题 2.2.6。*i.* 序列 $(x_n, t_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq M \times \mathbb{R}^\nu_+\backslash\{0\}$ 收敛到 $(L, x, 0)$（在 $\mathbb{G}^{(0)}$ 中），当且仅当对于任意（或某个）ν-分次基 $(V, \natural)$，$x_n \to x$, $t_n \to 0$，核$(\natural_{x_n,\ t_n}) \to \natural^{-1}_{x,\ 0}(L)$。

ii. 序列 $(L_n, x_n) \subseteq G^{(0)}$ 收敛到 (L, x)（在 $G^{(0)}$ 中），当且仅当对于任意（或某个）ν-分次基 $(V, \natural)$, $x_n \to x$, $\natural_{x_n}^{-1}{}_{,0}(L_n) \to \natural_x^{-1}{}_{,0}(L)$。

注记 2.2.7. 一般而言，$\mathbb{G}^{(0)}$ 不是光滑流形。事实上，$\mathbb{G}^{(0)}$ 可能表现出病态性质。若 M 连通，则 $\mathbb{G}^{(0)}$ 连通，因为它是 $M \times \mathbb{R}_+^\nu \backslash \{0\}$的闭包。但即便 M 道路连通，$\mathbb{G}^{(0)}$ 一般也不是道路连通的。

切丛：设 $A(\mathbb{G})$ 为 $\mathbb{G}^{(0)}$ 上的实向量丛，其在 $(x,t) \in M \times \mathbb{R}_+^\nu \backslash \{0\}$ 上的纤维等于 $T_x M$，且其在 $(L, x, 0)$ 上的纤维等于 $\frac{\mathfrak{g}_x}{L}$。设 $(V, \natural)$ 为 ν-分次基。存在向量丛的自然态射 $A(\natural)$：$V \times \mathbb{G}^{(0)} \to A(\mathbb{G})$，定义如下:

$$A(\natural)(v, x, t) = (\natural_{x,t}(v), x, t), \quad A(\natural)(v, L, x, 0) = (\natural_{x,0}(v) \bmod L, x, 0). \tag{2.13}$$

映射 $A(\natural)$ 显然是满射。我们赋予 $A(\mathbb{G})$ 商拓扑。我们还将$C^\infty(A(\mathbb{G}))$ 定义为使得 $f \circ A(\natural)$ 光滑的 f： $A(\mathbb{G}) \to \mathbb{C}$ 的空间。

定理 2.2.8. *i.* 拓扑空间 $A(\mathbb{G})$ 是可度量化、局部紧且第二可数的，$C^\infty(A(\mathbb{G}))$ 是有限维微分结构，且 $A(\natural)$ 是浸没。

ii. 微分空间 $A(\mathbb{G})$ 是 $\mathbb{G}^{(0)}$ 上的实向量丛，参见定义 *1.1.8*。

iii. $A(\mathbb{G})$ 上的拓扑和微分结构不依赖于 $(V、\ \natural)$ 的选择。

现在我们给出丛 $A(\mathbb{G})$ 的一些自然的光滑截面示例。

命题 2.2.9. 对于每个 $k \in \mathbb{Z}_+^\nu$、$X \in \mathcal{F}^k$，由下式定义的 $A(\mathbb{G})$ 的截面 $\theta_k(X)$

$$\theta_k(X)(x,t) = t^k X(x) \in T_x M, \quad \theta_k(X)(L, x, 0) = [X]_{k,x} \bmod L \in \frac{\mathfrak{g}_x}{L}$$

是光滑的。此外，族 $(\theta_k(X))_{k \in \mathbb{Z}_+^\nu, X \in \mathcal{F}^k}$ 作为 $C^\infty(\mathbb{G}^{(0)}、\ \mathbb{R})$-模生成 $C^\infty(\mathbb{G}^{(0)}、\ A(\mathbb{G}))$。

我们用 $A(\mathcal{G})$ 表示 $A(\mathbb{G})$ 在$\mathcal{G}^{(0)}$上的限制。

切锥是李子代数：回忆一下，根据 (2.9)，$\mathfrak{g}_x$ 是一个李代数；根据 (2.2)，它是一个李群。

命题 2.2.10。设 $x \in M$, $L \subseteq \mathfrak{g}_x$ 是一个切锥。

i. 线性子空间 L 是 $\mathfrak{g}_x$ 的李子代数（因此也是 $\mathfrak{g}_x$的闭李子群）。*ii.* 如果 $g \in \mathfrak{g}_x$，那么 gLg^{-1} 是 x处的一个切锥。

2.3 切群胚

根据命题 2.2.10，对于每个 $x \in M$，仿照例 1.2.1.iv，我们可以定义 $\mathfrak{g}_x$ 被$\mathcal{G}_x^{(0)}$所作的商群胚。我们将所有此类群胚作不交并，令 x 取遍所有取值，即令

$$\mathcal{G} = \{(A, x) : x \in M, A = gLh \text{ for some } g, h \in \mathfrak{g}_x, L \in \mathcal{G}_x^{(0)}\}$$

我们还定义空间

$$\mathbb{G} := M \times M \times \mathbb{R}_+^\nu \backslash \{0\} \sqcup \mathcal{G} \times \{0\}.$$

在本节中，我们为 $\mathbb{G}$ 赋予群胚结构、拓扑和微分结构，使其成为拟李群胚。

群胚结构： $\mathbb{G}$的对象空间是 $\mathbb{G}^{(0)}$。其结构态射为

$$\begin{aligned}
&s:\mathbb{G}\to\mathbb{G}^{(0)}, && s(y,x,t)=(x,t), && s(A,x,0)=(A^{-1}A,x,0)\\
&r:\mathbb{G}\to\mathbb{G}^{(0)}, && r(y,x,t)=(y,t), && r(A,x,0)=(AA^{-1},x,0)\\
&u:\mathbb{G}^{(0)}\to\mathbb{G}, && u(x,t)=(x,x,t), && u(L,x,0)=(L,x,0)\\
&\iota:\mathbb{G}\to\mathbb{G}, && \iota(y,x,t)=(x,y,t), && \iota(A,x,0)=(A^{-1},x,0)\\
&m:\mathbb{G}^{(2)}\to\mathbb{G}, && m((z,y,t),(y,x,t))=(z,x,t), && m((B,x,0),(A,x,0))=(BA,x,0)
\end{aligned}$$

换言之，群胚 $\mathbb{G}$ 是不交并：对每个 $t\in\mathbb{R}^\nu_+\backslash\{0\}$，都有一个对偶群胚 $M\times M$ 的副本；对每个 $x\in M$，都有一个 $\mathfrak{g}_x$ 关于 $\mathcal{G}^{(0)}_x$ 的商群胚副本。

拓扑与微分结构： 设 $(V,\natural)$ 是一个 ν-分次基。下面的映射在本文中起着核心作用

$$\begin{aligned}
\mathcal{Q}_V:\mathrm{Dom}(\mathcal{Q}_V)\subseteq V\times\mathbb{G}^{(0)}&\to\mathbb{G}\\
(v,x,t)&\mapsto(e^{\alpha_t(v)}\cdot x,x,t)\\
(v,L,x,0)&\mapsto(\natural_{x,0}(v)L,x,0).
\end{aligned}$$

其定义域定义如下：考虑映射

$$V\times M\times\mathbb{R}^\nu_+\backslash 0\to M\times M\times\mathbb{R}^\nu_+\backslash 0,\quad (v,x,t)\mapsto(e^{\alpha_t(v)}\cdot x,x,t)\tag{2.14}$$

设 U 是 $V\times M\times\mathbb{R}^\nu_+\backslash 0$ 的开子集，使得 (2.14) 是良定义的浸没，

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathrm{Dom}}(\mathcal{Q}_V)&=U\sqcup V\times M\times\{0\} &&\subseteq V\times M\times\mathbb{R}^\nu_+\\
\mathrm{Dom}(\mathcal{Q}_V)&=U\sqcup V\times\mathcal{G}^{(0)}\times\{0\} &&\subseteq V\times\mathbb{G}^{(0)}.
\end{aligned}\tag{2.15}$$

$\widetilde{\quad}$集合 $\mathrm{Dom}(\mathcal{Q}_V)$ 是开的，因为对任意 $v\in V,x\in M$，当 t 足够接近 0 但不为 0 时，$(v,x,t)\in U$，由 (2.4) 可知。集合 $\mathrm{Dom}(\mathcal{Q}_V)$ 是开的，因为 $\mathrm{Dom}(\mathcal{Q}_V)=\pi^{-1}_{V\times\mathbb{G}^{(0)}}(\widetilde{\quad}\mathrm{Dom}(\mathcal{Q}_V))$，其中

$$\pi_{V\times\mathbb{G}^{(0)}}:V\times\mathbb{G}^{(0)}\to V\times M\times\mathbb{R}^\nu_+,\quad \pi_{V\times\mathbb{G}^{(0)}}(v,\gamma)=(v,\pi_{\mathbb{G}^{(0)}}(\gamma))\tag{2.16}$$

是自然投影，由定理 2.2.5.ii 可知它是连续的。

定义 2.3.1。 i. 子集 $U\subseteq\mathbb{G}^{(0)}$ 是开集，当且仅当满足以下条件：

- 子集 $U\cap(M\times M\times\mathbb{R}^\nu_+\backslash\{0\})$ 是开集。
- 对于任意 ν-分次基 $(V,\natural)$，$\mathcal{Q}_V^{-1}(U)$ 都是 $V\times\mathbb{G}^{(0)}$ 的开子集。

换言之，如果 T 是一个拓扑空间，那么映射 $f:\mathbb{G}\to T$ 连续，当且仅当 $f_{|M\times M\times\mathbb{R}^\nu_+\backslash\{0\}}$ 以及对于每个 ν-分次基 $(V,\natural)$，$f\circ\mathcal{Q}_V$ 都是连续的。

ii. 函数 $f:\mathbb{G}\to\mathbb{C}$ 光滑，当且仅当满足以下条件：

- 映射 $f_{|M\times M\times\mathbb{R}^\nu_+\backslash\{0\}}$ 是光滑的。
- 对于任意 ν-分次基 $(V,\natural)$，映射 $f\circ\mathcal{Q}_V$：定义域 $\mathrm{Dom}(\mathcal{Q}_V)\to\mathbb{C}$ 都是光滑的，其中定义域 $\mathrm{Dom}(\mathcal{Q}_V)\subseteq V\times\mathbb{G}^{(0)}$ 从 V和 $\mathbb{G}^{(0)}$继承了微分结构。

定理 2.3.2. *i.* 在定义 *2.3.1* 中，可以将“对于任意 ν-分次基”替换为“对于某个ν-分次基”。拓扑和光滑函数空间均不发生变化。

ii. 拓扑空间 $\mathbb{G}$ 是可度量化、局部紧且第二可数的。

iii. 光滑结构 $C^\infty(\mathbb{G})$ 在 $\mathbb{G}$ 上定义了一个有限维微分结构。

iv. 包含映射 $M\times M\times\mathbb{R}^\nu_+\backslash\{0\}\hookrightarrow\mathbb{G}$ 是开光滑嵌入，且其像稠密。

v. 对任意 ν-分次基 $(V,\natural)$，映射 Q_V 是浸没。

我们用序列来描述拓扑。

定理 2.3.3. *i.* 序列 $(y_n,x_n,t_n)_{n\in\mathbb{N}}\subseteq M\times M\times\mathbb{R}^\nu_+\backslash\{0\}$ 收敛到 $\mathbb{G}$ 中的点 $(A,x,0)$，当且仅当满足以下条件：

> *I.* 序列 $(x_n,t_n)_{n\in\mathbb{N}}\subseteq M\times\mathbb{R}^\nu_+\backslash\{0\}$ 在 $\mathbb{G}^{(0)}$ 中收敛到 $(A^{-1}A,x,0)$。*II.* 对任意（或某个）ν-分次基 $(V,\natural)$，存在[1] $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}\subseteq V$ 和 $v\in\natural_{x,\ 0}^{-1}(A)$，使得 $v_n\to v$ 且 $e^{\alpha_{t_n}(v_n)}\cdot x_n=y_n$。
>
> 此外，如果 (y_n,x_n,t_n) 收敛到 $(A,x,0)$，那么对于任意 $v\in\natural_{x,\ 0}^{-1}(A)$，存在$(v_n)_{n\in\mathbb{N}}\subseteq V$，使得 $v_n\to v$ 且 $e^{\alpha_{t_n}(v_n)}\cdot x_n=y_n$。

ii. 序列 $(A_n,x_n)_{n\in\mathbb{N}}\subseteq G$ 收敛到 (A,x) 中的 G，当且仅当满足以下条件：

> *I.* 序列 $(A_n^{-1}A_n,x_n)_{n\in\mathbb{N}}\subseteq G^{(0)}$ 在 $G^{(0)}$的拓扑中收敛到 $(A^{-1}A,x)$。*II.* 对于任意一个（或某一个）ν-分次基 $(V,\natural)$，存在 $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}\subseteq V$ 和 $v\in\natural_{x,\ 0}^{-1}(A)$，使得 $v_n\to v$ 且 $v_n\in\natural_{x_n,\ 0}^{-1}(A_n)$。
>
> 此外，如果 (A_n,x_n) 收敛到 (A,x)，那么对于任意 $v\in\natural_{x,\ 0}^{-1}(A)$，都存在 $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}\subseteq V$，使得 $v_n\to v$ 且 $v_n\in\natural_{x_n,\ 0}^{-1}(A_n)$。

将定理 2.3.3 与命题 3.0.1 进行比较颇有意思。在实践中，使用以下定理来验证 $\mathbb{G}$ 中的收敛通常更为有用。

定理 2.3.4。设 $x\in M$，$L\in G_x^0$ 为一个切锥，$(V,\natural)$ 为一个 ν-分次基，且 $S\subseteq V$ 为一个线性子空间，使映射 $(v,l)\in S\times L\mapsto\natural_{x,\ 0}(v)l\in\mathfrak{g}_x$ 是微分同胚。序列 $(y_n,x_n,t_n)_{n\in\mathbb{N}}\subseteq M\times M\times\mathbb{R}^\nu_+\backslash\{0\}$ 收敛到 $(\natural_{x,\ 0}(v)L,x,0)$ 中的点 $\mathbb{G}$，其中 $v\in S$，当且仅当满足以下条件：

I. 序列 $(x_n,\ t_n)_{n\in\mathbb{N}}\subseteq M\times\mathbb{R}^\nu_+\backslash\{0\}$ 在 $\mathbb{G}^{(0)}$中收敛于 $(L,\ x,\ 0)$。

II. 当 n 足够大时，存在 $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}\subseteq S$，使得 $v_n\to v$ 且 $e^{\alpha_{t_n}(v_n)}\cdot x_n=y_n$。

定理 2.3.5。群胚 $\mathbb{G}\rightrightarrows\mathbb{G}^{(0)}$ 是一个拟李群胚，其李代数丛为 $A(\mathbb{G})$。

定理 2.3.5 的含义是：从 $\mathbb{G}$ 上的微分结构和拓扑诱导到 $A(\mathbb{G})$ 上的微分结构和拓扑，与第2.2节中描述的微分结构和拓扑一致。

下面的命题给出了向量丛的一个自然同构，本文中将反复使用这一同构。

命题 2.3.6。对于任意 k、$l\in\mathbb{C}$，我们有一个自然的光滑同构

$$\Omega^{k+l}(V)\simeq\mathcal{Q}_V^*(\Omega^{k,l}(\mathbb{G}))\otimes\Omega^{k+l}(\ker(\mathrm{d}\mathcal{Q}_V)) \tag{2.17}$$

[1]为使正向蕴含 $\Longrightarrow$更加严谨，序列 v_n 的元素仅在 n 足够大时才存在。为简化论述，我们将忽略这一点。

L李括号： 由于 $A(\mathbb{G})$ 是拟李群胚的李代数丛，因此它具有李括号

$$[\cdot,\cdot]: C^\infty(\mathbb{G}^{(0)}, A(\mathbb{G})) \times C^\infty(\mathbb{G}^{(0)}, A(\mathbb{G})) \to C^\infty(\mathbb{G}^{(0)}, A(\mathbb{G}))$$

在 $M \times M \times \mathbb{R}^\nu_+ \backslash \{0\}$ 上，群胚 $\mathbb{G}$ 是对偶群胚。因此，限制在 $M \times \mathbb{R}^\nu_+ \backslash \{0\}$ 上的李括号是 TM 上通常的李括号。由 $M \times \mathbb{R}^\nu_+ \backslash \{0\}$ 在 $\mathbb{G}^{(0)}$ 中的稠密性，我们得到

$$[\theta_k(X), \theta_l(Y)] = \theta_{k+l}([X,Y]), \quad \forall k, l \in \mathbb{Z}^\nu_+, X \in \mathcal{F}^k, Y \in \mathcal{F}^l. \tag{2.18}$$

2.4 切群胚示例

本节中，我们考虑一个 2-分次次黎曼结构的例子。我们将给出切锥和切群胚。验证留给读者完成。固定一个大于或等于 2 的 $N \in \mathbb{N}$。考虑 $\mathbb{R}^2$ 上深度为 $(1, N)$ 的二重分次结构

$$\mathcal{F}^{0,k} = \{f\partial_x + gx^{N-k}\partial_y : f, g \in C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})\}, \quad k \in [\![1, N]\!].$$

这是例 2.1.3.iii 中定义的结构，与族 $\{\partial_x, \partial_y\}$ 和 $\{\partial_x, x^{N-1}\partial_y\}$ 相关。

密切李代数：我们将通过给出一个线性基来描述密切李代数。在下面的方程中，span 表示由.....线性张成，且这些生成元线性无关。为简化记号，我们将使用

$$\begin{array}{lll} X_1 = [\partial_x]_{(1,0),(x,y)}, & X_2 = [\partial_y]_{(1,0),(x,y)}, & Y = [\partial_x]_{(0,1),(x,y)}, \\ Z_1 = [x^{N-1}\partial_y]_{(0,1),(x,y)}, & Z_2 = [x^{N-2}\partial_y]_{(0,2),(x,y)}, \cdots, & Z_N = [\partial_y]_{(0,N),(x,y)} \end{array} \tag{2.19}$$

它们是$\mathfrak{g}_{(x,y)}$的元素。我们有

$$\mathfrak{g}_{(x,y)} = \begin{cases} \text{span}\left(X_1, X_2, Y, Z_1\right), & \text{if } x \neq 0, \\ \text{span}\left(X_1, X_2, Y, Z_1, Z_2, \cdots, Z_N\right), & \text{if } x = 0. \end{cases} \tag{2.20}$$

The 李代数 $\mathfrak{g}_{(x,y)}$ 是交换的，当且仅当 $x \neq 0$。如果 $x = 0$，那么唯一非平凡的李括号是 e

$$[Y, Z_k] = (N-k)Z_{k+1}, \quad k \in [\![1, N-1]\!].$$

处的切锥 $x \neq 0$： (x, y) 处的切锥（其中 $x \neq 0$ ）是线性子空间 :

$$L_\lambda := \text{span}\{\lambda X_1 - Y, \lambda x^{N-1} X_2 - Z_1\}, \quad L_\infty := \text{span}\{X_1, X_2\}$$

其中 $\lambda \in \mathbb{R}_{+\infty}$ 序列 $((x_n, y_n), (t_n, s_n)) \in \mathbb{R}^2 \times (\mathbb{R}^2 \backslash 0)$ 在 $\mathbb{G}^{(0)}$ 中收敛到 $(L_\lambda, (x, y), (0, 0))$，如果 $x_n \to x$, $y_n \to y$, $t_n \to 0$, $s_n \to 0$ 且 $\frac{s_n}{t_n} \to \lambda \in [0, +\infty]$。

处的切锥 $x = 0$： $(0, y)$ 处的切锥是线性子空间:

$$\begin{array}{ll} L_{\infty,\mu,\eta} = \text{span}(X_1, X_2 - \eta Z_N, Z_1 - \mu Z_2, \cdots, Z_{N-1} - \mu Z_N), & L_\infty = \text{span}(X_1, Z_1, \cdots, Z_N), \\ L_{\infty,\zeta} = \text{span}(X_1, X_2 - \zeta Z_1, Z_2, \cdots, Z_N), & L_\lambda := \text{span}(\lambda X_1 - Y, Z_1, \cdots, Z_N), \end{array} \tag{2.21}$$

其中 η, $\lambda \in \mathbb{R}_+$ 和 $\mu \in \mathbb{R}$，以及 $\zeta \in \mathbb{R}$ 或 $\zeta \in \mathbb{R}_+$，具体取决于 N的奇偶性。一个序列$((x_n,\ y_n),\ (t_n,\ s_n)) \in \mathbb{R}^2 \times (\mathbb{R}^2 \backslash 0)$ 收敛 $(L,\ (0,\ y),\ (0,\ 0))$ 在 $\mathbb{G}^{(0)}$ 中，当且仅当 $x_n \to 0$, $y_n \to y$, $t_n \to 0$,

$s_n \to 0$，并且

- $\frac{s_n}{t_n} \to \lambda$, if $L = L_\lambda$.
- $\frac{t_n}{s_n^N} \to \eta$ and $\frac{x_n}{s_n} \to \mu$, if $L = L_{\infty,\mu,\eta}$.
- $\frac{t_n}{s_n x_n^{N-1}} \to \zeta$ and $\frac{x_n}{s_n} \to \infty$, if $L = L_{\infty,\zeta}$.
- $\frac{s_n}{t_n} \to \infty$ and $\frac{s_n^{N-k} x_n^k}{t_n} \to 0$ for all $k \in [\![0, N-1]\!]$, if $L = L_\infty$.

在上述条件下，我们采用这样的约定：$\frac{1}{0} = \infty$ 和 $\frac{0}{0} = 0$。 –

关于 $\mathbb{G}$： 下面的计算是定理 2.3.4 的直接推论。序列$((x'_n,\ y'_n),\ (x_n,\ y_n),\ (t_n,\ s_n)) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times (\mathbb{R}^2 \backslash 0)$ 在 $\mathbb{G}$ 中收敛到 $(A,\ (x,\ y),\ (0,\ 0))$，其中 $x \neq 0$，当且仅当 $(x_n,\ y_n) \to (x,\ y)$，$(x'_n,\ y'_n) \to (x,\ y)$，$(t_n,\ s_n) \to 0$，且满足以下条件：

- $\frac{x'_n - x_n}{t_n} \to a$ and $\frac{y'_n - y_n}{t_n} \to b$ and $\frac{s_n}{t_n} \to \lambda \in [0, +\infty[$, if $A = (aX_1 + bX_2)L_\lambda$.
- $\frac{x'_n - x_n}{s_n} \to a$ and $\frac{y'_n - y_n}{s_n} \to bx^{N-1}$ and $\frac{s_n}{t_n} \to \infty$, if $A = (aY + bZ_1)L_\infty$.

序列 $((x'_n,\ y'_n),\ (x_n,\ y_n),\ (t_n,\ s_n)) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times (\mathbb{R}^2 \backslash 0)$ 在 $\mathbb{G}$ 中收敛到 $(A,\ (0,\ y),\ (0,\ 0))$，当且仅当 $(x_n,\ y_n) \to (0,\ y)$，$(x'_n,\ y'_n) \to (0,\ y)$，$(t_n,\ s_n) \to 0$，且满足以下条件：

- $\frac{x'_n - x_n}{t_n} \to a$, $\frac{y'_n - y_n}{t_n} \to b$ and $\frac{s_n}{t_n} \to \lambda \in [0, +\infty[$, if $A = (aX_1 + bX_2)L_\lambda$.
- $\frac{x'_n - x_n}{s_n} \to a$, $\frac{y'_n - y_n}{s_n^N} \to b$, $\frac{t_n}{s_n^N} \to \eta$ and $\frac{x_n}{s_n} \to \mu$, if $A = (aY + bZ_N)L_{\infty,\mu,\eta}$.
- $\frac{x'_n - x_n}{s_n} \to a$, $\frac{y'_n - y_n}{s_n x_n^{N-1}} \to b$, $\frac{t_n}{s_n x_n^{N-1}} \to \zeta$ and $\frac{x_n}{s_n} \to \infty$, if $A = (aY + bZ_1)L_{\infty,\zeta}$.
- $\frac{x'_n - x_n}{s_n} \to a$, $\frac{y'_n - y_n}{t_n} \to b$, $\frac{s_n}{t_n} \to \infty$, $\frac{s_n^{N-k} x_n^k}{t_n} \to 0$ for all $k \in [\![0, N-1]\!]$, if $A = (aY + bX_2)L_\infty$.

上述计算说明，即使在非常简单的例子中，群胚 $\mathbb{G} \rightrightarrows \mathbb{G}^{(0)}$ 也可能十分复杂。

2.5 Debord-Skandalis作用

在 (2.6) 中，我们在 V 上定义了 $\mathbb{R}_+^\nu$-膨胀，其中 $(V,\ \natural)$ 是一个 ν-分次基。本节中，我们定义一些将在本文中贯穿使用的膨胀。令

$$\begin{aligned} \lambda\mu &:= (\lambda_1\mu_1, \cdots, \lambda_\nu\mu_\nu) \in \mathbb{R}_+^\nu, \qquad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}_+^\nu \\ \lambda^{-1} &:= (\lambda_1^{-1}, \cdots, \lambda_\nu^{-1}) \in (\mathbb{R}_+^\times)^\nu, \quad \forall \lambda \in (\mathbb{R}_+^\times)^\nu. \end{aligned} \tag{2.22}$$

本文中将贯穿使用这一记号。

命题 2.5.1。设 $\lambda \in (\mathbb{R}_+^\times)^\nu$。映射

$$\alpha_\lambda : \mathbb{G} \to \mathbb{G}, \quad \alpha_\lambda(y, x, t) = (y, x, \lambda^{-1}t), \quad \alpha_\lambda(A, x, 0) = (\alpha_\lambda(A), x, 0)$$

是 $\mathbb{G}$的拟李群胚自同构。

根据第 1.9 节，$(\mathbb{R}_+^\times)^\nu$通过 $*$-代数自同构作用于 $C_c^\infty(\mathbb{G},\ \Omega^{\frac{1}{2}})$、$C_{r}^{-\infty,\ s}(\mathbb{G},\ \Omega^{\frac{1}{2}})$和 $C^*\mathbb{G}$。

的等变性 C^*-范数： 由于 $\alpha_\lambda : \mathbb{G} \to \mathbb{G}$ 是拟李群胚的一个自同构，根据（1.43），

$$\|\alpha_\lambda(f)\|_{C^*\mathbb{G}} = \|f\|_{C^*\mathbb{G}}, \quad \forall f \in C^*\mathbb{G},\ \lambda \in (\mathbb{R}_+^\times)^\nu. \tag{2.23}$$

的等变性 L^1-范数： 在 M 上固定一个黎曼度量。对于每个 $x \in M$，令 $\mathrm{vol}_x \in \Omega^1(T_xM)$ 为其对应的 1-密度。令 ω 为 $\Omega^{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}(\mathbb{G})$ 在 $\mathbb{G}$ 上的截面，其定义为

$$\omega(y,x,t) = \mathrm{vol}_y^{\frac{1}{2}} \otimes \mathrm{vol}_x^{-\frac{1}{2}}, \quad \forall (y,x,t) \in M \times M \times \mathbb{R}_+^\nu \backslash \{0\},$$

且其在 $(A,\ x) \in \mathcal{G} \times \{0\}$ 处的取值定义如下：对于某个 $g \in \mathfrak{g}_x$ 和 $L \in \mathcal{G}_x^{(0)}$, $A = gL$。回想一下，$A(\mathbb{G})_{s(A,\ x,\ 0)} = \frac{\mathfrak{g}_x}{L}$ 和 $A(\mathbb{G})_{r(A,\ x,\ 0)} = \frac{\mathfrak{g}_x}{gLg^{-1}}$。线性映射

$$\frac{\mathfrak{g}_x}{L} \to \frac{\mathfrak{g}_x}{gLg^{-1}}, \quad v \mapsto gvg^{-1}$$

是一个同构。因此，它诱导出 $\Omega^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\mathfrak{g}_x}{gLg^{-1}}\right) \otimes \Omega^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{\mathfrak{g}_x}{L}\right) = \Omega^{\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}}(\mathbb{G})_{(A,\ x,\ 0)}$ 的一个截面，该截面为 $\omega(A,\ x,\ 0)$。注意，$\omega(A,\ x,\ 0)$ 不依赖于 g 的选择，因为对于任意 $l \in L$，由 $v \mapsto lvl^{-1}$ 给出的映射 $\mathfrak{g}_x/L \to \mathfrak{g}_x/L$ 的行列式为 1，这是因为 $\mathfrak{g}_x$ 是一个幂零李代数。

命题 2.5.2。 截面 ω 是光滑的，即 $\omega \in C^\infty(\mathbb{G},\ \Omega^{\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}})$ 并满足 (1.27).

由于 $M \times \mathbb{R}_+^\nu \backslash \{0\}$ 在 $\mathbb{G}^{(0)}$ 中稠密，因此 $\|f\|_{L^1(\mathbb{G},\ \omega)}$ 由下式给出

$$\|f\|_{L^1(\mathbb{G},\omega)} = \sup\left\{\max\left(\int_M |f|(y,x,t)\mathrm{vol}_y^{\frac{1}{2}}\mathrm{vol}_x^{-\frac{1}{2}}, \int_M |f|(x,y,t)\mathrm{vol}_y^{\frac{1}{2}}\mathrm{vol}_x^{-\frac{1}{2}}\right)\right\}, \tag{2.24}$$

其中上确界取遍 $(x,\ t) \in M \times \mathbb{R}_+^\nu \backslash \{0\}$。由 (2.24)，我们有

$$\|\alpha_\lambda(f)\|_{L^1(\mathbb{G},\omega)} = \|f\|_{L^1(\mathbb{G},\omega)}, \quad \forall \lambda \in (\mathbb{R}_+^\times)^\nu,\ f \in C_c^\infty(\mathbb{G}, \Omega^{\frac{1}{2}}). \tag{2.25}$$

注 2.5.3。 (2.24) 的一个有趣推论是，如果 $f \in C_c^\infty(\mathbb{G},\ \Omega^{\frac{1}{2}})$，那么 (2.24) 右端是有限的。这一点乍看之下完全不明显。不过我们要提醒读者，如果 $f \in C_c^\infty(\mathbb{G})$ 不取值于密度，那么 $\sup\left\{\int_M |f|(y,\ x,\ t)\mathrm{vol}_y : (x,\ t) \in M \times \mathbb{R}_+^\nu \backslash \{0\}\right\}$ 通常是无穷的。(2.24) 右端的有限性，是 $\mathbb{G}$ 上的拓扑与 $A(\mathbb{G})$ 上的拓扑之间相互作用的结果。

2.6 不变光滑函数

总结： 在第4章中，我们将把 ν-分次伪微分算子定义为积分。为了研究此类积分，有必要使得当 $g \in C_c^\infty(\mathbb{G},\ \Omega^{\frac{1}{2}})$ 时，这些映射

$$(\mathbb{R}_+^\times)^\nu \to C_c^\infty(\mathbb{G}, \Omega^{\frac{1}{2}}), \quad \lambda \mapsto g * \alpha_\lambda(f) \quad \text{and} \quad \lambda \mapsto \alpha_\lambda(f) * g \tag{2.26}$$

延拓到 $\mathbb{R}_+^\nu$。一般而言，这种延拓并不存在。在本节中，我们定义卷积代数 $C_c^\infty(\mathbb{G},\ \Omega^{\frac{1}{2}})$ 的一个子代数，并将其称为不变函数空间。我们所关注的主要性质是，对于此类函数，(2.26) 可光滑地延拓到 $\mathbb{R}_+^\nu$。

不变函数： 设 $(V,\ \natural)$ 是一个 ν-分次基。由 (2.17) 结合 $k = l = \frac{1}{2}$ 和 (1.11)，我们得到一个沿纤维积分映射

$$\mathcal{Q}_{V*} : C_c^\infty(\mathrm{Dom}(\mathcal{Q}_V), \Omega^1(V)) \to C_c^\infty(\mathbb{G}, \Omega^{\frac{1}{2}}).$$

由于浸没映射是开映射，根据定理 2.3.2.v，$\mathcal{Q}_V$ 是开的。因此，$\mathrm{Im}(\mathcal{Q}_V)$ 是 $\mathcal{G} \times \{0\}$ 的一个开邻域。由于 $\mathbb{G} = \mathrm{Im}(\mathcal{Q}_V) \cup (M \times M \times \mathbb{R}_+^\nu \backslash \{0\})$，根据命题 1.1.2，对于任意 $f \in C_c^\infty(\mathbb{G}, \Omega^{\frac{1}{2}})$，存在 $g \in C_c^\infty(\text{定义域}(\mathcal{Q}_V), \Omega^1(V))$ 使得 $f - \mathcal{Q}_{V*}(g) \in C_c^\infty(M \times M \times \mathbb{R}_+^\nu \backslash \{0\}, \Omega^{\frac{1}{2}})$。

定义 2.6.1. 不变函数[2]的空间 $C_{c,\mathrm{inv}}^{\infty}(\mathbb{G},\Omega^{\frac{1}{2}})$ 是满足以下条件的 $f\in C_c^{\infty}(\mathbb{G},\Omega^{\frac{1}{2}})$的空间

$$f-\mathcal{Q}_{V*}(\tilde{f}\circ\pi_{V\times\mathbb{G}^{(0)}})\in C_c^{\infty}(M\times M\times\mathbb{R}_+^{\nu}\backslash\{0\},\Omega^{\frac{1}{2}}),\ \text{for some}\ \tilde{f}\in C_c^{\infty}(\widetilde{\mathrm{Dom}}(\mathcal{Q}_V),\Omega^1(V)). \tag{2.27}$$

我们赋予 $C_{c,\mathrm{inv}}^{\infty}(\mathbb{G},\Omega^{\frac{1}{2}})$ 由满射映射诱导的商拓扑

$$\begin{aligned} q_V: C_c^{\infty}(\widetilde{\mathrm{Dom}}(\mathcal{Q}_V),\Omega^1(V))\times C_c^{\infty}(M\times M\times\mathbb{R}_+^{\nu}\backslash\{0\},\Omega^{\frac{1}{2}})&\to C_{c,\mathrm{inv}}^{\infty}(\mathbb{G},\Omega^{\frac{1}{2}}),\\ (\tilde{f},\tilde{\tilde{f}})&\mapsto \mathcal{Q}_{V*}(\tilde{f}\circ\pi_{V\times\mathbb{G}^{(0)}})+\tilde{\tilde{f}}. \end{aligned} \tag{2.28}$$

定理 2.6.2。 *i.* 空间 $C_{c,\mathrm{inv}}^{\infty}(\mathbb{G},\Omega^{\frac{1}{2}})$ 及其拓扑不依赖于 $\mathcal{A}\mathcal{V}$-分次基 $(V,\natural)$ 的选择。

ii. 空间 $C_{c,\mathrm{inv}}^{\infty}(\mathbb{G},\Omega^{\frac{1}{2}})$ 是一个 *LF* 空间，且包含映射 $C_{c,\mathrm{inv}}^{\infty}(\mathbb{G},\Omega^{\frac{1}{2}})\hookrightarrow C_c^{\infty}(\mathbb{G},\Omega^{\frac{1}{2}})$ 是连续的。

iii. 空间 $C_{c,\mathrm{inv}}^{\infty}(\mathbb{G},\Omega^{\frac{1}{2}})$ 是 $*$-子代数 $C_c^{\infty}(\mathbb{G},\Omega^{\frac{1}{2}})$。

iv. 若 $\lambda\in(\mathbb{R}_+^{\times})^{\nu}$ 且 $f\in C_{c,\mathrm{inv}}^{\infty}(\mathbb{G},\Omega^{-\frac{1}{2}})$，则 $\alpha_\lambda(f)\in C_{c,\mathrm{inv}}^{\infty}(\mathbb{G},\Omega^{-\frac{1}{2}})$。

定义 2.6.3。 我们将 $C_{rs,\mathrm{inv}}^{-\infty}(\mathbb{G},\Omega^{\frac{1}{2}})$ 记为所有满足以下条件的 $u\in C_{r,s}^{-\infty}(\mathbb{G},\Omega^{\frac{1}{2}})$ 的空间：

$$u*C_{c,\mathrm{inv}}^{\infty}(\mathbb{G},\Omega^{\frac{1}{2}})\subseteq C_{c,\mathrm{inv}}^{\infty}(\mathbb{G},\Omega^{\frac{1}{2}}),\quad C_{c,\mathrm{inv}}^{\infty}(\mathbb{G},\Omega^{\frac{1}{2}})*u\subseteq C_{c,\mathrm{inv}}^{\infty}(\mathbb{G},\Omega^{\frac{1}{2}}). \tag{2.29}$$

空间 $C_{rs,\mathrm{inv}}^{-\infty}(\mathbb{G},\Omega^{\frac{1}{2}})$ 是 $*$-子代数，且包含于 $C_{rs,\mathrm{inv}}^{-\infty}(\mathbb{G},\Omega^{\frac{1}{2}})$。此外，如果 $\lambda\in(\mathbb{R}_+^{\times})^{\nu}$ 且 $u\in C_{rs,\mathrm{inv}}^{-\infty}(\mathbb{G},\Omega^{\frac{1}{2}})$，那么 $\alpha_\lambda(u)\in C_{rs,\mathrm{inv}}^{-\infty}(\mathbb{G},\Omega^{\frac{1}{2}})$。

注 2.6.4。 如果 $u\in C_{rs,\mathrm{inv}}^{-\infty}(\mathbb{G},\Omega^{\frac{1}{2}})$，那么 $u*\cdot: C_{c,\mathrm{inv}}^{\infty}(\mathbb{G},\Omega^{\frac{1}{2}})\to C_{c,\mathrm{inv}}^{\infty}(\mathbb{G},\Omega^{\frac{1}{2}})$ 由闭图定理、命题 1.6.2以及定理 2.6.2.ii 可知是连续的。

定理 2.6.5。 *i.* 若 $u\in C^{\infty}(M\times\mathbb{R}_+^{\nu})$，则 $\delta_{u\circ\pi_{\mathbb{G}^{(0)}}}\in C_{rs,\mathrm{inv}}^{-\infty}(\mathbb{G},\Omega^{\frac{1}{2}})$。

ii. 若 $k\in\mathbb{Z}_+^{\nu}$，$X\in F^k$，则 $\theta_k(X)\in C_{rs,\mathrm{inv}}^{-\infty}(\mathbb{G},\Omega^{\frac{1}{2}})$。

在定理 2.6.5 中，我们使用例 1.6.3 的记号。

定理2.6.6。 对于任意 $f\in C_{c,\mathrm{inv}}^{\infty}(\mathbb{G},\Omega^{\frac{1}{2}})$，$g\in C_c^{\infty}(\mathbb{G},\Omega^{-\frac{1}{2}})$，这些函数

$$(\mathbb{R}_+^{\times})^{\nu}\to C_c^{\infty}(\mathbb{G},\Omega^{\frac{1}{2}}),\quad \lambda\mapsto\alpha_\lambda(f)*g\quad and\quad \lambda\mapsto g*\alpha_\lambda(f)$$

可延拓为光滑函数 $\mathbb{R}_+^{\nu}\to C_c^{\infty}(\mathbb{G},\Omega^{\frac{1}{2}})$，其在 $\lambda\in\mathbb{R}_+^{\nu}$ 处的取值记为 $\alpha_\lambda(f)*g$ 和 $g*\alpha_\lambda(f)$。此外，若 $g\in C_{c,\mathrm{inv}}^{\infty}(\mathbb{G},\Omega^{\frac{1}{2}})$，则延拓后的函数是光滑函数$\mathbb{R}_+^{\nu}\to C_{c,\mathrm{inv}}^{\infty}(\mathbb{G},\Omega^{\frac{1}{2}})$。因此，对于任意 $\lambda\in\mathbb{R}_+^{\nu}$，$\alpha_\lambda(f)$ 定义了 $C_{rs,\mathrm{inv}}^{-\infty}(\mathbb{G},\Omega^{\frac{1}{2}})$ 的一个元素。最后，

$$\alpha_0(f)=\delta_{u\circ\pi_{\mathbb{G}^{(0)}}},\quad u(x,t)=\int_V\tilde{f}(v,x,0)\in C^{\infty}(M\times\mathbb{R}_+^{\nu}), \tag{2.30}$$

其中 f 是满足(2.27)条件的任意函数。

[2]不变函数最初由 Androulidakis 和 Skandalis 在 [AS09] 中定义。我们指出，映射 $\tilde{f}\mapsto\mathcal{Q}_{V*}(\tilde{f}\circ\pi_{V\times\mathbb{G}^{(0)}})$ 本质上是一种 X-射线变换。李群情形下的此类变换已得到广泛研究，例如参见 [Hel94]

2.7 微分算子代数上的多重分次 s

记号与约定： $C^\infty(M,\Omega^{\frac12})$表示 $C^\infty(M,\Omega^{\frac12}(TM))$，而 $C^{-\infty}(M,\Omega^{\frac12})$表示 $C_c^\infty(M,\Omega^{\frac12})$的拓扑-对偶。本文将始终采用这一约定。 -

微分算子上的分次：令 $\mathrm{DO}(M)$ 为有限阶微分算子 D的代数： $C^\infty(M,\Omega^{\frac12})\to C^\infty(M,\Omega^{\frac12})$。所谓有限阶，是指存在 $\bar n\in\mathbb{N}$，使得对于任意 $f\in C^\infty(M,\Omega^{\frac12})$和 $x\in M$， $D(f)(x)$仅依赖于 f在 x处的 $\leqslant n$阶偏导数。若 $f\in C^\infty(M)$，则微分算子 $g\in C^\infty(M,\Omega^{\frac12})\mapsto fg\in C^\infty(M,\Omega^{\frac12})$记为 δ_f，以与例 1.6.3.ii 中引入的记法一致。对于任意$k\in\mathbb{Z}_+^\nu$，我们用 $\mathrm{DO}^k(M)$ 表示由满足 $X_i\in\mathcal{F}^{a(i)}$且 $a(1)+\cdots+a(n)\preceq k$的单项式 $X_1\cdots X_n$所张成的 $\mathbb{C}$-线性空间。按照约定，长度为 0 的单项式为 δ_f，其中 $f\in C^\infty(M)$，即 $\mathrm{DO}^0(M)=C^\infty(M)$。根据我们的有限阶假设和 (2.4)，

$$\mathrm{DO}(M)=\bigcup_{k\in\mathbb{Z}_+^\nu}\mathrm{DO}^k(M).$$

Let

$$\mathrm{DO}_c(M)=C_c^\infty(M)\mathrm{DO}(M),\qquad \mathrm{DO}^{\prec k}(M):=\sum_{l\prec k}\mathrm{DO}^l(M)$$
$$\mathrm{DO}_c^k(M)=C_c^\infty(M)\mathrm{DO}^k(M),\qquad \mathrm{DO}_c^{\prec k}(M)=C_c^\infty(M)\mathrm{DO}^{\prec k}(M).$$

以下命题的证明是显然的，留给读者完成。

命题 2.7.1. *i.* 若 $k\preceq l$，则 $\mathrm{DO}^k(M)\subseteq\mathrm{DO}^l(M)$。

ii. 对任意 $k,l\in\mathbb{Z}_+^\nu$，$\mathrm{DO}^k(M)\mathrm{DO}^l(M)\subseteq\mathrm{DO}^{k+l}(M)$。

iii. 若 $D\in\mathrm{DO}^k(M)$且 $f\in C^\infty(M)$，则 $[D,\delta_f]\in\mathrm{DO}^{\prec k}(M)$。

iv. 若 $D\in\mathrm{DO}^k(M)$，则其形式伴随 D^*和形式转置 D^t属于 $\mathrm{DO}^k(M)$。

v. 对任意 $k\in\mathbb{Z}_+^\nu$，$\mathrm{DO}^k(M)$ 是一个有限生成的 $C^\infty(M)$-模。

在命题 2.7.1.iv 中，形式伴随和形式转置是规范定义的，因为我们处理的是半密度。因此，$X^t=X^*=-X$对于任意向量场 $X\in\mathcal{X}(M)$。

将微分算子视为 $\mathbb{G}$ 上的分布： 令 $k\in\mathbb{Z}_+^\nu$。根据定理 2.6.5.ii，我们有一个线性映射 $\theta_k:\mathcal{F}^k\to C^{-\infty}_{r\,s\,,,\mathrm{inv}}(\mathbb{G},\Omega^{\frac12})$。我们将 θ_k 扩展为一个线性映射

$$\theta_k:\mathrm{DO}^k(M)\to C^{-\infty}_{r,s,\mathrm{inv}}(\mathbb{G},\Omega^{\frac12})$$

对于长度为 0 的单项式，即 δ_f其中 $f\in C^\infty(M)$，我们定义

$$\theta_k(\delta_f):=\delta_{g\circ\pi_{\mathbb{G}^{(0)}}}\in C^{-\infty}_{r,s,\mathrm{inv}}(\mathbb{G},\Omega^{\frac12}),\quad g(x,t):=t^kf(x)\in C^\infty(M\times\mathbb{R}_+^\nu).$$

这里我们使用定理 2.6.5.i。对于长度非零的单项式，我们使用公式

$$\theta_k(X_1\cdots X_n)=\theta_{k-\sum_i a(i)}(\delta_1)*\theta_{a(1)}(X_1)*\cdots*\theta_{a(n)}(X_n),$$

我们利用线性，为一般微分算子定义 θ_k： 将 D 写成单项式之和 ls.

定理 2.7.2。对于任意 $k\in\mathbb{Z}_+^\nu$，映射 θ_k 是良定义的，也就是说，$\theta_k(D)$ 不依赖于将 D 表示为单项式之和的方式。此外，

$$\theta_{k_1+k_2}(D_1D_2)=\theta_{k_1}(D_1)*\theta_{k_2}(D_2). \tag{2.31}$$

值得指出的是

$$\alpha_\lambda(\theta_k(D))=\lambda^k\theta_k(D),\quad \theta_k(D)^*=\theta_k(D^*),\quad \forall D\in\mathrm{DO}^k(M). \tag{2.32}$$

定理 2.7.2 远非平凡。在限制到 $\mathcal{G}$ 时，$\theta_k(D)$ 在某种意义上是 D 的主符号。无需提及群胚 $\mathbb{G}$，也可以定义这个限制。另一方面，若无法借助群胚 $\mathbb{G}$，就完全不清楚这个符号是否独立于将 D 表示为单项式之和的方式；而有了群胚 $\mathbb{G}$，证明这种独立性便轻而易举！

傅里叶变换在原点处消失的不变函数：在研究伪微分算子的主符号时，人们常常需要考虑这样一个空间：其中的紧支撑光滑函数的傅里叶变换在原点处按某个阶数消失。现在，我们为微分空间 $\mathbb{G}$ 定义这类空间的一个类比。

定义 2.7.3。对于任意 $k\in\mathbb{Z}_+^\nu$，令

$$C^\infty_{c,\mathrm{inv},k}(\mathbb{G},\Omega^{\frac12})=\left\{\sum_{i=1}^n\theta_{k_i}(D_i)*f_i:k_i\in\mathbb{Z}_+^\nu,k\preceq k_i,D_i\in\mathrm{DO}^{k_i}(M),f_i\in C^\infty_{c,\mathrm{inv}}(\mathbb{G},\Omega^{\frac12})\right\} \tag{2.33}$$

由于 $\theta_0(\delta_1)=\delta_1$，$C^\infty_{c,\mathrm{inv},0}(\mathbb{G},\Omega^{\frac12})=C^\infty_{c,\mathrm{inv}}(\mathbb{G},\Omega^{\frac12})$。注意，由 (2.31) 可知，若 k，$l\in\mathbb{Z}_+^\nu$，则

$$\begin{aligned}&\theta_k(\mathrm{DO}^k(M))*C^\infty_{c,\mathrm{inv},l}(\mathbb{G},\Omega^{\frac12})\subseteq C^\infty_{c,\mathrm{inv},k+l}(\mathbb{G},\Omega^{\frac12}),\\&C^\infty_{c,\mathrm{inv},l}(\mathbb{G},\Omega^{\frac12})\subseteq C^\infty_{c,\mathrm{inv},k}(\mathbb{G},\Omega^{\frac12}),\qquad\qquad\text{if } k\preceq l.\end{aligned} \tag{2.34}$$

定理 2.7.4. *i.* 对任意 $k\in\mathbb{Z}_+^\nu$，$C_c^\infty(M\times M\times(\mathbb{R}_+^\times)^\nu,\Omega^{\frac12})\subseteq C^\infty_{c,\mathrm{inv},k}(\mathbb{G},\Omega^{\frac12})$。

ii. 对任意 k、$l\in\mathbb{Z}_+^\nu$，我们有

$$C^\infty_{c,\mathrm{inv},k}(\mathbb{G},\Omega^{\frac12})*C^\infty_{c,\mathrm{inv},l}(\mathbb{G},\Omega^{\frac12})\subseteq C^\infty_{c,\mathrm{inv},k+l}(\mathbb{G},\Omega^{\frac12}),\quad C^\infty_{c,\mathrm{inv},k}(\mathbb{G},\Omega^{\frac12})^*=C^\infty_{c,\mathrm{inv},k}(\mathbb{G},\Omega^{\frac12}).$$

iii. 若 $k\in\mathbb{Z}_+^\nu$，则

$$C^\infty_{c,\mathrm{inv},k}(\mathbb{G},\Omega^{\frac12})=\left\{\sum_{i=1}^n f_i*\theta_{k_i}(D_i):k_i\in\mathbb{Z}_+^\nu,k\preceq k_i,D_i\in\mathrm{DO}^{k_i}(M),f_i\in C^\infty_{c,\mathrm{inv}}(\mathbb{G},\Omega^{\frac12})\right\} \tag{2.35}$$

注记 2.7.5. 若 $\nu\geqslant 2$，则 $C^\infty_{c,\mathrm{inv},k}(\mathbb{G},\Omega^{\frac12})$ 中的函数满足某些远离 $t=0$ 处纤维的消失条件。例如，若 $k_1\neq 0$ 且 $f\in C^\infty_{c,\mathrm{inv},k}(\mathbb{G},\Omega^{\frac12})$，则 $f(y,x,(0,t))=0$ 对所有 $t\in\mathbb{R}_+^{\nu-1}\backslash 0$ 与 y，$x\in M$ 成立。特别地，$C_c^\infty(M\times M\times\mathbb{R}^\nu\backslash 0,\Omega^{\frac12})\subsetneq C^\infty_{c,\mathrm{inv},k}(\mathbb{G},\Omega^{\frac12})$。

下面的命题将在第4章中使用。

命题 2.7.6. 对于任意 $k\in\mathbb{Z}_+^\nu$，$f\in C^\infty_{c,\mathrm{inv},k}(\mathbb{G},\Omega^{\frac12})$，$i\in[\![1,\nu]\!]$，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda_i}\alpha_{(1,\cdots,1,\lambda_i,1,\cdots,1)}(f)\Big|_{\lambda_i=1}\in C^\infty_{c,\mathrm{inv},(k_1,\cdots,k_{i-1},\max(1,k_i),k_{i+1},\cdots,k_\nu)}(\mathbb{G},\Omega^{\frac12}).$$

2.8 弱交换次黎曼结构

以下条件由 Street [Str23] 引入。

定义 2.8.1. 一个 ν-分次次黎曼结构$\mathcal{F}^\bullet$ 称为弱交换的，如果

$$\mathcal{F}^k = \mathcal{F}^{(k_1,0,\cdots,0)} + \cdots + \mathcal{F}^{(0,\cdots,0,k_\nu)}, \quad \forall k \in \mathbb{Z}_+^\nu \tag{2.36}$$

在本节余下部分，我们假设$\mathcal{F}$ 是弱交换的。若 $V = \oplus_{k\in\mathbb{Z}_+^\nu} V^k$ 是一个ν-分次向量空间，则我们用

$$V^{\hat{i}} := \bigoplus_{j\in\mathbb{Z}_+} V^{(\overbrace{0,\cdots,0}^{i-1},j,\overbrace{0\cdots,0}^{\nu-i})}, \quad i \in [\![1,\nu]\!].$$

由 (2.36),

$$\mathfrak{g}_x = \bigoplus_{i=1}^{\nu} \mathfrak{g}_x^{\hat{i}}, \quad \forall x \in M. \tag{2.37}$$

此外， $[\mathfrak{g}_x^i, \mathfrak{g}_x^j] = 0$ 对所有 $i,j \in [\![1,\nu]\!]$，且 $i \neq j$。

例 2.8.2. i. 任何1-分次次黎曼结构都是弱交换的。类似地，任何深度为 $(1,N)$ 的2-分次次黎曼结构都是弱交换的。

ii. 设 X_1、$\cdots$、X_d 和 Y_1、$\cdots$、$Y_{d'}$ 是两个向量场族，分别满足深度为 $N \in \mathbb{N}$ 和 $N' \in \mathbb{N}$ 的 Hörmander 条件，$\mathcal{F}^\bullet$ 是由这两个族按例 2.1.3.iii 生成的深度为 $(N$ 的二阶分级子黎曼结构，$N')$。那么，$\mathcal{F}^\bullet$ 弱交换当且仅当

$$[X_k, Y_l] = \sum_{i=1}^{d} f_i X_i + \sum_{j=1}^{d'} g_j Y_j, \quad \forall k \in [\![1,d]\!], l \in [\![1,d']\!], \tag{2.38}$$

对于某个 f_i、$g_j \in C^\infty(M、\mathbb{R})$ 成立。例如，如果其中一个族无需交换子就能张成切空间，则此条件自动满足。另一个例子是 $M = \mathbb{R}^2$，且这两个族分别为 $\{\partial_x、 x^k\partial_y\}$ 和 $\{\partial_y、 y^l\partial_x\}$。

如果没有弱交换条件，下面的定理便不成立。该条件是必要的，以确保我们在第4章中定义的伪微分演算在复合下封闭。

定理 2.8.3。 设 $F^\bullet$ 是一个弱交换的 ν 分次次黎曼结构，$f, g \in C_{c,\,\mathrm{inv}}^\infty(\mathbb{G}, \Omega^{\frac{1}{2}})$。对于任意 $\lambda, \mu \in \mathbb{R}_+^\nu$，若 $\lambda + \mu \in (\mathbb{R}_+^\times)^\nu$，则 $\alpha_\lambda(f) * \alpha_\mu(g) \in C_{c,\,\mathrm{inv}}^\infty(\mathbb{G}, \Omega^{\frac{1}{2}})$。此外，下列函数是光滑的：

$$\{(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}_+^{2\nu} : \lambda + \nu \in (\mathbb{R}_+^\times)^\nu\} \to C_{c,\mathrm{inv}}^\infty(\mathbb{G}, \Omega^{\frac{1}{2}}), \quad (\lambda,\mu) \mapsto \alpha_\lambda(f) * \alpha_\mu(g). \tag{2.39}$$

弱交换性还允许我们通过较小的群胚在 $\mathbb{G}$ 上构造光滑函数，方法如下：设 $\tilde{\nu}$，$\tilde{\tilde{\nu}} \in \mathbb{N}$ 使得 $\tilde{\nu} + \tilde{\tilde{\nu}} = \nu$。我们通过以下公式在 M 上定义一个 $\tilde{\nu}$ 分次的 $\tilde{\mathcal{F}}^\bullet$ 和一个 $\tilde{\tilde{\nu}}$ 分次的 $\tilde{\tilde{\mathcal{F}}}^\bullet$ 次黎曼结构

$$\tilde{\mathcal{F}}^k := \mathcal{F}^{(k,0,\cdots,0)}, \quad \tilde{\tilde{\mathcal{F}}}^l := \mathcal{F}^{(0,\cdots,0,l)}, \quad \forall k \in \mathbb{Z}_+^{\tilde{\nu}}, l \in \mathbb{Z}_+^{\tilde{\tilde{\nu}}}. \tag{2.40}$$

因此，由 (2.36)，$\mathcal{F}$ 与 $\tilde{\mathcal{F}}$ 以及$\tilde{\tilde{\mathcal{F}}}$ 由该方程相联系

$$\mathcal{F}^{(k,l)} = \tilde{\mathcal{F}}^k + \tilde{\tilde{\mathcal{F}}}^l, \quad \forall k \in \mathbb{Z}_+^{\tilde{\nu}}, l \in \mathbb{Z}_+^{\tilde{\tilde{\nu}}}. \tag{2.41}$$

设 $\tilde{\mathbb{G}} \rightrightarrows \tilde{\mathbb{G}}^{(0)}$ 与 $\tilde{\tilde{\mathbb{G}}} \rightrightarrows \tilde{\tilde{\mathbb{G}}}^{(0)}$ 为相应的拟李群胚。

定理 2.8.4. 存在一个自然的 $\mathbb{C}$-双线性映射（可视为卷积积 $)$

$$\Phi : C^{\infty}_{c,\mathrm{inv}}(\tilde{\mathbb{G}}, \Omega^{\frac{1}{2}}) \times C^{\infty}_{c,\mathrm{inv}}(\tilde{\tilde{\mathbb{G}}}, \Omega^{\frac{1}{2}}) \to C^{\infty}_{c,\mathrm{inv}}(\mathbb{G}, \Omega^{\frac{1}{2}})$$

它由恒等式唯一确定

$$\Phi(f,g)(z,x,t,s) := \int_M f(z,y,t)g(y,x,s), \quad \forall (z,x,t,s) \in M \times M \times (\mathbb{R}^{\tilde{\nu}}_+ \backslash 0) \times (\mathbb{R}^{\tilde{\tilde{\nu}}}_+ \backslash 0), \tag{2.42}$$

其中 $f \in C^{\infty}_{c,\mathrm{inv}}(\tilde{\mathbb{G}}, \Omega^{\frac{1}{2}})$ 和 $g \in C^{\infty}_{c,\mathrm{inv}}(\tilde{\tilde{\mathbb{G}}}, \Omega^{\frac{1}{2}})$。此外，

$$\alpha_{(\lambda,\mu)}(\Phi(f,g)) = \Phi(\alpha_\lambda(f), \alpha_\mu(g)), \quad \Phi(C^{\infty}_{c,\mathrm{inv},k}(\tilde{\mathbb{G}}, \Omega^{\frac{1}{2}}), C^{\infty}_{c,\mathrm{inv},l}(\tilde{\tilde{\mathbb{G}}}, \Omega^{\frac{1}{2}})) \subseteq C^{\infty}_{c,\mathrm{inv},(k,l)}(\mathbb{G}, \Omega^{\frac{1}{2}}), \tag{2.43}$$

where $\lambda \in (\mathbb{R}^{\times}_+)^{\tilde{\nu}}, \mu \in (\mathbb{R}^{\times}_+)^{\tilde{\tilde{\nu}}}$, $f \in C^{\infty}_{c,\mathrm{inv}}(\tilde{\mathbb{G}}, \Omega^{\frac{1}{2}}), g \in C^{\infty}_{c,\mathrm{inv}}(\tilde{\tilde{\mathbb{G}}}, \Omega^{\frac{1}{2}})$, $k \in \mathbb{Z}^{\tilde{\nu}}_+, l \in \mathbb{Z}^{\tilde{\tilde{\nu}}}_+$.

由对称性，我们还可以定义一个映射（仍记作 Φ）

$$\Phi : C^{\infty}_{c,\mathrm{inv}}(\tilde{\tilde{\mathbb{G}}}, \Omega^{\frac{1}{2}}) \times C^{\infty}_{c,\mathrm{inv}}(\tilde{\mathbb{G}}, \Omega^{\frac{1}{2}}) \to C^{\infty}_{c,\mathrm{inv}}(\mathbb{G}, \Omega^{\frac{1}{2}})$$

它由恒等式唯一确定

$$\Phi(g,f)(z,x,t,s) := \int_M g(z,y,s)f(y,x,t), \quad \forall (z,x,t,s) \in M \times M \times (\mathbb{R}^{\tilde{\nu}}_+ \backslash 0) \times (\mathbb{R}^{\tilde{\tilde{\nu}}}_+ \backslash 0), \tag{2.44}$$

其中 $f \in C^{\infty}_{c,\mathrm{inv}}(\tilde{\mathbb{G}}, \Omega^{\frac{1}{2}})$ 和 $g \in C^{\infty}_{c,\mathrm{inv}}(\tilde{\tilde{\mathbb{G}}}, \Omega^{\frac{1}{2}})$，并且满足与 (2.43) 中类似的恒等式。接下来的结果表明，$\Phi(f,g)$ 和 $\Phi(g,f)$ 相差低阶项

定理 2.8.5. 若 $f \in C^{\infty}_{c,\mathrm{inv}}(\tilde{\mathbb{G}}, \Omega^{\frac{1}{2}})$ 且 $g \in C^{\infty}_{c,\mathrm{inv}}(\tilde{\tilde{\mathbb{G}}}, \Omega^{\frac{1}{2}})$，则存在不变函数 $h_1, \cdots, h_{\tilde{\nu}}, h'_1, \cdots, h'_{\tilde{\tilde{\nu}}} \in C^{\infty}_{c,\mathrm{inv}}(\mathbb{G}, \Omega^{\frac{1}{2}})$，使得

$$\Phi(f,g) - \Phi(g,f) = \sum_{i=1}^{\tilde{\nu}} t_i h_i + \sum_{i=1}^{\tilde{\tilde{\nu}}} s_i h'_i \tag{2.45}$$

第3章

第2章结果的证明

以下命题将在本章中反复使用。证明留给读者。

命题 3.0.1. 设 V是一个向量空间， $d \in [\![0,$维数$(V)]\!]$，$\mathrm{Grass}_d(V)$ 是 V 中维数为 d的线性子空间所构成的格拉斯曼流形， $(L_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathrm{Grass}_d(V)$ 是一个序列， $L \in \mathrm{Grass}_d(V)$。以下条件等价：

i. 序列 $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 在格拉斯曼拓扑下收敛到 L 。

ii. 对于每个满足以下条件的序列 $(l_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq V$：对所有 $n \in \mathbb{N}$，均有 $l_n \in L_n$ ；若 l_n 收敛到向量$v \in V$，则 $v \in L$。

此外，若 $L_n \to L$ 在格拉斯曼拓扑下，则对于任意 $l \in L$，存在一个序列$l_n \in L_n$ ，使得 $l_n \to l$。

若 $(V, \natural)$ 与 $(V', \natural')$ 是 ν-分次基，则当 $V' \subseteq V$ 且 $\natural_{|V'} = \natural'$ 时，我们记 $(V', \natural') \subseteq (V, \natural)$。若对某个 $k \in \mathbb{Z}_+^\nu$ 有 $v \in V^k$ ，则称元素 $v \in V$ 为纯的。

3.1 第2.2节中结果的证明

引理 2.2.2 的证明。 映射$\natural_{x,0}$ 保持 V 与 $\mathfrak{g}_x$ 上的 ν-分次。因此，$\ker(\natural_{x,0})$ 是 V 的一个 ν-分次子空间。所以，只需证明：若对某个 $k \in \mathbb{Z}_+^\nu$ 有 $v \in V^k \cap \ker(\natural_{x,0})$ ，则 $v \in L$。由于$\natural_{x,0}(v) = 0$，$\natural(v) \in \mathcal{F}^{\prec k} + C_x^\infty(M, \mathbb{R})\mathcal{F}^k$。根据 ν-分次基的定义，我们可以将 $\natural(v)$写成在某些有限指标集 I 与 J 上的和

$$\natural(v) = \sum_{i\in I} f_i \natural(w_i) + \sum_{j\in J} f'_j \natural(w'_j)$$

其中 $w_i \in V^{a(i)}$ 对于某个 $a(i) \in \mathbb{Z}_+^\nu$ 满足 $a(i) \prec k$，且 $w'_j \in V^k$, f_i， $f'_j \in C^\infty(M,\ \mathbb{R})$ 使得 $f'_j(x) = 0$。由此可知，对任意 $n \in \mathbb{N}$,

$$v_n := v - \sum_{i\in I} f_i(x_n) t_n^{k-a(i)} w_i - \sum_{j\in J} f'_j(x_n) w'_j \in \ker(\natural_{x_n,t_n}).$$

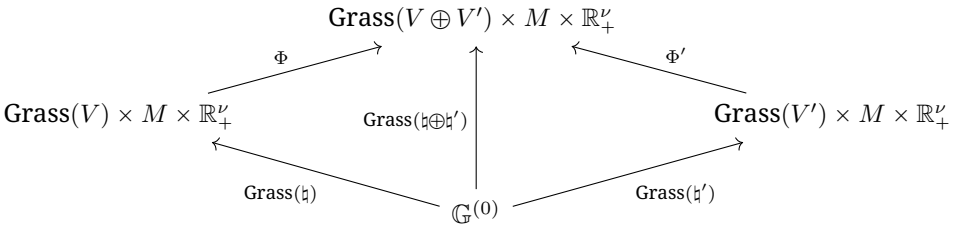
由于 $v_n \to v$，根据命题 3.0.1，我们推得 $v \in L$。 □

定理 2.2.5 的证明。映射 $\pi_{\mathbb{G}^{(0)}}$ 显然是连续的。它是满射，因为对于每个 $x \in M$，$\mathcal{G}_x^{(0)} \neq \varnothing$。它是真映射，因为 $\mathrm{Grass}(V)$ 是紧的。容易看出，包含映射 $M \times \mathbb{R}_+^\nu \backslash \{0\} \hookrightarrow \mathbb{G}^{(0)}$是开光滑嵌入。根据切

锥的定义，其像是稠密的。接下来证明定理 2.2.5.i。显然， $(V \oplus V',\ \natural \oplus \natural')$ 是一个 ν-分次基。我们将构造闭光滑嵌入

$$\Phi : \mathrm{Grass}(V) \times M \times \mathbb{R}^{\nu}_{+} \to \mathrm{Grass}(V \oplus V') \times M \times \mathbb{R}^{\nu}_{+},$$
$$\Phi' : \mathrm{Grass}(V') \times M \times \mathbb{R}^{\nu}_{+} \to \mathrm{Grass}(V \oplus V') \times M \times \mathbb{R}^{\nu}_{+}$$

使得图表



(3.1)

可交换。 Φ 和 Φ' 的存在性完成了定理 2.2.5.i 的证明。

由对称性，只需构造 Φ'。我们断言，可以找到一个光滑映射$T\colon\ V \times M \times \mathbb{R}^{\nu}_{+} \to V'$，它关于 V是线性的，使得

$$\natural'_{x,t}(T(v,x,t)) = \natural_{x,t}(v), \quad \forall (v,x,t) \in V \times M \times \mathbb{R}^{\nu}_{+}. \tag{3.2}$$

注意，在 (3.2) 中， $t \in \mathbb{R}^{\nu}_{+}$。因此，当 $t \neq 0$ 时，(3.2) 是 T_xM 中元素之间的等式；当 $t = 0$时，它是 $\mathfrak{g}_x$ 中元素之间的等式。只需在 V 的线性基上定义 T，然后通过线性性延拓 T 即可。我们固定 V的一组纯元素基。若 $v \in V^k$ 是一个基元素，则根据 ν-分次基的定义，存在一个有限族 $(f_i)_{i\in I} \subseteq C^{\infty}(M、\ \mathbb{R})$、 $(v_i)_{i\in I} \subseteq V'$，使得 $v_i \in V'^{a(i)}$，其中 $a(i) \preceq k$和$\natural(v) = \sum_{i\in I} f_i \natural'(v_i)$。我们通过以下公式定义 $T(v、\ x、\ t)$

$$T(v,x,t) = \sum_{i\in I} t^{k-a(i)} f_i(x) v_i, \tag{3.3}$$

我们将 (3.2) 的验证留给读者。我们通过公式 $T(v+v',\ x,\ t) = T(v,\ x,\ t) + v'$将 T扩展为一个映射 $T\colon\ (V\oplus V')\times M\times\mathbb{R}^{\nu}_{+} \to V'$，该映射关于 $V \oplus V'$是线性的。对于任意 $x,\ t$，映射 $T(\cdot,\ x,\ t)$ 都是满射。因此，我们可以定义映射

$$\Phi'(L,x,t) = (T(\cdot,x,t)^{-1}(L), x, t)$$

其中 $T(\cdot,\ x,\ t)^{-1}(L)\coloneqq \{v+v' \in V \oplus V'\colon\ T(v+v',\ x,\ t) \in L\}$。 $T(\cdot,\ x,\ t)$的满射性确保 Φ' 是一个良定义的闭嵌入。(3.1) 的交换性由恒等式 $\natural'_{x,\ t}(T(v+v',\ x,\ t)) = \natural_{x,\ t}(v) + \natural'_{x,\ t}(v')$ 得出。 □

定理 2.2.8 的证明。 我们利用 Grass(♮) 将空间 $\mathbb{G}^{(0)}$ 嵌入 Grass$(V) \times M \times \mathbb{R}^{\nu}_{+}$ 中。存在一个自然的实向量丛 $E \to$ Grass$(V) \times M \times \mathbb{R}^{\nu}_{+}$，其在 $(L,\ x,\ t)$ 上的纤维为 V/L。此外，存在一个显然的光滑淹没 $V \times$ Grass$(V) \times M \times \mathbb{R}^{\nu}_{+} \to E$。 E 对 $\mathbb{G}^{(0)}$ 的限制为 $A(\mathbb{G})$，而从 $V \times \mathbb{G}^{(0)} \to A(\mathbb{G}^{(0)})$ 出发的显然投影映射可与 $A(\natural)$ 等同。由此可推出定理 2.2.8.i 和定理 2.2.8.ii。定理 2.2.8.iii 可通过对定理 2.2.5.i 的证明作显然的修改得到证明。细节留给读者。

□

命题 2.2.9 的证明。设 $(V,\ \mathfrak{h})$ 为一个 ν-分次基。根据 ν-分次基的定义，$X=\sum_{i\in I} f_i\mathfrak{h}(v_i)$，其中 $f_i\in C^\infty(M,\ \mathbb{R})$, $v_i\in V^{a(i)}$ 满足 $a(i)\leq k$。因此，对于任意 $\gamma\in\mathbb{G}^{(0)}$

$$\theta_k(X)(\gamma)=\sum_{i\in I}\big(g_i\circ\pi_{\mathbb{G}^{(0)}}(\gamma)\big)\theta_{a(i)}(v_i)(\gamma)=\sum_{i\in I}\big(g_i\circ\pi_{\mathbb{G}^{(0)}}(\gamma)\big)A(\mathfrak{h})(v_i,\gamma),$$

其中 $g_i\in C^\infty(M\times\mathbb{R}^\nu_+)$ 由 $g_i(x,t)=t^{k-a(i)}f_i(x)$定义。因此，$\theta_k(X)$ 是 $A(\mathbb{G}^{(0)})$的光滑截面。根据定理 2.2.8 的证明中对 $A(\mathbb{G})$ 的描述可知，族$(\theta_k(v))_{k\in\mathbb{Z}^\nu_+,v\in V^k}$生成 $C^\infty(\mathbb{G}^{(0)},\mathbb{R})$-模 $C^\infty(\mathbb{G}^{(0)},\ A(\mathbb{G}))$。 □

多重分次李基：本文中，我们有时需要将密切李代数 $\mathfrak{g}_x$ 上的李括号提升到 ν-分次基上。为此，我们引入以下概念：ν-分次李基是一个 ν-分次基 $(V,\mathfrak{h})$，使得 V配备了一个李括号$[\cdot,\cdot]:\ V\times V\to V$，满足 $[V^k,V^l]\subseteq V^{k+l}$，并且

$$[\mathfrak{h}(v),\mathfrak{h}(w)]-\mathfrak{h}([v,w])\in\mathcal{F}^{<k+l},\quad\forall v\in V^k,w\in V^l. \tag{3.4}$$

注意，如果 $k+l\not\leq N$，那么由 (2.4) 可知，$\mathcal{F}^{<k+l}=\mathcal{X}(M)$，因此 (3.4) 显然成立。由于 V 是有限维的，因此只有有限个 $k\in\mathbb{Z}^\nu_+$ 满足 $V^k\neq 0$。结合 $V^0=0$，我们推得李代数 V 是幂零的

引理 3.1.1。若 $(V',\mathfrak{h}')$ 是一个 ν-分次基，则存在一个 ν-分次李基 $(V,\mathfrak{h})$，使得$(V',\mathfrak{h}')\subseteq(V,\mathfrak{h})$。

证明。令 S 为 V' 的一个由纯元素构成的线性基。令 W 为由 S 和 $\mathfrak{h}_W$ 生成的自由李代数：$W\to\mathcal{X}(M)$ 为函数 $\mathfrak{h}_{|S}:\ S\to\mathcal{X}(M)$的李代数扩张。我们还有一个自然的包含映射 $V'\hookrightarrow W$。空间 W 继承了来自 S 的 ν-分次，从而成为一个无限维的 ν-分次李代数 $W=\oplus_{k\in\mathbb{Z}^\nu_+}W^k$。由 (2.5)，$\mathfrak{h}(W^k)\subseteq\mathcal{F}^k$。由于 V' 是有限维的，存在 $L\in\mathbb{Z}^\nu_+$ 使得 $V'\subseteq\oplus_{k\leq L}W^k$。将 L 替换为 $L+N$ 后，我们可以假设 $N\leq L$。令$V=\oplus_{k\in\mathbb{Z}^\nu_+,k\leq L}W^k$。我们通过将 V 与$W/\oplus_{k\not\leq L}W^k$, 等同，并利用 $\oplus_{k\not\leq L}W^k$ 是 W 的一个理想这一事实，在 V 上定义李括号。等价地，V 中 $v\in W^k$ 和 $w\in W^l$ 的李括号由下式定义

$$[v,w]_V=\begin{cases}[v,w]_W & \text{if } k+l\leq L\\ 0 & \text{otherwise.}\end{cases}$$

这对 $(V,\mathfrak{h})$ 是一个 ν-分次李基。它是一个 ν-分次基，因为 $(V',\mathfrak{h}')\subseteq(V,\mathfrak{h})$。它满足 (3.4) 的一个更强形式，即

$$[\mathfrak{h}(v),\mathfrak{h}(w)]_V=\mathfrak{h}([v,w]_V),\quad\forall v\in V^k,w\in V^l\text{ such that }k+l\leq L. \qquad \square$$

注记 3.1.2. 如果 $(V,\mathfrak{h})$ 是一个 ν-分次李基，那么对于任意 $x\in M$，由 (3.4)，线性映射$\mathfrak{h}_{x,0}:\ V\to\mathfrak{g}_x$ 是一个李代数，且是一个李群同态。

命题 2.2.10 的证明。设 $(V,\mathfrak{h})$ 是一个 ν-分次李基。我们断言，存在一个光滑映射 T:$V\times V\times M\times\mathbb{R}^\nu_+\to V$，它关于 $V\times V$ 是双线性的，使得

$$\begin{aligned}&\mathfrak{h}_{x,t}(T(v_1,v_2,x,t))=[\mathfrak{h}(\alpha_t(v_1)),\mathfrak{h}(\alpha_t(v_2))](x), && \forall(v_1,v_2,x,t)\in V\times V\times\ M\times\mathbb{R}^\nu_+\backslash\{0\}\\ &T(v_1,v_2,x,0)=[v_1,v_2], && \forall(v_1,v_2,x)\in V\times V\times M.\end{aligned} \tag{3.5}$$

由双线性，只需在 V 的一个基上定义 T。我们固定一个纯元素基。设$v_1 \in V^{k_1}$和 $v_2 \in V^{k_2}$是基元素。根据 (3.4)，存在 $f_i \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ 和 $w_i \in V^{a(i)}$，使得 $a(i) < k_1 + k_2$ 并且

$$[\natural(v_1), \natural(v_2)] = \natural([v_1, v_2]) + \sum_i f_i \natural(w_i)$$

我们定义

$$T(v_1, v_2, x, t) = [v_1, v_2] + \sum_i f_i(x) t^{k_1+k_2-a(i)} w_i \tag{3.6}$$

容易验证 T 满足(3.5)。

设 $L \subseteq \mathfrak{g}_x$ 是 x处的一个切锥。因此，存在 $(x_n、\ t_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq M \times \mathbb{R}^\nu_+ \backslash \{0\}$，使得 $x_n \to x$、$t_n \to 0$ 以及核$(\natural_{x_n、\ t_n}) \to \natural_x^{-1}{}_、{}_0(L)$。由于$\natural_x$,0：$V \to \mathfrak{g}_x$ 是李代数同态，只需证明$\natural_x^{-1}{}_、{}_0(L)$ 是 V 的李子代数。设 $v、\ w \in \natural_x^{-1}{}_、{}_0(L)$。由命题 3.0.1，存在序列 $v_n、\ w_n \in$ 核$(\natural_{x_n、\ t_n})$，使得 $v_n \to v$ 且 $w_n \to w$。向量场 $\natural(\alpha_{t_n}(v_n))$ 与$\natural(\alpha_{t_n}(w_n))$在 x_n处为零。因此，它们的李括号在 x_n处为零。故 $T(v_n、\ w_n、\ x_n、\ t_n) \in$核$(\natural_{x_n、\ t_n})$。由 T的连续性以及命题 3.0.1，$[v、\ w] = T(v、\ w、\ x、\ 0) \in \natural_x^{-1}{}_、{}_0(L)$。

现在我们证明命题 2.2.10.ii。回忆一下，Grass(V) 格拉斯曼流形在子空间 $L \subseteq V$处的切空间 T_LGrass(V) 自然同构于 Hom$(L,\ V/L)$，如下所示：设$(L_t)_{t\in]-\epsilon,\ \epsilon[} \subseteq$ Grass(V) 是子空间的一条光滑路径，其中某个 $\epsilon > 0$ 满足 $L_0 = L$。导数 $\mathrm{d}L_t\mathrm{d}t \big|_{t=0}$ 是由 $L \to V/L$ 定义的线性映射 ——

$$\left.\frac{\mathrm{d}L_t}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} (l) = c'(0) \bmod L, \tag{3.7}$$

其中 $c:]-\epsilon,\ \epsilon[\to V$是任意一条满足对所有 $t \in]-\epsilon,\ \epsilon[$均有 $c(t) \in L_t$，且 $c(0) = l$的光滑路径。注意，$\mathrm{d}L_t\mathrm{d}t \big|_{t=0}(l)$ 不依赖于 c 的选择，因为如果 c 是一条光滑路径，且对所有 t 均有 $c(t) \in L_t$，并且 $c(0) = 0$，那么根据命题 ~~3.0.1~~，$c'(0) =$lim$_{t\to 0} \frac{c(t)}{t} \in L$。

现在，设 $v \in V$固定。在流形 Grass$(V) \times M \times \mathbb{R}^\nu_+$ 上，我们定义向量场

$$Z(L, x, t) = (w \mapsto T(w, v, x, t) \bmod L, \natural(\alpha_t(v))(x), 0) \in T_{(L,x,t)}\mathrm{Grass}(V) \times M \times \mathbb{R}^\nu_+.$$

在 Grass$(V) \times M \times \{0\}$ 上，$Z(L, x, 0) = (w \mapsto [w, v]$模 $L, 0, 0)$。因此，[1]

$$e^Z \cdot (L, x, 0) = (vLv^{-1}, x, 0).$$

现在我们将空间 $\mathbb{G}^{(0)}$ 视为 Grass$(V) \times M \times \mathbb{R}^\nu_+$ 的一个子空间，所用的映射是来自 (2.11) 的 Grass$(\natural)$。为证明命题 2.2.10.ii，只需证明 Z 的流使子集$\mathcal{G}^{(0)} \times \{0\}$保持不变。集合$\mathcal{G}^{(0)} \times \{0\}$ 是 $M \times \mathbb{R}^\nu_+ \backslash \{0\}$的极限集。因此，只需证明 Z的流保持 $M \times \mathbb{R}^\nu_+ \backslash \{0\}$。事实上 Z 切于 $M \times \mathbb{R}^\nu_+ \backslash \{0\}$。为看出这一点，我们计算 Grass$(\natural)$ 在点 $(x, t) \in M \times \mathbb{R}^\nu_+ \backslash \{0\}$处的微分。我们论断，对任意 $\xi \in T_xM$，dGrass$(\natural)_{(x,t)}(\xi, 0) = (\phi, \xi, 0)$，其中 $\phi:$ ker$(\natural_{x,t}) \to V/$ker$(\natural_{x,t})$ 是满足以下条件的唯一线性映射

$$\natural_{x,t}(\phi(w)) = [\natural(\alpha_t(w)), X](x), \quad \forall w \in \ker(\natural_{x,t})$$

其中 $X \in \mathcal{X}(M)$ 是满足 $X(x) = \xi$ 的任意向量场。由此论断完成命题 2.2.10.ii 的证明，因为根据 (3.5)，我们有

$$\mathrm{dGrass}(\natural)_{(x,t)}(\natural(\alpha_t(v))(x), 0) = Z(\mathrm{Grass}(\natural)(x, t)).$$

[1]此处采用了(2.2)中的符号约定。

我们来证明这个论断。固定 $x_0 \in M$, $t_0 \in \mathbb{R}_+^\nu \backslash 0$, $X \in \mathbf{X}(M)$。取 $v_1, \cdots, v_{\dim(M)} \in V$，使得 $\natural_{x_0,t_0}(v_1), \cdots, \natural_{x_0,t_0}(v_{\dim(M)})$ 构成 $T_{x_0}M$ 的线性基。因此，向量场 $\natural(\alpha_{t_0}(v_1)), \cdots, \natural(\alpha_{t_0}(v_{\dim(M)}))$ 在线性意义下张成 x_0 的一个邻域 U 内的切丛。对于任意 $w \in V$, $\natural(\alpha_{t_0}(w)) = \sum_i f_i \natural(\alpha_{t_0}(v_i))$，存在唯一的光滑函数 $f_i \in C^\infty(U)$。对于任意 $x \in U$，$\ker(\natural_{x,t_0})$ 的一般元素于是可表示为 $w - \sum_i f_i(x) v_i$。根据 (3.7) 中格拉斯曼流形切空间的识别，$\mathrm{dGrass}(\natural)_{(x_0,t_0)}(X(x_0), 0) = (\phi, X(x_0), 0)$，其中 ϕ 是线性映射

$$w - \sum_i f_i(x_0) v_i \mapsto \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(w - \sum_i f_i(e^{tX} \cdot x_0) v_i \right)\Big|_{t=0} = -\sum_i X(f_i)(x_0) v_i \mod \ker(\natural_{x_0,t_0}).$$

我们有

$$\begin{aligned}\left[\natural\left(\alpha_{t_0}\left(w - \sum_i f_i(x_0) v_i \right) \right), X \right](x_0) &= [\natural(\alpha_{t_0}(w)), X](x_0) - \sum_i f_i(x_0) [\natural(\alpha_{t_0}(v_i)), X](x_0) \\ &= -\sum_i X(f_i)(x_0) \natural_{x_0,t_0}(v_i).\end{aligned}$$

论断得证。 □

在证明命题 2.2.10.ii 时，我们还证明了以下结论：

引理 3.1.3. 设 $(V, \natural)$ 是一个 ν-分次李基。以下函数是光滑的

$$\begin{aligned} r \circ \mathcal{Q}_V : \mathrm{Dom}(\mathcal{Q}_V) &\to \mathbb{G}^{(0)} \\ (v, x, t) &\mapsto (e^{\alpha_t(v)} \cdot x, t) \\ (v, L, x, 0) &\mapsto (\natural_{x,0}(v) L \natural_{x,0}(v)^{-1}, x, 0). \end{aligned}$$

证明。对于固定的 v，映射 $r \circ \mathcal{Q}_V$ 是 Z 在时刻 1 的流在 $\mathbb{G}^{(0)}$ 上的限制。由于 Z 关于 v 光滑地变化，因此 $r \circ \mathcal{Q}_V$ 是光滑的。 □

3.2 关键引理

摘要： 我们将证明两个引理。第一个引理使我们能够从一个 ν分次基转换到另一个 ν分次基。第二个引理将 $\mathbb{G}$ 上的复合提升到 ν分次李基上。这两个引理都可视为对定理 2.2.5 和命题 2.2.10 的证明中构造的映射 T 的细化。两个引理将按相反顺序证明。

记号与约定： 在本章和第5章中，我们将使用以下辅助 $(\mathbb{R}_+^\times)^\nu$ 作用。设 $\lambda \in (\mathbb{R}_+^\times)^\nu$。回顾 (2.22) 中的记号。我们定义

$$\begin{aligned}
&\alpha_\lambda : M \times \mathbb{R}_+^\nu \to M \times \mathbb{R}_+^\nu, \alpha_\lambda : V \times M \times \mathbb{R}_+^\nu \to V \times M \times \mathbb{R}_+^\nu, \quad \alpha_\lambda(x, t) = (x, \lambda^{-1} t) \qquad \alpha_\lambda(v, x, t) = (\alpha_\lambda(v), \\
&\alpha_\lambda(x, t)) \alpha_\lambda : V \times V \times M \times \mathbb{R}_+^\nu \to V \times V \times M \times \mathbb{R}_+^\nu, \quad \alpha_\lambda(v, w, x, t) = (\alpha_\lambda(v), \alpha_\lambda(w), \alpha_\lambda(x, t)) \\
&\alpha_\lambda : \mathbb{G}^{(0)} \to \mathbb{G}^{(0)}, \qquad \alpha_\lambda(x, t) = (x, \lambda^{-1} t), \quad \alpha_\lambda(L, x, 0) = (\alpha_\lambda(L), x, 0) \\
&\alpha_\lambda : V \times \mathbb{G}^{(0)} \to V \times \mathbb{G}^{(0)}, \qquad \alpha_\lambda(v, \gamma) = (\alpha_\lambda(v), \alpha_\lambda(\gamma)) \alpha_\lambda : \\
&V \times V \times \mathbb{G}^{(0)} \to V \times V \times \mathbb{G}^{(0)}, \qquad \alpha_\lambda(v, w, \gamma) = (\alpha_\lambda(v), \alpha_\lambda(w), \alpha_\lambda(\gamma))
\end{aligned} \tag{3.8}$$

总而言之， α_λ 对所有变量的作用都是对角的。它对变量 M的作用是平凡的，对 V的作用是通过式（2.6）中的膨胀实现的，对 Grass$(\mathfrak{g}_x)$ 的作用是利用 $\mathfrak{g}_x$上的膨胀实现的，对 $\mathbb{R}_+^\nu$ 的作用则是通过 $t \mapsto \lambda^{-1}t$实现的。

注 3.2.1. 映射 $\alpha_\lambda : \mathbb{G}^{(0)} \to \mathbb{G}^{(0)}$ 是良定义的微分同胚。为验证其良定义，我们需要证明：若 $L \subseteq \mathfrak{g}_x$ 是 x处的切锥，则 $\alpha_\lambda(L)$ 也是 x处的切锥。这是因为，若 $(x_n, t_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq M \times \mathbb{R}_+^\nu \backslash 0$ 是满足 $x_n \to x$、 $t_n \to 0$、$\ker(\natural_{x_n,t_n}) \to \natural_{x,0}^{-1}(L)$的序列，则 $\ker(\natural_{x_n,\lambda^{-1}t_n}) = \alpha_\lambda(\ker(\natural_{x_n,t_n})) \to \alpha_\lambda(L)$。映射 $\alpha_\lambda : \mathbb{G}^{(0)} \to \mathbb{G}^{(0)}$是微分同胚，因为它是由 $(L, x, t) \mapsto (\alpha_\lambda(L), x, \lambda^{-1}t)$给出的微分同胚 Grass$(V) \times M \times \mathbb{R}_+^\nu \to$Grass$(V) \times M \times \mathbb{R}_+^\nu$ 的限制。

我们通常会考虑空间 X 和 Y 之间的部分定义映射 f：定义域$(f) \subseteq X \to Y$，它们配备了 $(\mathbb{R}_+^\times)^\nu$-作用。若定义域$(f)$ 是等变的，且对于所有 $x \in$定义域(f) 和 $\lambda \in (\mathbb{R}_+^\times)^\nu$，$f(\alpha_\lambda(x)) = \alpha_\lambda(f(x))$，我们就称 f 是等变的。

引理 3.2.2. 设 $(V, \natural)$ 和 $(V', \natural')$ 是 ν-分次基，满足 $(V', \natural') \subseteq (V, \natural)$。存在光滑等变下沉映射

$$\tilde{\phi} : \mathrm{Dom}(\tilde{\phi}) \subseteq V \times M \times \mathbb{R}_+^\nu \to V' \times M \times \mathbb{R}_+^\nu, \quad \phi : \mathrm{Dom}(\phi) \subseteq V \times \mathbb{G}^{(0)} \to V' \times \mathbb{G}^{(0)},$$

分别定义在 $V \times M \times \{0\}$ 和 $V \times \boldsymbol{G}^{(0)} \times \{0\}$ 的开邻域上，使得：

i. *If* $(v, x) \in V' \times M$, *then* $\tilde{\phi}(v, x, 0) = (v, x, 0)$.[2]

ii. 有

$$\mathrm{Dom}(\tilde{\phi}) \subseteq \widetilde{\mathrm{Dom}}(\mathcal{Q}_V), \quad \mathrm{Im}(\tilde{\phi}) \subseteq \widetilde{\mathrm{Dom}}(\mathcal{Q}_{V'}), \quad \mathrm{Dom}(\phi) \subseteq \mathrm{Dom}(\mathcal{Q}_V), \quad \mathrm{Im}(\phi) \subseteq \mathrm{Dom}(\mathcal{Q}_{V'}) \tag{3.9}$$

且下图交换

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Dom}(\phi) & \xrightarrow{\phi} & V' \times \mathbb{G}^{(0)} \\ & \searrow^{\mathcal{Q}_V} & \downarrow{\scriptstyle \mathcal{Q}_{V'}} \\ & & \mathbb{G} \end{array} . \tag{3.10}$$

iii. 有 定义域$(\phi) = \pi^{-1}_{V\times\mathbb{G}^{(0)}}$(定义域$(\tilde{\phi})$)，且下图

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Dom}(\phi) & \xrightarrow{\phi} & V' \times \mathbb{G}^{(0)} \\ {\scriptstyle \pi_{V\times\mathbb{G}^{(0)}}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi_{V'\times\mathbb{G}^{(0)}}} \\ \mathrm{Dom}(\tilde{\phi}) & \xrightarrow{\tilde{\phi}} & V' \times M \times \mathbb{R}_+^\nu \end{array} \tag{3.11}$$

是一个拉回图。

总而言之，映射 ϕ 使我们能够从 $\mathcal{Q}_{V'}$ 转到 $\mathcal{Q}_V$。此外，它是某个浸没 ϕ 的拉回˜，而该浸没并不定义在膨胀上（因此我们可以在 ϕ上使用反函数定理等标准微分˜几何工具）。

为了陈述下面的引理，我们需要先介绍一些预备知识：设 $(V, \natural)$ 是一个 ν-分次李基。我们希望将乘积映射 $\mathbb{G}^{(2)} \to \mathbb{G}$ 经由 $\mathcal{Q}_V$提升。注意到

$$\begin{aligned} &\{(v,\gamma),(w,\eta) \in \mathrm{Dom}(\mathcal{Q}_V) \times \mathrm{Dom}(\mathcal{Q}_V) : (\mathcal{Q}_V(v,\gamma), \mathcal{Q}_V(w,\eta)) \in \mathbb{G}^{(2)}\} \\ =&\{(v,\gamma),(w,\eta) \in \mathrm{Dom}(\mathcal{Q}_V) \times \mathrm{Dom}(\mathcal{Q}_V) : \gamma = r \circ \mathcal{Q}_V(w,\eta)\}. \end{aligned}$$

[2] ˜事实上，我们构造的映射满足更强的条件，即对于所有 (v, x, t)，都有 $\phi(v, x, t) = (v, x, t) \in (V' \times M \times \mathbb{R}_+^\nu) \cap$ 定义域$(\tilde{\phi})$。我们不需要这个。

因此，这个集合可以与 $V\times V\times\mathbb{G}^{(0)}$ 的以下子集相对应

$$\mathrm{Dom}(\mathcal{Q}_V^2)=\{(v,w,\eta)\in V\times V\times\mathbb{G}^{(0)}:(v,r\circ\mathcal{Q}_V(w,\eta)),(w,\eta)\in\mathrm{Dom}(\mathcal{Q}_V)\}.$$

回顾一下，$\mathrm{Dom}(\mathcal{Q}_V)=\pi^{-1}_{V\times\mathbb{G}^{(0)}}(\widetilde{\mathrm{Dom}}(\mathcal{Q}_V))$。类似地，如果我们定义

$$\widetilde{\mathrm{Dom}}(\mathcal{Q}_V^2)=\{(v,w,x,t)\in V\times V\times M\times\mathbb{R}_+^\nu:(v,e^{\alpha_t(w)}\cdot x,t),(w,x,t)\in\widetilde{\mathrm{Dom}}(\mathcal{Q}_V)\},$$

那么 $\mathrm{Dom}(\mathcal{Q}_V^2)=\pi^{-1}_{V\times V\times\mathbb{G}^{(0)}}(\widetilde{\mathrm{Dom}}(\mathcal{Q}_V^2))$，其中 $\pi_{V\times V\times\mathbb{G}^{(0)}}$：
$V\times V\times\mathbb{G}^{(0)}\to V\times V\times M\times\mathbb{R}_+^\nu$ 是自然投影，见 (2.16)。集合 $\widetilde{\mathrm{Dom}}(\mathcal{Q}_V^2)$ 是开集，因为 $\widetilde{\mathrm{Dom}}(\mathcal{Q}_V)$ 是开集。由于$\pi_{V\times V\times\mathbb{G}^{(0)}}$是连续的，$\mathrm{Dom}(\mathcal{Q}_V^2)$ 是开集。令

$$\begin{aligned}\mathcal{Q}_V^2:\mathrm{Dom}(\mathcal{Q}_V^2)\subseteq V\times V\times\mathbb{G}^{(0)}&\to\mathbb{G}\\(v,w,x,t)&\mapsto(e^{\alpha_t(v)}e^{\alpha_t(w)}\cdot x,x,t)\\(v,w,L,x,0)&\mapsto(\natural_{x,0}(v\cdot w)L,x,0),\end{aligned}\tag{3.12}$$

等价地，

$$\mathcal{Q}_V^2(v,w,\gamma)=\mathcal{Q}_V(v,r\circ\mathcal{Q}_V(w,\gamma))\mathcal{Q}_V(w,\gamma)\tag{3.13}$$

集合 $\widetilde{\mathrm{Dom}}(\mathcal{Q}_V^2)$、$\mathrm{Dom}(\mathcal{Q}_V^2)$ 以及映射 $\pi_{V\times V\times\mathbb{G}^{(0)}}$、$\mathcal{Q}_V^2$是 $(\mathbb{R}_+^\times)^\nu$-等变的。

Lemma 3.2.3. 设 $(V,\natural)$ 是一个 ν-分次李基。存在等变光滑浸没

$$\tilde{\psi}:\text{定义域}(\tilde{\psi})\subseteq V\times V\times M\times\mathbb{R}_+^\nu\to V\times M\times\mathbb{R}_+^\nu,\qquad\psi:\text{定义域}(\psi)\subseteq V\times V\times\mathbb{G}^{(0)}\to V\times\mathbb{G}^{(0)}$$

d在 $V\times V\times M\times\{0\}$ 和 $V\times V\times\mathbb{G}^{(0)}\times\{0\}$ 的某个开邻域上定义，使得：

i. 对任意 $(v,w,x)\in V\times V\times M$, $\psi(v,w,x,0)=(v\cdot w,x,0)$。

ii. 对任意 $(v,x,t)\in V\times M\times\mathbb{R}_+^\nu$，我们有 $\psi(v,0,x,t)=\psi(0,v,x,t)=(v,x,t)$，只要 $(v,0,x,t)$ 或 $(0,v,x,t)$ 属于 ψ 的定义域。

iii. 有，

$$\mathrm{Dom}(\tilde{\psi})\subseteq\widetilde{\mathrm{Dom}}(\mathcal{Q}_V^2),\ \mathrm{Im}(\tilde{\psi})\subseteq\widetilde{\mathrm{Dom}}(\mathcal{Q}_V),\ \mathrm{Dom}(\psi)\subseteq\mathrm{Dom}(\mathcal{Q}_V^2),\ \mathrm{Im}(\psi)\subseteq\mathrm{Dom}(\mathcal{Q}_V),\tag{3.14}$$

且以下图表可交换

$$\begin{array}{ccc}\mathrm{Dom}(\psi)&\xrightarrow{\psi}&V\times\mathbb{G}^{(0)}\\&\searrow^{\mathcal{Q}_V^2}&\downarrow{\scriptstyle\mathcal{Q}_V}\\&&\mathbb{G}\end{array}.\tag{3.15}$$

iv. 有 $\text{定义域}(\psi)=\pi^{-1}_{V\times V\times\mathbb{G}^{(0)}}(\text{定义域}(\tilde{\psi}))$ 以及以下图表

$$\begin{array}{ccc}\mathrm{Dom}(\psi)&\xrightarrow{\psi}&V\times\mathbb{G}^{(0)}\\{\scriptstyle\pi_{V\times V\times\mathbb{G}^{(0)}}}\downarrow&&\downarrow{\scriptstyle\pi_{V\times V\times\mathbb{G}^{(0)}}}\\\mathrm{Dom}(\tilde{\psi})&\xrightarrow{\tilde{\psi}}&V\times M\times\mathbb{R}_+^\nu\end{array}\tag{3.16}$$

是一个拉回图。

˜**注记 3.2.4.** 由 (3.15) 的交换性以及图表 (3.16) 可知， ψ 和 ψ 具有以下形式

$$\tilde{\psi}(v,w,x,t)=(\hat{\psi}(v,w,x,t),x,t),\quad \psi(v,w,\gamma)=(\hat{\psi}(v,w,\pi_{\mathbb{G}^{(0)}}(\gamma)),\gamma) \tag{3.17}$$

对于某个映射 ˆ ψ ： 定义域$(\tilde{\psi})\to V$，它满足

$$e^{\alpha_t(\hat{\psi}(v,w,x,t))}\cdot x=e^{\alpha_t(v)}e^{\alpha_t(w)}\cdot x,\ \text{and}\ \hat{\psi}(v,w,x,0)=v\cdot w. \tag{3.18}$$

ˆ 在本截面稍后的某些证明中，我们将用到映射 ψ。

˜在本章中，我们将始终把 ϕ,ϕ 留给通过˜应用引理 3.2.2 得到的映射，并把 ψ,ψ 留给通过应用引理 3.2.3 得到的映射。

引理 3.2.3 的证明。

引理 3.2.5. 为证明引理 *3.2.3*，只需找到 $V\times M\times\{0\}$ 的一个 $(\mathbb{R}_+^\times)^\nu$-等变开邻域 $U\subseteq V\times M\times\mathbb{R}_+^\nu$ 以及一个线性映射 $w\in V\mapsto A_w\in\boldsymbol{X}\ (U)$，使得:

i. 对任意 $\lambda\in(\mathbb{R}_+^\times)^\nu$、 $w\in V$、 $\alpha_{\lambda*}(A_w)=A_{\alpha_\lambda(w)}$。

ii. 若 $(v,x)\in V\times M$，则 $A_w(v,x,0)=\left(\mathrm{d}\,\mathrm{d}\tau\overline{\mathrm{BCH}}(\tau w,v)\big|_{\tau=0},\ 0,\ 0\right)$。

iii. 若 $(v,x,t)\in U$, $w\in V$，则 $e^{\tau A_w}\cdot(v,x,t)=(v_\tau,x,t)$ 以及 $e^{\alpha_t(v_\tau)}\cdot x=e^{\tau\alpha_t(w)}e^{\alpha_t(v)}\cdot x$, 只要 A_w 的流在 $\tau\in\mathbb{R}$处良定义。

iv. 只要流良定义， $e^{\tau A_w}\cdot(0,x,t)=(\tau w,x,t)$。

证明。设 $\tilde{\psi}(w,v,x,t)=e^{A_w}\cdot(v,x,t)$，其定义域为流存在的点构成的集合。映射 $\tilde{\psi}$具有如下形式： $\tilde{\psi}(w,v,x,t)=(\hat{\psi}(v,w,x,t),x,t)$，其中映射 ˆ ψ 满足 ˜(3.18)。我们通过 (3.17) 定义 ψ 。由 (3.18)，映射 ψ 在 $\{0\}\times$ ˜$\{0\}\times M\times\{0\}$ 中的任意一点处都是浸没。由于 ψ 是等变的， ψ 为浸没的点集是 $(\mathbb{R}_+^\times)^\nu$-˜等变开邻域 $V\times V\times M\times\{0\}$。将 Dom$(\psi)$ 缩减为 ˜ ˜ ˜中 ψ 为浸没的点集后，我们可以假定 ψ 是浸没。将 Dom(ψ)替换为 Dom$(\tilde{\psi})\cap\widetilde{\mathrm{Dom}}(\mathrm{Q}_V^2)\cap\tilde{\psi}^{-1}(\widetilde{\mathrm{Dom}}(\mathrm{Q}_V))$后，还可以进一步假定 Dom$(\tilde{\psi})\subseteq\widetilde{\mathrm{Dom}}(\mathrm{Q}_V^2)$且 Im$(\tilde{\psi})\subseteq\widetilde{\mathrm{Dom}}(\mathrm{Q}_V)$。现在令 ψ 的定义域为 $\pi^{-1}_{V\times V\times\mathbb{G}^{(0)}}(\mathrm{Dom}(\tilde{\psi}))$。容易看出，图表 (3.16) 是一个拉回图。因此，由命题 1.1.15, ψ 是浸没。由于 Dom$(\mathrm{Q}_V^2)=\pi^{-1}_{V\times V\times\mathbb{G}^{(0)}}(\widetilde{\mathrm{Dom}}(\mathrm{Q}_V^2))$且 Dom$(\mathrm{Q}_V)=\pi^{-1}_{V\times\mathbb{G}^{(0)}}(\widetilde{\mathrm{Dom}}(\mathrm{Q}_V))$, (3.14) 得证。(3.15) 的交换性由 (3.18) 和注记 3.1.2 得出。最后，由条件 iv 以及 $A_0=0$, 引理 3.2.3.ii 得证。 □

设 $T\colon\ V\times V\times M\times\mathbb{R}_+^\nu\to V$是命题 2.2.10 的证明中所述的满足 (3.5) 的双线性映射。根据 (3.6) 中 T 的定义可知， T 是 $(\mathbb{R}_+^\times)^\nu$-等变的。将 T替换为 $(w,\ v,\ x,\ t)\mapsto\frac{T(w,\ v,\ x,\ t)-T(v,\ w\ x\ t)}{2}$，后，我们可~~以进一步假设~~

$$T(w,v,x,t)=-T(v,w,x,t),\quad\forall(v,w,x,t)\in V\times V\times M\times\mathbb{R}_+^\nu. \tag{3.19}$$

设 f_τ， $h_\tau\colon\ V\times M\times\mathbb{R}_+^\nu\to\mathcal{L}(V)$是关于 $\tau\in\mathbb{R}$局部定义的光滑解，它们满足一阶微分方程（矩阵微分方程）

$$f_0(v,x,t)w=w,\quad\frac{\partial}{\partial\tau}f_\tau(v,x,t)w=f_\tau(v,x,t)T(w,v,e^{-\tau\alpha_t(v)}\cdot x,t),\quad h_\tau=\int_0^\tau f_s ds. \tag{3.20}$$

由于定义 f的微分方程是矩阵微分方程，映射 $f_\tau(v,x,t)$与 $h_\tau(v,x,t)$在 $e^{-\tau\alpha_t(v)}\cdot x$ 良定义时即有定义。设 $h_1^{-1}(v,x,t)$为线性逆

$h_1(v,x,t)$的线性逆（若其存在）。由(3.5)，$f_\tau(v,x,0)=e^{\tau \mathrm{ad}_v}$，其中$\mathrm{ad}_v$：$V\to V$是线性映射$\mathrm{ad}_v(w)=[w,v]$。因此，$h_1(v,x,0)=\frac{e^{\mathrm{ad}_v}-1}{\mathrm{ad}_v}$。由于$\mathrm{ad}_v$是幂零线性映射，$h_1(v,x,0)$可逆。矩阵指数的导数公式 [Ros02，定理5第1节。2]表明

$$h_1^{-1}(v,x,0)w=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\operatorname{BCH}(\tau w,v)\Big|_{\tau=0}. \tag{3.21}$$

Let

$$\begin{aligned} U&=\left\{(v,x,t)\in V\times M\times\mathbb{R}_+^\nu : e^{\alpha_t(v)}\cdot x \text{ and } h_1^{-1}\left(v,e^{\alpha_t(v)}\cdot x,t\right) \text{ exist}\right\}\\ A_w(v,x,t)&=(h_1^{-1}(v,e^{\alpha_t(v)}\cdot x,t)w,0,0)\in\mathcal{X}(U). \end{aligned} \tag{3.22}$$

集合 U 是 $V\times M\times\{0\}$的一个开邻域。我们来检查 A_w 是否满足所需条件。T 的等变性意味着

$$f_\tau(\alpha_\lambda(v,x,t))\alpha_\lambda(w)=\alpha_\lambda(f_\tau(v,x,t)w),\quad h_\tau(\alpha_\lambda(v,x,t))\alpha_\lambda(w)=\alpha_\lambda(h_\tau(v,x,t)w)$$

这意味着 U 是 $(\mathbb{R}_+^\times)^\nu$-等变的，且 $\alpha_{\lambda *}(A_w)=A_{\alpha_\lambda(w)}$。根据 (3.21)，我们得到$A_w(v,\ x,\ 0)=\left(\mathrm{d}\,\mathrm{d}\tau\mathrm{BCH}(\tau w,\ v)\big|_{\tau=0},\ 0,\ 0\right)$。根据 (3.19)，$f_\tau(sv,\ x,\ t)v=v$ 对所有 $s\in\mathbb{R}$ 均成立，只要 f_τ 是良定义的。因此，对所有 $s\in\mathbb{R}$，都有 $A_w(sw,\ x,\ t)=(w,\ 0,\ 0)$，由此可得引理 3.2.5.iv。

还需验证引理 3.2.5.iii。在流形 $V\times M\times\mathbb{R}_+^\nu$ 上，我们定义向量场：

$$Y_w(v,x,t)=(w,0,0),\quad X_w(v,x,t)=(0,\natural(\alpha_t(w))(x),0),\quad Z(v,x,t)=(0,\natural(\alpha_t(v))(x),0),$$

其中 $w\in V$是一个参数。我们有

$$[Y_w,Z]=X_w,\quad e^{\tau X_w}\cdot(v,x,t)=(v,e^{\tau\alpha_t(w)}\cdot x,t),\quad e^{\tau Z}\cdot(v,x,t)=(v,e^{\tau\alpha_t(v)}\cdot x,t) \tag{3.23}$$

由 (3.5) 和 (3.23)，我们有

$$[X_w,Z](v,x,t)=X_{T(w,v,x,t)}(v,x,t). \tag{3.24}$$

A_w的流为 $e^{\tau A_w}\cdot(v,\ x,\ t)=(v_\tau,\ x,\ t)$，其中某个 $v_\tau\in V$，因为 A_w与 V相切。根据向量场的推前的定义，

$$\begin{aligned}(v_\tau,e^{\alpha_t(v_\tau)}\cdot x,t)=e^Z\cdot(v_\tau,x,t)=e^Ze^{\tau A_w}\cdot(v,x,t)&=e^Ze^{\tau A_w}e^{-Z}e^Z\cdot(v,x,t)\\&=e^{\tau e_*^Z(A_w)}\cdot(v,e^{\alpha_t(v)}\cdot x,t).\end{aligned} \tag{3.25}$$

现在我们来计算向量场 $e_*^Z(A_w)$。我们断言

$$e_*^{\tau Z}(X_w)(v,x,t)=X_{f_\tau(v,x,t)w}(v,x,t),\ e_*^{\tau Z}(Y_w)(v,x,t)=Y_w(v,x,t)+X_{h_\tau(v,x,t)w}(v,x,t). \tag{3.26}$$

为此，令 $K_{w,\ \tau}(v,\ x,\ t)=X_{f_\tau(v,\ x,\ t)w}(v,\ x,\ t)$。我们有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}e_*^{-\tau Z}(K_{w,\tau})=e_*^{-\tau Z}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}K_{w,\tau}-[K_{w,\tau},Z]\right).$$

由 (3.24)，可得

$$[K_{w,\tau},Z](v,x,t)=X_{T(f_\tau(v,x,t)w,v,x,t)}(v,x,t)-X_{Z(f_\tau)(v,x,t)w}(v,x,t).$$

为计算 $Z(f_\tau)$，注意到

$$f_{\tau'+\tau}(v, e^{\tau'\alpha_t(v)}\cdot x, t) = f_{\tau'}(v, e^{\tau'\alpha_t(v)}\cdot x, t) f_\tau(v, x, t).$$

在 $\tau' = 0$ 处取导数，我们得到

$$Z(f_\tau)(v, x, t)w + \frac{\partial}{\partial\tau} f_\tau(v, x, t)w = T(f_\tau(v, x, t)w, v, x, t).$$

因此，$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} e_*^{-\tau Z}(K_{w,\ \tau}) = 0$。所以，$e_*^{-\tau Z}(K_{w,\ \tau}) = K_{w,\ 0} = X_w$。这证明了（3.26）的第一个恒等式。（3.26）的第二个恒等式由下式推出：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} X_{h_\tau(v,x,t)w}(v, x, t) = X_{f_\tau(v,x,t)w}(v, x, t) = e_*^{\tau Z}(X_w) = e_*^{\tau Z}([Y_w, Z]) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} e_*^{\tau Z}(Y_w).$$

由于 $A_w(v,\ x,\ t) = Y_{h_1^{-1}(v,\ e^{\alpha_t(v)}\cdot x,\ t)w}(v,\ x,\ t)$，（3.26）的第二个恒等式意味着

$$e_*^Z(A_w)(v, x, t) = Y_{h_1^{-1}(v,x,t)w}(v, x, t) + X_w(v, x, t) = (h_1^{-1}(v, x, t)w, \natural(\alpha_t(w))(x), 0).$$

因此，$e^{\tau e_*^Z(A_w)}\cdot(v,\ e^{\alpha_t(v)}\cdot x,\ t) = (\xi_\tau,\ e^{\tau\alpha_t(w)}e^{\alpha_t(v)}\cdot x,\ t)$，其中 $\xi_\tau \in V$。于是，由（3.25）可得，

$$(v_\tau, e^{\alpha_t(v_\tau)}\cdot x, t) = (\xi_\tau, e^{\tau\alpha_t(w)}e^{\alpha_t(v)}\cdot x, t).$$

特别地，$e^{\alpha_t(v_\tau)}\cdot x = e^{\tau\alpha_t(w)}e^{\alpha_t(v)}\cdot x$。 □

引理 3.2.2 的证明。利用引理 3.1.1 将 $(V, \natural)$ 替换为一个更大的 ν-分次基后，我们可以假设 $(V, \natural)$ 是一个 ν-分次李基。设 $\tilde{\psi}$ 如引理 3.2.3 中所述，$\hat{}\,\psi$ 如 (3.17) 中所述，T: $V\times M\times\mathbb{R}_+^\nu \to V'$ 如定理 2.2.5 的证明中所述，并满足 (3.2)。观察 T的构造方式可知，我们可以假设对于所有 $v\in V'$，$T(v, x, 0) = v$。注意，利用 (3.3) 定义的映射 T 是$(\mathbb{R}_+^\times)^\nu$-等变的。

引理 3.2.6。要证明引理 *3.2.2*，只需找到一个等变光滑映射 ϕ 定义域($\hat{}\,\phi) \subseteq V\times M\times\mathbb{R}_+^\nu \to V'$，它定义在 $V\times M\times\{0\}$ 的某个等变开邻域上，并满足：

i. If $(v, x, t)\in \mathrm{Dom}(\hat{\phi})$, *then* $(-v, \hat{\phi}(v, x, t), x, t)\in \mathrm{Dom}(\tilde{\psi})$ *and* $T(\tilde{\psi}(-v, \hat{\phi}(v, x, t), x, t)) = 0$.

ii. 若 $v\in V'$和 $x\in M$，则 $\hat{}\,\phi(v, x, 0) = v$。

证明。若 $(v, x, t)\in$定义域($\hat{}\,\phi$)，则由 (3.2) 得，$\hat{}\,\psi(-v, \hat{}\,\phi(v, x, t), x, t)\in$核($\natural_{x,t}$)。由注记 3.1.2 和 (3.18)，我们推得

$$e^{\alpha_t(\hat{\phi}(v,x,t))}\cdot x = e^{\alpha_t(v)}\cdot x, \text{ and } \natural_{x,0}(\hat{\phi}(v, x, 0)) = \natural_{x,0}(v). \tag{3.27}$$

现在定义 $\tilde{\phi}(v, x, t) = (\hat{}\,\phi(v, x, t), x, t)$和 $\phi(v, \gamma) = (\hat{}\,\phi(v, \pi_{\mathbb{G}^{(0)}}(\gamma)), \gamma)$。我们按照引理 3.2.5 的证明，将 ϕ 的定义域缩小，使得 ϕ 和 ϕ 是浸没，且 (3.9) 成立，并且图表 (3.11) 是拉回图。最后，由 (3.27) 可知，图表 (3.10) 可交换。 □

我们将利用隐函数定理定义 $\hat{}\,\phi(v, x, t)$，使其成为唯一满足方程 $T(\psi(-v, v', x, t)) = 0$ 的 $v'\in V'\tilde{}$。更确切地说，考虑映射

Ψ：定义域($\tilde{\psi}$) $\cap\,(V\times V'\times M\times\mathbb{R}_+^\nu) \to V\times V'\times M\times\mathbb{R}_+^\nu$，$\Psi(v, v', x, t) = (v, T(\tilde{\psi}(v, v', x, t)), x, t)$

由于 ψ 和 T 是等变的，因此 Ψ 是等变的。此外，对于任意 $x \in M$，$\mathrm{d}\Psi_{(0,\ 0,\ x,\ 0)}$ 是双射，且 $\Psi(0,\ \mathbf{0},\ x,\ 0) = (0,\ \mathbf{0},\ x,\ 0)$。

定理 3.2.7（全局逆映射定理）。设 $f\colon\ M_1 \to M_2$ 是光滑流形之间的光滑映射，$A \subseteq M_1$ 是一个闭子集。若对每个 $x \in A$，$\mathrm{d}f_x$ 都是双射，且 $f_{|A}\colon\ A \to M_2$是单射且为真映射，那么存在 U 的一个开邻域 A，使得 $f_{|U}$ 是开光滑嵌入。

证明。根据反函数定理，并将 M_1 替换为 A的一个开邻域后，可以假设 f 是局部微分同胚。我们只需找到 A 的一个开邻域 U，使得 $f_{|U}$ 是单射。设 $K \subseteq A$ 是紧的。我们可以找到 K 的一列相对紧开邻域 $U_n \subseteq M_1$，使得 $K = \bigcap_n U_n$ 且 $U_{n+1} \subseteq U_n$。由于 U_n 是紧的，$f_{|U_n \cup A}$ 是真映射。我们断言，存在 n，使得 $f_{|U_n \cup A}$ 是单射。否则，就存在序列 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$，使得 $x_n \neq y_n, x_n \in U_n, y_n \in U_n \cup A, f(x_n) = f(y_n)$。由于 U_n 是递减且相对紧的，经过取子列，我们可以设$x_n \to x \in K$。由于 $f_{|U_n \cup A}$ 是真映射且 $f(y_n)$ 收敛到 $f(x)$，我们可以找到 y_n的一个收敛子列。因此不失一般性，可以设 $y_n \to y \in A$。于是，$f(x) = f(y)$。由 $f_{|A}$的单射性可知，$x = y$。由于 f 在 x处是局部微分同胚，对于足够大的 n，有 $x_n = y_n$，这就导出了矛盾。

设 $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是 M_2 的一个递增紧子集序列，满足 $M_2 = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$。我们将递归地定义一个递增序列 $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$，其各项是 M_1 的相对紧开子集，并满足 $f_{|V_n \cup A}$ 是单射且真映射，且 $f^{-1}(K_n) \cap A \subseteq V_n$。初始步骤由我们刚刚证明的结论得出，将其应用于 $f^{-1}(K_1) \cap A$；根据 $f_{|A}$ 的真性，$f^{-1}(K_1) \cap A$ 是紧的。归纳步骤同样由我们刚刚证明的结论得出，只需将 A 替换为 $V_n \cup A$，并使用紧集合 $V_n \cup (f^{-1}(K_{n+1}) \cap A)$。集合 $\bigcup_n V_n$ 是 A 的一个开邻域，在其上 f 是单射。

□

根据定理 3.2.7，Ψ 在 $\{(0$ 的一个开邻域 $W \subseteq V \times V' \times M \times \mathbb{R}^\nu_+$ 上是开嵌入，$\mathbf{0},\ x,\ 0)\colon x \in M\}$。设 $\|\cdot\|$ 是 V 上的一个范数。对于任意 $t \in \mathbb{R}^\nu_+$，令 $\|t\|_\infty := \max\{t_i\colon\ i \in [\![1,\ \nu]\!]\}$。存在一个连续函数 $g\colon M \to \mathbb{R}^\times_+$，使得

$$\left\{(v, v', x, t) \in V \times V' \times M \times \mathbb{R}^\nu_+ : \max(\|v\|, \left\|v'\right\|, \|t\|_\infty) < 2g(x)\right\} \subseteq W$$

Let

$$U = \{(v, v', x, t) \in V \times V' \times M \times \mathbb{R}^\nu_+ : \max\left(\left\|\alpha_{t/g(x)}(v)\right\|, \left\|\alpha_{t/g(x)}(v')\right\|\right) < 2g(x)\}$$

集合 U是 $V \times V' \times M \times \{0\}$的 $(\mathbb{R}^\times_+)^\nu$-等变开邻域。我们论断 Ψ 是 U上的开光滑嵌入。我们将证明，若 $(v、\ v'、\ x、\ t)、\ (w、\ w'、\ x、\ t) \in U$，则存在$\lambda \in (\mathbb{R}^\times_+)^\nu$ 使得 $\alpha_\lambda(v、\ v'、\ x、\ t)、\ \alpha_\lambda(w、\ w'、\ x、\ t) \in W$。$\Psi$ 的等变性将蕴含 Ψ 在 U上是单射的，并且通过取 $(v、\ v'、\ x、\ t) = (w、\ w'、\ x、\ t)$，我们推出 $U \subseteq \bigcup_{\lambda\in(\mathbb{R}^\times_+)^\nu} \alpha_\lambda(W)$，而由 Ψ 的等变性可知 Ψ 是 U上的开嵌入。

我们现在证明我们的论断。设 $(v, v', x, t), (w, w', x, t) \in U$。设 $\epsilon > 0$ 待稍后选取。若 $t_i > 0$，我们取 $\lambda \in (\mathbb{R}^\times_+)^\nu$ 为 $\lambda_i = t_i/g(x)$；若 $t_i = 0$，则取为 ϵ。我们有

$$\alpha_\lambda(v, v', x, t) = (\alpha_\lambda(v), \alpha_\lambda(v'), x, s), \quad \alpha_\lambda(w, w', x, t) = (\alpha_\lambda(w), \alpha_\lambda(w'), x, s),$$

其中，$s_i = g(x)$ 当 $t_i > 0$ 时，$s_i = 0$ 当 $t_i = 0$时。因此，$\|s\|_\infty < 2g(x)$。由于 $\epsilon \to 0^+$，$\|\alpha_\lambda(v)\| \to \left\|\alpha_{t/g(x)}(v)\right\|$。对于 v'，w，w'，结论同样成立。因此，对于足够小的 ϵ，$\alpha_\lambda(v,\ v',\ x,\ t)$，$\alpha_\lambda(w,\ w',\ x,\ t) \in W$。

现在我们可以用公式 $\Psi(-v, \hat{}\phi(v, x, t), x, t) = (-v, \mathbf{0}, x, t)$ 定义 $\hat{}\ \phi$，其定义域为

$$\mathrm{Dom}(\hat{\phi}) := \{(v, x, t) \in V \times M \times \mathbb{R}^\nu_+ : (-v, 0, x, t) \in \Psi(U)\}.$$

由 U, Ψ, T 的等变性，我们推知 $\hat{}\,\phi$ 是等变的。对于任意 $x \in M$，由于 $(0, \mathbf{0}, x, 0) \in U$，我们推知 $(0, x, 0) \in$ 定义域 $(\hat{}\,\phi)$，而定义域 $(\hat{}\,\phi)$ 的等变性意味着 $V \times M \times \{0\} \subseteq$ 定义域 $(\hat{}\,\phi)$。根据构造，$\hat{}\,\phi$ 满足引理 3.2.6.i。由 (3.18)，若 $v \in V'$，则 $\Psi(-v, v, x, 0) = (-v, \mathbf{0}, x, 0)$。引理 3.2.6.ii 得证。

□

3.3 第 2.3 节结果的证明

定理 2.3.2 的证明。 设 $(V, \natural)$ 和 $(V', \natural')$ 是 ν-分次基，X 是一个拓扑空间，$f\colon \mathbb{G} \to X$ 是一个函数，且 $f_{|M\times M\times \mathbb{R}^{\nu}_{+}\setminus\{0\}}$ 连续。我们将证明，$f \circ \mathcal{Q}_V$ 连续，当且仅当 $f \circ \mathcal{Q}_{V'}$ 连续。通过引入中间的 ν-分次基 $(V \oplus V', \natural \oplus \natural')$，不失一般性，可设 $(V', \natural') \subseteq (V, \natural)$。

- 假设 $f \circ \mathcal{Q}_V$ 连续。由于 $\mathcal{Q}_V$ 在 $V' \times M \times \mathbb{R}^{\nu}_{+}$ 上的限制与 $\mathcal{Q}_{V'}$ 在其公共定义域上一致，因此 $f \circ \mathcal{Q}_{V'}$ 在 $V' \times \mathcal{G}^{(0)} \times \{0\}$ 的某个邻域上连续。映射 $f \circ \mathcal{Q}_{V'}$ 在 $\mathrm{Dom}(\mathcal{Q}_{V'}) \cap V' \times M \times \mathbb{R}^{\nu}_{+}\setminus\{0\}$ 上连续，因为 $f_{|M\times M\times \mathbb{R}^{\nu}_{+}\setminus\{0\}}$ 连续。因此，$f \circ \mathcal{Q}_{V'}$ 在 $\mathrm{Dom}(\mathcal{Q}_{V'})$ 上连续。
- 假设 $f \circ \mathcal{Q}_{V'}$ 是连续的。设 ϕ 如引理 3.2.2 中所述。由 (3.10)，$f \circ \mathcal{Q}_V$ 在定义域(ϕ)上连续。映射 $f \circ \mathcal{Q}_V$ 在定义域$(\mathcal{Q}_V) \cap V \times M \times \mathbb{R}^{\nu}_{+}\setminus\{0\}$ 上连续，因为$f_{|M\times M\times \mathbb{R}^{\nu}_{+}\setminus\{0\}}$ 是连续的。由于 $V \times \mathcal{G}^{(0)} \times \{0\} \subseteq$ 定义域(ϕ)，我们推得 $f \circ \mathcal{Q}_V$ 在定义域$(\mathcal{Q}_V)$上连续。

用相同的论证可证明，若 $f\colon \mathbb{G} \to \mathbb{C}$ 是一个映射，且 $f_{|M\times M\times \mathbb{R}^{\nu}_{+}\setminus\{0\}}$ 是光滑的，则 $f \circ \mathcal{Q}_V$ 光滑当且仅当 $f \circ \mathcal{Q}_{V'}$ 光滑。至此，定理 2.3.2.i 的证明完成。

根据柯西-利普希茨定理，$M\times M\times \mathbb{R}^{\nu}_{+}\setminus\{0\}$ 是 $\mathbb{G}$的开子集。由于 $V\times M\times \mathbb{R}^{\nu}_{+}\setminus\{0\}$是 $V \times \mathbb{G}^{(0)}$ 的开稠密子集，可推出 $M \times M \times \mathbb{R}^{\nu}_{+}\setminus\{0\}$ 是 $\mathbb{G}$的稠密子集。定理 2.3.2.iv 的证明至此完成。固定 $(V, \natural)$ 任意一个 ν-分次李基。令

$$\mathcal{Q}_V \sqcup \mathrm{Id} : \mathrm{Dom}(\mathcal{Q}_V) \sqcup (M \times M \times \mathbb{R}^{\nu}_{+}\setminus 0) \to \mathbb{G}$$

为显然的满射。根据定义，$\mathbb{G}$ 赋有商拓扑和光滑结构。因此，要证明定理 2.3.2.ii 和定理 2.3.2.iii，只需证明 $\mathrm{Dom}(\mathcal{Q}_V) \sqcup (M \times M \times \mathbb{R}^{\nu}_{+}\setminus 0)$ 上由在$\mathcal{Q}_V \sqcup \mathrm{Id}$下像相同所定义的等价关系满足定理 1.1.12 的假设。这也将推出在 ν-分次基为李基的情形下，定理 2.3.2.v 成立。一般情形可由 ν-分次李基的情形，结合引理 3.1.1、式 (3.10) 和命题 1.1.11 得出。

Let

$$\begin{aligned} R &= \{(v, \gamma, w, \eta) \in \mathrm{Dom}(\mathcal{Q}_V) \times \mathrm{Dom}(\mathcal{Q}_V) : \mathcal{Q}_V(v, \gamma) = \mathcal{Q}_V(w, \eta)\} \\ &= \{(v, x, t, w, x, t) : e^{\alpha_t(-w)} e^{\alpha_t(v)} \cdot x = x\} \cup \{(v, L, x, 0, w, L, x, 0) : w^{-1} \cdot v \in \natural^{-1}_{x,0}(L)\}. \end{aligned}$$

由于映射 $\mathcal{Q}_V$在定义域$(\mathcal{Q}_V) \cap (M \times M \times \mathbb{R}^{\nu}_{+}\setminus 0)$中的任意点处都是浸没，见（2.15），因此只需证明：

i. 集合 R 在定义域$(\mathcal{Q}_V) \times$ 定义域$(\mathcal{Q}_V)$中是闭的。

ii. 投影 $(v, \gamma, w, \eta) \in R \mapsto (v, \gamma) \in V \times \mathbb{G}^{(0)}$ 在集合$R \cap (V \times \mathcal{G}^{(0)} \times \{0\} \times V \times \mathcal{G}^{(0)} \times \{0\})$中的每一点处都是浸没。

引理 3.3.1（周期界引理 [Ozo72]）。若 $X \in \boldsymbol{X}(M)$ 是一个紧子集，则存在 $\epsilon > 0$，使得对于任意 $x \in K$、$\tau \in]0, \epsilon[$，若 $e^{\tau X} \cdot x = x$，则 $X(x) = 0$。

证明。若 ϵ 不存在，则存在 $(x_n,\ \epsilon_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq K \times \mathbb{R}_+^\times$，使得 $\epsilon_n \to 0$、$X(x_n) \neq 0$ 和 $e^{\epsilon_n X}\cdot x_n = x_n$。取一个子列后，不妨设 $x_n \to x \in K$。我们在 x 附近固定一个坐标图。由于映射 $\chi\colon \mathbb{R}\times M \to M$，它将 $(\tau,\ x)$ 映射到 $e^{\tau X}\cdot x$，是其定义域上的光滑映射，因此不妨设当 $0 \leqslant \tau \leqslant \epsilon_n$ 时，轨道 $e^{\tau X}\cdot x_n$ 位于这个固定坐标图内。函数

$$\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad \tau \mapsto \langle e^{\tau X}\cdot x_n, X(x_n)\rangle$$

是一个光滑函数，其在 0 和 ϵ_n 处的取值相同。这里，$\langle\cdot,\ \cdot\rangle$ 是我们固定的坐标图内的内积。根据罗尔定理，存在 $0<\tau_n<\epsilon_n$ 使得

$$\langle X(e^{\tau_n X}\cdot x_n), X(x_n)\rangle = 0.$$

由于 $X(x_n)\neq 0$，我们可以取一个子列，假设 $\frac{X(x_n)}{\|X(x_n)\|} \to v \neq 0$。由于$X(e^{\tau_n X}\cdot x_n) = \mathrm{d}\chi_{(\tau_n,\ x_n)}(0,\ X(x_n))$ 并且由于 $\mathrm{d}\chi_{(\tau_n,\ x_n)}$ 在 $n\to+\infty$时收敛到恒等映射，因此

$$\frac{X(e^{\tau_n X}\cdot x_n)}{\|X(x_n)\|} \to v.$$

因此，$\langle v,\ v\rangle = 0$ 这与矛盾。 □

引理 3.3.2 ([Deb13])**.** 设 $\|\cdot\|$ 是 V上的一个欧几里得范数，$K\subseteq M$ 紧。存在 $\epsilon>0$，使得对于任意 $x\in K$、$v\in V$，若 $e^v\cdot x = x$，则或者 $\natural(v)(x)=0$，或者 $\|v\|\geqslant\epsilon$。

证明。在 $V\times M$ 上，存在一个自然的向量场 $X(v,\ x)=(0,\ \natural(v)(x))$，其流为 $e^{\tau X}\cdot(v,\ x)=(v,\ e^{\tau v}\cdot x)$。将引理 3.3.1 应用于 X 和 $\{v\in V$ 即得结论：$\|v\|\leqslant 1\}\times K$。 □

现在我们证明 R 是闭的。显然，R 在 $t=0$ 之外是闭的。根据命题 2.2.6.ii，$\{(v,\ L,\ x,\ 0,\ w,\ L,\ x,\ 0)\colon w^{-1}\cdot v\in \natural_{x,\ 0}^{-1}(L)\}$ 是闭的。因此，我们需要证明，如果 $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$，$(w_n)_{n\in\mathbb{N}}\subseteq V$、$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\subseteq M$、$(t_n)_{n\in\mathbb{N}}\subseteq\mathbb{R}_+^\nu\backslash 0$ 是满足以下条件的序列

$$v_n\to v,\ w_n\to w,\ x_n\to x,\ t_n\to 0,\ \ker(\natural_{x_n,t_n})\to\natural_{x,0}^{-1}(L),\ e^{\alpha_{t_n}(-w_n)}e^{\alpha_{t_n}(v_n)}\cdot x_n = x_n,$$

于是 $w^{-1}\cdot v\in\natural_x^{-1},_0(L)$。令 $\hat{}\,\psi$ 如 (3.17) 中所示。由于 $(-w_n,v_n,x_n,t_n)\to(-w,v,x,0)\in$定义域($\hat{}\,\psi$)，我们推得当 n 足够大时，$(-w_n,v_n,x_n,t_n)\in$定义域($\hat{}\,\psi$)。由 (3.18)，$e^{\alpha_{t_n}(\hat{}\,\psi(-w_n,v_n,x_n,t_n))}\cdot x_n = x_n$。由于 $\hat{}\,\psi(-w_n,v_n,x_n,t_n)\to\hat{}\,\psi(-w,v,x,0)=w^{-1}\cdot v$，由引理 3.3.2 可推得，当 n 足够大时，$\hat{}\,\psi(-w_n,v_n,x_n,t_n)\in$核($\natural_{x_n,t_n}$)。由命题 3.0.1，$w^{-1}\cdot v\in\natural_x^{-1},_0(L)$。这就证明了 R 是闭的。

令 $v_0,w_0\in V$, $(L_0,x_0)\in\mathcal{G}^{(0)}$ 满足 $w_0^{-1}\cdot v_0\in\natural_{x_0,0}^{-1}(L_0)$。考虑光滑流形

$$A=\{(v,w,L,x,t)\in V\times V\times\mathrm{Grass}(V)\times M\times\mathbb{R}_+^\nu\colon\ (-w,v,x,t)\in\text{定义域}(\ \hat{\psi}),\hat{\psi}(-w,v,x,t)\in L\}.$$

取任意光滑映射 $g\colon\ V\to\mathbb{R}^{\dim(V)-\dim(M)}$，其限制在$v_0\cdot\natural_{x_0,0}^{-1}(L_0)$ 上于 w_0 处是局部微分同胚。该映射的微分

$$A\to V\times\mathrm{Grass}(V)\times M\times\mathbb{R}_+^\nu\times\mathbb{R}^{\dim(V)-\dim(M)},\quad (v,w,L,x,t)\mapsto(v,L,x,t,g(w))$$

在 $(v_0,w_0,\natural_{x_0},_0^{-1}(L_0),x_0,0)$ 处是一个双射。因此，它在点$(v_0,w_0,\natural_{x_0},_0^{-1}(L_0),x_0,0)$处是一个局部微分同胚。因此，通过使用 (2.11) 中的嵌入 Grass($\natural$) 将其限制到 $\mathbb{G}^{(0)}$，映射 $(v,\gamma,w,\eta)\in R\mapsto(v,\gamma,g(w))\in V\times\mathbb{G}^{(0)}\times\mathbb{R}^{\dim(V)-\dim(M)}$在$(v_0,L_0,x_0,0,w_0,L_0,x_0,0)$处是一个局部微分同胚。定理 2.3.2 的证明至此完成。 □

定理 2.3.3 的证明。 两部分的证明类似。一方面，对于任意 ν-分次基 $(V,\natural)$，由定理 2.3.2.i 可知，$\mathcal{Q}_V$ 的连续性成立。另一方面，由于根据定理 2.3.2.v 可知 $\mathcal{Q}_V$ 是开集，因此结论成立。

□

定理 2.3.4 的证明。 由定理 2.3.3，只需证明：若 $(y_n,x_n,t_n)\to(\natural_{x,0}(v)L,x,0)$ 且 $(x_n,t_n)\to(L,x,0)$，则方程 $e^{\alpha_{t_n}(v_n)}\cdot x_n=y_n$ 在 S中对足够大的 n 存在满足 $v_n\to v$ 的解。由引理 3.1.1，可设 $(V,\natural)$ 是一个 ν-分次李基。注意，根据关于 S 的假设，$\dim(S)=\dim(M)$。映射

$$S\times\natural_{x,0}^{-1}(L)\to V,\quad (s,w)\mapsto sw$$

根据注记 3.1.2，这是一个微分同胚；并且$\natural_{x,0}^{-1}(L)$ 是 V 的一个子群，其中包含子群 $\ker(\natural_{x,0})$。令 $E\to\mathrm{Grass}(V)$ 为重言实向量丛，其在 $L'\in\mathrm{Grass}(V)$ 上方的纤维为 L'，并令 $\hat{}\,\psi$ 如 (3.17) 中所示。根据关于 S 的假设以及 (3.18)，映射

$$S\times E\times M\times\mathbb{R}_+^\nu\to V\times\mathrm{Grass}(V)\times M\times\mathbb{R}_+^\nu,\quad (s,l,L',y,t)\mapsto(\hat{\psi}(s,l,y,t),L',y,t)\tag{3.28}$$

在 $(v$处是一个局部微分同胚，0，$\natural_x^{-1}$，$_0(L)$，x，$0)$。现在，令 $v_n\in V$ 为满足 $y_n=e^{\alpha_{t_n}(v_n)}\cdot x_n$ 且 $v_n\to v$ 的序列，该序列由定理 2.3.3 保证存在。因此，当 n 足够大时，$(v_n,\ker(\natural_{x_n,\ t_n}),\ x_n,\ t_n)$ 属于 (3.28) 的像。因此，存在唯一的 $s_n\in S$ 以及$l_n\in\natural_{x_n,\ t_n}^{-1}(\ker(\natural_{x_n,\ t_n}))$，使得 $\hat{}\,\psi(s_n,\ l_n,\ x_n,\ t_n)=v_n$。此外，$(s_n,\ l_n,\ \ker(\natural_{x_n,\ t_n}),\ x_n,\ t_n)\to(v,\ 0,\ \natural_x^{-1},\ _0(L),\ x,\ 0)$。所以，$s_n\to v$。由 (3.18)，$y_n=e^{\alpha_{t_n}(v_n)}\cdot x_n=e^{\alpha_{t_n}(s_n)}e^{\alpha_{t_n}(l_n)}\cdot x_n=e^{\alpha_{t_n}(s_n)}\cdot x_n$。

□

定理 2.3.5 的证明。映射 s 是光滑的，因为 $s\circ\mathcal{Q}_V$: 定义域$(\mathcal{Q}_V)\subseteq V\times\mathbb{G}^{(0)}\to\mathbb{G}^{(0)}$是到第二个坐标的投影。由命题 1.1.11 和定理 2.3.2.v 可知，它是一个浸没。恒等映射 $u\colon\mathbb{G}^{(0)}\to\mathbb{G}$ 是光滑的，因为 $u(\gamma)=\mathcal{Q}_V(0,\ \gamma)$ 且 $\mathcal{Q}_V$是光滑的。下面验证逆映射 $\iota\colon\mathbb{G}\to\mathbb{G}$ 是光滑的。只需证明 $\iota\circ\mathcal{Q}_V$是光滑的。由引理 3.1.3，以下映射是光滑的

$$\hat{\iota}:\mathrm{Dom}(\mathcal{Q}_V)\to V\times\mathbb{G}^{(0)},\quad \hat{\iota}(v,\gamma)=(-v,r\circ\mathcal{Q}_V(v,\gamma)).\tag{3.29}$$

容易验证，图表

$$\begin{array}{ccc}\mathrm{Dom}(\mathcal{Q}_V) & \xrightarrow{\hat{\iota}} & V\times\mathbb{G}^{(0)}\\ \downarrow{\scriptstyle\mathcal{Q}_V} & & \downarrow{\scriptstyle\mathcal{Q}_V}\\ \mathbb{G} & \xrightarrow{\quad\iota\quad} & \mathbb{G}\end{array}\tag{3.30}$$

是可交换的。因此，ι 是光滑的。由于 $r=s\circ\iota$，可知 r 是光滑的。

下面证明乘法映射 $m\colon\mathbb{G}^{(2)}\to\mathbb{G}$ 是光滑的。m 在 $\mathbb{G}$ 的$M\times M\times\mathbb{R}_+^\times$ 部分上的限制是光滑的。因此，我们需要证明映射

$$\begin{aligned}\{(v,\gamma,w,\eta)\in\mathrm{Dom}(\mathcal{Q}_V)\times\mathrm{Dom}(\mathcal{Q}_V):(\mathcal{Q}_V(v,\gamma),\mathcal{Q}_V(w,\eta))\in\mathbb{G}^{(2)}\}&\to\mathbb{G}\\ (v,\gamma,w,\eta)&\mapsto\mathcal{Q}_V(v,\gamma)\mathcal{Q}_V(w,\eta)\end{aligned}$$

是光滑的。这个映射正是式 (3.13) 中的映射 $\mathcal{Q}_V^2$。在 $t=0$ 附近，它由式 (3.15) 可知是光滑的。在远离 $t=0$ 的地方，由柯西-利普希茨定理可知它是光滑的，见式 (3.12)。因此，m 是光滑的。

还需证明核$(\mathrm{d}s)$ 与第2.2节中构造的 $A(\mathbb{G})$ 相同。它们作为集合显然相等。设 $(V,\natural)$ 为一个 ν-分次基。映射$\mathrm{d}\mathcal{Q}_V$：核$(\mathrm{d}(s\circ\mathcal{Q}_V))\to\mathcal{Q}_V^*($核$(\mathrm{d}s))$ 是

一个光滑淹没，因为 s 与$\mathcal{Q}_V$是下沉。现在将其限制到 $\{0\}\times\mathbb{G}^{(0)}$，便得到（2.13）中的映射 $A(\natural)$。结论随之成立。 □

命题 2.3.6 的证明。将推论 1.1.14 应用于浸没 $\mathcal{Q}_V$: 定义域$(\mathcal{Q}_V)\to\mathbb{G}$ 和 s: $\mathbb{G}\to\mathbb{G}^{(0)}$，可推得对任意 $k\in\mathbb{C}$，都有一个自然同构

$$\Omega^k(V)\simeq\Omega^k(\ker(\mathrm{d}\mathcal{Q}_V))\otimes\mathcal{Q}_V^*(\Omega^{k,0}(\mathbb{G})). \tag{3.31}$$

令$\hat{\iota}$ 如 (3.29) 中所示。由 (3.30)，以下图表可交换

$$\begin{array}{ccc} V\times\mathbb{G}^{(0)} & \xrightarrow{\hat{\iota}} & V\times\mathbb{G}^{(0)} \\ & {\scriptstyle r\circ\mathcal{Q}_V}\searrow & \downarrow{\scriptstyle s\circ\mathcal{Q}_V} \\ & & \mathbb{G}^{(0)} \end{array}. \tag{3.32}$$

由于$\hat{\iota}$ 是开嵌入，$\ker(\mathrm{d}(r\circ\mathcal{Q}_V))\simeq\hat{\iota}^*(\ker(\mathrm{d}(s\circ\mathcal{Q}_V)))\simeq\hat{\iota}^*(V)\simeq V$。将推论 1.1.14 应用于 r 和 $\mathcal{Q}_V$，可推得

$$\Omega^k(V)\simeq\Omega^k(\ker(\mathrm{d}\mathcal{Q}_V))\otimes\mathcal{Q}_V^*(\Omega^{0,k}(\mathbb{G})). \tag{3.33}$$

对 (3.31) 和 (3.33) 取张量积，即得所需结果。 □

3.4 第 2.5 节结果的证明

命题 2.5.1 的证明。映射 $\alpha_\lambda:\mathbb{G}\to\mathbb{G}$ 是良定义的，这是由注 3.2.1 得出的。容易看出，它是一个群胚自同构。因此，我们只需证明它是光滑的。以下图表可交换

$$\begin{array}{ccc} V\times\mathbb{G}^{(0)} & \xrightarrow{\alpha_\lambda} & V\times\mathbb{G}^{(0)} \\ \downarrow{\scriptstyle\mathcal{Q}_V} & & \downarrow{\scriptstyle\mathcal{Q}_V} \\ \mathbb{G} & \xrightarrow{\alpha_\lambda} & \mathbb{G} \end{array} \tag{3.34}$$

因此，α_λ 是光滑的。 □

命题 2.5.2 的证明。设 $(V,\natural)$ 是一个 ν-分次基。我们需要证明 $\omega\circ\mathcal{Q}_V$ 是 $\mathcal{Q}_V^*(\Omega^{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}(\mathbb{G}))$ 的光滑截面。根据命题 2.3.6，我们有一个自然同构 $\mathbb{C}\simeq\mathcal{Q}_V^*(\Omega^{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}(\mathbb{G}))$。我们定义一个光滑函数 f: $\widetilde{\text{定义域}(\mathcal{Q}_V)}\to\mathbb{C}$如下：若 $(v,x,t)\in\widetilde{\text{属于定义域}(\mathcal{Q}_V)}$，则 $y\mapsto e^{\alpha_t(v)}\cdot y$ 在 x 处是一个局部微分同胚，它将 x 映射到 $e^{\alpha_t(v)}\cdot x$。因此，它在x 处的微分是一个同构 L: $T_xM\to T_{e^{\alpha_t(v)}}M$。令

$$f(v,x,t)=L^*\left(\mathrm{vol}^{\frac{1}{2}}_{e^{\alpha_t(v)}\cdot x}\right)\mathrm{vol}_x^{-\frac{1}{2}}$$

函数 f显然是光滑的。可以验证，$f\circ\pi_{V\times\mathbb{G}^{(0)}}$: 定义域$(\mathcal{Q}_V)\to\mathbb{C}$ 在命题 2.3.6给出的同构下对应于$w\circ\mathcal{Q}_V$。这表明 ω 是光滑的。显然，ω 在 $M\times M\times\mathbb{R}_+^\nu\backslash 0$上满足 (1.27)。由稠密性可知，$\omega$ 满足 (1.27)。 □

3.5 第 2.6 节结果的证明

定理 2.6.2 的证明。 对于任意 ν-分次基 $(V,\ \natural)$，令

$$\mathcal{A}_V := C_c^\infty(\widetilde{\mathrm{Dom}}(\mathcal{Q}_V), \Omega^1(V)) \times C_c^\infty(M \times M \times \mathbb{R}_+^\nu \backslash \{0\}, \Omega^{\frac{1}{2}})$$

赋予乘积拓扑。给定两个 ν-分次基 $(V,\natural)$ 和 $(V',\natural')$，我们将构造一个连续线性映射 $T_{V',V}$: A $_V \to \mathrm{A}_{V'}$，使得 $q_{V'} \circ T_{V',V} = q_V$。构造映射 $T_{V',V}$ 即完成定理 2.6.2.i 的证明。利用 ν-分次基 $(V \oplus V', \natural \oplus \natural')$，我们只需定义 $T_{V\oplus V',V}$ 和 $T_{V',V\oplus V'}$，因为这样便可取 $T_{V',V} := T_{V',V\oplus V'} \circ T_{V\oplus V',}$ $_V$。因此，不失一般性，我们可以假设 $(V',\natural') \subseteq (V,\natural)$。我们将定义 $T_{V,V'}$ 和 $T_{V',V}$。˜设 ϕ 和 ϕ 如引理 3.2.2 中所述。下图表交换

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Dom}(\tilde{\phi}) \subseteq V \times M \times \mathbb{R}_+^\nu & \xrightarrow{\tilde{\phi}} & V' \times M \times \mathbb{R}_+^\nu \\ & \searrow^{\pi} & \downarrow{\scriptstyle \pi'} \\ & & M \times \mathbb{R}_+^\nu \end{array},$$

其中 π，π' 是显然的投影。由推论 1.1.14，Ω^1(核(d$\tilde{\phi}$)) $\simeq \Omega^1(V/V')$。特别地，我们有一个沿纤维积分映射

$$\tilde{\phi}_* : C_c^\infty(\mathrm{Dom}(\phi), \Omega^1(V)) \to C_c^\infty(V' \times M \times \mathbb{R}_+^\nu, \Omega^1(V'))$$

Sinc ˜e ϕ 是命题 1.1.15 中 ϕ 的拉回，因此可得一个积分映射

$$\phi_* : C_c^\infty(\mathrm{Dom}(\phi), \Omega^1(V)) \to C_c^\infty(V' \times \mathbb{G}^{(0)}, \Omega^1(V'))$$

它满足

$$\phi_*(g \circ \pi_{V\times\mathbb{G}^{(0)}}) = \tilde{\phi}_*(g) \circ \pi_{V'\times\mathbb{G}^{(0)}}, \quad \forall g \in C_c^\infty(\mathrm{Dom}(\tilde{\phi}), \Omega^1(V)). \tag{3.35}$$

此外，由 (3.10)，

$$\mathcal{Q}_{V'*} \circ \phi_* = \mathcal{Q}_{V*}. \tag{3.36}$$

现在我们可以定义 $T_{V,\ V'}$ 和 $T_{V',\ V}$。

- 令 $\chi \in C^\infty(V \times M \times \mathbb{R}_+^\nu)$ 在 $V \times M \times \{0\}$ 的某个邻域内等于 1，且 supp$(\chi) \subseteq$ 定义域(ϕ)。由 (3.35) 和 (3.36)，我们可以取

$$T_{V',V}(g,h) = \left(\tilde{\phi}_*(\chi g), h + \mathcal{Q}_{V*}(((1-\chi)g) \circ \pi_{V\times\mathbb{G}^{(0)}})\right).$$

- 令 $\chi \in C^\infty(V' \times M \times \mathbb{R}_+^\nu)$ 在 $V' \times M \times \{0\}$ 的某个邻域内恒等于 1，且 supp$(\chi) \subseteq$ Im(ϕ)。令 $k \in C^\infty$(定义域$(\tilde{\phi})$，Ω ˜ $^1(V/V'))$，使得 $\tilde{\phi}_{|\text{支集}(k)}$: supp$(k)$ $\to$ Im$(\tilde{\phi})$ 是真映射，且 ˜ ˜ ˜ $\phi_*(k) \in C^\infty(\mathrm{Im}(\phi))$ 恒等于 1。函数 k 存在，因为 ϕ 是浸没。我们定义

$$T_{V,V'}(g,h) = \left(k((\chi g) \circ \tilde{\phi}), h + \mathcal{Q}_{V'*}(((1-\chi)g) \circ \pi_{V'\times\mathbb{G}^{(0)}})\right),$$

其中 $k((\chi g) \circ \tilde{\phi})$ k与 $(\chi g) \circ \tilde{\phi} \in C^\infty$(在定义域$(\tilde{\phi})$上的逐点乘法$\Omega^1(V'))$。

˜为了证明 $q_V \circ T_{V',\ V} = q_{V'}$，令 $l = k((\chi g) \circ \phi)$。我们有

$$\begin{aligned}
\mathcal{Q}_{V*}\left(l \circ \pi_{V\times\mathbb{G}^{(0)}}\right) &= \mathcal{Q}_{V'*}\left(\phi_*\left(l \circ \pi_{V\times\mathbb{G}^{(0)}}\right)\right) && \text{by (3.36)}\\
&= \mathcal{Q}_{V'*}\Big(\phi_*\Big((k \circ \pi_{V\times\mathbb{G}^{(0)}})((\chi g) \circ \pi_{V'\times\mathbb{G}^{(0)}} \circ \phi)\Big)\Big) && \text{by (3.11)}\\
&= \mathcal{Q}_{V'*}\left(\phi_*\left(k \circ \pi_{V\times\mathbb{G}^{(0)}}\right)(\chi g) \circ \pi_{V'\times\mathbb{G}^{(0)}}\right)\\
&= \mathcal{Q}_{V'*}\left((\tilde{\phi}_*(k)\chi g) \circ \pi_{V'\times\mathbb{G}^{(0)}}\right) && \text{by (3.35)}\\
&= \mathcal{Q}_{V'*}\left((\chi g) \circ \pi_{V'\times\mathbb{G}^{(0)}}\right).
\end{aligned}$$

由此我们证明了定理 2.6.2.i。包含映射 $C_{c,\ \mathrm{inv}}^{\infty}(\mathbb{G},\ \Omega^{\frac{1}{2}}) \hookrightarrow C_c^{\infty}(\mathbb{G},\ \Omega^{\frac{1}{2}})$ 的连续性显而易见。由于 $C_{c,\ \mathrm{inv}}^{\infty}(\mathbb{G},\ \Omega^{\frac{1}{2}})$ 是一个 LF 空间的商，我们只需验证 $\ker(q_V)$ 是闭的，这一点显然成立。至此，定理 2.6.2.ii 的证明完成。由$\mathcal{Q}_V$的等变性可得 $\alpha_\lambda(q_V(g,\ h)) = q_V(\alpha_\lambda(g),\ \alpha_\lambda(h))$。这就证明了定理 2.6.2.iv。

引理 3.5.1。设 $(V, \natural)$ 是一个 ν-分次基，$f \in C_{c,\ \mathrm{inv}}^{\infty}(\mathbb{G},\ \Omega^{\frac{1}{2}})$。-若 $U \subseteq \widetilde{\text{定义域}}(Q_V)$ 是 $V \times M \times \{0\}$的一个开邻域，则存在 $(\tilde{f}, \tilde{\tilde{f}}) \in q_V^{-1}(f)$ 使得 支集$(\tilde{f}) \subseteq U$。

证明。令 $\chi \in C^{\infty}(V \times M \times \mathbb{R}_+^{\nu})$ 在 $V \times M \times \{0\}$ 的某个邻域内等于 1，且支集为 $(\chi) \subseteq U$。如果 $(\tilde{f}, \tilde{\tilde{f}}) \in q_V^{-1}(f)$那么，$\mathcal{Q}_{V*}((\tilde{f}(1-\chi)) \circ \pi_{V\times\mathbb{G}^{(0)}}) \in C_c^{\infty}(M \times M \times \mathbb{R}_+^{\nu}\backslash\{0\}, \Omega^{\frac{1}{2}})$。因此，-$(\tilde{f}\chi,\ \tilde{\tilde{f}} + \mathcal{Q}_{V*}((\tilde{f}(1-\chi)) \circ \pi_{V\times\mathbb{G}^{(0)}})) \in q_V^{-1}(f)$。 □

我们固定一个 ν-分次李基 $(V, \natural)$。空间 $C_c^{\infty}(M \times M \times \mathbb{R}_+^{\nu}\backslash\{0\}, \Omega^{\frac{1}{2}})$ 是- $C_c^{\infty}(\mathbb{G}, \Omega^{\frac{1}{2}})$ 的双边理想。因此，- 要证明定理 2.6.2.iii，我们只需考虑形如 $\widetilde{\mathcal{Q}_{V*}(g \circ \pi_{V\times\mathbb{G}^{(0)}})}$ 的元素。根据引理 3.5.1，我们可以假设支集 $(g) \subseteq \mathrm{Dom}(\mathcal{Q}_V)$。令 $\hat{\iota}$ 如 (3.29) 中所示。我们还定义

$$\tilde{\iota} : \widetilde{\mathrm{Dom}}(\mathcal{Q}_V) \to V \times M \times \mathbb{R}_+^{\nu}, \quad \tilde{\iota}(v, x, t) = (-v, e^{\alpha_t(v)} \cdot x, t).$$

$\tilde{\iota}$ 和 $\hat{\iota}$ 都是开嵌入，而 $\hat{\iota}$ 是 $\tilde{\iota}$ 的拉回，如命题 1.1.15 所述。因此，由 (1.13) 和 (3.30)，

$$\iota_*(\mathcal{Q}_{V*}(g \circ \pi_{V\times\mathbb{G}^{(0)}})) = \mathcal{Q}_{V*}(\hat{\iota}_*(g \circ \pi_{V\times\mathbb{G}^{(0)}})) = \mathcal{Q}_{V*}(\tilde{\iota}_*(g) \circ \pi_{V\times\mathbb{G}^{(0)}}).$$

因此，$C_{c,\ \mathrm{inv}}^{\infty}(\mathbb{G},\ \Omega^{\frac{1}{2}})$ 在取伴随运算下是闭的。

我们来证明 $C_{c,\ \mathrm{inv}}^{\infty}(\mathbb{G},\ \Omega^{\frac{1}{2}})$ 在取卷积运算下是闭的。设 $\tilde{\psi}$，ψ 如引理 3.2.3 所述。由 (3.17)，下图交换:

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Dom}(\tilde{\psi}) \subseteq V \times V \times M \times \mathbb{R}_+^{\nu} & \xrightarrow{\tilde{\psi}} & V \times M \times \mathbb{R}_+^{\nu} \\
& \searrow^{\pi} & \downarrow{\scriptstyle \pi'} \\
& & M \times \mathbb{R}_+^{\nu}
\end{array},$$

其中 π，π' 是显然的投影。由推论 1.1.14，我们可推出 $\ker(\mathrm{d}\,\tilde{\psi}) \simeq \Omega^1(V)$。因此，我们有一个沿纤维积分映射

$$\tilde{\psi}_* : C_c^{\infty}(\mathrm{Dom}(\tilde{\psi}), \Omega^2(V)) \to C_c^{\infty}(V \times M \times \mathbb{R}_+^{\nu}, \Omega^1(V)).$$

Sinc ˜e ψ 是 ψ 的拉回。根据命题 1.1.15，我们有一个沿纤维积分映射

$$\psi_* : C_c^{\infty}(\mathrm{Dom}(\psi), \Omega^2(V)) \to C_c^{\infty}(V \times \mathbb{G}^{(0)}, \Omega^1(V))$$

它满足

$$\psi_*(g\circ\pi_{V\times\mathbb{G}^{(0)}})=\tilde{\psi}_*(g)\circ\pi_{V\times\mathbb{G}^{(0)}},\quad \forall g\in C_c^\infty(\mathrm{Dom}(\tilde{\psi}),\Omega^2(V)). \tag{3.37}$$

由 (3.15) 和推论 1.1.14，我们推得

$$\Omega^1(\ker(\mathrm{d}\mathcal{Q}_V^2))\simeq\psi^*(\Omega^1(\ker(\mathrm{d}\mathcal{Q}_V)))\otimes\Omega^1(\ker(\mathrm{d}\psi))\simeq\psi^*(\Omega^1(\ker(\mathrm{d}\mathcal{Q}_V)))\otimes\Omega^1(V).$$

将 (2.17) 用 $k=l=\frac{1}{2}$ 借助 ψ 拉回，可推得

$$\begin{aligned}\mathcal{Q}_V^{2*}(\Omega^{\frac{1}{2}}(\mathbb{G}))\otimes\Omega^1(\ker(\mathrm{d}\mathcal{Q}_V^2))&\simeq\psi^*(\mathcal{Q}_V^*(\Omega^{\frac{1}{2}}(\mathbb{G})))\otimes\Omega^1(\ker(\mathrm{d}\mathcal{Q}_V^2))\\&\simeq\psi^*(\mathcal{Q}_V^*(\Omega^{\frac{1}{2}}(\mathbb{G})))\otimes\psi^*(\Omega^1(\ker(\mathrm{d}\mathcal{Q}_V)))\otimes\Omega^1(V)\\&\simeq\psi^*(\Omega^1(V))\otimes\Omega^1(V)\simeq\Omega^2(V).\end{aligned}$$

特别地，我们有一个沿纤维积分映射

$$\mathcal{Q}_{V*}^2:C_c^\infty(\mathrm{Dom}(\mathcal{Q}_V^2),\Omega^2(V))\to C_c^\infty(\mathbb{G},\Omega^{\frac{1}{2}})$$

根据 (3.15)，它满足

$$\mathcal{Q}_{V*}^2=\mathcal{Q}_{V*}\circ\psi_* \tag{3.38}$$

在下面的引理中，我们强调等变性。更确切地说，我们证明 U 满足 (3.39)。这在本定理的证明中并非必需，但在后续定理2.6.6和定理 2.8.3的证明中会用到。

引理 3.5.2。对于任意 $(\mathbb{R}_+^\times)^\nu$-等变开邻域 $L\subseteq V\times V\times M\times\mathbb{R}_+^\nu$，若其包含 $V\times V\times\widetilde{M\times\{0\}}$，则存在 $V\times M\times\{0\}$ 的开邻域 $U\subseteq$定义域$(\mathcal{Q}_V)$，使得若 $(w,x,t)\in U$ 且 $(v,e^{\alpha_t(w)}\cdot x,t)\in U$，则 $(v,w,x,t)\in L$。此外，U 满足以下条件：

$$\forall v\in V,x\in M,\lambda,t\in\mathbb{R}_+^\nu,\ \textit{if}\ (v,x,\lambda t)\in U,\ \textit{then}\ (\alpha_\lambda(v),x,t)\in U. \tag{3.39}$$

特别地，U 是 $(\mathbb{R}_+^\times)^\nu$-等变的。

$\widetilde{\text{证明}}$。令 $\|\cdot\|$ 为 V上的一个欧几里得范数。由于 $\mathrm{Dom}(\mathcal{Q}_V)$ 和 L 分别是 $\{0\}\times M\times\{0\}\subseteq V\times M\times\mathbb{R}_+^\nu$ 和 $\{0\}\times\{0\}\times M\times\{0\}\subseteq V\times V\times M\times\mathbb{R}_+^\nu$ 的等变开邻域，因此存在一个连续函数 $\chi:\ M\to\mathbb{R}_+^\times$，使得

$$\begin{aligned}&\{(v,x,t)\in V\times M\times\mathbb{R}_+^\nu:\|\alpha_t(v)\|<2\chi(x)\}\subseteq\widetilde{\mathrm{Dom}}(\mathcal{Q}_V)\\&\{(v,w,x,t)\in V\times M\times\mathbb{R}_+^\nu:\max(\|\alpha_t(v)\|,\|\alpha_t(w)\|)<2\chi(x)\}\subseteq L.\end{aligned}$$

由紧致性论证，存在一个连续函数 $\kappa:\ M\to\mathbb{R}_+^\times$，使得对于任意 $x\in M$、$v\in V$，若 $\|v\|<\kappa(x)$，则 $\chi(e^v\cdot x)<2\chi(x)$。我们取 $U=\{(v,\ x,\ t):\ \|\alpha_t(v)\|<\min(\chi(x),\ \kappa(x))\}$。

□

~ $\widetilde{\text{由应用于 }L=\text{定义域}(\psi)\text{的引理 3.5.2，我们得到一个等变开集}}$ $U\subseteq$定义域$(\mathcal{Q}_V)$。设$g_1,\ g_2\in C_c^\infty(\widetilde{\text{定义域}}(\mathcal{Q}_V),\ \Omega^1(V))$使得支集$(g_1)\subseteq U$与支集$(g_2)\subseteq U$。我们定义

$$h(v,w,x,t)=g_1(v,e^{\alpha_t(w)}\cdot x,t)g_2(w,x,t)\in C_c^\infty(\mathrm{Dom}(\tilde{\psi}),\Omega^2(V))$$

我们有

$$\begin{aligned}\mathcal{Q}_{V*}(g_1\circ\pi_{V\times\mathbb{G}^{(0)}})*\mathcal{Q}_{V*}(g_2\circ\pi_{V\times\mathbb{G}^{(0)}}) &= \mathcal{Q}^2_{V*}(h\circ\pi_{V\times V\times\mathbb{G}^{(0)}}) && \text{by (3.13)}\\ &= \mathcal{Q}_{V*}(\psi_*(h\circ\pi_{V\times V\times\mathbb{G}^{(0)}})) && \text{by (3.38)}\\ &= \mathcal{Q}_{V*}(\tilde{\psi}_*(h)\circ\pi_{V\times\mathbb{G}^{(0)}}) && \text{by (3.37)}\end{aligned} \tag{3.40}$$

因此，$C^\infty_{c,\ \mathrm{inv}}(\mathbb{G},\ \Omega^{\frac{1}{2}})$ 在卷积下封闭。 □

备注 3.5.3。 在定理 2.6.2.iii 的证明中，利用 (3.18) 和 (3.17)，我们证明了：如果 $(V,\ \natural)$是一个 ν-分次李基，那么

- 对于任意 $g_1,\ g_2\in C^\infty_c(\widetilde{\text{定义域}}(\mathcal{Q}_V),\ \Omega^1(V))$，我们可以找到一个 $g\in C^\infty_c(\widetilde{\text{定义域}}(\mathcal{Q}_V),\ \Omega^1(V))$，使得

$$\begin{aligned}\mathcal{Q}_{V*}(g_1\circ\pi_{V\times\mathbb{G}^{(0)}})*\mathcal{Q}_{V*}(g_2\circ\pi_{V\times\mathbb{G}^{(0)}})-\mathcal{Q}_{V*}(g\circ\pi_{V\times\mathbb{G}^{(0)}})\in C^\infty_c(M\times M\times\mathbb{R}^\nu_+\backslash 0,\Omega^{\frac{1}{2}}),\\ g(v,x,0)=\int_{w\in V}g_1(w,x,0)g_2(w^{-1}v,x,0),\quad\forall v\in V,x\in M\end{aligned}$$

- 对于任意 $g\in C^\infty_c(\widetilde{\text{定义域}}(\mathcal{Q}_V),\ \Omega^1(V))$，我们可以找到一个 $h\in C^\infty_c(\widetilde{\text{定义域}}(\mathcal{Q}_V),\ \Omega^1(V))$，使得

$$\begin{aligned}\mathcal{Q}_{V*}(g\circ\pi_{V\times\mathbb{G}^{(0)}})^*-\mathcal{Q}_{V*}(h\circ\pi_{V\times\mathbb{G}^{(0)}})\in C^\infty_c(M\times M\times\mathbb{R}^\nu_+\backslash 0,\Omega^{\frac{1}{2}})\\ h(v,x,0)=\overline{g(-v,x,0)},\quad\forall v\in V,x\in M\end{aligned}$$

定理 2.6.5 的证明。 由于 $\delta^*_{u\circ\pi_{\mathbb{G}^{(0)}}}=\delta_{u\circ\pi_{\mathbb{G}^{(0)}}}$ 和 $\theta_k(X)^*=-\theta_k(X)$，并利用定理 2.6.2.iii，我们只需考虑不变函数的右乘法。根据命题 1.6.4.iii，$C^\infty_c(M\times M\times\mathbb{R}^\nu_+\backslash 0,\ \Omega^{\frac{1}{2}})$ 是 $C^{-\infty,\ s}_r(\mathbb{G},\ \Omega^{\frac{1}{2}})$ 中的一个双边理想。因此，在定理 2.6.5 的证明中，我们只需考虑形如 $\mathcal{Q}_{V*}(g\circ\pi_{V\times\mathbb{G}^{(0)}})$的不变函数。设 $(V,\ \natural)$ 是一个 ν-分次李基。我们有

$$\delta_{u\circ\pi_{\mathbb{G}^{(0)}}}*\mathcal{Q}_{V*}(g\circ\pi_{V\times\mathbb{G}^{(0)}})=\mathcal{Q}_{V*}(l\circ\pi_{V\times\mathbb{G}^{(0)}}),$$

其中 $l(v,\ x,\ t)=u(e^{\alpha_t(v)}\cdot x,\ t)g(v,\ x,\ t)$。这就证明了定理 2.6.5.i。对于定理 2.6.5.ii，设 $k\in\mathbb{Z}^\nu_+$ 和 $X\in\mathcal{F}^k$。根据 ν-分次基的定义，我们可以找到一个有限族$(f_i)_{i\in I}\subseteq C^\infty(M)$，$(v_i)_{i\in I}\subseteq V$，使得 $v_i\in V^{a(i)}$，其中 $a(i)\preceq k$ 且 $\natural(X)=\sum_{i\in I}f_i\natural(v_i)$。特别地，

$$\theta_k(X)=\sum_{i\in I}\delta_{\left(f_it^{k-a(i)}\right)\circ\pi_{\mathbb{G}^{(0)}}}*\theta_{a(i)}(\natural(v_i)). \tag{3.41}$$

因此，根据定理 2.6.5.i，我们需要证明：若 $v_0\in V^k$，则 $\theta_k(\natural(v_0))*C^\infty_{c,\ \mathrm{inv}}(\mathbb{G},\ \Omega^{\frac{1}{2}})\subseteq C^\infty_{c,\ \mathrm{inv}}(\mathbb{G},\ \Omega^{\frac{1}{2}})$。设 $X=\natural(v_0)$，$\tilde{\psi}$和 ψ如引理 3.2.3 中所述，$\tilde{X}$，$\hat{}X$分别由下列公式定义在 $V\times M\times\mathbb{R}^\nu_+$ 和 $V\times\mathbb{G}^{(0)}$ 上的部分定义的向量场

$$\tilde{X}(v,x,t)=\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\tilde{\psi}(\tau v_0,v,x,t)\right|_{\tau=0},\quad \hat{X}(v,\gamma)=\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\psi(\tau v_0,v,\gamma)\right|_{\tau=0}. \tag{3.42}$$

~ ^ ~^ 在这里，我们使用引理 3.2.3.ii 以确保 X 和 X 是向量场。向量场 X 和 X在 $V\times M\times\{0\}$ 和 $V\times\mathcal{G}^{(0)}\times\{0\}$的开邻域内是良定义的。我们有如下论断：

$$\mathrm{d}\mathcal{Q}_V(\hat{X})=\theta_k(X)_R\circ\mathcal{Q}_V \tag{3.43}$$

其中， $\theta_k(X)_R$ 是根据命题1.3.3与 $\theta_k(X)$ 对应的右不变向量场。由于 $V\times M\times\mathbb{R}^\nu_+\backslash 0$ 在 $V\times\mathbb{G}^{(0)}$中稠密，只需对 $t\neq 0$验证（3.43）。对于 $t\neq 0$，我们有：

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\mathcal{Q}_V(\hat{X})(v,x,t) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\mathcal{Q}_V(\psi(\tau v_0,v,x,t))\Big|_{\tau=0}\\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}(e^{\tau t^k v_0}e^{\alpha_t(v)}\cdot x,x,t)\Big|_{\tau=0} = \theta_k(X)_R(e^{\alpha_t(v)}\cdot x,x,t) = \theta_k(X)_R(\mathcal{Q}_V(v,x,t)),\end{aligned}$$

其中第二个等式使用了 (3.15)，第三个等式使用了 (1.23)。因此，如果$g\in C_c^\infty(\widetilde{\text{定义域}}(\mathcal{Q}_V),\ \Omega^1(V))$ 且 (g) 的支集是 $\tilde{X}$ 的定义域的子集 —— 根据引理 3.5.1，我们可以作此假设 —— 那么

$$\begin{aligned}\theta_k(X)*\mathcal{Q}_{V*}(g\circ\pi_{V\times\mathbb{G}^{(0)}}) = \mathcal{L}_{\theta_k(X)_R}(\mathcal{Q}_{V*}(g\circ\pi_{V\times\mathbb{G}^{(0)}})) &= \mathcal{Q}_{V*}\left(\mathcal{L}_{\hat{X}}(g\circ\pi_{V\times\mathbb{G}^{(0)}})\right)\\ &= \mathcal{Q}_{V*}\left(\mathcal{L}_{\tilde{X}}(g)\circ\pi_{V\times\mathbb{G}^{(0)}}\right)\end{aligned}\tag{3.44}$$

这就完成了定理 2.6.5.ii 的证明。 □

注 3.5.4。 定理 2.6.5.ii 的证明表明，如果 $(V,\natural)$ 是一个 ν-分次李基， $v_0\in V^k$，且 $f\in C_c^\infty(\widetilde{\text{定义域}}(\mathcal{Q}_V),\ \Omega^1(V))$，那么我们可以找到 $g\in C_c^\infty(\widetilde{\text{定义域}}(\mathcal{Q}_V),\ \Omega^1(V))$使得

$$\begin{aligned}\mathcal{Q}_{V*}(g\circ\pi_{V\times\mathbb{G}^{(0)}})-\theta_k(\natural(v_0))*\mathcal{Q}_{V*}(f\circ\pi_{V\times\mathbb{G}^{(0)}})\in C_c^\infty(M\times M\times\mathbb{R}^\nu_+\backslash 0,\Omega^{\frac{1}{2}})\\ g(v,x,0)=\mathcal{L}_X(f)(v,x,0),\end{aligned}$$

其中 $X\in\mathcal{X}(V)$ 是与 v_0 相关联的、定义在 V 上的右不变向量场。

定理2.6.6的证明。 设 $(V,\natural)$ 是一个 ν-分次李基。证明中的一个关键观察是， $\alpha_\lambda:V\to V$ 对 $\lambda\in\mathbb{R}^\nu_+$ 是良定义的。取伴随后，只需考虑函数 $\lambda\mapsto g*\alpha_\lambda(f)$。我们将证明，对每个 $C>0$，函数 $\lambda\mapsto g*\alpha_\lambda(f)$ 可光滑延拓至 $\lambda\in[0,C]^\nu$。因此，固定 $C>0$。首先证明族$(g*\alpha_\lambda(f))_{\lambda\in]0,C]^\nu}$ 是一致紧支撑的。由 (1.25) 和 (1.42)，$\mathrm{supp}(g*\alpha_\lambda(f))\subseteq\mathrm{supp}(g)\alpha_\lambda(\mathrm{supp}(f))$。因此，只需证明$\bigcup_{\lambda\in]0,C]^\nu}\alpha_\lambda(\mathrm{supp}(f))$ 是 $\mathbb{G}$的真子集。

引理 3.5.5. 若 $K\subseteq\mathbb{G}$ 是紧子集，则$\bigcup_{\lambda\in]0,C]^\nu}\alpha_\lambda(K)$ ~~是 $\mathbb{G}$ 的真子集~~。此外，若 $K\subseteq M\times M\times\mathbb{R}^\nu_+\backslash 0$，则$\bigcup_{\lambda\in]0,C]^\nu}\alpha_\lambda(K)\subseteq M\times M\times\mathbb{R}^\nu_+\backslash 0$。

证明. 由 s 与 r 的对称性，只需证明：若$(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}\subseteq\bigcup_{\lambda\in]0,C]^\nu}\alpha_\lambda(K)$ 是一个~~序列，且 $s(\gamma_n)$~~ 在 $\mathbb{G}^{(0)}$中收敛，则 $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 有一个收敛子列。由于$\mathbb{G}$ 可度量化，不失一般性，可设 $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}\subseteq\bigcup_{\lambda\in]0,C]^\nu}\alpha_\lambda(K)$。取一个子列后，可设 $\gamma_n=\alpha_{\lambda_n}(\eta_n)$，其中 $\eta_n\in K$ 收敛到 $\eta\in K$，且$\lambda_n\in]0,C]^\nu$ 收敛到 $\lambda\in[0,C]^\nu$。也可设对所有$n\in\mathbb{N}$，要么 $\eta_n\in M\times M\times\mathbb{R}^\nu_+\backslash 0$，要么 $\eta_n\in\mathcal{G}^{(0)}\times\{0\}$。证明现在分为以下两种情形：

i. 若 $\eta_n=(A_n、\ x_n、\ 0)$收敛到 $\eta=(A、\ x、\ 0)$，则由定理 2.3.3.ii， $x_n\to x$、 $A_n=\natural_{x_n、\ 0}(v_nL_n)$、 $A=\natural_{x、\ 0}(vL)$，其中 $L_n\in\mathrm{Grass}(V)$、 $v_n\in V$、 $L_n\to L$ 且 $v_n\to v$。 $s(\alpha_{\lambda_n}(\eta_n))$ 在 $\mathbb{G}^{(0)}$ 中的收敛蕴含 $\alpha_{\lambda_n}(L_n)$ 收敛到某个子空间 $L'\in\mathrm{Grass}(V)$。由此可得 $\alpha_{\lambda_n}(\eta_n)=(\natural_{x_n、\ 0}(\alpha_{\lambda_n}(v_n)\alpha_{\lambda_n}(L_n))、\ x_n、\ 0)\to(\natural_{x、\ 0}(\alpha_\lambda(v)L')、\ x、\ 0)$。

ii. 若 $\eta_n=(y_n,x_n,t_n)$，则要么$\eta\in M\times M\times\mathbb{R}^\nu_+\backslash 0$，要么 $\eta\in\mathcal{G}^{(0)}\times\{0\}$。

(a) 若 $\eta=(y,\ x,\ t)$，则 $y_n\to y$、 $x_n\to x$、 $t_n\to t$。 $s(\alpha_{\lambda_n}(\eta_n))$ 在 $\mathbb{G}^{(0)}$中收敛意味着，对于某个 $s\in\mathbb{R}^\nu_+$，有 $\lambda_n^{-1}t_n\to s$。这意味着 $t=\lambda s$。因此， $s\neq 0$。于是，$\alpha_{\lambda_n}(y_n,\ x_n,\ t_n)=(y_n,\ x_n,\ \lambda_n^{-1}t_n)\to(y,\ x,\ s)$。

(b) 若 $\eta=(A,\ x,\ 0)$，则根据定理 2.3.3.i，$x_n\to x$、$t_n\to 0$、核$(\natural_{x_n,\ t_n})\to L$ 属于 Grass(V)，$y_n=\exp(\alpha_{t_n}(v_n))\cdot x_n$，其中存在某些 $v_n\in V$、$v_n\to v$、$A=\natural_{x,\ 0}(vL)$。$s(\alpha_{\lambda_n}(\eta_n))$ 在 $\mathbb{G}^{(0)}$ 中收敛意味着，对于某个 $L'\in$ Grass(V)，有核$(\natural_{x_n,\ \lambda_n^{-1}t_n})\to L'$。由于$y_n=\exp(\alpha_{\lambda_n^{-1}t_n}(\alpha_{\lambda_n}(v_n)))\cdot x_n$ 且 $\alpha_{\lambda_n}(v_n)\to\alpha_\lambda(v)$，由定理 2.3.3.i 可得，$(y_n,\ x_n,\ \lambda_n^{-1}t_n)$ 收敛到$(\natural_{x,\ 0}(\alpha_\lambda(v)L'),\ x,\ 0)$。

若 $K\subseteq M\times M\times\mathbb{R}_+^\nu\backslash 0$，则只会出现情形 2.a。 □

根据引理 3.5.5，我们只需证明函数 $\lambda\mapsto g*\alpha_\lambda(f)$ 可以延拓为光滑函数 $[0,\ C]^\nu\to C^\infty(\mathbb{G},\ \Omega^{\frac12})$。将 f按照（2.27）分解后，需要考虑两种情形:

- 第一种情形是 $f\in C_c^\infty(M\times M\times\mathbb{R}_+^\nu\backslash 0,\ \Omega^{\frac12})$。根据引理 3.5.5，存在一个紧子集 $K\subseteq M\times M\times\mathbb{R}_+^\nu\backslash 0$，使得对于所有 $\lambda\in]0,\ C]^\nu$，都有 supp$(g*\alpha_\lambda(f))\subseteq K$。在 $M\times M\times\mathbb{R}_+^\nu\backslash 0$上，我们有

$$g*\alpha_\lambda(f)(z,x,t)=\int_M g(z,y,t)f(y,x,\lambda t)$$

这显然可以光滑地延拓到 $[0,\ C]^\nu$。此外，$\alpha_0(f)=0$。因此，（2.30）得证。

- 第二种情况是 $f=\mathcal{Q}_{V*}(\tilde f\circ\pi_{V\times\mathbb{G}^{(0)}})$，其中 $\tilde f\in C_c^\infty(\widetilde{\text{Dom}}(\mathcal{Q}_V),\ \Omega^1(V))$。我们有

$$g*f(\gamma)=\int_V h(v,\gamma)g(\gamma\mathcal{Q}_V(v,s(\gamma))^{-1})\tilde f(v,\pi_{\mathbb{G}^{(0)}}\circ s(\gamma)),$$

其中 $h(v,\ \gamma)\colon\Omega^{\frac12}A(\mathbb{G})_{r(\mathcal{Q}_V(v,\ s(\gamma)))}\to\Omega^{\frac12}A(\mathbb{G})_{s(\gamma)}$ 是由 $\mathcal{Q}_V^*(\Omega^{\frac12,\ 0}(\mathbb{G}))\simeq\mathcal{Q}_V^*(\Omega^{0,\ \frac12}(\mathbb{G}))$ 导出的典范同构，参见命题 2.3.6。令 $\beta_\lambda\colon M\times\mathbb{R}_+^\nu\to M\times\mathbb{R}_+^\nu$ 对于 $\lambda\in\mathbb{R}_+^\nu$ 是映射 $(x,\ t)\mapsto(x,\ \lambda t)$。由于 $\alpha_\lambda(f)=\mathcal{Q}_{V*}(\alpha_\lambda(f)\circ\pi_{V\times\mathbb{G}^{(0)}})$，我们有

$$\begin{aligned}g*\alpha_\lambda(f)(\gamma)&=\int_V h(v,\gamma)g(\gamma\mathcal{Q}_V(v,s(\gamma))^{-1})\alpha_\lambda(\tilde f)(v,\pi_{\mathbb{G}^{(0)}}\circ s(\gamma))\\&=\int_V h(\alpha_\lambda(v),\gamma)g(\gamma\mathcal{Q}_V(\alpha_\lambda(v),s(\gamma))^{-1})\tilde f(v,\beta_\lambda\circ\pi_{\mathbb{G}^{(0)}}\circ s(\gamma)),\end{aligned}$$

这显然可以延拓到 $\lambda\in[0,\ C]^\nu$。此外，$g*\alpha_0(f)(\gamma)=g(\gamma)\int_V\tilde f(v,\ \beta_0\circ\pi_{\mathbb{G}^{(0)}}\circ s(\gamma))$。这就证明了此情形下的 (2.30)。

由此我们证明了 $g*\alpha_\lambda(f)$ 可延拓为一个光滑映射 $\mathbb{R}_+^\nu\to C_c^\infty(\mathbb{G},\ \Omega^{\frac12})$。现设$g\in C_c^\infty,\ _{\text{inv}}(\mathbb{G},\ \Omega^{\frac12})$。再次如(2.27)中那样分解 f与 g，我们归结到如下情形：$f=\mathrm{Q}_{V*}(\tilde f\circ\pi_{V\times\mathbb{G}^{(0)}})$ 且 $g=\mathrm{Q}_{V*}(\tilde g\circ\pi_{V\times\mathbb{G}^{(0)}})$，其中 $\tilde f,\ \tilde g\in C_c^\infty(\widetilde{\text{定义域}}(\mathrm{Q}_V),\ \Omega^1(V))$。令 ψ如~引理 3.2.3 中那样，ψ_λ映射 $(v,\ w,\ x,\ t)\mapsto\psi(v,\ \alpha_\lambda(w),\ x,\ t)$。

~**引理 3.5.6.** 存在 $V\times V\times M\times\{0\}$ 的一个开 $(\mathbb{R}_+^\times)^\nu$-等变邻域 $L\subseteq$定义域(ψ)，使得对任意 $\lambda\in[0,\ C]^\nu$，ψ_λ在 $L_\lambda:=\{(v,\ w,\ x,\ t)\colon(v,\ \alpha_\lambda(w),\ x,\ t)\in L\}$上是浸没。

证明。不失一般性，我们假设 $1\leqslant C$。令 L为点 $(v、\ w、\ x、\ t)$的集合，使得对于任意 $\lambda\in[0、\ C]^\nu$、$(v、\ \alpha_\lambda(w)、\ x、\ t)\in$，$(\psi)$属于定义域，且 ψ在 $(v、\ \alpha_\lambda(w)、\ x、\ t)$处的微分作为映射 $V\times\{0\}\times T_xM\times\mathbb{R}\to V\times T_xM\times\mathbb{R}$是满射。集合 $L\subseteq$属于定义域，因为 $1\leqslant C$。根据 ψ的等变性，它是等变的。由于 $[0、\ C]^\nu$是紧的，它是开集。由引理 3.2.3.i，它包含 $V\times V\times M\times\{0\}$。 □

~我们应用引理 3.5.2，取 L，得到等变开集 $U\subseteq$ 定义域$(\mathcal{Q}_V)$。由引理 3.5.2，~我们可以假设 f和 $\tilde g$的支集包含于 U中。由于 U是等变的，$\alpha_\lambda(f)$的支集也包含于

所有 $\lambda\in(\mathbb{R}_+^\times)^\nu$ 的 U 中。考虑

$$h_\lambda(v,w,x,t)=\tilde g(v,e^{\alpha_t(w)}\cdot x,t)\alpha_\lambda(\tilde f)(w,x,t)\in C_c^\infty(L,\Omega^2(V)),\quad \lambda\in]0,C]^\nu$$
$$k_\lambda(v,w,x,t)=\tilde g(v,e^{\alpha_{\lambda t}(w)}\cdot x,t)\tilde f(w,x,\lambda t)\in C_c^\infty(L_\lambda,\Omega^2(V)),\quad \lambda\in[0,C]^\nu.$$

我们指出，为了证明 k_λ 的支集包含于 L_λ，我们使用 (3.39)。如同 (3.40)，我们有

$$g*\alpha_\lambda(f)=\mathcal{Q}_{V*}(\tilde\psi_*(h_\lambda)\circ\pi_{V\times\mathbb{G}^{(0)}}). \tag{3.45}$$

因此，我们需要证明 $\lambda\in]0,\ C]^\nu\to C_c^\infty(\widetilde{\text{定义域}(\mathcal{Q}_V),\ \Omega^1(V)})$ 可光滑延拓至 $[0,\ C]\nu$。为此，

$$\begin{aligned}\tilde\psi_*(h_\lambda)(v',x,t)&=\int_{\tilde\psi(v,w,x,t)=(v',x,t)}\tilde g(v,e^{\alpha_t(w)}\cdot x,t)\alpha_\lambda(\tilde f)(w,x,t)\\&=\int_{\tilde\psi(v,\alpha_\lambda(w),x,t)=(v',x,t)}\tilde g(v,e^{\alpha_{\lambda t}(w)}\cdot x,t)\tilde f(w,x,\lambda t)=\tilde\psi_{\lambda*}(k_\lambda)(v',x,t).\end{aligned} \tag{3.46}$$

~映射 ψ_λ 和 k_λ 可光滑延拓至 $\lambda\in[0,\ C]^\nu$。由于映射 $(k_\lambda)_{[0,\ C]^\nu}$ 一致紧支撑，结论得证。□

3.6 第 2.7 节结果的证明

定理 2.7.2 的证明。 令 $f\in C_c^\infty(\mathbb{G},\ \Omega^{\frac12})$。将 D 写成单项式之和，并利用例 1.3.6，可知 $\theta_k(D)*f(y,\ x,\ t)=t^kD_y(f)(y,\ x,\ t)$，其中 D_y 表示 D 作用于 y 变量。由此可知，$\theta_k(D)*f$ 在 $M\times M\times\mathbb{R}_+^\nu\backslash 0$ 上的取值不依赖于将 D 表示为单项式之和的方式。由 $M\times M\times\mathbb{R}_+^\nu\backslash 0$ 在 $\mathbb{G}$ 中的稠密性可知，将 D 表示为单项式之和的方式无关紧要。对于任意 $k\in\mathbb{Z}_+^\nu$，分布 $\theta_k(\delta_1)$ 属于 $C_{c,\ \mathrm{inv}}^\infty(\mathbb{G},\ \Omega^{\frac12})$ 的中心，见例 1.6.3.ii。由此可得 (2.31)。□

定理 2.7.4 的证明。若 $f\in C_c^\infty(M\times M\times(\mathbb{R}_+^\times)^\nu,\ \Omega^{\frac12})$ 且 $l\in\mathbb{Z}_+^\nu$，则 $f=\theta_l(\delta_1)*g$，其中 $g\in C_c^\infty(M\times M\times(\mathbb{R}_+^\times)^\nu,\ \Omega^{\frac12})$ 由 $g(y,x,t)=t^{-l}f(y,x,t)$ 定义。这证明了定理 2.7.4.i。现在证明 $C_c^\infty{}_{,\mathrm{inv},k}(\mathbb{G},\ \Omega^{\frac12})^*=C_c^\infty{}_{,\mathrm{inv},k}(\mathbb{G},\ \Omega^{\frac12})$。我们需要证明：若 $f\in C_c^\infty{}_{,\mathrm{inv}}(\mathbb{G},\ \Omega^{\frac12}),D\in\mathrm{DO}^k(M)$ 对某个 $k\in\mathbb{Z}_+^\nu$ 成立，则 $f*\theta_k(D)\in C_c^\infty{}_{,\mathrm{inv},k}(\mathbb{G},\ \Omega^{\frac12})$。将 D 写成单项式之和后，我们可以假设 D 是一个单项式。利用 $\theta_l(\delta_1)$ 属于 $C_{r\ s}^{-\infty}$ 的中心这一事实，$,_{\mathrm{inv}}(\mathbb{G},\ \Omega^{\frac12})$ 对任意 $l\in\mathbb{Z}_+^\nu$ 都成立，我们推得只需证明：若 $X\in\Gamma^k$，则 $f*\theta_k(X)\in C_c^\infty{}_{,\mathrm{inv},k}(\mathbb{G},\ \Omega^{\frac12})$。令 $(V,\natural)$ 为一个 ν-分次李基。我们固定 V 的一个由纯元素 $v_1,\cdots,v_n$ 构成的线性基，使得 $v_i\in V^{\omega(i)}$ 对所有 i 都成立。根据 ν-分次基的定义，我们可以写出 $\natural(X)=\sum_{i=1}^n f_i\natural(v_i)$，其中 $f_i=0$，若 $\omega(i)\not\preceq k$。因此，$\theta_k(X)=\sum_{i=1}^n\theta_{k-\omega(i)}(\delta_1)*\delta_{f_i\circ\pi_{\mathbb{G}^{(0)}}}*\theta_{\omega(i)}(v_i)$。于是，

$$f*\theta_k(X)=\sum_{i=1}^n\theta_{k-\omega(i)}(\delta_1)*f*\delta_{f_i\circ\pi_{\mathbb{G}^{(0)}}}*\theta_{\omega(i)}(\natural(v_i)).$$

通过将 f 替换为 $f*\delta_{f_i\circ\pi_{\mathbb{G}^{(0)}}}$（此处我们使用定理 2.6.5.i），我们推出，只需证明对任意 $i\in[\![1,\ n]\!]$，若 $f\in C_c^\infty{}_{,\mathrm{inv}}(\mathbb{G},\Omega^{\frac12})$，则 $f*\theta_{\omega(i)}(\natural(v_i))\in C_c^\infty{}_{,\mathrm{inv},\omega(i)}(\mathbb{G},\Omega^{\frac12})$。

令 ψ 如引理 3.2.3 中所述。对于每个 $i\in[\![1,\ n]\!]$，如 (3.42) 中所述，令 $X_i,\ Y_i$ 为定义在 $V\times M\times\mathbb{R}_+^\nu$ 上的部分定义的向量场，它们满足

$$\tilde X_i(v,x,t)=\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\tilde\psi(\tau v_i,v,x,t)\right|_{\tau=0},\quad \tilde Y_i(v,x,t)=\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\tilde\psi(v,\tau v_i,x,t)\right|_{\tau=0} \tag{3.47}$$

这里使用引理 3.2.3.ii 来确保 X_i 和 Y_i 是向量场。向量场 X_i 和 Y_i 与 V 相切。由 ψ 的等变性，这些向量场在 $V\times M\times\{0\}$ 的一个等变邻域内良定义，且 $\alpha_\lambda(\tilde{X}_i)=\lambda^{\omega(i)}\tilde{X}_i$ 和 $\alpha_\lambda(\tilde{Y}_i)=\lambda^{\omega(i)}\tilde{Y}_i$。根据引理 3.2.3.i，在 $V\times M\times\{0\}$ 上，X_i 和 Y_i 是 V 上与 v_i 关联的右不变向量场和左不变向量场。因此，在 $V\times M\times\{0\}$ 上，向量场 X_1、$\cdots$、X_n 线性无关。令 $U\subseteq V\times M\times\mathbb{R}^\nu_+$ 为由向量场 X_1、$\cdots$、X_n 良定义且线性无关的点构成的集合，并且向量场 Y_1、$\cdots$、Y_n 良定义。集合 U 是 $V\times M\times\{0\}$ 的一个等变邻域。在 U 上，向量场 X_1、$\cdots$、X_n 线性张成与 V 相切的向量场，因此存在唯一的一族 $(P_{i,j})_{i,j\in[\![1,n]\!]}\subseteq C^\infty(U)$，使得

$$\tilde{Y}_i=\sum_{j=1}^n P_{i,j}\tilde{X}_j.$$

再次，由等变性，$\alpha_\lambda(P_{i,j})=\lambda^{\omega(i)-\omega(j)}P_{i,j}$。在 U 上，作用于 $C^\infty(U,\Omega^1(V))$ 的微分算子 $\mathcal{L}_{P_{i,j}\tilde{X}_j}(\cdot)$ 和 $\mathcal{L}_{\tilde{X}_j}(P_{i,j}\cdot)$ 具有相同的经典主符号。因此，存在一个光滑函数 $H_{i,j}\in C^\infty(U)$，使得

$$\mathcal{L}_{P_{i,j}\tilde{X}_j}(g)=\mathcal{L}_{\tilde{X}_j}(P_{i,j}g)+H_{i,j}g,\quad\forall g\in C^\infty(U,\Omega^1(V)).$$

由等变性，$\alpha_\lambda(H_{i,j})=\lambda^{\omega(i)}H_{i,j}$。将 U 替换为 $V\times M\times\{0\}$ 的一个更小的开邻域后，我们可以假设 U 满足 (3.39)，参见引理 3.5.2 的证明。

引理 3.6.1。对于任意 $k\in\mathbb{Z}^\nu$，令 $\max(k,0):=(\max(k_1,0),\cdots,\max(k_\nu,0))\in\mathbb{Z}^\nu_+$。如果对所有 $\lambda\in(\mathbb{R}^\times_+)^\nu$，$P\in C^\infty(U)$ 满足 $\alpha_\lambda(P)=\lambda^k(P)$，那么存在 $P'\in C^\infty(U)$，使得 $P(v,x,t)=t^{\max(k,0)}P'(v,x,t)$。

证明。若 $t\in(\mathbb{R}^\times_+)^\nu$，令 $\tilde{t},\tilde{\tilde{t}}\in(\mathbb{R}^\times_+)^\nu$ 定义为

$$\tilde{t}_i=\begin{cases}t_i & \text{if } k_i\geqslant 0\\ 1 & \text{if } k_i<0\end{cases},\quad \tilde{\tilde{t}}_i=\begin{cases}1 & \text{if } k_i\geqslant 0\\ t_i & \text{if } k_i<0\end{cases}.$$

我们有 $\tilde{t}\tilde{\tilde{t}}=t$。因此，$P(v,x,t)=\alpha_{\tilde{t}}(P)(\alpha_{\tilde{t}}(v),x,\tilde{\tilde{t}})=\tilde{t}^kP(\alpha_{\tilde{t}}(v),x,\tilde{\tilde{t}})=t^{\max(k,0)}P(\alpha_{\tilde{t}}(v),x,\tilde{\tilde{t}})$。因此我们可以取 $P'(v,x,t)=P(\alpha_{\tilde{t}}(v),x,\tilde{\tilde{t}})$，它可光滑延拓至 $t\in\mathbb{R}^\nu_+$。注意，由于 (3.39)，P' 在 U 上是良定义的。 □

现在，我们将证明 $f*\theta_{\omega(i)}(\natural(v_i))\in C^\infty_{c,\mathrm{inv},\omega(i)}(\mathbb{G},\Omega^{\frac{1}{2}})$。将 f 按 (2.27) 分解后，我们需要考虑两种情况：若 $f\in C^\infty_c(M\times M\times\mathbb{R}^\nu_+\backslash 0,\Omega^{\frac{1}{2}})$，则 $f*\theta_{\omega(i)}(\natural(v_i))(y,x,t)=t^{\omega(i)}\natural(v_i)_x(f)(y,x,t)$。令 $g\in C^\infty_c(M\times M\times\mathbb{R}^\nu_+\backslash 0,\Omega^{\frac{1}{2}})$ 定义为 $g(y,x,t)=\natural(v_i)_x(f)(y,x,t)$。因此，$f*\theta_{\omega(i)}(\natural(v_i))=\theta_{\omega(i)}(\delta_1)*g\in C^\infty_{c,\mathrm{inv},\omega(i)}(\mathbb{G},\Omega^{\frac{1}{2}})$。

第二种情况是，当对于某个 $\tilde{f}\in C^\infty_c(\widetilde{\text{定义域}}(\mathcal{Q}_V),\Omega^1(V))$，有 $f=\mathcal{Q}_{V*}(\tilde{f}\circ\pi_{V\times\mathbb{G}^0})$。我们可以 n

˜根据引理 3.5.1，假设支集$(f)\subseteq U$。与 (3.44) 中一样，我们有

$$\begin{aligned}
&f*\theta_{\omega(i)}(\natural(v_i))\\
&=\mathcal{Q}_{V*}(\mathcal{L}_{\tilde{Y}_i}(\tilde{f})\circ\pi_{V\times\mathbb{G}^{(0)}})\\
&=\mathcal{Q}_{V*}\left(\mathcal{L}_{\sum_{j=1}^n P_{i,j}\tilde{X}_j}(\tilde{f})\circ\pi_{V\times\mathbb{G}^{(0)}}\right)\\
&=\mathcal{Q}_{V*}\left(\left(\sum_{j=1}^n\mathcal{L}_{\tilde{X}_j}(P_{i,j}\tilde{f})+H_{i,j}\tilde{f}\right)\circ\pi_{V\times\mathbb{G}^{(0)}}\right)\\
&=\mathcal{Q}_{V*}\left(\left(\sum_{j=1}^n\mathcal{L}_{\tilde{X}_j}(t^{\max(\omega(i)-\omega(j),0)}P'_{i,j}\tilde{f})+t^{\omega(i)}H'_{i,j}\tilde{f}\right)\circ\pi_{V\times\mathbb{G}^{(0)}}\right)\\
&=\sum_{j=1}^n\theta_{\omega(j)}(X_j)*\theta_{\max(\omega(i)-\omega(j),0)}(\delta_1)*\mathcal{Q}_{V*}\left(\left(P'_{i,j}\tilde{f}\right)\circ\pi_{V\times\mathbb{G}^{(0)}}\right)\\
&+\sum_{j=1}^n\theta_{\omega(i)}(\delta_1)*\mathcal{Q}_{V*}\left(\left(H'_{i,j}\tilde{f}\right)\circ\pi_{V\times\mathbb{G}^{(0)}}\right).
\end{aligned}$$

由 (2.34)，第一项和属于$C_c^{\infty,\mathrm{inv},\omega(j)+\max(\omega(i)-\omega(j),0)}(\mathbb{G},\Omega^{\frac{1}{2}})$，第二项和属于$C_c^{\infty,\mathrm{inv},\omega(i)}(\mathbb{G},\Omega^{\frac{1}{2}})$。由于对所有 $i,j\in[\![1,n]\!]$，$\omega(i)\preceq\omega(j)+\max(\omega(i)-\omega(j),0)$，由 (2.34) 可知，第一项和也属于$C_c^{\infty,\mathrm{inv},\omega(i)}(\mathbb{G},\Omega^{\frac{1}{2}})$。这就证明了对所有 $k\in\mathbb{Z}_+^\nu$，$C_c^{\infty,\mathrm{inv},k}(\mathbb{G},\Omega^{\frac{1}{2}})^*=C_c^{\infty,\mathrm{inv},k}(\mathbb{G},\Omega^{\frac{1}{2}})$。恒等式 $C_c^{\infty,\mathrm{inv},k}(\mathbb{G},\Omega^{\frac{1}{2}})^*=C_c^{\infty,\mathrm{inv},k}(\mathbb{G},\Omega^{\frac{1}{2}})$ 与定理 2.6.2.iii 一起推出定理 2.7.4.iii。包含映射$C_c^{\infty,\mathrm{inv},k}(\mathbb{G},\Omega^{\frac{1}{2}})*C_c^{\infty,\mathrm{inv},l}(\mathbb{G},\Omega^{\frac{1}{2}})\subseteq C_c^{\infty,\mathrm{inv},k+l}(\mathbb{G},\Omega^{\frac{1}{2}})$ 可由定理 2.7.4.iii 轻易得到。

□

命题 2.7.6 的证明。若 $l\in\mathbb{Z}_+^\nu$，$D\in\mathrm{DO}^l(M)$且$f\in C_c^{\infty,\mathrm{inv}}(\mathbb{G},\Omega^{\frac{1}{2}})$，则

$$\alpha_{(1,\cdots,1,\lambda_i,1,\cdots,1)}(\theta_l(D)*f)=\lambda_i^{l_i}\theta_l(D)*f.$$

So,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda_i}\alpha_{(1,\cdots,1,\lambda_i,1,\cdots,1)}(\theta_l(D)*f)\Big|_{\lambda_i=1}=\theta_l(D)*\left(l_if+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda_i}\alpha_{(1,\cdots,1,\lambda_i,1,\cdots,1)}(f)\Big|_{\lambda_i=1}\right).$$

若 $l_i\neq0$，则$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda_i}\alpha_{(1,\cdots,1,\lambda_i,1,\cdots,1)}(\theta_l(D)*f)\Big|_{\lambda_i=1}\in C_c^{\infty,\mathrm{inv},l}(\mathbb{G},\Omega^{\frac{1}{2}})$这正是我们需要证明的结论。若 $l_i=0$，则只需证明$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda_i}\alpha_{(1,\cdots,1,\lambda_i,1,\cdots,1)}(f)\Big|_{\lambda_i=1}\in C_c^{\infty,\mathrm{inv},(0,\cdots,0,1,0,\cdots,0)}(\mathbb{G},\Omega^{\frac{1}{2}})$。设 $(V,\natural)$ 为一个 ν-分次李基。按照 (2.33) 分解 f 后，需要考虑两种情形：若 $f\in C_c^\infty(M\times M\times\mathbb{R}_+^\nu\backslash0,\Omega^{\frac{1}{2}})$，则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda_i}\alpha_{(1,\cdots,1,\lambda_i,1,\cdots,1)}(f)\Big|_{\lambda_i=1}=t_i\frac{\partial}{\partial t_i}f=\theta_{(0,\cdots,0,1,0,\cdots,0)}(1)*\frac{\partial}{\partial t_i}f\in C_{c,\mathrm{inv},(0,\cdots,0,1,0,\cdots,0)}^\infty(\mathbb{G},\Omega^{\frac{1}{2}}).$$

如果 $f=\mathcal{Q}_{V*}(\tilde{f}\circ\pi_{V\times\mathbb{G}^{(0)}})$ 对于某个 $\tilde{f}\in C_c^\infty(\widetilde{\text{定义域}(\mathcal{Q}_V)},\Omega^1(V))$，那么

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda_i}\alpha_{(1,\cdots,1,\lambda_i,1,\cdots,1)}(f)\Big|_{\lambda_i=1}=\mathcal{Q}_{V*}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda_i}\alpha_{(1,\cdots,1,\lambda_i,1,\cdots,1)}(\tilde{f})\Big|_{\lambda_i=1}\circ\pi_{V\times\mathbb{G}^{(0)}}\right)\tag{3.48}$$

令 $v_1,\cdots,v_n\in V$为一个纯基，使得 $v_j\in V^{\omega(j)}$，$\tilde{X}_1,\cdots,\tilde{X}_n$如 (3.47) 中所示，$(v_j^*)_{j\in[\![1,n]\!]}\subseteq C^\infty(V\times M\times\mathbb{R}_+^\nu)$为光滑函数 $v_j^*(\sum_{k=1}^n c_kv_k,x,t)=c_j$。注意到 $\alpha_\lambda(v_j^*)=\lambda^{-\omega(j)}v_j^*$。˜令 $U\subseteq V\times M\times\mathbb{R}_+^\nu$为向量场 $X_1,\cdots,X_n$良定义且

~线性无关，且矩阵 $(X_j(v_k^*))_{j,k\in[\![1,n]\!]}$ 可逆。由 $(v_j)_{j\in[\![1,n]\!]}$
~ ~和 $(X_j)_{j\in[\![1,n]\!]}$
的等变性可知， U 是等变的。在 $V\times M\times\{0\}$上，向量场 $(X_j)_{j\in[\![1,n]\!]}$是 V 上与 $(v_j)_{j\in[\![1,n]\!]}$相关联的右不变向量场。由于 V 是分次幂零的，矩阵 $(X_j(v_k^*))_{j,k\in[\![1,n]\!]}$ （对指标作某种置换后）是对角线元素为 1 的上三角矩阵。因此， $V\times M\times\{0\}\subseteq U$。必要时缩小 U，我们可以假设 U满足 (3.39)，参见引理 3.5.2 的证明。由于 U 满足 (3.39)，可以使用引理 3.6.1。根据引理 3.5.1，我们可以假设 $\mathrm{supp}(f)\subseteq U$。令 $(A_{j,k})_{j,k\in[\![1,n]\!]}\subseteq C^\infty(U)$为$(\tilde{X}_j(v_j^*))_{j,k\in[\![1,n]\!]}$的逆映射。我们有 $\alpha_\lambda(A_{j,k})=\lambda^{\omega(j)-\omega(k)}A_{j,k}$。在 U上，存在唯一的光滑函数$(P_{i,j})_{i\in[\![1,\nu]\!],j\in[\![1,n]\!]}\subseteq C^\infty(U)$ 以及 $(H_i)_{i\in[\![1,\nu]\!]}\subseteq C^\infty(U)$，使得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda_i}\alpha_{(1,\cdots,1,\lambda_i,1,\cdots,1)}(g)\bigg|_{\lambda_i=1}=t_i\frac{\partial}{\partial t_i}g+\sum_{j=1}^n\mathcal{L}_{\tilde{X}_j}(P_{i,j}g)+H_ig,\quad\forall g\in C^\infty(U,\Omega^1(V)),i\in[\![1,\nu]\!].\tag{3.49}$$

将 g 替换为 v_k^*g，我们可推出

$$P_{i,j}=-\sum_{k=1}^n\omega(k)_iv_k^*A_{k,j}.\tag{3.50}$$

因此，由 (3.48) 和 (3.49)，可得

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda_i}\alpha_{(1,\cdots,1,\lambda_i,1,\cdots,1)}(f)\bigg|_{\lambda_i=1}&=\theta_{(0,\cdots,0,1,0,\cdots,0)}(\delta_1)*\mathcal{Q}_{V*}\left(\left(\frac{\partial}{\partial t_i}\tilde{f}\right)\circ\pi_{V\times\mathbb{G}^{(0)}}\right)\\&\quad-\sum_{j,k=1}^n\omega(k)_i\theta_{\omega(j)}(X_j)*\mathcal{Q}_{V*}\left(\left(v_k^*A_{k,j}\tilde{f}\right)\circ\pi_{V\times\mathbb{G}^{(0)}}\right)\\&\quad+\mathcal{Q}_{V*}\left(\left(H_i\tilde{f}\right)\circ\pi_{V\times\mathbb{G}^{(0)}}\right)\end{aligned}$$

显然，$\theta_{(0,\cdots,0,1,0,\cdots,0)}(\delta_1)*\mathcal{Q}_{V*}\left(\left(\frac{\partial}{\partial t_i}\tilde{f}\right)\circ\pi_{V\times\mathbb{G}^{(0)}}\right)\in C_c^{\infty,\mathrm{inv},(0,\cdots,0,1,0,\cdots,0)}(\mathbb{G},\Omega^{\frac{1}{2}})$。对于第二项，由于 $\alpha_\lambda(A_{k,j})=\lambda^{\omega(k)-\omega(j)}$，根据引理 3.6.1，$\mathcal{Q}_{V*}\left(\left(v_k^*A_{k,j}\tilde{f}\right)\circ\pi_{V\times\mathbb{G}^{(0)}}\right)\in C_c^{\infty,\mathrm{inv},\max(\omega(k)-\omega(j),0)}(\mathbb{G},\Omega^{\frac{1}{2}})$。由于 $\omega(k)\preceq\omega(j)+\max(\omega(k)-\omega(j),0)$，由 (2.34) 可得

$$\theta_{\omega(j)}(X_j)*\mathcal{Q}_{V*}\left(\left(v_k^*A_{k,j}\tilde{f}\right)\circ\pi_{V\times\mathbb{G}^{(0)}}\right)\in C_{c,\mathrm{inv},\omega(j)+\max(\omega(k)-\omega(j),0)}^\infty(\mathbb{G},\Omega^{\frac{1}{2}})\subseteq C_{c,\mathrm{inv},\omega(k)}^\infty(\mathbb{G},\Omega^{\frac{1}{2}}).$$

因此，由于我们乘以因子 $\omega(k)_i$，只有计数为 $\omega(k)_i>0$ 的项才会保留下来，也就是满足 $(0,\cdots,0,1,0,\cdots,0)\preceq\omega(k)$的项。因此，由 (2.34)，第二个和也属于$C_c^{\infty,\mathrm{inv},(0,\cdots,0,1,0\cdots,0)}(\mathbb{G},\Omega^{\frac{1}{2}})$。为证明 $\mathcal{Q}_{V*}\left(\left(H_i\tilde{f}\right)\circ\pi_{V\times\mathbb{G}^{(0)}}\right)\in C_c^{\infty,\mathrm{inv},(0,\cdots,0,1,0,\cdots,0)}(\mathbb{G},\Omega^{\frac{1}{2}})$，由引理 3.6.1，只需证明 H_i 可以写成若干形如 BC的函数之和，其中 $\alpha_\lambda(B)=\lambda^lB$ 且 $0<l_i$，对某个 $l\in\mathbb{Z}^\nu$成立。令 $\mu\in\Omega^1(V)$为一个非零稠密性。我们将 μ 视为 $C^\infty(U,\Omega^1(V))$中的常值函数。我们有 $\alpha_\lambda(\mu)=\lambda^{-\sum_{j=1}^n\omega(j)}\mu$。因此，在 (3.49) 中用 μ替换 g后，可得

$$H_i=\sum_{j=1}^n-\frac{\mathcal{L}_{\tilde{X}_j}(P_{i,j}\mu)}{\mu}-\omega(j)_i=\sum_{j,k=1}^n\omega(k)_iv_k^*\frac{\mathcal{L}_{\tilde{X}_j}(A_{k,j}\mu)}{\mu}+(\omega(k)_i-\omega(j)_i)\mathcal{L}_{\tilde{X}_j}(v_k^*)A_{k,j}.$$

对于第一项，我们有

$$\alpha_\lambda\left(\frac{\mathcal{L}_{\tilde{X}_j}(A_{k,j}\mu)}{\mu}\right)=\lambda^{\omega(k)}\frac{\mathcal{L}_{\tilde{X}_j}(A_{k,j}\mu)}{\mu}$$

由于我们只对满足 $\omega(k)_i > 0$ 的项求和，因此取 $B = \mathcal{L}_{\tilde{X}_j}(A_{k,\quad j}\mu)$ 和 $C = 1$。对于第二项，要么是 $\omega(k)_i < \omega(j)_i$，要么是 $\omega(k)_i > \omega(j)_i$（否则为 $\omega(k)_i \overset{\mu}{-} \omega(j)_i = 0$）。在第一种情况下，我们取$B = \mathcal{L}_{\tilde{X}_j}(v_k^*)$和$C = A_{k,j}$。在第二种情况下，我们取 $B = A_{k,j}$和 $C = \mathcal{L}_{\tilde{X}_j}(v_k^*)$。 □

3.7 第2.8节结果的证明

本节中，我们假设$\mathcal{F}^\bullet$ 是弱交换的。

定理 2.8.3 的证明。

引理 3.7.1. 存在一个 ν-分次李基 $(V, \natural)$ 使得 $V = \oplus_{i\in[\![1,\nu]\!]} V^i$。

证明。设 $(V, \natural)$ 是 F 的一个 ν-分次李基。由 F 的弱交换性可推得，$(\oplus_{i\in[\![1,\nu]\!]} V^i, \natural_{|\oplus_{i\in[\![1,\nu]\!]} V^i})$ 是 F 的一个 ν- 分次基。我们在 $\oplus_{i\in[\![1,\nu]\!]} V^i$ 上定义李括号如下：若 $v, w \in V^i$，则 $[v, w]$ 等于它们在 V中的李括号。若 $v \in V^i, w \in V^j$ 且 $i \neq j$，则 $[v, w] = 0$。可以验证，$(\oplus_{i\in[\![1,\nu]\!]} V^i, \natural_{|\oplus_{i\in[\![1,\nu]\!]} V^i})$ 是一个 ν-分次李基。 □

只需证明，对于任意满足 $0 < C_2 < 2C_1$ 的 $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$，(2.39) 是一个光滑映射$\{(\lambda, \mu) \in [0, C_1]^{2\nu} : \lambda + \mu \in [C_2, 2C_1]^\nu\} \to C_{c,\mathrm{inv}}^\infty(\mathbb{G}, \Omega^{\frac{1}{2}})$。我们固定 C_1 和 C_2。

引理 3.7.2. 若 $K_1 \subseteq M \times M \times \mathbb{R}_+^\nu \backslash 0$ 和 $K_2 \subseteq \mathbb{G}$ 是紧子集，

$$K = \bigcup_{\{(\lambda,\mu)\in]0,C_1]^{2\nu}:\lambda+\mu\in[C_2,2C_1]^\nu\}} \alpha_\lambda(K_1) * \alpha_\mu(K_2),$$

则 K 在 $\mathbb{G}$ 中的闭包是 $M \times M \times \mathbb{R}_+^\nu \backslash 0$ 的一个紧子集。

证明。设 $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \overline{K}$ 是一个序列。由于 $\mathbb{G}$ 可度量化，我们固定一个度量 d，它诱导 $\mathbb{G}$ 上的拓扑。设 $(\gamma_n')_{n\in\mathbb{N}} \subseteq K$ 是一个序列，使得 $d(\gamma_n, \gamma_n') < \frac{1}{n}$。记 $\gamma_n' = \alpha_{\lambda_n}(\eta_n)\alpha_{\mu_n}(\xi_n)$。取子列后，不妨设 $\lambda_n \to \lambda \in [0, C_1]^\mu$, $\mu_n \to \mu \in [0, C_1]^\nu$, $\eta_n \to \eta \in K_1$, $\xi_n \to \xi \in K_2$ 且 $\lambda + \mu \in [C_2, 2C_1]^\nu$。记 $\eta_n = (z_n, y_n, t_n)$ 和 $\eta = (z, y, t)$。为了使 $\alpha_{\lambda_n}(\eta_n) = (z_n, y_n, \lambda_n^{-1} t_n)$ 和 $\alpha_{\mu_n}(\xi_n)$ 可复合，必有 $\xi_n = (y_n, x_n, \mu_n\lambda_n^{-1}t_n)$，其中某个 $(x_n)_{n\in N} \subseteq M$。由于 ξ_n 在 $\mathbb{G}$ 中收敛，$x_n \to x$ 和 $\mu_n\lambda_n^{-1}t_n \to s$ 对某个 $x \in M$ 和 $s \in \mathbb{R}_+^\nu$ 成立。因此，

$$\lambda_n^{-1}t_n = (\mu_n + \lambda_n)^{-1}(\mu_n\lambda_n^{-1}t_n + t_n) \to (\lambda + \mu)^{-1}(s + t) \in \mathbb{R}_+^\nu \backslash 0$$

因此，$\gamma_n' = (z_n,\ x_n,\ \lambda_n^{-1}t_n) \to (z,\ x,\ (\lambda + \mu)^{-1}(s + t)) \in M \times M \times \mathbb{R}_+^\nu \backslash 0$。所以，$\gamma_n$ 也收敛到 $(z,\ x,\ (\lambda + \mu)^{-1}(s + t))$。 □

按照 (2.27) 分解 f 和 g，证明分为 4 种情况：

i. 若 f和 g属于 $C_c^\infty(M \times M \times \mathbb{R}_+^\nu \backslash 0,\ \Omega^{\frac{1}{2}})$，则根据引理 3.7.2，存在 $K \subseteq M \times M \times \mathbb{R}_+^\nu \backslash 0$，使得对于所有满足 $\lambda + \mu \in [C_2,\ 2C_1]^\nu$ 的 $\lambda,\ \mu \in]0,\ C_1]^\nu$，均有 $\mathrm{supp}(\alpha_\lambda(f) * \alpha_\mu(g)) \subseteq K$。我们有

$$\alpha_\lambda(f) * \alpha_\mu(g)(z, x, t) = \int_M f(z, y, \lambda t)g(y, x, \mu t)$$

这可推广至 $\{(\lambda, \mu) \in [0, C_1]^{2\nu} :\ \lambda + \mu \in [C_2, 2C_1]^\nu\}$。在此情形下，结论成立。

ii. 若 $f \in C_c^\infty(M \times M \times \mathbb{R}_+^\nu \backslash 0,\ \Omega^{\frac{1}{2}})$ 且 $g = \mathcal{Q}_{V*}(\tilde{g} \circ \pi_{V\times\mathbb{G}^{(0)}})$ 对于某个 $\tilde{g} \in C_c^\infty(\widetilde{\text{定义域}}(\mathcal{Q}_V),\ \Omega^1(V))$，那么再次由引理 3.7.2，存在 $K \subseteq M \times M \times \mathbb{R}_+^\nu \backslash 0$ 使得支集$(\alpha_\lambda(f) * \alpha_\mu(g)) \subseteq$

K对于所有满足 $\lambda+\mu\in[C_2,\ 2C_1]^\nu$ 的 $(\lambda,\ \mu)\in]0,\ C_1]^{2\nu}$。我们有

$$\begin{aligned}\alpha_\lambda(f)*\alpha_\mu(g)(z,x,t)&=\int_V\alpha_\lambda(f)(z,e^{\alpha_t(v)}\cdot x,t)\alpha_\mu(\tilde{g})(v,x,t)h(v,x,t)\\&=\int_V f(z,e^{\alpha_{\mu t}(v)}\cdot x,\lambda t)\tilde{g}(v,x,\mu t)h(\alpha_\mu(v),x,t),\end{aligned}$$

其中 $h(v,x,t)$是由映射 $M\to M,\ x\mapsto e^{\alpha_t(v)}\cdot x$ 的微分所诱导的同构 $\Omega^{\frac{1}{2}}(T_{e^{\alpha_t(v)}\cdot x}M)\to\Omega^{\frac{1}{2}}(T_xM)$。这可扩展为 $\{(\lambda,\mu)\in[0,C_1]^{2\nu}\colon\ \lambda+\mu\in[C_2,2C_1]^\nu\}$。在这种情况下，结论得证。

iii. 若 $f=\mathcal{Q}_{V*}(\tilde{f}\circ\pi_{V\times\mathbb{G}^{(0)}})$ 对某个 $\tilde{f}\in C_c^\infty(\widetilde{\text{定义域}}(\mathcal{Q}_V),\Omega^1(V))$ 和 $g\in C_c^\infty(M\times M\times\mathbb{R}_+^\nu\backslash 0,\Omega^{\frac{1}{2}})$ 成立，则得伴随后，此情形可由前一种情形推出。

iv. 剩下的情形是 $f=\mathcal{Q}_{V*}(f\circ\pi_{V\times\mathbb{G}^{(0)}})$ 且 $g=\mathcal{Q}_{V*}(\tilde{g}\circ\pi_{V\times\mathbb{G}^{(0)}})$ 对某个$\tilde{f}$, $\tilde{g}\in C_c^\infty(\widetilde{\text{定义域}}(\mathcal{Q}_V),\Omega^1(V))$成立。令 ψ 和 $\tilde{\psi}$ 为引理 3.2.3 中的映射。我们定义映射

$$\tilde{\psi}^{\lambda,\mu}(v_1,v_2,x,t)=\tilde{\psi}(\alpha_\lambda(v_1),\alpha_\mu(v_2),x,t).$$

引理 3.7.3. </style}我们可以找到一个等变开邻域 定义域(ϕ)，使得对于任意 λ, $\mu\in[0,C_1]^\nu$，若 $\lambda+\mu\in[C_2,2C_1]^\nu$，则 $\tilde{\psi}^{\lambda,\mu}$在$L^{\lambda,\mu}=\{(v_1,v_2,x,t)\colon(\alpha_\lambda(v_1),\alpha_\mu(v_2),x,t)\in L\}$上是浸没。

证明。对于任意 $S\subseteq\mathbb{Z}_+^\nu$，令 $T_S\colon V\to V\times V$为线性映射；当 $k\in S$时，它将 $v\in V^k$映为 $(v,0)$，当 $k\notin S$时，则映为 $(0,v)$。集合 $\{T_S\colon S\subseteq\mathbb{Z}_+^\nu\}$是有限的，因为 $\{k\in\mathbb{Z}_+^\nu\colon V^k\neq 0\}$是有限的，而这由 V的有限维性可知。不失一般性，设$C_2\leqslant 1\leqslant C_1$。令 L为满足以下条件的点集：对于任意 $(\lambda,\mu)\in[0,C_1]^{2\nu}$，若 $\lambda+\mu\in[C_2,2C_1]^\nu$，则有 $(\alpha_\lambda(v_1),\alpha_\mu(v_2),x,t)\in\mathrm{Dom}(\psi)$，且线性映射$\mathrm{d}\psi_{(\alpha_\lambda(v_1),\alpha_\mu(v_2),x,t)}\circ(T_S,\mathrm{Id}_{\mathrm{T_xM}},\mathrm{Id}_{\mathbb{R}})\colon V\times T_xM\times\mathbb{R}\to V\times T_xM\times\mathbb{R}$对任意$S\subseteq\mathbb{Z}_+^\nu$都是满射。集合 $L\subseteq$包含于定义域(ψ)中，因为 $C_2\leqslant 1\leqslant C_1$，因此可以取 $\lambda=\mu=(1,\cdots,1)$。它由 ψ的等变性而具有等变性。由紧致性论证可知它是开集（此处我们使用了 $\{T_S\colon S\subseteq\mathbb{Z}_+^\nu\}$的有限性）。由引理 3.2.3.i以及$V=\oplus_{i\in[\![1,\nu]\!]}V^i$这一事实，我们推出 L 包含 $V\times V\times M\times\{0\}$。

□

设 U 如引理 3.5.2 中应用于 L时所述。由引理 3.5.1 以及我们先前处理过的情形，可设 f 和 $\tilde{g}$ 的支集包含于 U。由此可得

$$\begin{aligned}h^{\lambda,\mu}(v_1,v_2,x,t)&=\alpha_\lambda(\tilde{f})(v_1,e^{\alpha_t(v_2)}\cdot x,t)\alpha_\mu(\tilde{g})(v_2,x,t)\in C_c^\infty(L,\Omega^2(V))\quad\lambda,\mu\in]0,C_1]^\nu\\\kappa^{\lambda,\mu}(v_1,v_2,x,t)&=\tilde{f}(v_1,e^{\alpha_{\mu t}(v_2)}\cdot x,\lambda t)\tilde{g}(v_2,x,\mu t)\in C_c^\infty(L^{\lambda,\mu},\Omega^2(V))\qquad\lambda,\mu\in[0,C_1]^\nu\end{aligned}$$

并且满足 $\lambda+\mu\in[C_2,2C_1]^\nu$。这里，我们利用 (3.39) 证明 $\kappa^{\lambda,\mu}$ 的支集包含于 $L^{\lambda,\mu}$。由 (3.15)，$\alpha_\lambda(f)*\alpha_\mu(g)=\mathcal{Q}_{V*}(\tilde{\psi}_*(h^{\lambda,\mu})\circ\pi_{V\times\mathbb{G}^{(0)}})$。只需证明 $(\lambda,\mu)\mapsto\tilde{\psi}_*(h_{\lambda,\mu})$可延拓为光滑映射 $\{(\lambda,\mu)\in[0,C_1]^{2\nu}\colon\ \lambda+\mu\in[C_2,2C_1]^\nu\}\to C_c^\infty(\widetilde{\text{定义域}}(\mathcal{Q}_V^2),\Omega^2(V))$。我们有

$$\begin{aligned}\tilde{\psi}_*(h^{\lambda,\mu})(v,x,t)&=\int_{\tilde{\psi}(v_1,v_2,x,t)=(v,x,t)}\alpha_\lambda(\tilde{f})(v_1,e^{\alpha_t(v_2)}\cdot x,t)\alpha_\mu(\tilde{g})(v_2,x,t)\\&=\int_{\tilde{\psi}(\alpha_\lambda(v_1),\alpha_\mu(v_2),x,t)=(v,x,t)}\tilde{f}(v_1,e^{\alpha_{\mu t}(v_2)}\cdot x,\lambda t)\tilde{g}(v_2,x,\mu t)\\&=\tilde{\psi}_*^{\lambda,\mu}(\kappa^{\lambda,\mu})(v,x,t)\end{aligned}\tag{3.51}$$

由于 $\kappa^{\lambda,\mu}$ 是一致紧支撑的，结论随之成立。

定理 2.8.3 的证明至此完成。 □

定理 2.8.4 的证明。由引理 3.7.1，设 $(V,\natural)$ 为 ν-分次李基 $\mathcal{F}$，使得$V=\bigoplus_{i=1}^{\nu}V^{i}$。设 $\tilde{V}=\bigoplus_{i=1}^{\tilde{\nu}}V^{i}$ 与 $\tilde{\tilde{V}}=\bigoplus_{i=\tilde{\nu}+1}^{\nu}V^{i}$。偶对 $(\tilde{V},\natural_{|\tilde{V}})$ 与 $(\tilde{\tilde{V}},\natural_{|\tilde{\tilde{V}}})$ 分别是 $\tilde{\mathcal{F}}$ 与 $\tilde{\tilde{\mathcal{F}}}$ 的 $\tilde{\nu}$与$\tilde{\tilde{\nu}}$ 分次基。为证明定理 2.8.4，我们需要验证 (2.42) 可延拓为 $\mathbb{G}$ 上的光滑不变函数。由 (2.27)，需考虑 4 种情形：

i. 若 $f\in C_c^{\infty}(M\times M\times\mathbb{R}_+^{\tilde{\nu}}\backslash 0,\Omega^{\frac{1}{2}})$ 且 $g\in C_c^{\infty}(M\times M\times\mathbb{R}_+^{\tilde{\tilde{\nu}}}\backslash 0,\Omega^{\frac{1}{2}})$，则易见 $\Psi(f,g)$ 定义了 $C_c^{\infty}(M\times M\times\mathbb{R}_+^{\nu}\backslash 0)$ 中的一个元素

ii. 若 $f\in C_c^{\infty}(M\times M\times\mathbb{R}_+^{\tilde{\nu}}\backslash 0,\ \Omega^{\frac{1}{2}})$ 且 $g=\mathcal{Q}_{\tilde{\tilde{V}}*}(\tilde{g}\circ\pi_{\tilde{\tilde{V}}\times\tilde{\tilde{\mathbb{G}}}^{(0)}})$，其中 $\tilde{g}\in C_c^{\infty}(\widetilde{\text{定义域}}(\mathcal{Q}_{\tilde{\tilde{V}}}),\ \Omega^1\tilde{\tilde{V}})$，则有如下引理：

引理 3.7.4. 若 $K_1\subseteq M\times M\times\mathbb{R}_+^{\tilde{\nu}}\backslash 0$ 和 $K_2\subseteq\tilde{\tilde{\mathbb{G}}}$ 是紧子集，并且

$$K=\{(z,x,t,s)\in M\times M\times\mathbb{R}_+^{\nu}\backslash 0:\exists y\in M,(z,y,t)\in K_1,(y,x,s)\in K_2\}$$

那么 K 在 $\mathbb{G}$ 中的闭包是 $M\times M\times(\mathbb{R}_+^{\tilde{\nu}}\backslash 0)\times\mathbb{R}_+^{\tilde{\tilde{\nu}}}$的一个紧子集。

证明。设 $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}\subseteq\overline{K}$ 是一个序列。由于 $\mathbb{G}$ 是可度量化的，我们固定一个距离d。设 $(\tilde{\gamma}_n)_{n\in\mathbb{N}}\subseteq K$是一个满足 $d(\gamma_n,\ \tilde{\gamma}_n)<\frac{1}{n}$的序列。我们可以找到序列$(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$、$(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$、$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\subseteq M$、$(t_n)_{n\in\mathbb{N}}\subseteq\mathbb{R}_+^{\tilde{\nu}}\backslash 0$、$(s_n)_{n\in\mathbb{N}}\subseteq\mathbb{R}_+^{\tilde{\tilde{\nu}}}\backslash 0$，使得 $(z_n,\ y_n,\ t_n)\in K_1$、$(y_n,\ x_n,\ s_n)\in K_2$且 $\tilde{\gamma}_n=(z_n,\ x_n,\ t_n,\ s_n)$。取一个子列后，我们可以假设 $(z_n,\ y_n,\ t_n)$收敛到 $(z,\ y,\ t)\in M\times M\times\mathbb{R}_+^{\tilde{\nu}}\backslash 0$，且 $(y_n,\ x_n,\ s_n)$收敛到 $\eta\in K_2$。$(y_n,\ x_n,\ s_n)$的收敛意味着 $y_n\to y\in M$、$x_n\to x\in M$、$s_n\to s\in\mathbb{R}_+^{\tilde{\tilde{\nu}}}$。因此，$\tilde{\gamma}_n\to(z,\ x,\ t,\ s)\in M\times M\times(\mathbb{R}_+^{\tilde{\nu}}\backslash 0)\times\mathbb{R}_+^{\tilde{\tilde{\nu}}}$。于是，$\gamma_n$也收敛到 $(z,\ x,\ t,\ s)$。 □

由引理 3.7.4，只需验证 $\Psi(f,g)$ 可以延拓为定义在 $M\times M\times(\mathbb{R}_+^{\tilde{\nu}}\backslash 0)\times\mathbb{R}_+^{\tilde{\tilde{\nu}}}$ 上的光滑函数。我们有

$$\Psi(f,g)(z,x,t,s)=\int_V h(v,x,s)f(z,e^{\alpha_s(v)}\cdot x,t)\tilde{g}(v,x,s),$$

其中 $h(x,v,s):\Omega^{\frac{1}{2}}(T_{e_s^{\alpha}(v)\cdot x}M)\to\Omega^{\frac{1}{2}}(T_xM)$是由微分同胚 $e^{\alpha_s(v)}$ 在 x处的微分所诱导的典范同构。

iii. $f=\mathcal{Q}_{\tilde{V}*}(\tilde{f}\circ\pi_{\tilde{V}\times\tilde{\mathbb{G}}^{(0)}})$且 $g\in C_c^{\infty}(M\times M\times\mathbb{R}_+^{\tilde{\tilde{\nu}}}\backslash 0,\Omega^{\frac{1}{2}})$，其中 $\tilde{f}\in C_c^{\infty}(\widetilde{\text{定义域}}(\mathcal{Q}_{\tilde{V}}),\Omega^1\tilde{V})$ 的情形与第二种情形相似，留给读者完成。

iv. 还剩下 $f=\mathcal{Q}_{\tilde{V}*}(f\circ\pi_{\tilde{V}\times\tilde{\mathbb{G}}^{(0)}})$且 $g=\mathcal{Q}_{\tilde{\tilde{V}}*}(\tilde{g}\circ\pi_{\tilde{\tilde{V}}\times\tilde{\tilde{\mathbb{G}}}^{(0)}})$的情形，其中 $f\in C_c^{\infty}(\widetilde{\text{定义域}}(\mathcal{Q}_{\tilde{V}}),\Omega^1(\tilde{V}))$且 $\tilde{g}\in C_c^{\infty}(\widetilde{\text{定义域}}(\mathcal{Q}_{\tilde{\tilde{V}}}),\Omega^1(\tilde{\tilde{V}}))$。设 $\tilde{\psi}$如引理 3.2.3 中所述。考虑局部定义的映射

$$\kappa:V\times M\times\mathbb{R}_+^{\nu}\to V\times M\times\mathbb{R}_+^{\nu},\quad(\tilde{v}+\tilde{\tilde{v}},x,t,s)\mapsto\tilde{\psi}(\tilde{v},\tilde{\tilde{v}},x,t,s)$$

根据引理 3.2.3.i，$\kappa(\tilde{v}+\tilde{\tilde{v}},\ x,\ 0,\ 0)=(\tilde{v}+\tilde{\tilde{v}},\ x,\ 0,\ 0)$。因此，$\kappa$的微分在$t=s=0$处是双射的。因此，通过限制其定义域，我们可以假设 κ 是一个开嵌入，其像包含 $V\times M\times\{0\}\times\{0\}$的一个开邻域。定义

$$h\in C_c^{\infty}(V\times M\times\mathbb{R}_+^{\nu},\Omega^1(V)),\quad h\circ\kappa(\tilde{v}+\tilde{\tilde{v}},x,t,s)=\tilde{f}(\tilde{v},e^{\alpha_s(\tilde{\tilde{v}})}\cdot x,t)\tilde{g}(\tilde{\tilde{v}},x,s),$$

˜这里，我们使用引理 3.5.1 缩小 f 和 $\tilde{g}$ 的支集，使得 h 良定义且 $\operatorname{supp}(h) \subseteq \widetilde{\ }$定义域$(\mathcal{Q}_V)$。令 $(z,\ x,\ t,\ s) \in M \times M \times (\mathbb{R}^{\tilde{\nu}}_+ \backslash 0) \times (\mathbb{R}^{\tilde{\tilde{\nu}}}_+ \backslash 0)$。我们有

$$\begin{aligned}
\mathcal{Q}_{V*}(h \circ \pi_{V\times\mathbb{G}^{(0)}})(z,x,t,s) &= \int_{\{v\in V:\mathcal{Q}_V(v,x,t,s)=(z,x,t,s)\}} h(v,x,t,s) \\
&= \int_{\{\tilde{v}+\tilde{\tilde{v}}\in V:\mathcal{Q}_V(\kappa(\tilde{v}+\tilde{\tilde{v}},x,t,s))=(z,x,t,s)\}} \tilde{f}(\tilde{v}, e^{\alpha_s(\tilde{\tilde{v}})}\cdot x, t)\tilde{g}(\tilde{\tilde{v}},x,s) \\
&= \int_{\{\tilde{v}+\tilde{\tilde{v}}\in V:e^{\alpha_t(\tilde{v})}e^{\alpha_s(\tilde{\tilde{v}})}\cdot x=z\}} \tilde{f}(\tilde{v}, e^{\alpha_s(\tilde{\tilde{v}})}\cdot x, t)\tilde{g}(\tilde{\tilde{v}},x,s) \\
&= \Phi(f,g)(z,x,t,s),
\end{aligned}$$

其中在第三个等式中，我们用到了 (3.18)。

这就完成了证明，说明 Φ 是良定义的。容易验证，在 $M \times M \times (\mathbb{R}^{\tilde{\nu}}_+ \backslash 0) \times (\mathbb{R}^{\tilde{\tilde{\nu}}}_+ \backslash 0)$ 上，

$$\alpha_{(\lambda,\mu)}(\Phi(f,g)) = \Phi(\alpha_\lambda(f), \alpha_\mu(g)), \quad \Phi(\theta_k(\tilde{D}) * f, g * \theta_l(\tilde{\tilde{D}})) = \theta_{(k,0)}(\tilde{D}) * \Phi(f,g) * \theta_{(0,l)}(\tilde{\tilde{D}}).$$

由 $M\times M\times(\mathbb{R}^{\tilde{\nu}}_+\backslash 0)\times(\mathbb{R}^{\tilde{\tilde{\nu}}}_+\backslash 0)$ 在 $\mathbb{G}$ 中的稠密性以及 (2.33) 和定理 2.7.4.iii，可得 (2.43)。 □

定理 2.8.5 的证明。首先注意，若 $C_c^\infty(M\times M\times\mathbb{R}^\nu\backslash 0、\Omega^{\frac{1}{2}})$ 中的任意光滑函数都可以写成和 - $\sum_{i=1}^{\nu} t_i h_i$，其中某个 $h_i \in C_c^\infty(M\times M\times\mathbb{R}^\nu\backslash 0、\Omega^{\frac{1}{2}})$。现在，我们沿用定理 2.8.4 的证明方法。与之前一样，我们根据 f、g 的类型分为 4 种情形。在前三种情形中，$\Phi(f、\ g)$、$\Phi(g、\ f)\in C_c^\infty(M\times M\times\mathbb{R}^\nu\backslash 0、\Omega^{\frac{1}{2}})$。因此，其差可写成 (2.45) 的形式。在第四种情形中，$\Phi(f、\ g)$ 和 $\Phi(g、\ f)$ 可证明分别等于 $\mathsf{Q}_{V*}(h\circ\pi_{V\times\mathbb{G}^{(0)}})$ 和 $\mathsf{Q}_{V*}(h'\circ\pi_{V\times\mathbb{G}^{(0)}})$，其中 $h、\ h'\in C_c^\infty(V\times M\times\mathbb{R}^\nu_+$ 是某些光滑函数，且属于 $\Omega^1(V))$。函数$h、\ h'$ 在 $(t、\ s)=0$ 处相等。二者都满足

$$h(\tilde{v}+\tilde{\tilde{v}},x,0) = h'(\tilde{v}+\tilde{\tilde{v}},x,0) = \tilde{f}(\tilde{v},x,0)\tilde{g}(\tilde{\tilde{v}},x,0).$$

这里我们使用了如下事实：在李群 V 中，分量 $\tilde{v}$ 和 $\tilde{\tilde{v}}$ 交换（事实上，由于交换子为零，它们的乘积就是它们的和）。因此，根据泰勒级数展开——这是可能的，因为 $h,\ h'$ 定义在光滑流形上（而不是 $\mathbb{G}$）——该差可以写成（2.45）中的形式。

□

第4章

多重分次伪微分演算

约定与记号： 在本章中，我们始终固定一个定义在无边界光滑流形 M 上的 **弱交换** ν-分次次黎曼结构 $\mathcal{F}^\bullet$。为简便起见，本章中的结果将不添加任何向量丛，并在此基础上进行陈述和证明。需要指出的是，添加向量丛纯粹是形式上的，不会带来任何实质性的技术困难。

i. 我们记

$$\underline{1} = (1, \cdots, 1) \in \mathbb{Z}_+^\nu. \tag{4.1}$$

ii. 考虑积分时，我们采用约定 $\mathrm{d}\lambda := \mathrm{d}\lambda_1 \cdots \mathrm{d}\lambda_\nu$。结合 (4.1) 和 (2.1)，得到

$$\frac{\mathrm{d}\lambda}{\lambda^{k+\underline{1}}} = \frac{\mathrm{d}\lambda_1 \cdots \mathrm{d}\lambda_\nu}{\lambda_1^{k_1+1} \cdots \lambda_\nu^{k_\nu+1}}, \quad k \in \mathbb{C}^\nu.$$

iii. 若 $k \in \mathbb{C}^\nu$，则

$$\Re(k) := (\Re(k_1), \cdots, \Re(k_\nu)) \in \mathbb{R}^\nu, \quad \overline{k} := (\overline{k_1}, \ldots, \overline{k_\nu}) \in \mathbb{C}^\nu.$$

iv. 我们将满足以下条件的 $k \in \mathbb{C}^\nu$ 的集合记为 $\mathbb{C}^\nu_{<0}$（以及 $\mathbb{C}^\nu_{\leqslant 0}$）：对于所有 $i \in [\![1, \nu]\!]$，$R(k_i) < 0$（以及 $R(k_i) \leqslant 0$）。

v. 我们将定义 2.7.3 扩展到 $k \in \mathbb{C}^\nu$，定义如下：

$$C^\infty_{c,\mathrm{inv},k}(\mathbb{G}, \Omega^{\frac{1}{2}}) := C^\infty_{c,\mathrm{inv},(l_1,\cdots,l_\nu)}(\mathbb{G}, \Omega^{\frac{1}{2}})$$

其中，l_i 是满足 $R(k_i) < l_i + 1$ 的最小非负整数。例如，若 $k \in \mathbb{C}^\nu_{<0}$，则 $C^\infty_{c,\,\mathrm{inv},\,k+1}(\mathbb{G}, \Omega^{\frac{1}{2}}) = C^\infty_{c,\,\mathrm{inv}}(\mathbb{G}, \Omega^{\frac{1}{2}})$。

vi. 为避免混淆，我们约定符号 u，u'，u'' 表示 $\mathbb{G}$ 上的分布，v，v'，v'' 表示 $M \times M$ 上的分布，而 w，w'，w'' 表示 M 上的分布。在第5.7节中，我们约定符号 χ，χ'，χ'' 表示 M 上的经典伪微分算子。

4.1 多重分次伪微分算子

本节中，我们将在 M 上定义一种 ν 分次伪微分算子演算。我们的算子通过对 $\mathbb{G}$ 上的光滑不变函数进行迭代积分来定义。我们的公式灵感来自

Debord 和 Skandalis [DS14] 的工作。

命题4.1.1。 设 $k \in \mathbb{C}^\nu$, $f \in C_{c,\,\mathrm{inv},\,k+\underline{1}}^{\infty}(\mathbb{G}, \Omega^{\frac{1}{2}})$, $g \in C_c^{\infty}(\mathbb{G}, \Omega^{\frac{1}{2}})$。这些积分

$$\int_{]0,1]^\nu} g * \alpha_\lambda(f) \frac{\mathrm{d}\lambda}{\lambda^{k+\underline{1}}}, \qquad \int_{]0,1]^\nu} \alpha_\lambda(f) * g \frac{\mathrm{d}\lambda}{\lambda^{k+\underline{1}}}$$

在 $C_c^{\infty}(\mathbb{G}, \Omega^{\frac{1}{2}})$ 中收敛。此外，若 $g \in C_{c,\,\mathrm{inv}}^{\infty}(\mathbb{G}, \Omega^{\frac{1}{2}})$，则这些积分在 $C_{c,\,\mathrm{inv}}^{\infty}(\mathbb{G}, \Omega^{\frac{1}{2}})$ 的拓扑中收敛。

由命题4.1.1，我们可以定义

$$I_k(f) = \int_{]0,1]^\nu} \alpha_\lambda(f) \frac{\mathrm{d}\lambda}{\lambda^{k+\underline{1}}} \in C_{r,s,\mathrm{inv}}^{-\infty}(\mathbb{G}, \Omega^{\frac{1}{2}}).$$

设 $t \in \mathbb{R}_+^\nu \backslash 0$。由于 $M \times \{t\}$ 是 $\mathbb{G}^{(0)}$ 的饱和子集，根据 (1.33)，我们有一个限制映射

$$C_{r,s}^{-\infty}(\mathbb{G}, \Omega^{\frac{1}{2}}) \to C_{r,s}^{-\infty}(M \times M, \Omega^{\frac{1}{2}}), \quad u \mapsto u_{|t}. \tag{4.2}$$

回忆一下，对于任意元素 $v \in C_{r,\,s}^{-\infty}(M \times M, \Omega^{\frac{1}{2}})$，卷积

$$v * \cdot : C^{-\infty}(M, \Omega^{\frac{1}{2}}) \to C^{-\infty}(M, \Omega^{\frac{1}{2}})$$

是良定义的，并且满足 $v * C^{\infty}(M, \Omega^{\frac{1}{2}}) \subseteq C^{\infty}(M, \Omega^{\frac{1}{2}})$，参见例 1.6.3.iii。设

$$\Psi_c^k(M) := \{I_k(f)_{|\underline{1}} : f \in C_{c,\mathrm{inv},k+\underline{1}}^{\infty}(\mathbb{G}, \Omega^{\frac{1}{2}})\}, \quad \Psi_c^{<k}(M) := \sum_{l \in \mathbb{C}^\nu, l<k} \Psi_c^l(M). \tag{4.3}$$

的元素称为作用在 M 上的紧支撑 ν-分次伪微分算子。

注4.1.2。 请注意，我们的伪微分算子有一种特别简单的描述。在本注中，我们将平凡化密度。若 $k \in \mathbb{C}_{<0}^\nu$，则 $v \in C_c^{-\infty}(M \times M)$ 中的核属于 $\Psi_c^k(M)$，当且仅当对任意（或根据定理 2.6.2.i，对某个） ν-分次基 $(V, \natural)$，只要 V配备了欧氏度量，就存在 $f \in C_c^{\infty}$(定义域($\mathcal{Q}_V$)) $\subseteq C_c^{\infty}(V \times M \times \mathbb{R}_+^\nu)$，使得

$$v(y,x) - \int_{]0,1]^\nu} \int_{\{a \in V : e^a \cdot x = y\}} f(\alpha_{t^{-1}}(a), x, t) t^{-\dim_h(V)} \frac{\mathrm{d}t\,\mathrm{d}a}{t^{k+\underline{1}}} \in C_c^{\infty}(M \times M), \tag{4.4}$$

其中 $\dim_h(V) \in \mathbb{Z}_+^\nu$ 由 $\dim_h(V) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^\nu} \dim(V^k) k$ 定义。集合 $\{a \in V : e^a \cdot x = y\}$ 是 V 中 $a = 0$ 附近的一个子流形。集合 定义域($\mathcal{Q}_V$) 选得足够小，使得上面的积分只涉及满足 $\{a \in V : e^a \cdot x = y\}$ 为子流形的部分；该子流形继承了 V 的欧氏结构所诱导的黎曼结构。测度 $\mathrm{d}a$ 表示我们按照此黎曼结构进行积分。这个注释表明，定义我们的伪微分算子并不需要群胚 $\mathbb{G} \rightrightarrows \mathbb{G}^{(0)}$。我们需要群胚 $\mathbb{G} \rightrightarrows \mathbb{G}^{(0)}$ 来最终证明定理 4.5.3

定理 4.1.3。设 k, $l \in \mathbb{C}^\nu$。

i. 有 $C_c^{\infty}(M \times M, \Omega^{\frac{1}{2}}) \subseteq \Psi_c^k(M)$。

ii. 若 $v \in \Psi_c^k(M)$，则 v具有紧支集，且 波前集$(v) \subseteq \{(\xi, -\xi;\ x, x) :\ (\xi, x) \in T^*M \backslash 0\}$。特别地，奇异支撑$(v) \subseteq \{(x, x) :\ x \in M\}$，并且

$$\mathrm{WF}(v * w) \subseteq \mathrm{WF}(w) \quad \forall w \in C_c^{-\infty}(M, \Omega^{\frac{1}{2}}). \tag{4.5}$$

iii. 若 $k \preceq l$，则 $\Psi_c^k(M) \subseteq \Psi_c^l(M)$。

iv. 若 $k \in \mathbb{Z}_+^\nu$，则 $\mathrm{DO}_c^k(M) \subseteq \Psi_c^k(M)$。

v. 我们有

$$\Psi_c^k(M)^* = \Psi_c^{\overline{k}}(M), \quad \Psi_c^k(M) * \Psi_c^l(M) \subseteq \Psi_c^{k+l}(M).$$

vi. 若 $k \in \mathbb{C}_{<0}^\nu$，则 $\Psi_c^k(M) \subseteq L^1(M \times M,\ \omega)$，其中 $\omega \in C^\infty(M \times M, \Omega^{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}})$ 是满足 (1.27) 的任意截面，且 $L^1(M \times M,\ \omega)$ 是第*1.5*节中定义的 L^1-巴拿赫代数。

vii. 存在 $C \in \mathbb{R}$，使得若 $n \in \mathbb{N}$ 与 $k \in \mathbb{C}^\nu$ 满足 $\sum_{i=1}^\nu R(k_i) N_i^{\mathrm{sgn}(\Re(k_i))} \leqslant C - n$，则 $\Psi_c^k(M) \subseteq C_c^n(M \times M,\ \Omega^{\frac{1}{2}})$。

viii. 若 $g \in C_c^\infty(M) = \mathrm{DO}_c^0(M)$ 且 $v \in \Psi_c^k(M)$，则 $[\delta_g,\ v] \in \Psi_c^{<k}(M)$。

令 $\Psi^k(M)$ 为由适当支撑核 $v \in C_{r^{-\infty},\ s}^{-\infty}(M \times M,\ \Omega^{\frac{1}{2}})$ 构成的空间，使得对于任意 $f \in C_c^\infty(M)$, $\delta_f * v \in \Psi_c^k(M)$。由定理 4.1.3.iv 和定理 4.1.3.v，$\Psi_c^k(M) \subseteq \Psi^k(M)$。我们还定义 $\Psi^{<k}(M) := \sum_{l \in \mathbb{C}^\nu,\ l<k} \Psi^l(M)$。将定理 4.1.3 推广至 $\Psi^k(M)$是显然的。

定理 4.1.4（渐近和）。令 $k \in \mathbb{C}^\nu$，并且对每个 $\tau \in \mathbb{Z}_+^\nu$，令 $v_\tau \in \Psi^{k-\tau}(M)$。那么存在 $v \in \Psi^k(M)$，使得对于 $\mathbb{Z}_+^\nu$ 的任意有限子集 S 以及 $l_1, \cdots, l_n \in \mathbb{Z}_+^\nu$，若

$$\left\{\tau \in \mathbb{Z}_+^\nu : \tau \notin S \text{ and } v_\tau \neq 0\right\} \subseteq \bigcup_{i=1}^n \left\{\tau \in \mathbb{Z}_+^\nu : l_i \preceq \tau\right\},$$

于是 $v - \sum_{\tau \in S} v_\tau \in \Psi^{k-l_1}(M) + \cdots + \Psi^{k-l_n}(M)$。算子 v 在相差一个 $C^\infty(M \times M$ 中元素的意义下唯一，$\Omega^{\frac{1}{2}})$。

经典演算： 现在我们给出我们的演算中最简单的例子。

命题 4.1.5。若 $\nu = 1$ 且 $F^1 = X\ (M)$，则 $\Psi^k(M)$ 与经典阶为 k的适当支撑经典伪微分算子空间重合。

与限制到开集的相容性。设 $U \subseteq M$ 为一个开子集。由命题2.1.4，令$\mathcal{F}_{|U}^\bullet$ 为次黎曼结构$\mathcal{F}^\bullet$ 经包含映射 $U \hookrightarrow M$的拉回。在第2章中定义的、与$\mathcal{F}_{|U}^\bullet$ 相关联的切群胚，是$\mathbb{G} \rightrightarrows \mathbb{G}^{(0)}$ 在 $\mathbb{G}^{(0)}$ 的饱和开子集 $\pi_{\mathbb{G}^{(0)}}^{-1}(U \times \mathbb{R}_+^\nu)$ 上的限制，其中 $\pi_{\mathbb{G}^{(0)}}$ 是式 (2.12) 中的映射。次黎曼结构$\mathcal{F}^U$ 是弱交换的。因此，我们可以在 U 上定义与$\mathcal{F}_{|U}^\bullet$ 相关联的伪微分演算，记作$\Psi^\bullet(U)$。可以验证，若 $k \in \mathbb{C}^\nu$，则

$$\Psi_c^k(U) = \{v \in \Psi_c^k(M) : \mathrm{supp}(v) \subseteq U \times U\}. \tag{4.6}$$

4.2 切群胚的表示论

在本节及后续各节中，对于任意 $x \in M$，将 $\mathfrak{G}_x$ $\mathfrak{g}_x$ 视为李群时的记号很方便。这样记的原因是：若 $L \subseteq \mathfrak{g}_x$ 是一个李子代数，那么$\mathfrak{g}_x/L$ 表示向量空间商，而 $\mathfrak{G}_x/L$ 表示将$\mathfrak{G}_x$ 视为李子群时的 L 齐性空间商。从本节开始，我们将使用 C^*-代数的不可约酉表示和弱包含，以及幂零李群的基里洛夫轨道方法；更多详情参见 [Dix77、第3章和 4] 附录 A。

定理 4.2.1. 群胚 $\mathbb{G} \rightrightarrows \mathbb{G}^{(0)}$ 具有稳定弱包含性质（*SWCP*）。特别地，对于任意 $x \in M$，$C^*\mathbb{G} = C_r^*\mathbb{G}$ 和 $C^*\boldsymbol{G} = C_r^*\boldsymbol{G}$ 以及 $C^*\boldsymbol{G}_x = C_r^*\boldsymbol{G}_x$。

令 $C_{\mathrm{inv}}^*\mathbb{G}$ 为 $C_{c,\mathrm{inv}}^{\infty}(\mathbb{G}, \Omega^{\frac{1}{2}})$ 在 $C^*\mathbb{G}$ 中的闭包。本节的目标是描述 $C_{\mathrm{inv}}^*\mathbb{G}$ 的不可约表示空间（模酉等价）。

定义 4.2.2。 令 $(\xi, x) \in T^*M\backslash 0$。Helffer-Nourrigat 锥 $\mathrm{HN}_{(\xi,x)} \subseteq \mathfrak{g}_x^*$ 是所有 $\eta \in \mathfrak{g}_x^*$ 构成的集合，其中存在序列 $(\xi_n, x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq T^*M\backslash 0$、$(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}_+^\nu$，使得 $x_n \to x$、$t_n \to 0$，并且，

$$\langle \xi_n, t_n^k X(x_n)\rangle \to \langle \eta, [X]_{k,x}\rangle, \quad \forall k \in \mathbb{Z}_+^\nu, X \in \mathcal{F}^k, \tag{4.7}$$

且 $(\frac{\xi_n}{\|\xi_n\|}, x_n)$ 收敛到 $(\frac{\xi}{\|\xi\|}, x)$ 中的 T^*M，其中 $\|\cdot\|$ 是 M 上任意的黎曼度量。我们还将 x 处的 Helffer-Nourrigat 锥定义为

$$\mathrm{HN}_x = \bigcup_{\xi \in T_x^*M\backslash 0} \mathrm{HN}_{(\xi,x)} \subseteq \mathfrak{g}_x^*. \tag{4.8}$$

显然，对于任意 $\lambda \in \mathbb{R}_+^\times$，$\mathrm{HN}_{(\lambda\xi, x)} = \mathrm{HN}_{(\xi, x)}$。

注 4.2.3。 由余切球面丛的紧性可知，$\eta \in \mathrm{HN}_x$ 当且仅当存在序列 $(\xi_n, x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq T^*M$、$(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}_+^\nu$，使得 $x_n \to x$、$t_n \to 0$，并且

$$\langle \xi_n, t_n^k X(x_n)\rangle \to \langle \eta, [X]_{k,x}\rangle, \quad \forall k \in \mathbb{Z}_+^\nu, X \in \mathcal{F}^k, \tag{4.9}$$

注意，与 $\mathrm{HN}_{(\xi, x)}$ 的定义不同，在 HN_x 的定义中可以允许 $\xi_n = 0$。这是因为在 $\mathrm{HN}_{(\xi, x)}$ 的定义中我们要除以 $\|\xi_n\|$。

命题 4.2.4。 *i.* 集合 $\mathrm{HN}_{(\xi, x)}$ 和 HN_x 是 $\mathfrak{g}_x^*$ 的闭子集，并且在 $\mathfrak{G}_x$ 的余伴随作用和膨胀（分次或非分次）下保持不变，即

$$\begin{aligned}
&\eta \in \mathrm{HN}_{(\xi,x)} && \Longrightarrow\ -\eta \in \mathrm{HN}_{(-\xi,x)},\\
&\lambda \in \mathbb{R}_+, \eta \in \mathrm{HN}_{(\xi,x)} && \Longrightarrow\ \lambda\eta \in \mathrm{HN}_{(\xi,x)},\\
&\lambda \in \mathbb{R}, \eta \in \mathrm{HN}_x && \Longrightarrow\ \lambda\eta \in \mathrm{HN}_x\\
&\lambda \in \mathbb{R}_+^\nu, \eta \in \mathrm{HN}_{(\xi,x)} && \Longrightarrow\ \alpha_\lambda(\eta) \in \mathrm{HN}_{(\xi,x)}\\
&\lambda \in \mathbb{R}_+^\nu, \eta \in \mathrm{HN}_x && \Longrightarrow\ \alpha_\lambda(\eta) \in \mathrm{HN}_x,
\end{aligned} \tag{4.10}$$

其中，α_λ 按照 (2.6) 中的定义，使用 $\mathfrak{g}_x^*$ 上的分次定义。

ii. 我们有

$$\mathrm{HN}_x = \bigcup_{L \in \mathcal{G}_x^{(0)}} L^\perp, \tag{4.11}$$

其中 $\boldsymbol{G}_x^{(0)}$ 是 x 处的切锥集合。

$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$我们用 $\mathrm{HN}_{(\xi,x)}$ 和 HN_x 表示 $\mathfrak{G}_x$ 的、与 $\mathrm{HN}_{(\xi,x)}$ 和 HN_x 内部的余伴随轨道相关联的不可约酉表示集合，其对应由 (A.2) 给出。下面的命题给出了 HN_x 的一个$\widehat{\ }$极为方便的替代定义。

$\widehat{\ }$**命题 4.2.5.** 设 $x \in M$、π 为 $\mathfrak{G}_x$ 的一个不可约酉表示。则 $\pi \in \mathrm{HN}_x$ 当且仅当存在 $L \in \boldsymbol{G}_x^{(0)}$，使得 π 弱包含于 $\Xi_{\mathfrak{G}_x/L,0}$，，见 (A.1)。

$C_{\mathrm{inv}}^*\mathbb{G}$**的谱：** 设

$$\widehat{\mathrm{HN}} = \{(\pi, x) : x \in M, \pi \in \widehat{\mathrm{HN}}_x\}, \quad \widehat{\mathbb{G}}_{\mathrm{inv}} = \mathbb{R}_+^\nu\backslash 0 \sqcup \widehat{\mathrm{HN}} \times \{0\}.$$

我们将构造一个自然双射 $\mathbb{G}_{\mathrm{inv}} \to C^*_{\mathrm{inv}}\mathbb{G}$，其中 $C^*_{\mathrm{inv}}\mathbb{G}$ 是 $C^*_{\mathrm{inv}}\mathbb{G}$ 的不可约表示等价类空间。

- 令 $t \in \mathbb{R}^\nu_+\backslash 0$。根据例 1.7.2 和注 1.7.3，我们有一个表示 π_t of $C^\infty_{c,\mathrm{inv}}(\mathbb{G}, \Omega^{\frac{1}{2}})$，它作用于 $L^2(M)$，且由下式给出

$$\pi_t(f)g(x) := \int_M f(x,y,t)g(y), \quad f \in C^\infty_c(\mathbb{G}, \Omega^{\frac{1}{2}}), g \in L^2(M). \tag{4.12}$$

  表示 π_t 可延拓为 $C^*_{\mathrm{inv}}\mathbb{G}$ 的一个不可约表示，因为它经由$\mathcal{K}(L^2M)$分解。

- 令 $(\pi, x) \in \widehat{\mathrm{HN}}$。定义 $\pi_{\mathrm{inv}}: C^\infty_{c,\mathrm{inv}}(\mathbb{G}, \Omega^1_2) \to \mathcal{L}(L^2(\pi))$ 如下：若 $f \in C^\infty_{c,\mathrm{inv}}(\mathbb{G}, \Omega^{\frac{1}{2}})$，$(V, \natural)$ 是一个 ν-分次基，且 f 如式 (2.27) 所示，则

$$\pi_{\mathrm{inv}}(f) := \pi(\natural_{x,0*}(\tilde{f}(\cdot, x, 0))), \tag{4.13}$$

  其中 $\natural_{x,0*}(\tilde{f}) \in C^\infty_c(\mathfrak{G}_x, \Omega^1(\mathfrak{g}_x))$ 是沿着 $\natural_{x,0}: V \to \mathfrak{g}_x$ 的纤维对 $\tilde{f}$的积分。

  命题 4.2.6. 表示 π_{inv} 是良定义的，即 $\pi_{\mathrm{inv}}(f)$ 不依赖于对 $(V、\natural)$ 和 f的选择。此外，π_{inv} 可延拓为$C^*_{\mathrm{inv}}\mathbb{G}$的不可约表示。而且，

$$C^\infty(\pi) = \pi(C^\infty_c(\mathfrak{G}_x, \Omega^1(\mathfrak{g}_x)))L^2(\pi) = \pi_{\mathrm{inv}}(C^\infty_{c,\mathrm{inv}}(\mathbb{G}, \Omega^{\frac{1}{2}}))L^2(\pi), \tag{4.14}$$

$\widehat{\mathbb{G}}_{\mathrm{inv}}$上的拓扑：设

$$\mathfrak{g}^* := \{(\eta, x) : x \in M, \eta \in \mathfrak{g}^*_x\}$$

为所有密切李代数的对偶的不交并。我们赋予 $\mathfrak{g}^*$ 使下列映射成为拓扑嵌入的拓扑：

$$\mathfrak{g}^* \hookrightarrow V^* \times M, \quad (\eta, x) \mapsto (\eta \circ \natural_{x,0}, x),$$

其中 $(V, \natural)$ 是一个 ν-分次基。该拓扑不依赖于 ν-分次基的选择。为看出这一点，我们用另一组基写出一组基中的元素，见定理 2.2.5.i 的证明。$\widehat{\mathrm{HN}}$ 是 $\mathfrak{g}^*$的商。我们赋予它商拓扑。

定义 4.2.7. 我们如下定义拓扑 $\widehat{\mathbb{G}}_{\mathrm{inv}}$：子集 $A \sqcup B \times \{0\} \subseteq \mathbb{G}_{\mathrm{inv}}$，其中$A \subseteq \mathbb{R}^\nu_+\backslash 0$ 且 $B \subseteq \mathrm{HN}$，是闭的，当且仅当

i. 集合 A 在 $\mathbb{R}^\nu_+\backslash 0$中是闭的。

ii. 集合 B 在 HN 中是闭的。

iii. 若 $(L, x, 0) \in \overline{M} \times A$，其中 $\overline{M} \times A$ 是 $M \times A$ 在 $\mathbb{G}^{(0)}$中的闭包，则对任意π，$(\pi, x) \in B$，其中 π 是 $\mathfrak{G}_x$ 的不可约酉表示，且弱包含于 $\Xi_{\mathfrak{G}_x/L,0}$。

定理 4.2.8。 C^*-代数 $C^*_{\mathrm{inv}}\mathbb{G}$ 是可分的 I 型代数。此外，映射

$$\widehat{\mathbb{G}}_{\mathrm{inv}} \to \widehat{C^*_{\mathrm{inv}}\mathbb{G}}, \quad t \in \mathbb{R}^\nu_+\backslash 0 \mapsto [\pi_t], \quad (\pi, x, 0) \in \widehat{\mathrm{HN}} \times \{0\} \mapsto [\pi_{\mathrm{inv}}] \tag{4.15}$$

是一个同胚，其中 $C^*_{\mathrm{inv}}\mathbb{G}$ 是 $C^*_{\mathrm{inv}}\mathbb{G}$的谱，即赋予 *Fell* 拓扑的 $C^*_{\mathrm{inv}}\mathbb{G}$ 的不可约表示等价类空间。

非奇异表示： 经典伪微分算子的经典主符号在余切向量 0 处并非良定义，而该向量对应于切空间的平凡表示。在我们的设定中，我们将主符号˙有定义处的表示称为非奇异 *Helffer-Nourrigat* 锥。回顾(2.37)中的分解 $\mathfrak{g}_x = \oplus_{i=1}^{\nu}\mathfrak{g}_x^i$ 。我们定义

$$\begin{aligned}
\mathrm{HN}_{(\xi,x)}^{\mathrm{Nonsing}} &= \{\eta \in \mathrm{HN}_{(\xi,x)} : \eta_{|\mathfrak{g}_x^i} \neq 0 \ \forall i \in [\![1,\nu]\!]\}. \\
\mathrm{HN}_x^{\mathrm{Nonsing}} &= \{\eta \in \mathrm{HN}_x : \eta_{|\mathfrak{g}_x^i} \neq 0 \ \forall i \in [\![1,\nu]\!]\} = \bigcup_{\xi \in T_x^* M \backslash 0} \mathrm{HN}_{(\xi,x)}^{\mathrm{Nonsing}}.
\end{aligned}$$

集合 $\{\eta \in \mathfrak{g}_x^* : \ \eta_{|\mathfrak{g}_x^i} \neq 0 \ \forall i \in [\![1,\nu]\!]\}$ 在余伴随作用下是闭的。因此，$\mathrm{HN}_{(\xi\ x)}^{\mathrm{Nonsing}}$,和 $\mathrm{HN}_x^{\mathrm{Nonsing}}$ 也同样如此。因此，根据 (A.2)，我们可以将 $\mathrm{HN}_{(\xi\ x)}^{\mathrm{Nonsing}}$,和 $\mathrm{HN}_x^{\mathrm{Nonsing}}$分别对应的表示定义为 $\widehat{\mathrm{HN}}_{(\xi\ x)}^{\mathrm{Nonsing}}$,和 $\widehat{\mathrm{HN}}_x^{\mathrm{Nonsing}}$。我们有，

$$\widehat{\mathrm{HN}}_x^{\mathrm{Nonsing}} = \bigcup_{\xi \in T_x^* M \backslash 0} \widehat{\mathrm{HN}}_{(\xi,x)}^{\mathrm{Nonsing}}. \tag{4.16}$$

最后，令

$$\widehat{\mathrm{HN}}^{\mathrm{Nonsing}} = \{(\pi, x) : x \in M, \pi \in \widehat{\mathrm{HN}}_x^{\mathrm{Nonsing}}\}$$

$\widehat{\ }$赋予从 HN 继承的子空间拓扑。

4.3 主符号

令 $(\pi, x) \in \widehat{\mathrm{HN}}, u \in C_{r\ s\ ,\mathrm{inv}}^{-\infty}(\mathbb{G}, \Omega^{\frac{1}{2}})$。根据 (4.14)，我们可以定义 $\pi_{\mathrm{inv}}(u) : C^\infty(\pi) \to C^\infty(\pi)$，其定义方式为 $\pi(u)\pi(f)\xi = \pi(u * f)\xi$，对所有 $f_- \in C_{c\ ,\mathrm{inv}}^{\infty}(\mathbb{G}, \Omega^{\frac{1}{2}})$和 $\xi \in L^2(\pi)$ 均成立。由于 π非退化，这一定义是良定义的。由对偶性， $\pi_{\mathrm{inv}}(u)$ 可扩张为连续线性映射 $C^{-\infty}(\pi) \to C^{-\infty}(\pi)$。

定义 4.3.1. 设 $k \in \mathbb{C}^\nu, v \in \Psi_c^k(M)$。 v在 $(\pi, x) \in \widehat{\mathrm{HN}}^{\mathrm{Nonsing}}$处的主符号定义为

$$\sigma^k(v, \pi, x)\xi := \lim_{\lambda_1 \to +\infty, \cdots, \lambda_\nu \to +\infty} \pi_{\mathrm{inv}}\left(\lambda^{-k}\alpha_\lambda(I_k(f))\right)\xi, \tag{4.17}$$

其中 $f \in C_{c\ ,\mathrm{inv},k+1}^{\infty}(\mathbb{G}, \Omega^{\frac{1}{2}})$是任意满足 $I_k(f)_{|1} = v$ 的光滑不变函数。更一般地，若 $v \in \Psi^k(M)$, 则符号定义为 $\sigma^k(\bar{v}, \pi, x) := \sigma^k(\delta_g * v, \pi, x)$ 其中 $g \in C_c^\infty(M)$ 是任意满足 $g(\bar{x}) = 1$ 的紧支撑光滑函数。

定理 4.3.2. *i.* 若 $\xi \in C^{-\infty}(\pi)$, 则 (4.17) 在 $C^{-\infty}(\pi)$ 的拓扑中收敛。此外，线性映射 $\sigma^k(v, \pi, x) : C^{-\infty}(\pi) \to C^{-\infty}(\pi)$ 是连续的。

ii. 线性映射 $\sigma^k(v, \pi, x) : C^{-\infty}(\pi) \to C^{-\infty}(\pi)$ 不依赖于 $g \in C_c^\infty(M)$和$f \in C_{c\ ,\mathrm{inv},k+1}^{\infty}(\mathbb{G}、\Omega^{\frac{1}{2}})$的选择。

iii. 若 $\xi \in C^\infty(\pi)$, 则(4.17) 在 $C^\infty(\pi)$ 的拓扑中收敛，且诱导线性映射$\sigma^k(v, \pi, x) : C^\infty(\pi) \to C^\infty(\pi)$ 是连续的。

iv. 对所有 $k, k' \in \mathbb{C}^\nu, v \in \Psi^k(M), v' \in \Psi^{k'}(M)$, 我们有

$$\begin{aligned}
&\sigma^{k+k'}(vv', \pi, x) = \sigma^k(v, \pi, x)\sigma^{k'}(v', \pi, x) : C^{-\infty}(\pi) \to C^{-\infty}(\pi) \\
&\langle \sigma^k(v, \pi, x)\xi, \eta\rangle_{L^2(\pi)} = \langle \xi, \sigma^{\overline{k}}(v^*, \pi, x)\eta\rangle_{L^2(\pi)}, \quad \forall \xi \in C^\infty(\pi), \eta \in C^{-\infty}(\pi)
\end{aligned}$$

v. 若 $v \in \Psi^{<k}(M)$, 则 $\sigma^k(v, \pi, x) : \ C^{-\infty}(\pi) \to C^{-\infty}(\pi)$ 消失。

vi. 对任意 $\lambda \in (\mathbb{R}_+^\times)^\nu$, $\sigma^k(v, \pi \circ \alpha_\lambda, x) = \lambda^k \sigma^k(v, \pi, x)$。

vii. 若 $f \in C^\infty(M) = \mathrm{DO}^0(M)$，则 $\sigma^0(\delta_f, \pi, x) = f(x)\mathrm{Id}^{C^{-\infty}(\pi)}$

viii. 若 $X \in \boldsymbol{F}^k$，则 $\sigma^k(X, \pi, x) = \pi([X]_{k,\ x})$，其中 $[X]_{k,\ x} \in \mathfrak{g}_x$ 在前一段(2.9)中定义，被视为 $C_r^{-\infty}{}_{,\ s}(\mathfrak{G}_x、\Omega^{\frac{1}{2}})$的一个元素，见例 *1.6.3.i*。

定理 4.3.2.iv、定理 4.3.2.v、定理 4.3.2.vii 和定理 4.3.2.viii 给出了一种具体方法，通过将微分算子写成单项式之和来计算其主符号。

4.4 索伯列夫空间

定义 4.4.1（M上的索伯列夫空间）。设 $k \in \mathbb{R}^\nu$。我们用 $H^k_{\mathrm{loc}}(M)$表示满足以下条件的 $w \in C^{-\infty}(M,\ \Omega^{\frac{1}{2}})$空间：对所有 $v \in \Psi^k_c(M)$，$v * w \in L^2(M)$。我们在 $H^k_{\mathrm{loc}}(M)$上赋予使这些映射连续的最弱拓扑

$$H^k_{\mathrm{loc}}(M) \to L^2(M), \quad w \mapsto v * w$$

cont对每个 $v \in \Psi^k_c(M)$都连续。若 M是紧的，则我们将改用记号 $H^k(M)$。

定理 4.4.2. *i.* $H^0_{\mathrm{loc}}(M) = L^2_{\mathrm{loc}}(M)$, $C^{-\infty}(M, \Omega^{\frac{1}{2}}) = \bigcup_{k\in\mathbb{R}^\nu} H^k_{\mathrm{loc}}(M)$，且 $C^\infty(M, \Omega^{\frac{1}{2}}) = \bigcap_{k\in\mathbb{R}^\nu} H^k_{\mathrm{loc}}(M)$。

ii. 对任意 $k \in \mathbb{R}^\nu$，$H^k_{\mathrm{loc}}(M)$ 是弗雷歇空间。若 M 是紧的，则它是希尔伯特空间。

iii. 若对所有 $i \in [\![1、\ \nu]\!]$ 均有 $k_i \leqslant l_i$，则 $H^l_{\mathrm{loc}}(M) \subseteq H^k_{\mathrm{loc}}(M)$，且包含映射是连续的。

iv. 若对所有 $i \in [\![1、\ \nu]\!]$ 均有 $k_i \leqslant l_i$，且至少有一个不等式是严格的，并且 M 是紧的，则包含映射 $H^l(M) \subseteq H^k(M)$ 是紧的。

v. 存在 $C \in \mathbb{R}$，使得对于任意 $n \in \mathbb{N}$、$k \in \mathbb{R}^\nu$，若 $\sum_{i=1}^\nu k_i N^{-\mathrm{sgn}_i{}^{(k_i)}} \geqslant C + n$，则 $H^k_{\mathrm{loc}}(M) \subseteq C^n(M)$，且该包含映射是连续的。

vi. 设 $k \in \mathbb{C}^\nu$、$v \in \Psi^k(M)$。对于任意 $l \in \mathbb{R}^\nu$，若 $w \in H^{\Re(k)+l}{}_{\mathrm{loc}}(M)$，则 $v * w \in H^l_{\mathrm{loc}}(M)$。此外，映射 $v * \cdot : H^{\Re(k)+l}{}_{\mathrm{loc}}(M) \to H^l_{\mathrm{loc}}(M)$ 是连续的。

定义 4.4.3（表示上的 Sobolev 空间）。设 $(\pi, x) \in \widehat{\ }\mathrm{HN}^{\mathrm{Nonsing}}$, $k \in \mathbb{R}^\nu$。我们将满足以下条件的所有 $\xi \in C^{-\infty}(\pi)$组成的空间记为 $H^k(\pi)$：$\sigma^k(v, \pi, x)\xi \in L^2(\pi)$对所有 $v \in \Psi^k_c(M)$均成立。我们赋予 $H^k(\pi)$ 使得映射连续的最弱拓扑

$$H^k(\pi) \to L^2(\pi), \quad \xi \mapsto \sigma^k(v, \pi, x)\xi$$

对每个 $v \in \Psi^k_c(M)$都连续。

定理 4.4.4。*i.* $H^0(\pi) = L^2(\pi)$, $C^{-\infty}(\pi) = \bigcup_{k\in\mathbb{R}^\nu} H^k(\pi)$, $C^\infty(\pi) = \bigcap_{k\in\mathbb{R}^\nu} H^k(\pi)$。

ii. 空间 $H^k(\pi)$ 是 *Hilbert* 空间。

iii. 如果对所有 $i \in [\![1,\ \nu]\!]$都有 $k_i \leqslant l_i$，那么 $H^l(\pi) \subseteq H^k(\pi)$，且包含映射连续。

iv. 如果对所有 $i \in [\![1,\ \nu]\!]$都有 $k_i < l_i$，那么包含映射 $H^l(\pi) \subseteq H^k(\pi)$ 是紧的。

v. 设 $k \in \mathbb{C}^\nu$, $v \in \Psi^k(M)$。对于任意 $l \in \mathbb{R}^\nu$, $\xi \in H^{\Re(k)+l}(\pi)$，有 $\sigma^k(v, \pi, x)\xi \in H^l(\pi)$。此外，映射 $\sigma^k(v, \pi, x)$：$H^{\Re(k)+l}(\pi) \to H^l(\pi)$ 是连续的。

主符号的消失： 对于经典伪微分演算，符号的消失意味着算子的阶降低 1。在我们的演算中，有如下结果：

定理 4.4.5. 若 M 是紧的， $k\in\mathbb{C}^{\nu}$， $v\in\Psi^{k}(M)$，则下列各项等价：

i. The principal symbol $\sigma^{k}(v,\pi,x):C^{\infty}(\pi)\to C^{\infty}(\pi)$ *vanishes for all* $(\pi,x)\in\widehat{\mathrm{HN}}^{\mathrm{Nonsing}}$.

ii. 对任意（或对某个） $l\in\mathbb{R}^{\nu}$，映射 $v*\cdot:\ H^{\Re(k)+l}(M)\to H^{l}(M)$ 是紧的。

符号的紧性与弗雷德霍姆性： 下述定理在经典伪微分演算中没有对应结果。这是因为 $H^{k}(\pi)=\mathbb{C}$ 在经典伪微分演算中，因此作为映射的符号总是 Fredholm 且紧的。此外，$\{(t\xi,\ x):\ t\in\mathbb{R}_{+}^{\times}\}$对任意 $(\xi,\ x)\in T^{*}M$ 都是 $T^{*}M\backslash\{0\}$的闭子集，因此下文定义的集合 S在经典情形中总是空的。

定理 4.4.6. 设 $k\in\mathbb{C}^{\nu}$， $v\in\Psi^{k}(M)$，且 $(\pi,\ x)\in\widehat{\ }\mathrm{HN}^{\mathrm{Nonsing}}$，

$$S=\overline{\{(\pi\circ\alpha_{\lambda},x):\lambda\in(\mathbb{R}_{+}^{\times})^{\nu}\}}\backslash\{(\pi\circ\alpha_{\lambda},x):\lambda\in(\mathbb{R}_{+}^{\times})^{\nu}\},$$

其中闭包是在 $\widehat{\ }\mathrm{HN}^{\mathrm{Nonsing}}$ 中取的。以下结论成立：

i. 对每个 $(\pi',x)\in S$, $C^{\infty}(\pi')\xrightarrow{\sigma^{k}(v,\ \pi'\ x)}C^{\infty}(\pi')$,，对任意（或某个） $l\in\mathbb{R}^{\nu}$， $\Longleftrightarrow$ 均消失时，映射 $H^{\Re(k)+l}(\pi)\xrightarrow{\sigma^{k}(v,\ \pi\ x)}H^{l}(\pi)$，是紧的。

ii. 以下条件等价：

(a) For every $(\pi',x)\in S$, $C^{\infty}(\pi')\xrightarrow{\sigma^{k}(v,\pi',x)}C^{\infty}(\pi')$ *and* $C^{\infty}(\pi')\xrightarrow{\sigma^{\check{k}}(v*,\pi',x)}C^{\infty}(\pi')$ *are injective*

(b) 对每个 $(\pi',x)\in S$，映射

$$\begin{aligned}&\sigma^{k}(v,\pi',x):C^{-\infty}(\pi')\longrightarrow C^{-\infty}(\pi')\\&\sigma^{k}(v,\pi',x):H^{l}(\pi')\longrightarrow H^{l-\Re(k)}(\pi')\quad\forall l\in\mathbb{R}^{\nu}\\&\sigma^{k}(v,\pi',x):C^{\infty}(\pi')\longrightarrow C^{\infty}(\pi')\end{aligned}$$

是拓扑同构。

(c) 对任意（或某个） $l\in\ \mathbb{R}^{\nu}$，映射 $H^{\Re(k)+l}(\pi)\xrightarrow{\sigma^{k}(v,\ \pi\ x)}H^{l}(\pi)$，是 *Fredholm*。

若上述条件成立，则 $H^{\Re(k)+l}(\pi)\xrightarrow{\sigma^{k}(v,\ \pi\ x)}H^{l}(\pi)$，的核仅由光滑向量构成（因此它不依赖于 l）。

4.5 极大亚椭圆性与主定理

若 $k\in\mathbb{C}$，则我们用 $\Psi^{k}_{\mathrm{classical}}(M)$($\Psi^{k}_{c,\ \mathrm{classical}}(M)$) 表示 $C_{r}^{-\infty},_{s}(M\times M,\ \Omega^{\frac{1}{2}})$中阶为 k 的适当支撑（紧支撑）经典伪微分算子的子空间。

定义 4.5.1。 设 $l\in\mathbb{R}^{\nu}$ 和 $w\in C^{-\infty}(M,\ \Omega^{\frac{1}{2}})$。我们用以下公式定义波前集$_{l}(w)\subseteq T^{*}M\backslash 0$

$$(\xi,x)\notin\mathrm{WF}_{l}(w)\Leftrightarrow\exists w'\in H^{l}_{\mathrm{loc}}(M),\ \text{such that}\ (\xi,x)\notin\mathrm{WF}(w-w').$$

显然，$\mathrm{WF}_{l}(w)$ 是一个闭锥。现在我们给出它的主要性质。

定理 4.5.2。 *i.* 如果对于所有 $i \in [\![1,\ \nu]\!]$ 都有 $l_i \leqslant k_i$，那么 波前集$_l(w) \subseteq$ 波前集$_k(w)$。

ii. 波前集$_l(w) = \varnothing$ 当且仅当 $w \in H^l_{\mathrm{loc}}(M)$。

iii. 波前集$(w) = \bigcup_{l\in\mathbb{R}^\nu}$ 波前集$_l(w)$，且 波前集$_l(w+w') \subseteq$ 波前集$_l(w) \cup$ 波前集$_l(w')$。

iv. 若 $k \in \mathbb{C}^\nu$ 且 $v \in \Psi^k(M)$，则 波前集$_l(v*w) \subseteq$ 波前集$_{\Re(k)+l}(w)$。

v. 有 $(\xi,x) \notin$ 波前集$_l(w)$ 当且仅当存在 $\chi \in \Psi^0_{\mathrm{classical}}(M)$，使得 χ 在 (ξ,x) 处是椭圆的，并且 $\chi * w \in H^l_{\mathrm{loc}}(M)$。

vi. 存在 $\chi \in \Psi^0_{\mathrm{classical}}(M)$，使得 χ 在波前集$_l(w)$ 的补集上以及$\chi * w \in H^l_{\mathrm{loc}}(M)$上是椭圆的。

定理 4.5.3（主定理）。令 $k \in \mathbb{C}^\nu$，$v \in \Psi^k(M)$,

$$\Gamma = \left\{(\xi,x) \in T^*M\backslash 0 : \forall (\pi,x) \in \widehat{\mathrm{HN}}^{\mathrm{Nonsing}}_{(\xi,x)},\ \sigma^k(v,\pi,x) : C^\infty(\pi) \to C^\infty(\pi)\ \textit{is injective}\right\}$$

以下成立：

i. 若 $(\xi,x) \in \Gamma$, $\pi \in \widehat{\mathrm{HN}}^{\mathrm{Nonsing}}_{(\xi\ x)}$，，则算子

$$\begin{aligned}
&\sigma^k(v,\pi,x) : C^{-\infty}(\pi) \to C^{-\infty}(\pi)\\
&\sigma^k(v,\pi,x) : H^{l+k}(\pi) \to H^l(\pi) \qquad \textit{for all } l \in \mathbb{R}^\nu\\
&\sigma^k(v,\pi,x) : C^\infty(\pi) \to C^\infty(\pi)
\end{aligned}$$

是左可逆的。

ii. 锥 Γ 是开的，且 $\Gamma \subseteq \{(\xi,x) \in T^*M\backslash 0 :\ (-\xi,\xi;\ x,x) \in$ 波前集$(v)\}$。

iii. 对任意闭锥 $\Gamma' \subseteq \Gamma$。存在 $v' \in C^{-\infty}_{r,\ s}(M \times M,\ \Omega^{\frac12})$，使得对任意 $l \in \mathbb{R}^\nu$ 与 $w \in C^{-\infty}(M,\ \Omega^{\frac12})$，

波前集$_l(v'*w) \subseteq$ 波前集$_{l-\Re(k)}(w)$，波前集$_l(v'^**w) \subseteq$ 波前集$_{l-\Re(k)}(w)$，波前集$(v'*v*w-w) \cap \Gamma' = \varnothing$.特别地，由定理 *4.5.2.iii*，波前集$(v'*w) \subseteq$ 波前集(w) 且波前集$(v'^**w) \subseteq$ 波前集(w)，从而 v 在对角线之外是光滑的。 (4.18)

iv. 对任意 $l \in \mathbb{R}^\nu$ 和 $w \in C^{-\infty}(M,\ \Omega^{\frac12})$,

$$\mathrm{WF}_{l+\Re(k)}(w) \cap \Gamma = \mathrm{WF}_l(v*w) \cap \Gamma. \tag{4.19}$$

此外，如果 Γ' 是满足 (4.19) 的任意一个锥（将 Γ 替换为 Γ'），且该条件对某个 $l \in \mathbb{R}^\nu$ 成立，那么 $\Gamma' \subseteq \Gamma$。

v. 对任意 $v'' \in \Psi^k_c(M)$，存在 $\chi \in \Psi^0_{\mathrm{classical}}(M)$、$\chi' \in C^\infty_c(M \times M、\Omega^{\frac12})$ 和 $C > 0$，使得 χ 在 Γ 上是椭圆的，并且

$$\left\|\chi * v'' * w\right\|_{L^2(M)} \leqslant C(\|v*w\|_{L^2(M)} + \left\|\chi' * w\right\|_{L^2(M)}),\quad \forall w \in C^\infty(M,\Omega^{\frac12}). \tag{4.20}$$

如果 $\Gamma = T^*M\backslash 0$，那么可以假设 χ 是恒等算子。

vi. 若 M是紧的且 $\Gamma = T^*M\backslash 0$，那么对于任意 $l \in \mathbb{R}^\nu$，$v*\cdot : H^{l+\Re(k)}(M) \to H^l(M)$模紧算子左可逆。

如果 v 在锥 Γ' 上是 k 阶微局部最大拟椭圆的，则称之为如此。如果$\Gamma = T^*M\backslash 0$，则称 v是 k 阶最大拟椭圆的。

注记 4.5.4. i. 不等式 (4.20) 称为微局部最大拟椭圆性不等式。

ii. 关于拟逆 v' 是否属于 $\Psi^{-k}(M)$ 的问题，我们留待一篇即将发表的文章中讨论。

我们还有定理 4.5.3 的双侧版本

定理 4.5.5. 设 $k \in \mathbb{C}^\nu$， $v \in \Psi^k(M)$,

$$\Gamma = \{(\xi, x) \in T^*M\backslash 0 : \forall (\pi, x) \in \widehat{\mathrm{HN}}^{\mathrm{Nonsing}}_{(\xi,x)},\ \sigma^k(v,\pi,x) : C^\infty(\pi) \to C^\infty(\pi)\ \textit{and} \\ \sigma^{\bar{k}}(v^*,\pi,x) : C^\infty(\pi) \to C^\infty(\pi)\ \textit{are injective}\}$$

以下结论成立：

i. 若 $(\xi, x) \in \Gamma$, $\pi \in \widehat{\ }\mathrm{HN}^{\mathrm{Nonsing}}_{(\xi\ x)}$ ，，则这些算子

$$\begin{aligned} &\sigma^k(v,\pi,x) : C^{-\infty}(\pi) \to C^{-\infty}(\pi) \\ &\sigma^k(v,\pi,x) : H^{l+k}(\pi) \to H^l(\pi) \qquad \textit{for all } l \in \mathbb{R}^\nu \\ &\sigma^k(v,\pi,x) : C^\infty(\pi) \to C^\infty(\pi) \end{aligned}$$

是拓扑同构。

ii. 锥 Γ是开集，且 $\Gamma \subseteq \{(\xi, x) \in T^*M\backslash 0 :\ \ (-\xi, \xi;\ \ x, x) \in$波前集$(v) \cap$波前集$(v^*)\}$。

iii. 对任意闭锥 $\Gamma' \subseteq \Gamma$，存在 $v' \in C_r^{-\infty,\ s}\ (M \times M,\ \Omega^{\frac{1}{2}})$，使得对任意 $l \in \mathbb{R}^\nu$和$w \in C^{-\infty}(M,\ \Omega^{\frac{1}{2}})$,

$$\begin{aligned} \mathrm{WF}_l(v' * w) \subseteq \mathrm{WF}_{l-\Re(k)}(w), \quad \mathrm{WF}_l(v'^* * w) \subseteq \mathrm{WF}_{l-\Re(k)}(w), \\ \mathrm{WF}(v' * v * w - w) \cap \Gamma' = \mathrm{WF}(v * v' * w - w) \cap \Gamma' = \varnothing. \end{aligned} \tag{4.21}$$

iv. 对任意 $l \in \mathbb{R}^\nu$和 $w \in C^{-\infty}(M,\ \Omega^{\frac{1}{2}})$,

$$\mathrm{WF}_{l+\Re(k)}(w) \cap \Gamma = \mathrm{WF}_l(v * w) \cap \Gamma = \mathrm{WF}_l(v^* * w) \cap \Gamma. \tag{4.22}$$

此外，如果 Γ' 是任意满足(4.19) 的锥（其中以 Γ'替换 Γ），且该条件对某个 $l \in \mathbb{R}^\nu$成立，那么 $\Gamma' \subseteq \Gamma$。

v. 如果 M是紧的且 $\Gamma = T^*M\backslash 0$，那么对于任意$l \in \mathbb{R}^\nu$， $v * \cdot :\ \ H^{l+\Re(k)}(M) \to H^l(M)$是 *Fredholm*。

如果 $\Gamma' \subseteq \Gamma$，我们称 v 在锥 Γ' 上是 k 阶微局部最大拟椭圆的。如果$\Gamma = T^*M\backslash 0$，则称 v 是 k阶最大拟椭圆的。如果 v 满足上述条件，则称 v 是 k阶双重最大拟椭圆的。

4.6 参数扩张

设 $\tilde{\nu},\ \tilde{\tilde{\nu}} \in [\![1,\ \nu]\!]$ 使得 $\nu = \tilde{\nu} + \tilde{\tilde{\nu}}$。设 $\tilde{\ }\mathcal{F}^\bullet$ 和 $\tilde{\tilde{\ }}\mathcal{F}^\bullet$ 如 (2.40) 和 (2.41) 中所述。由于 $\tilde{\ }\mathcal{F}$和 $\tilde{\tilde{\ }}\mathcal{F}$ 是弱交换的，我们可以为$\mathcal{F}$和 $\mathcal{F}$定义此前定义过的所有对象。相应的对象记为 $\tilde{\Psi}^\bullet(M), \tilde{\mathfrak{g}}_x, \tilde{\mathfrak{S}}_x$ $\tilde{\ }\mathrm{HN}$, $\tilde{H}^\bullet, \tilde{\sigma}$ 以及 $\tilde{\tilde{\Psi}}^\bullet(M), \tilde{\tilde{\mathfrak{g}}}_x, \tilde{\tilde{\mathfrak{S}}}_x$ $\tilde{\tilde{\ }}\mathrm{HN}$, $\tilde{\tilde{H}}^\bullet, \tilde{\tilde{\sigma}}$。

定理 4.6.1。*i.* 若 $k\in\mathbb{C}^{\nu}$，$l\in\mathbb{C}^{\nu}$，则

$$\tilde{\Psi}^{k}(M)*\tilde{\tilde{\Psi}}^{l}(M)\subseteq\Psi^{(k,l)}(M),\quad\forall k\in\mathbb{C}^{\tilde{\nu}},l\in\mathbb{C}^{\tilde{\tilde{\nu}}}.$$

特别地，$\tilde{\Psi}^{k}(M)\subseteq\Psi^{(k,\,0,\,\cdots,\,0)}(M)$，以及 $\tilde{\tilde{\Psi}}^{l}(M)\subseteq\Psi^{(0,\,\cdots,\,0,\,l)}(M)$。此外，

$$[\tilde{\Psi}^{k}(M),\tilde{\tilde{\Psi}}^{l}(M)]\subseteq\Psi^{\prec(k,l)}(M)\tag{4.23}$$

ii. 若 $k\in\mathbb{R}^{\nu}$，$l\in\mathbb{R}^{\nu}$，则

$$\tilde{H}^{k}_{\mathrm{loc}}(M)=H^{(k,0,\cdots,0)}_{\mathrm{loc}}(M),\quad\tilde{\tilde{H}}^{l}_{\mathrm{loc}}(M)=H^{(0,\cdots,0,l)}_{\mathrm{loc}}(M).$$

iii. 对任意 $x\in M$，$\tilde{\mathfrak{g}}_{x}=\oplus_{i\in[\![1,\,\tilde{\nu}]\!]}\mathfrak{g}^{i}_{x}$ 和 $\tilde{\tilde{\mathfrak{g}}}_{x}=\oplus_{i\in[\![\tilde{\nu}+1,\,\nu]\!]}\mathfrak{g}^{i}_{x}$，参见 (2.37)。特别地，

$$\mathfrak{g}_{x}=\tilde{\mathfrak{g}}_{x}\oplus\tilde{\tilde{\mathfrak{g}}}_{x},\ and\ \mathfrak{G}_{x}=\tilde{\mathfrak{G}}_{x}\times\tilde{\tilde{\mathfrak{G}}}_{x}.\tag{4.24}$$

iv. 对任意 $x\in M$，

$$\mathrm{HN}_{x}\subseteq\{\xi+\eta:\xi\in\tilde{\mathrm{HN}}_{x},\eta\in\tilde{\tilde{\mathrm{HN}}}_{x}\},$$

这里使用了分解 $\mathfrak{g}^{*}_{x}=\tilde{\mathfrak{g}}^{*}_{x}\oplus\tilde{\tilde{\mathfrak{g}}}^{*}_{x}$。

设 $\xi\in\tilde{\mathrm{HN}}^{\mathrm{Nonsing}}_{x}$，$\eta\in\tilde{\tilde{\mathrm{HN}}}^{\mathrm{Nonsing}}_{x}$，使得 $\xi+\eta\in\mathrm{HN}_{x}$。因此，自动有 $\xi+\eta\in\mathrm{HN}^{\mathrm{Nonsing}}$。设 $\tilde{\pi}$ 和 $\tilde{\tilde{\pi}}$ 是与 ξ 和 η相关联的 $\tilde{\mathfrak{G}}_{x}$、$\tilde{\tilde{\mathfrak{G}}}_{x}$ 的表示，这些表示由基里洛夫轨道方法得到。根据基里洛夫轨道方法，作用在 $L^{2}(\tilde{\pi})\otimes L^{2}(\tilde{\tilde{\pi}})$ 上的表示 $\pi=\tilde{\pi}\otimes\tilde{\tilde{\pi}}$ 是与 $\xi+\eta$相关联的表示，参见附录 A。

定理 4.6.2。我们有

$$\begin{aligned}\sigma^{(k,0,\cdots,0)}(v,\pi,x)&=\tilde{\sigma}^{k}(v,\tilde{\pi},x)\otimes\mathrm{Id}_{L^{2}(\tilde{\tilde{\pi}})},\quad\forall k\in\mathbb{C}^{\tilde{\nu}},v\in\tilde{\Psi}^{k}(M)\\\sigma^{(0,\cdots,0,l)}(v',\pi,x)&=\mathrm{Id}_{L^{2}(\tilde{\pi})}\otimes\tilde{\tilde{\sigma}}^{l}(v',\tilde{\tilde{\pi}},x),\quad\forall l\in\mathbb{C}^{\tilde{\tilde{\nu}}},v'\in\tilde{\tilde{\Psi}}^{l}(M).\end{aligned}\tag{4.25}$$

此外，

$$H^{(k,l)}(\pi)=\tilde{H}^{k}(\tilde{\pi})\otimes\tilde{\tilde{H}}^{l}(\tilde{\tilde{\pi}}),\quad\forall(k,l)\in\mathbb{R}^{\nu}.\tag{4.26}$$

4.7 示例

本节将通过一些具体例子，对 Helffer-Nourrigat 锥和主符号进行计算。固定 $N\geqslant 2$。考虑例 2.1.3.iii 中与族 $\{\partial_{x},\ \partial_{y}\}$ 和 $\{\partial_{x},\ x^{N-1}\partial_{y}\}$ 相关联的结构。我们将采用第 2.4 节中研究该结构时使用的记号。在 (2.19) 的对偶元素上加星号，以表示它们构成密切群的一组基，见 (2.20)。我们只计算非奇异 Helffer-Nourrigat 锥及相应的表示。

如果 $x\neq 0$，那么

$$\mathrm{HN}^{\mathrm{Nonsing}}_{(x,y)}=\left\{\xi X^{*}_{1}+\eta X^{*}_{2}+\mu\xi Y^{*}+x^{N-1}\mu\eta Z^{*}_{1}:(\xi,\eta)\in T^{*}_{(x,y)}\mathbb{R}^{2}\backslash 0,\mu\in\mathbb{R}^{\times}_{+}\right\}\subseteq\mathfrak{g}^{*}_{(x,y)}.$$

如果 $x=0$，那么

$$\begin{aligned}\mathrm{HN}_{(0,y)}^{\mathrm{Nonsing}} &= \{\xi X_1^* + \eta X_2^* + \mu Y^* : \xi,\eta,\mu\in\mathbb{R}, \mu\xi>0\}\\ &\sqcup \left\{\eta X_2^* + \mu Y^* + \sum_{k=1}^{N} a^{k-1} b Z_k^* : \eta, b\in\mathbb{R}^\times, \mu, a\in\mathbb{R}, a^{N-1}b\eta\geqslant 0\right\}\\ &\sqcup \left\{\eta X_2^* + \mu Y^* + bZ_N^* : \eta\in\mathbb{R}^\times, (\mu,b)\in\mathbb{R}^2\backslash(0,0), b\eta\geqslant 0\right\}\end{aligned}$$

此外，可以检验，对于任意 $(\xi,\ \eta;\ x,\ y)\in T^*\mathbb{R}^2\backslash 0$,

$$aX_1^* + bX_2^* + cY + \sum_{i=1}^{N} d_i Z_i \in \mathrm{HN}_{(\xi,\eta;x,y)}^{\mathrm{Nonsing}} \iff \exists\lambda\in\mathbb{R}_+^\times, (a,b)=\lambda(\xi,\eta).$$

我们使用基里洛夫轨道方法计算相应的表示。如果 $x\neq 0$，那么 $\mathbf{HN}_{(x,\ y)}$ 中的每个元素都给出 $\mathfrak{G}_{(x,\ y)}$ 的一维表示，其导数为:

$$\pi_{\xi,\eta,\mu}(X_1)=i\xi,\quad \pi_{\xi,\eta,\mu}(X_2)=i\eta,\quad \pi_{\xi,\eta,\mu}(Y)=i\mu\xi,\quad \pi_{\xi,\eta,\mu}(Z_1)=ix^{N-1}\mu\eta,$$

并且 $\pi_{\xi,\ \eta,\ \mu}(Z_j)=0$ 对所有 $j\in[\![2,\ N]\!]$ 均成立。

如果 $x=0$，则 $\mathbf{HN}_{(0,\ y)}$ 分解为余伴随轨道如下:

$$\begin{aligned}\mathrm{HN}^{\mathrm{Nonsing}}(0,y) = &\bigsqcup_{\xi,\eta,\mu\in\mathbb{R},\mu\xi>0} \{\xi X_1^* + \eta X_2^* + \mu Y^*\}\\ &\bigsqcup_{\eta\in\mathbb{R}_+^\times,(\mu,b)\in\mathbb{R}^2\backslash 0} \{\eta X_2^* + \mu Y^* + bZ_1^*\}\\ &\bigsqcup_{\eta,b\in\mathbb{R},b\eta>0} \mathrm{Ad}^*(\mathfrak{G}_{(0,y)})\left(\eta X_2^* + bZ_N^*\right).\end{aligned}$$

在下面的计算中，我们添加了上标，以区分各表示族。第一个族给出 $\mathfrak{G}_{(x,\ y)}$ 的一维表示，其导数为:

$$\pi_{\xi,\eta,\mu}^{(1)}(X_1)=i\xi,\quad \pi_{\xi,\eta,\mu}^{(1)}(X_2)=i\eta,\quad \pi_{\xi,\eta,\mu}^{(1)}(Y)=i\mu,\quad \pi_{\xi,\eta,\mu}^{(1)}(Z_j)=0,\quad \forall j\in[\![1,N]\!].$$

第二个族给出导数为下式的一维表示:

$$\pi_{\eta,\mu,b}^{(2)}(X_1)=0,\ \pi_{\eta,\mu,b}^{(2)}(X_2)=i\eta,\ \pi_{\eta,\mu,b}^{(2)}(Y)=i\mu,\ \pi_{\eta,\mu,b}^{(2)}(Z_1)=ib,\ \pi_{\eta,\mu,b}^{(2)}(Z_j)=0\quad \forall j\in[\![2,N]\!],$$

The 第三个族给出了作用于 $L^2(\mathbb{R})$ 的无穷维表示，其导数为:

$$\pi_{\eta,b}^{(3)}(X_1)=0,\quad \pi_{\eta,b}^{(3)}(X_2)=i\eta,\quad \pi_{\eta,b}^{(3)}(Y)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t},\quad \pi_{\eta,b}^{(3)}(Z_j)=it^{N-j}b,\quad \forall j\in[\![1,N]\!],$$

固定 $c\in\mathbb{C}$。考虑微分算子

$$D_c=\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+x^{2(N-1)}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)^N+c\frac{\partial^4}{\partial y^4}$$

它属于 $\mathbf{DO}^{(2,\ 2N)}(\mathbb{R}^2)$ 因为它可以写成

$$D_c=\left(X_1^2+X_2^2\right)\left(Y^2+Z_1^2\right)^N+cZ_N^2X_2^2,$$

主符号为

$$\begin{aligned}
\sigma^{(2,2N)}(D_c, \pi_{\xi,\eta,\mu}, (x,y)) &= \mu^2(\xi^2+\eta^2)(\xi^2 + x^{2(N-1)}\eta^2) \qquad x \neq 0 \\
\sigma^{(2,2N)}(D_c, \pi^{(1)}_{\xi,\eta,\mu}, (0,y)) &= \mu^2(\xi^2+\eta^2) \\
\sigma^{(2,2N)}(D_c, \pi^{(2)}_{\eta,\mu,b}, (0,y)) &= \eta^2(\mu^2+b^2) \\
\sigma^{(2,2N)}(D_c, \pi^{(3)}_{\eta,b}, (0,y)) &= -\eta^2\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} - b^2t^{2(N-1)}\right)^N + cb^2\eta^2
\end{aligned}$$

前三者始终非零。由定理 4.4.6.ii 可知， $\sigma^{(2,2N)}(D_c, \pi^{(3)}_{\eta\, b}, , (0,y)) : H^{(2,2N)}(\pi^{(3)}_{\eta\, b}) \to L^2(\mathbb{R})$ 是一个 Fredholm 算子。因此，取 $c=0$，并利用定理 4.4.2.iv，可知 $\left(\frac{\mathrm{d}^2}{t^2} - b^2t^{2(N-1)}\right)^N \mathrm{d}$ 作为算子 $L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ 具有紧预解式。由于它是自伴的，因此可对角化。其特征向量属于 $\sigma^{(2,2N)}(D_c, \pi^{(3)}_{\eta\, b}, , (0,y))$的核，其中 c 遍历所有取值。因此，由定理 4.4.6.ii 可知，这些特征向量是表示$\pi^{(3)}_{\eta\, b}$，的光滑向量。根据定理 A.0.4， $\pi^{(3)}_{\eta\, b}$, 的光滑向量是 $\mathbb{R}$ 上的 Schwartz 函数。令 $(\lambda_n) \subseteq \mathbb{R}$ 为 $\frac{1}{b^2}\left(\frac{\mathrm{d}^2}{t^2} - b^2t^{2(N-1)}\right)^N \mathrm{d}$ 的特征值序列。该特征值序列不依赖于 b，因为所有这些算子都与膨胀算子酉等价。综上,—以下结论成立:

命题 4.7.1。 对于任意 $c \in \mathbb{C}$，算子 D_c 是微局部最大拟椭圆的，阶为 $(2,\ 2N)$ 在锥 $\{(\xi,\ \eta;\ x,\ y) \in T^*\mathbb{R}^2\backslash 0 :\ (\xi,\ x) \neq (0,\ 0)\}$。此外，当且仅当 $c \notin \{\lambda_n :\ n \in \mathbb{N}\}$ 时，它是最大拟椭圆的，阶为 $(2,\ 2N)$。

我们指出，算子 D_c 也属于 $\mathrm{DO}^{(2+2N,\ 0)}(\mathbb{R}^2)$ （即其经典阶为 $2+2N$），并且它属于 $\mathrm{DO}^{(0,\ 4N)}(\mathbb{R}^2)$，因为它可以写成

$$D_c = \left(Y^2 + Z_N^2\right)\left(Y^2 + Z_1^2\right)^N + cZ_N^4.$$

根据定理 4.3.2.v，阶 $4N$ 是最优的，并且

$$\sigma^{(0,4N)}(D_c, \pi^{(1)}_{\xi,\eta,\mu}, (0,y)) = (-1)^{N+1}\mu^{2+2N} \neq 0$$

然而，我们有

$$\sigma^{(0,4N)}(D_c, \pi^{(2)}_{\eta,\mu,b}, (0,y)) = (-1)^{N+1}\mu^2(\mu^2+b^2)^N$$

当 $\mu = 0$ 时为零。因此， D_c 不是 (0阶的最大拟椭圆， $4N$) （对任意 $c \in \mathbb{C}$）。它也不是椭圆的，这意味着它不是 $(2+2N$阶的最大拟椭圆， $0)$。

第5章

第4章结果的证明

5.1 第4.1节结果的证明

命题4.1.1的证明。 由对称性，只需考虑第一个积分。根据 (2.35)，可设 $f = h * \theta_l(D)$，其中某个 $h \in C_{c,\ \mathrm{inv}}^{\infty}(\mathbb{G},\ \Omega^{\frac{1}{2}})$, $l \in \mathbb{Z}_+^{\nu}$, $D \in \mathrm{DO}^l(M)$ 使得$k - l \in \mathbb{C}_{<0}^{\nu}$。根据 (2.32),

$$\int_{]0,1]^{\nu}} g * \alpha_{\lambda}(f) \frac{\mathrm{d}\lambda}{\lambda^{k+\underline{1}}} = \left(\int_{]0,1]^{\nu}} g * \alpha_{\lambda}(h) \frac{\mathrm{d}\lambda}{\lambda^{k-l+\underline{1}}} \right) * \theta_l(D)$$

根据定理2.6.6，积分 $\int_{]0,\ 1]^{\nu}} \overline{g * \alpha_{\lambda}(h)}\, \mathrm{d}_{\lambda^{k-l+1}}^{\lambda}$ 收敛。 □

以下由（2.32）推出的恒等式将被反复使用

$$\begin{aligned} I_k(\alpha_{\lambda}(f)) &= \alpha_{\lambda}(I_k(f)), \\ I_{k+l}(\theta_l(D) * f) &= \theta_l(D) * I_k(f), \\ I_{k+l}(f * \theta_l(D)) &= I_k(f) * \theta_l(D), \end{aligned} \tag{5.1}$$

其中 $\lambda \in (\mathbb{R}_+^{\times})^{\nu}$和 $f \in C_{c,\ \mathrm{inv},\ k}^{\infty}(\mathbb{G},\ \Omega^{\frac{1}{2}})$。在本章中引入以下空间将很有用

$$\Psi^k(\mathbb{G}) = I_k(C_{c,\mathrm{inv},k+\underline{1}}^{\infty}(\mathbb{G}, \Omega^{\frac{1}{2}})), \quad \Psi^{\leq k}(\mathbb{G}) := \sum_{l \in \mathbb{C}^{\nu}, l \leq k} \Psi^l(\mathbb{G}), \quad \Psi^{<k}(\mathbb{G}) := \sum_{l \in \mathbb{C}^{\nu}, l < k} \Psi^l(\mathbb{G}).$$

由(5.1)，我们得到

$$\theta_l(\mathrm{DO}^l(M)) * \Psi^k(\mathbb{G}) \subseteq \Psi^{k+l}(\mathbb{G}), \quad \Psi^k(\mathbb{G}) * \theta_l(\mathrm{DO}^l(M)) \subseteq \Psi^{k+l}(\mathbb{G}). \tag{5.2}$$

引理5.1.1. *i.* 对任意 k、$l \in \mathbb{C}^{\nu}$、$\Psi^k(\mathbb{G})^* = \Psi^k(\mathbb{G})$ 和 $\overline{\Psi^k(\mathbb{G}) * \Psi^l(\mathbb{G})} \subseteq \Psi^{k+l}(\mathbb{G})$。

ii. 若 $k \in \mathbb{C}_{<0}^{\nu}$，则$\Psi^k(\mathbb{G}) \subseteq L^1(\mathbb{G}、\ \omega)$对任意 $\omega \in C^{\infty}(\mathbb{G}\Omega^{\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}})$由命题*2.5.2*得到。

iii. 若 $l \in \mathbb{Z}_+^{\nu}$，则 $\theta_l(\mathrm{DO}_c^l(M)) \subseteq \Psi^{\leq l}(\mathbb{G})$。

证明。 恒等式 $\Psi^k(\mathbb{G})^* = \Psi^k(\mathbb{G})$由定理 2.7.4.ii 得出。为证明 $\Psi^k(\mathbb{G}) * \Psi^l(\mathbb{G}) \subseteq \Psi^{k+l}(\mathbb{G})$，利用 (2.33)、(2.35)、(5.1) 和 (5.2)，只需证明：若 $k, l \in \mathbb{C}_{<0}^{\nu}$ 且$f, g \in C_{c,\mathrm{inv}}^{\infty}(\mathbb{G}, \Omega^{\frac{1}{2}})$，则 $I_k(f) * I_l(g) \in \Psi^{k+l}(\mathbb{G})$。对每个 $S \subseteq [\![1, \nu]\!]$，令

$$\Lambda_S = \{(\lambda, \mu) \in]0,1]^{2\nu} : \forall i \in S, \lambda_i \leqslant \mu_i,\ \forall i \in S^c, \lambda_i > \mu_i\}.$$

通过简单的变量替换，我们得到

$$I_k(f)*I_l(g)=\int_{]0,1]^{2\nu}}\alpha_\lambda(f)*\alpha_\mu(g)\frac{\mathrm{d}\lambda\,\mathrm{d}\mu}{\lambda^{k+\underline{1}}\mu^{l+\underline{1}}}=\sum_{S\subseteq[\![1,\nu]\!]}\int_{\Lambda_S}\alpha_\lambda(f)*\alpha_\mu(g)\frac{\mathrm{d}\lambda\,\mathrm{d}\mu}{\lambda^{k+\underline{1}}\mu^{l+\underline{1}}}$$
$$=\sum_{S\subseteq[\![1,\nu]\!]}I_{k+l}\left(\int_{]0,1]^\nu}\alpha_{\lambda_S}(f)*\alpha_{\lambda_{S^c}}(g)\frac{\mathrm{d}\lambda}{\lambda^{\tau_S}}\right),\tag{5.3}$$

其中

$$\lambda_S=\begin{cases}\lambda_i & \text{if } i\in S\\ 1 & \text{if } i\notin S\end{cases},\quad \lambda_{S^c}=\begin{cases}\lambda_i & \text{if } i\notin S\\ 1 & \text{if } i\in S\end{cases},\quad \tau_{Si}=\begin{cases}k_i+1 & \text{if } i\in S\\ l_i+1 & \text{if } i\notin S\end{cases}.\tag{5.4}$$

由定理 2.8.3，积分 $\int_{]0,1]^\nu}\alpha_{\lambda_S}(f)*\alpha_{\lambda_{S^c}}(g)\,\mathrm{d}\frac{\lambda}{\lambda^{\tau_S}}$ 定义了 $C^\infty_{c,\mathrm{inv}}(\mathbb{G},\Omega^{\frac12})$ 的一个元素。这就完成了引理 5.1.1.i 的证明。引理 5.1.1.ii 由 (2.25) 立即得到。

为证明引理 5.1.1.iii，根据 (5.2)，只需证明 $\theta_0(C^\infty_c(M))\subseteq\Psi^{\preceq0}(\mathbb{G})$。令 $f\in C^\infty_c(M)$。我们固定 $g\in C^\infty_{c,\mathrm{inv}}(\mathbb{G},\Omega^{\frac12})$ 任意满足 $\alpha_0(\bar g)=\theta_0(\delta_f)$ 的不变函数，见 (2.30)。例如，固定一个 ν-分次基 $(V,\natural)$ 后，取 $g=\mathcal{Q}_{V*}(\tilde g\circ\pi_{V\times\mathbb{G}^{(0)}})$，其中 $\tilde g\in C^\infty_c(\widetilde{\text{定义域}(\mathcal{Q}_V)},\Omega^1(V))$ 满足 $\int_{v\in V}\tilde g(v,x,0)=f(x)$。显然，

$$\theta_0(\delta_f)=\alpha_0(g)=\int_{]0,1]^\nu}\frac{\partial^\nu}{\partial\lambda_1\cdots\partial\lambda_\nu}\Big((\lambda_1-1)\cdots(\lambda_\nu-1)\alpha_\lambda(g)\Big)\,\mathrm{d}\lambda.\tag{5.5}$$

令 $S=\{s_1,\cdots,s_n\}\subseteq[\![1,\nu]\!]$。我们定义

$$g_S=\left(\frac{\partial^{|S|}}{\partial\lambda_{s_1}\cdots\partial\lambda_{s_n}}\alpha_\lambda(g)\right)_{\lambda_{s_1}=1,\cdots,\lambda_{s_n}=1}.\tag{5.6}$$

根据链式法则，

$$\frac{\partial^{|S|}}{\partial\lambda_{s_1}\cdots\partial\lambda_{s_n}}\alpha_\lambda(g)=\frac{1}{\lambda_{s_1}\cdots\lambda_{s_n}}\alpha_\lambda(g_S),\quad\forall\lambda\in(\mathbb{R}^\times_+)^\nu.\tag{5.7}$$

因此，将 (5.5) 和 (5.7) 合并，得到

$$\theta_0(\delta_f)=\sum_{S\subseteq[\![1,\nu]\!]}\int_{]0,1]^\nu}\alpha_\lambda(g_S)\prod_{s\in S}\left(1-\lambda_s^{-1}\right)\mathrm{d}\lambda=\sum_{S\subseteq[\![1,\nu]\!]}\sum_{S'\subseteq S}(-1)^{|S'|}I_{\kappa_{S'}}(g_S),\tag{5.8}$$

其中，$\kappa_{S'i}=-1$ 若 $i\notin S'$，$\kappa_{S'i}=0$ 若 $i\in S'$。根据命题 2.7.6，$g_S\in C^\infty_{c,\mathrm{inv},\kappa_S+1}(\mathbb{G},\Omega^{\frac12})$。由于 $\kappa_{S'}+\underline{1}\preceq\kappa_S+\underline{1}$，由 (2.34) 得，$g_S\in C^\infty_{c,\mathrm{inv},\kappa_{S'}+1}(\mathbb{G},\Omega^{\frac12})$。因此，$I_{\kappa_{S'}}(g_S)\in\Psi^{\kappa_{S'}}(\mathbb{G})\subseteq\Psi^{\preceq0}(\mathbb{G})$。 □

注 5.1.2。由 (5.1) 和 (2.33)，任意元素 $\Psi^k_c(M)$ 都可写成如下形式的元素之和：$D*v$，其中 $D\in\mathrm{DO}^l(M)$ 且 $v\in\Psi^{k-l}_c(M)$ 满足 $k-l\in\mathbb{C}^\nu_{<0}$。这一注释将反复用于将关于正阶算子的定理归约为关于负阶算子的定理。

定理 4.1.3 的证明。我们来证明定理 4.1.3.i。令 $f\in C^\infty_c(M\times M,\Omega^{\frac12})$。我们任取满足 $\int_{]0,1]^\nu}g(t)\frac{dt}{t^{k+1}}=1$ 的 $g\in C^\infty_c((\mathbb{R}^\times_+)^\nu)$。因此，$f(y,x)g(t)\in C^\infty_c(M\times M\times(\mathbb{R}^\times_+)^\nu,\Omega^{\frac12})$。由定理 2.7.4.i 可知，$f(y,x)g(t)\in C^\infty_{c,\mathrm{inv},k+1}(\bar{\mathbb{G}},\Omega^{\frac12})$。显然，$I_k(fg)_{|1}=f$。

下面证明定理 4.1.3.ii。令 $f\in C^\infty_{c,\mathrm{inv},k+1}(\mathbb{G},\Omega^{\frac12})$，$\pi\colon\mathbb{G}\to M\times M$ 为自然投影

$$\pi(y,x,t)=(y,x),\quad\pi(A,x,0)=(x,x).\tag{5.9}$$

函数 π 是光滑的，因为 $r, s, \pi_{\mathbb{G}^{(0)}}$ 是光滑的。由 (1.34) 和 (1.42),

$$\begin{aligned}\operatorname{supp}\left(I_k(f)_{|\underline{1}}\right) = \operatorname{supp}(I_k(f)) \cap (M \times M \times \{\underline{1}\}) \subseteq \pi\left(\operatorname{supp}(I_k(f))\right) &\subseteq \pi\left(\overline{\bigcup_{\lambda\in]0,1]^\nu} \operatorname{supp}(\alpha_\lambda(f))}\right)\\ &\subseteq \overline{\bigcup_{\lambda\in]0,1]^\nu} \pi\left(\alpha_\lambda(\operatorname{supp}(f))\right)}\\ &= \pi(\operatorname{supp}(f)).\end{aligned}$$

因此，支集$(I_k(\underline{f})_{|1})$ 是紧的。为计算波前集，根据注 5.1.2，我们可以假设 $k \in \mathbb{C}^\nu_{<0}$。我们有

$$I_k(C_c^\infty(M \times M \times \mathbb{R}_+^\nu \backslash 0, \Omega^{\frac{1}{2}}))_{|\underline{1}} \subseteq C_c^\infty(M \times M, \Omega^{\frac{1}{2}}). \tag{5.10}$$

˜设 $(V,\ \natural)$ 为如引理 3.7.1 中的 ν-分次基，f 如(2.27)中所示。由(5.10),

$$I_k(f)_{|\underline{1}} - \phi_*\left(\int_{]0,1]^\nu} \tilde{f}(\alpha_{t^{-1}}(a), x, t)\frac{\mathrm{d}t}{t^{k+\underline{1}}}\right) \in C_c^\infty(M \times M, \Omega^{\frac{1}{2}}),$$

其中 $\phi\colon\ V \times M \to M \times M$是映射 $(a,\ x) \mapsto (e^a \cdot x,\ x)$。对每个 $S \subseteq [\![1,\ \nu]\!]$，令 $V_S = \{\sum_{i\in S} v_i\colon v_i \in V^{\hat{i}}\} \subseteq V$。由于 $\tilde{f}$是紧支撑的，容易看出

$$\mathrm{WF}\left(\int_{]0,1]^\nu} \tilde{f}(\alpha_{t^{-1}}(a), x, t)\frac{\mathrm{d}t}{t^{k+\underline{1}}}\right) \subseteq \bigcup_{S\subseteq[\![1,\nu]\!]} N^{V\times M}_{V_S\times M},$$

其中 $N^{V\times M}_{V_S\times M}$是 $V_S \times M$在 $V \times M$中的余法丛。对每个 $S \neq \varnothing$，将映射 ϕ视为映射 $V_S \times M \to M \times M$时，由(2.4)可知它是一个浸没，并且将映射 ϕ 视为映射$V_\varnothing \times M \to \{(x,\ x)\colon x \in M\}$时是一个浸没。定理 4.1.3.ii 现由下述内容得出:

引理5.1.3 ([GS77，第 332]页上的式 (3.6)。设 M、M'为光滑流形，$\phi\colon M \to M'$为浸没，Z_1、$\cdots$、$Z_n \subseteq M$以及 Z_1'、$\cdots$、$Z_n' \subseteq M'$为子流形，满足 $\phi(Z_i) \subseteq Z_i'$，且$\phi_{|Z_i}\colon Z_i \to Z_i'$为浸没，$w \in C_c^{-\infty}(M,\ \Omega^1(\text{核}(\mathrm{d}\phi)))$为一个分布。若波前集$(w) \subseteq \bigcup_{i=1}^n N^M_{Z_i}$，则波前集$(\phi_*(u)) \subseteq \bigcup_{i=1}^n N^{M'}_{Z_i'}$。

证明定理 4.1.3.iii。设$f \in C_{c,\ \mathrm{inv},\ k+1}^\infty(\mathbb{G},\ \Omega^{\frac{1}{2}})$。由 (5.1)，$I_l(\theta_{l-k}(\delta_1) * f) = \theta_{l-k}(\delta_1) * I_k(f)$。由于 $\theta_{l-k}(\delta_1) * I_k(f)$ 在 $t = 1$ 处的限制等于 $I_{\underline{k}}(f)_{|\underline{1}}$，定理 4.1.3.iii 得证。对引理 5.1.1.iii 在 $t = 1$ 处取限制，并利用定理 4.1.3.iii，可得定理 4.1.3.iv。定理 4.1.3.v 由引理 5.1.1.i 得出。

为证明定理 4.1.3.vi，注意到满足 (1.27)$_1$ $_1$ 的 $C^\infty(M \times M, \Omega^{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}})$ 的任意截面都具有 $\omega(y, x) = \mathrm{vol}_x^{\frac{1}{2}} \otimes \mathrm{vol}_x^{-\frac{1}{2}}$的形式，其中黎曼度量取自 M。因此，在 $t = 1$上限制后，结论由引理 5.1.1.ii 得出。

定理 4.1.3.vii 是经典索伯列夫嵌入定理与定理 4.1.3.v 的推论。其证明分为以下几个引理:

Lemma 5.1.4. 设 $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{C}^\nu_{<0}$, $S \subseteq [\![1, \nu]\!]$。如果 $\sum_{i\in S} R(k_i)N_i^{-1} < -\dim(M) - 1 - \nu - n$，则

$$\Psi_c^k(M) \subseteq C_c^n(M \times M, \Omega^{\frac{1}{2}}).$$

证明。索伯列夫包含映射，$W^{1,\ \dim(M)+1}(\mathbb{R}^{\dim(M)}) \subseteq C^0(\mathbb{R}^{\dim(M)})$（阶为 $\dim(M) + 1$ 的 L^1 索伯列夫空间包含于 C^0），这意味着若 $T \in L^1_s(M \times M,\ \omega)$ 满足 $X_1 * \cdots *$

$X_{\dim(M)+1} * T \in L^1_s(M\times M,\ \omega)$ 对每个 $X_1,\ \cdots,\ X_{\dim(M)+1} \in \mathcal{X}(M)$ 均成立，则 $T \in C^0(M\times M;\Omega^{\frac{1}{2}})$。令 $X \in \mathcal{X}(M)$。由于 $X \in \mathcal{F}^{(0,\ \cdots,\ 0,\ N_i,\ 0,\ \cdots,\ 0)}$。由定理 4.1.3.iv 和定理 4.1.3.v，

$$X * \Psi^k_c(M) \subseteq \Psi^{(k_1,\cdots,k_{i-1},k_i+N_i,k_{i+1},\cdots,k_\nu)}_c(M),\quad \Psi^k_c(M) * X \subseteq \Psi^{(k_1,\cdots,k_{i-1},k_i+N_i,k_{i+1},\cdots,k_\nu)}_c(M).$$

现在，该引理可由 Sobolev 不等式和定理 4.1.3.vi 得出。 □

引理 5.1.5. 对于任意 $l \in \mathbb{Z}^\nu_+$, $S \subseteq [\![1,\nu]\!]$，令 $l_S \in \mathbb{Z}^\nu_+$ 由以下方式定义：若满足 $i \in S$，则为 $l_{Si} = l_i$；否则为 0。因此，$l = l_S + l_{S^c}$。于是，任意 $D \in$ 微分算子$^l(M)$ 都可以写成如下形式的微分算子之和：D_1D_2，其中 $D_1 \in$微分算子$^{l_S}(M)$ 且 $D_2 \in$微分算子$^{l_{S^c}}(M)$。

证明。我们可以假设 D 是一个单项式。此外，由 (2.36)，我们还可以进一步假设 $\overbrace{0\cdots}$，0)，其中某个 $a \in [\![0,\ \nu-1]\!]$，且 $b \in \mathbb{Z}_+$。现在，为了完成证明，我们需要能够重新排列向量场。这可由关于 π_i 的归纳法得出，因为如果 $X_i \in \mathcal{F}^{k_i}$ 且每个 k_i 都是形如 $(0,\cdots,0,a,0,\cdots,0)$ 且 $Y \in \mathcal{F}^{(0,\cdots,0,b,0,\cdots,0)}$，其中 a 和 b 不在同一位置，那么

$$XY - YX = [X,Y] \in \mathcal{F}^{(0,\cdots,0,a,0,\cdots,0)+(0,\cdots,0,b,0,\cdots,0)} = \mathcal{F}^{(0,\cdots,0,a,0,\cdots,0)} + \mathcal{F}^{(0,\cdots,0,b,0,\cdots,0)}$$ □

引理 5.1.6。 对于任意 $k \in \mathbb{C}^\nu$，任意元素 $v \in \Psi^k_c(M)$ 都可以写成形如 $D * v'$ 的元素之和，其中 $D \in \mathrm{DO}^l(M)$，且 $v' \in \Psi^{k-l}_c(M)$ 满足 $k-l \in \mathbb{C}^\nu_{<0}$；对于任意 $i \in [\![1、\ \nu]\!]$，要么 $l_i = 0$（当 $\boldsymbol{R}(k_i) < 0$时发生），要么 $-N_i \leqslant \boldsymbol{R}(k_i) - l_i$（当 $\boldsymbol{R}(k_i) \geqslant 0$时发生）

证明。根据注 5.1.2，我们可以假设 $v = D * v'$，其中 $D \in \mathrm{DO}^l(M)$ 且 $v' \in \Psi^{k-l}_c(M)$ 和 $k-l \in \mathbb{C}^\nu_{<0}$。现在我们针对每个参数优化这个分解。更确切地说，从最后一个参数开始，利用引理 5.1.5，我们可以假设 $D = D_1D_2$，其中 $D_1 \in \mathrm{DO}^{(l_1,\ \cdots,\ l_{\nu-1},\ 0)}$且 $D_2 \in \mathrm{DO}^{(0,\ \cdots,\ 0,\ l_\nu)}$。将 D_2 写成单项式之和后，我们可以假设要么 $l_\nu = 0$，要么$-N_\nu \leqslant \boldsymbol{R}(k_\nu) - l_\nu$。然后对其他参数重复同样的步骤。 □

现在，令 $k \in \mathbb{C}^\nu$, $n \in \mathbb{N}$ 使得 $\sum_{i=1}^\nu \boldsymbol{R}(k_i) N_i^{\mathrm{sgn}(\Re(k_i))} \leqslant -$维且 $v \in \Psi^k(M)$。按照引理 5.1.6 的写法记 v。令 $S = \{i : \boldsymbol{R}(k_i) < 0\}$。我们有

$$\begin{aligned}\sum_{i\in S} \Re(k_i - l_i) N_i^{-1} = \sum_{i\in S} \Re(k_i) N_i^{-1} &\leqslant -\dim(M) - 1 - \nu - n - \sum_{i=1}^\nu N_i^2 - \sum_{i\notin S} \Re(k_i) N_i \\ &\leqslant -\dim(M) - 1 - \nu - n - \sum_{i\notin S} l_i N_i\end{aligned}$$

因此，由引理 5.1.4，$v' \in C_c^{n+\sum_{i\notin S} l_i N_i}(M\times M, \underline{\Omega}^{\frac{1}{2}})$。由于 $D \in \mathrm{DO}^l(M)$ 是一个经典阶为 $\leqslant \sum_{i\notin S} l_i N_i$ 的微分算子，定理 4.1.3.vii 得证。

我们来证明定理 4.1.3.viii。由注 5.1.2 和命题 2.7.1.iii，我们可以假设 $k \in \mathbb{C}^\nu_{<0}$。令 $f \in C^\infty_{c,\ \mathrm{inv}}(\mathbb{G}, \Omega^{\frac{1}{2}})$, $h \in C^\infty(M\times M)$ 由 $h(x,y) = g(x) - g(y)$, $\tilde{h} = h\circ\pi \in C^\infty(\mathbb{G})$ 定义，其中 π 在 (5.9) 中定义。由于 $\pi\circ\alpha_\lambda = \pi$, $\alpha_\lambda(h) = h$ 对所有 $\lambda \in (\mathbb{R}^\times_+)^\nu$ 都成立。此外，

$$I_k(\tilde{h}f)_{|\underline{1}} = \delta_g * I_k(f)_{|\underline{1}} - I_k(f)_{|\underline{1}} * \delta_g.$$

令 $(V, \natural)$ 为一个 ν-分次基，$\tilde{f}$如定义 2.6.1 所示。我们如下定义 $r \in C^\infty_c(\widetilde{\text{定义域}(\mathcal{Q}_V)}, \Omega^1(V))$：

$$r(v,x,t) = h(e^{\alpha_t(v)}\cdot x, x)\tilde{f}(v,x,t).$$

注意，$\mathcal{Q}_{V*}(r\circ\pi_{V\times\mathbb{G}^{(0)}})=h\mathcal{Q}_{V*}(f\circ\pi_{V\times\mathbb{G}^{(0)}})$。因此，

$$\tilde{h}f-\mathcal{Q}_{V*}(r\circ\pi_{V\times\mathbb{G}^{(0)}})=\tilde{h}(f-\mathcal{Q}_{V*}(\tilde{f}\circ\pi_{V\times\mathbb{G}^{(0)}}))\in C_c^\infty(M\times M\times\mathbb{R}_+^\nu\backslash 0,\Omega^{\frac{1}{2}}).$$

由 (5.10)，只需证明 $I_k(\mathcal{Q}_{V*}(r\circ\pi_{V\times\mathbb{G}^{(0)}}))_{|1}\in\Psi^{<k}(M)$。函数 r 在 $t=0$处取值为零，因为 h 在对角线上恒为零。因此，对于某些函数 $r_i\in C_c^\infty(\widetilde{\quad}$，有 $r=\sum_{i=1}^\nu t_i r_i$，其中 $r_i\in C_c^\infty(\widetilde{\quad}$ $\mathrm{Dom}(\mathcal{Q}_V)$，$\Omega^1(V))$。于是，

$$I_k(\mathcal{Q}_{V*}(r\circ\pi_{V\times\mathbb{G}^{(0)}}))_{|1}=\sum_{i=1}^\nu I_{k-(\underbrace{0,\cdots,0}_{i-1},1,\underbrace{0,\cdots,0}_{\nu-i})}(\mathcal{Q}_{V*}(r_i\circ\pi_{V\times\mathbb{G}^{(0)}}))_{|1}.$$

至此，定理 4.1.3 的证明完成。 □

定理 4.1.4 的证明。 如果 v 和 v' 都满足定理的条件，那么对所有 $n\in\mathbb{N}$，$v-v'\in\Psi^{k-(n,0,\cdots,0)}(M)+\cdots+\Psi^{k-(0,\cdots,0,n)}(M)$。由定理 4.1.3.vii 可得$v-v'\in C^\infty(M\times M,\Omega^{\frac{1}{2}})$。这证明了唯一性。

现在证明存在性。集合 $S=\{l\in\mathbb{Z}_+^\nu:\ l_i\leqslant\max(\mathrm{R}(k_i)+N_i,0),\ \forall i\in[\![1,\nu]\!]\}$ 是有限的。根据命题 2.7.1.v，对于每个 $l\in S$，我们固定模 $\mathrm{DO}^l(M)$ 的一族生成元。令 $D_1\in\mathrm{DO}^{l_1}(M),\cdots,D_n\in\mathrm{DO}^{l_n}(M)$ 为这些生成元。根据引理 5.1.6，每个 v_τ 都可以写成和 $v_\tau=\sum_{i=1}^n D_i*v_{\tau,i}$，其中 $v_{\tau,i}\in\Psi^{k-l_i-\tau}(M)$ 以及 $k-l_i-\tau\in\mathbb{C}^\nu_{<0}$。按照约定，若 $v_\tau=0$，则 $v_{\tau,i}=0$。只需证明对于每个 i，渐近和 $\sum_\tau v_{\tau,i}$ 的存在性即可。在这里，我们利用以下事实：对于每个 $i\in[\![1,n]\!]$，$\{\tau\in\mathbb{Z}_+^\nu:\ v_{\tau,i}\neq 0\}\subseteq\{\tau\in\mathbb{Z}_+^\nu:\ v_\tau\neq 0\}$。

因此，不失一般性，我们可以假设对每个 $v_\tau\neq 0$，都有 $k-\tau\in\mathbb{C}^\nu_-$。在下面的论证中，我们只遍历满足 $v_\tau\neq 0$ 的 τ。利用单位分解论证，我们可以假设存在某个紧集 $K\subseteq M\times M$，使得对所有 $\tau\in\mathbb{Z}_+^\nu$，都有 $\mathrm{supp}(v_\tau)\subseteq K$。存在函数 $f_\tau\in C_{c,\mathrm{inv}}^\infty(\mathbb{G},\Omega^{\frac{1}{2}})$，使得 $v_\tau(y,x)=I_{k-\tau}(f_\tau)_{|1}$。我们固定一个 ν-分次基$\sim$ $(V,\natural)$。令 f_τ 如 (2.27) 中所述。由 (5.10)，我们可以假设 $v_\tau(y,x)=I_{k-\tau}(\mathcal{Q}_{V*}(f_\tau\circ\bar{\pi}_{V\times\mathbb{G}^{(0)}}))_{|1}$。此外，由引理 3.5.1，我们可以假设函数 $f_\tau(v,x,t)$ 的支集一致紧。令 $\chi\in C_c^\infty(\mathbb{R}^\nu)$ 在 0 的某个邻域内等于 1。考虑

$$\tilde{f}(v,x,t)=\sum_{\tau\in\mathbb{Z}_+^\nu}\chi(\epsilon_\tau t)t^\tau\tilde{f}_\tau(v,x,t),$$

其中 $\epsilon_\tau>0$ 是足够小的常数，使得该级数在 $C_c^\infty(\widetilde{\quad}$定义域$(\mathcal{Q}_V),\Omega^1(V))$ 中收敛。这可以通过初等对角化论证来实现。现在，令

$$v=I_k\Big(\mathcal{Q}_{V*}(\tilde{f}\circ\pi_{V\times\mathbb{G}^{(0)}})\Big)_{|1}\in\Psi_c^k(M).$$

很容易验证 v 满足所需的性质，参见定理 4.1.3.iii 的证明。

□

命题 4.1.5 的证明。 由 (4.6)，我们可以假设 $M=\mathbb{R}^n$。显然，在 $\nu=1$ 和 $\mathcal{F}^1=\mathcal{X}(M)$ 的情形下，第4.1节定义的微分算子阶与经典阶一致。因此，由注 5.1.2，我们可以进一步假设 $k<0$。我们还选取显然的 1-分次基 $V=\mathbb{R}^n$，以及 6：$\mathbb{R}^n\to\mathcal{X}(\mathbb{R}^n)$ 这一像为常值$\widetilde{\quad}$向量场集合的显然映射。注意，在这种情形下，定义域 $\mathrm{Dom}(\mathcal{Q})=V\times M\times\mathbb{R}_+$。因此，若 $f\in C_c^\infty(V\times M\times\mathbb{R}_+)$（在此证明中，我们将所有密度平凡化），且 $\tilde{f}=\mathcal{Q}_{V*}(f\circ\pi_{V\times M})\in C_{c,\mathrm{inv}}^\infty(\mathbb{G},\Omega^{\frac{1}{2}})$，则由

直接计算或利用 (4.4)，可得。

$$I_k(\tilde{f})_{|\underline{1}}(y,x)=\int_0^1 f(\frac{y-x}{t},x,t)t^{-n}\frac{\mathrm{d}t}{t^{k+1}}$$

由傅里叶反演公式可得

$$f(v,x,t)=\int_{\mathbb{R}^n} g(\xi,x,t)e^{i\langle\xi,v\rangle}\,\mathrm{d}\xi,$$

其中 g 是 f 关于第一个变量的傅里叶变换。因此，

$$I_k(\tilde{f})_{|\underline{1}}(y,x)=\int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle\xi,y-x\rangle}\int_0^1 g(t\xi,x,t)\frac{\mathrm{d}t}{t^{k+1}}\,\mathrm{d}\xi$$

积分 $\int_0^1 g(t\xi,\ x,\ t)\,\mathrm{d}_{t^{k+1}}\frac{t}{}$定义了一个阶为 k 的经典符号。此外，任意阶为 k 的经典符号都可以写成这种形式。 □

5.2 第4.2节结果的证明

定理 4.2.1 的证明。集合 $A=M\times\mathbb{R}^\nu_+\backslash 0$ 是 $\mathbb{G}^{(0)}$的一个饱和子集。此外，$\mathbb{G}_{A^c}$=$\mathcal{G}$。由命题 1.8.5，只需证明 $\mathbb{G}_A$ 和 $\mathbb{G}_{A^c}$ 具有 SWCP。显然，群胚 $\mathbb{G}_A=M\times M\times\mathbb{R}^\nu_+\backslash 0\rightrightarrows M\times\mathbb{R}^\nu_+\backslash 0$ 具有 SWCP。群胚 $\mathbb{G}_{A^c}$ 等于群胚$\mathcal{G}\ \rightrightarrows\mathcal{G}^{(0)}$。设 $(V,\ \natural)$ 是一个 ν-分次李基。群 V 通过映射 $v\cdot(L,\ x)=(\natural_{x,\ 0}(v)L\natural_{x,\ 0}(-v),\ \ x)$ 作用在空间$\mathcal{G}^{(0)}$ 上。因此，我们可以构造交叉积群胚$V\ltimes\mathcal{G}^{(0)}\rightrightarrows\mathcal{G}^{(0)}$，见 (1.14)。我们有一个显然的满射下沉映射

$$V\rtimes\mathcal{G}^{(0)}\to\mathcal{G},\quad((L,x),v,(L',x))\mapsto(\natural_{x,0}(v)L',x)$$

结论现在由命题 1.8.6 得出。 □

命题 4.2.4 的证明。 恒等式 (4.10) 相当直接。它们是通过将 (ξ_n,x) 替换为 $(\lambda\xi_n,x_n)$（对应 $\lambda\in\mathbb{R}$），并将 t_n 替换为 λt_n（对应 $\lambda\in\mathbb{R}^\nu_+$）得到的。这就证明了 (4.10)。

现在我们证明 (4.11)。很容易看出，在 Helffer-Nourrigat 锥的定义中，可以将 $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}\subseteq\mathbb{R}^\nu_+$ 替换为 $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}\subseteq\mathbb{R}^\nu_+\backslash 0$ 。设 $(V,\natural)$ 为一个 ν-分次基。根据 ν-分次基的定义可知，$\eta\in$HN$_x$ 当且仅当存在序列$(\xi_n,x_n)_{n\in\mathbb{N}}\subseteq T^*M$, $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}\subseteq\mathbb{R}^\nu_+\backslash 0$，使得 $x_n\to x$, $t_n\to 0$，并且 $\xi_n\circ\natural_{x_n,t_n}\in V^*$收敛到$\eta\circ\natural_{x,0}\in V^*$。

设 $\eta\in$HN$_x$。取一个子列后，可设 ker$(\natural_{x_n,t_n})$ 收敛。由引理 2.2.2，极限具有如下形式：$\natural_x^{-1},{}_0(L)$，其中某个 $L\in\mathcal{G}^0_x$。显然，$\xi_n\circ\natural_{x_n,t_n}\in$ ker$(\natural_{x_n,t_n})^\perp$。因此，由命题 3.0.1，$\eta\circ\natural_{x,0}\in\natural_x^{-1},{}_0(L)^\perp$，这意味着 $\eta\in L^\perp$。

反之，若 $\eta\in L^\perp$，则存在序列 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\subseteq M$, $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}\subseteq\mathbb{R}^\nu_+\backslash\{0\}$，使得$x_n\to x$, $t_n\to 0$ 且 ker$(\natural_{x_n,t_n})\to\natural_x^{-1},{}_0(L)$。因此，ker$(\natural_{x_n,t_n})^\perp\to\natural_x^{-1},{}_0(L)^\perp$。由于 $\eta\in L^\perp$,$\eta\circ\natural_{x,0}\in\natural_x^{-1},{}_0(L)^\perp$。由命题 3.0.1，存在 $\eta_n\in$ ker$(\natural_{x_n,t_n})^\perp$，使得 $\eta_n\to\eta\circ\natural_{x,0}$。由于 $\eta_n\in$ ker$(\natural_{x_n,t_n})^\perp$，存在唯一的 $\xi_n\in T^*_{x_n}M$，使得 $\eta_n=\xi_n\circ\natural_{x_n,t_n}$。因此，$\eta\in$HN$_x$。

集合 HN$_x$ 在 $\mathfrak{G}_x$ 的余伴随作用下是闭的，这是命题 2.2.10.ii 的结果。

集合 HN$_x$ 是闭的，因为如果 $\eta_n\in$HN$_x$ 收敛到 $\eta\in\mathfrak{g}^*_x$，那么对每个 $n\in\mathbb{N}$，都存在$L_n\in\mathcal{G}^0_x$ 使得 $\eta_n\in L_n^\perp$。取一个子列后，我们可以假设 L_n 收敛到某个 $L\in\mathcal{G}^0_x$。根据命题 3.0.1，$\eta\in L^\perp$。

剩下要证明 $\mathrm{HN}_{(\xi,\ x)}$ 是闭的，并且在 $\mathfrak{G}_x$的余伴随作用下保持闭。考虑由以下内容定义的深度为 $(N$的 $(\nu+1)$-子黎曼结构，$1)$

$$\tilde{\mathcal{F}}^{(k,0)}=\mathcal{F}^k,\quad \tilde{\mathcal{F}}^{(k,1)}=\mathcal{X}(M). \tag{5.11}$$

该结构是弱交换的。它在 x 处的振荡群等于 $\mathfrak{g}_x\oplus T_xM$，见(2.37)。$\widetilde{\ }$它有自己的 Helffer-Nourrigat锥$\mathrm{HN}_x\subseteq\mathfrak{g}_x^*\oplus T_x^*M$。容易立即看出

$$\widetilde{\mathrm{HN}}_x=(\mathrm{HN}_x\times\{0\})\sqcup\bigsqcup_{\xi\in T_x^*M\backslash 0}\mathrm{HN}_{(\xi,x)}\times\{\xi\},\ \widetilde{\mathrm{HN}}_{(\xi,x)}=(\mathrm{HN}_{(\xi,x)}\times\{0\})\sqcup\bigsqcup_{t\in\mathbb{R}_+^\times}\mathrm{HN}_{(\xi,x)}\times\{t\xi\} \tag{5.12}$$

$\widetilde{\ }$我们在上文已证明，HN_x 是 $\mathfrak{g}_x^*\oplus T_x^*M$ 的一个闭子集，且在群 $\mathfrak{G}_x\times T_xM$的余伴随作用下是闭的。因此，$\mathrm{HN}_{(\xi,x)}$ 是 $\mathfrak{g}_x^*$ 的一个闭子集，且在群 $\mathfrak{G}_x$的余伴随作用下是闭的。

□

命题 4.2.5 的证明。设 $L\in\mathcal{G}_x^0$。由定理 A.0.3，弱包含于 $\Xi_{\mathfrak{G}_x/L,0}$ 的不可约酉表示的集合通过轨道方法(A.2)对应于$\bigcup_{g\in\mathfrak{G}_x}(Ad(g)L)^\perp/\mathfrak{G}_x$。由命题 2.2.10.ii与(4.11)，以及$\mathrm{HN}_x$ 是 $\mathfrak{g}_x^*$的闭子集，我们推出$\mathrm{HN}^x=\bigcup_{L\in\mathcal{G}_x^0}\bigcup_{g\in\mathfrak{G}_x}(Ad(g)L)^\perp$。结论随之成立。

□

命题 4.2.6 的证明。由命题 4.2.5，π 弱包含于某个在 x 处的切锥 L 的 $\Xi_{\mathfrak{G}_x/L,0}$ 中。令 $\Xi_{(L,\ x,\ 0)}$ 为群胚 $\mathbb{G}\rightrightarrows\mathbb{G}^{(0)}$ 的正则表示，见例 1.7.2。令 $f\in C_{c,\ \mathrm{inv}}^\infty(\mathbb{G},\ \Omega^{\frac{1}{2}})$，$(V,\ \natural)$ 为一个 ν-分次基，$\tilde{f}$如 (2.27) 所示。空间$\mathbb{G}_{(L,\ x,\ 0)}=\{(gL,\ x,\ 0)\colon\ g\in\mathfrak{G}_x\}$与 $\mathfrak{G}_x/L$ 同构，且 $\Xi_{(L,\ x,\ 0)}(f)=\Xi_{\mathfrak{G}_x/L,0}(\natural_{x,0*}(f(\cdot,x,0)))$。因此，

$$\left\|\pi\left(\natural_{x,0*}(\tilde{f}(\cdot,x,0))\right)\right\|\leqslant\left\|\Xi_{\mathfrak{G}_x/L,0}(\natural_{x,0*}(\tilde{f}(\cdot,x,0)))\right\|=\left\|\Xi_{(L,x,0)}(f)\right\|\leqslant\|f\|_{C^*\mathbb{G}},$$

其中，在第一个恒等式中，我们用到了 π 弱包含于 $\Xi_{\mathfrak{G}_x/L,0}$ 这一事实。由此可知，π_{inv} 良定义，并可延拓至 $C_{\mathrm{inv}}^*\mathbb{G}$。等式

$$\pi(C_c^\infty(\mathfrak{G}_x,\Omega^1\mathfrak{g}_x))=\pi_{\mathrm{inv}}(C_{c,\mathrm{inv}}^\infty(\mathbb{G},\Omega^{\frac{1}{2}})) \tag{5.13}$$

这是因为：对于任意 $h\in C_c^\infty(\mathfrak{G}_x,\ \Omega^1\mathfrak{g}_x)$，存在 $h'\in C_c^\infty(\widetilde{\ }$定义域$(\mathcal{Q}_V),\ \Omega^1(V))$，使得$\natural_{x,\ 0*}(h',\ x,\ 0)=h$，这意味着 $\pi_{\mathrm{inv}}(\mathcal{Q}_{V*}(h'\circ\pi_{V\times\mathbb{G}^{(0)}}))=\pi(h)$。将定理1.7.7应用于 π，得到：$C^*\mathfrak{G}_x\to\mathcal{L}(L^2(\pi))$、$C^\infty(\pi)=\pi(C_c^\infty(\mathfrak{G}_x,\ \Omega^1(\mathfrak{g}_x)))L^2(\pi)$。因此（4.14）成立。最后，（5.13）以及 π 的不可约性意味着 π_{inv} 是不可约的。 □

定理 4.2.8 的证明。该 C^*-代数 $C^*\mathbb{G}$ 是可分的，因为 $\mathbb{G}$ 是第二可数的。因此，$C_{\mathrm{inv}}^*\mathbb{G}$ 也是可分的。由（1.39），我们有一个短正合列

$$0\to\mathcal{K}(L^2(M))\otimes C_0(\mathbb{R}_+^\nu\backslash 0)\to C^*\mathbb{G}\to C^*\mathcal{G}\to 0 \tag{5.14}$$

C^*子代数 $C_{\mathrm{inv}}^*\mathbb{G}$包含$\mathcal{K}(L^2(M))\otimes C_0(\mathbb{R}_+^\nu\backslash 0)$，因为 $C_c^\infty(M\times M\times\mathbb{R}_+^\nu,\ \Omega^{\frac{1}{2}})\subseteq C_{c,\ \mathrm{inv}}^\infty(\mathbb{G},\ \Omega^{\frac{1}{2}})$。设

$$C_{\mathrm{inv}}^*\mathcal{G}:=\frac{C_{\mathrm{inv}}^*\mathbb{G}}{\mathcal{K}(L^2(M))\otimes C_0(\mathbb{R}_+^\nu\backslash 0)}$$

根据 (5.14)，它是 C^* 子代数 $C^*\mathcal{G}$。我们有短正合列

$$0\to\mathcal{K}(L^2(M))\otimes C_0(\mathbb{R}_+^\nu\backslash 0)\to C_{\mathrm{inv}}^*\mathbb{G}\to C_{\mathrm{inv}}^*\mathcal{G}\to 0. \tag{5.15}$$

设 $(V,\natural)$ 是一个 ν 分次李基。根据 (1.37)（ L^1 估计），若 $g\in C_c^\infty(\widetilde{\text{定义域}}(\mathcal{Q}_V),\Omega^1(V))$ 在 $V\times M\times\{0\}$ 上为零，则 $\mathcal{Q}_{V*}(g\circ\pi_{V\times\mathbb{G}^{(0)}})\in\mathcal{K}(L^2(M))\otimes C_0(\mathbb{R}_+^\nu\backslash 0)$。由此观察，我们可以定义映射

$$\phi: C_c^\infty(V\times M,\Omega^1(V))\to C^*_{\mathrm{inv}}\mathcal{G},\quad f\mapsto \mathcal{Q}_{V*}(f'\circ\pi_{V\times\mathbb{G}^{(0)}})\bmod \mathcal{K}(L^2(M))\otimes C_0(\mathbb{R}_+^\nu\backslash 0)$$

其中 $f'\in C_c^\infty(\widetilde{\text{定义域}}(\mathcal{Q}_V),\ \Omega^1(V))$ 是任意满足 $f'_{|V\times M\times\{0\}}=f$ 的光滑函数。根据备注 3.5.3，映射 ϕ 是一个 $*$-代数同态。这里， $V\times M$ 上的 $*$-代数结构来自群胚结构 $V\times M\rightrightarrows M$，该结构是群胚 $V\rightrightarrows\{\mathrm{pt}\}$ 与平凡群胚 $M\rightrightarrows M$ 的乘积。由 $V\times M\rightrightarrows M$ 的最大 C^*-代数的定义可知， ϕ 可延拓为一个 $*$-同态

$$\phi: C^*(V)\otimes C_0(M)\to C^*_{\mathrm{inv}}\mathcal{G}.$$

由于任意两个 C^*-代数之间的 $*$-同态的像都是闭的，且 ϕ 的像包含 $C_{c,\ \mathrm{inv}}^\infty(\mathbb{G},\ \Omega^{\frac{1}{2}})$，因此可得 ϕ 是满射。 $C^*(V)\otimes C_0(M)$ 这个 C^*-代数是 I 型。事实上，它是极限型，见 [Dix77]。根据命题 B.0.3， $C^*_{\mathrm{inv}}\mathcal{G}$ 是 I 型。因此，再次根据命题 B.0.3， $C^*_{\mathrm{inv}}\mathbb{G}$ 是 I 型。

现在我们证明 (4.15) 是一个双射。根据 (5.15),

$$\widehat{C^*_{\mathrm{inv}}\mathbb{G}}=(\mathbb{R}_+^\nu\backslash 0)\sqcup\widehat{C^*_{\mathrm{inv}}\mathcal{G}}\tag{5.16}$$

and $\widehat{\ }\quad\widehat{\ }\quad\frown\mathbb{R}_+^\nu\backslash 0$ 在其通常拓扑下是 $C^*_{\mathrm{inv}}\mathbb{G}$ 的一个开子集。因此，我们需要证明 $C^*_{\mathrm{inv}}\mathcal{G}$ =HN .

这些群胚纤维化在 M 上。此外，映射 ϕ 是一个 $C_0(M)$-$*$-同态。因此，对于任意 $x\in M$，映射 ϕ 下降为 $*$-同态，连接 $C^*(V\times M)$ 和 $C^*_{\mathrm{inv}}\mathsf{G}$ 在 x 处的纤维。由于群胚 $V\times M\rightrightarrows M$ 和 $\mathsf{G}\rightrightarrows\mathsf{G}^{(0)}$ 满足 SWCP，我们可以应用命题 1.8.7。 $C^*(V\times M)$ 的纤维是 C^*V，而 $C^*\mathsf{G}$ 在 x 处的纤维是 $C^*\mathsf{G}_x$。令 $C^*_{\mathrm{inv}}\mathsf{G}_x$ 为 $C^*_{\mathrm{inv}}\mathsf{G}$ 在 x 处的纤维。由于 $C^*_{\mathrm{inv}}\mathsf{G}$ 是 $C^*\mathsf{G}$ 的一个 C^*-子代数， $C^*_{\mathrm{inv}}\mathsf{G}_x$ 也是 $C^*\mathsf{G}_x$ 的一个 C^*-子代数。这是众所周知的事实，可由 [Wil07、命题 C.10.a 和命题 C.10.c] 轻易推出。因此，我们得到一个映射 $\phi_x: C^*(V)\to C^*_{\mathrm{inv}}\mathsf{G}_x$。

由于 ϕ 是满射， $C^*_{\mathrm{inv}}\mathcal{G}$ 的不可约表示就是经由 $\ker(\phi)$因子化的$C^*(V)\otimes C_0(M)$ 的不可约表示。 $C^*(V)\otimes C_0(M)$ 的一个不可约表示是一个二元组 (π,x)，其中 π: $C_c^\infty(V,\Omega^1(V))\to\mathcal{L}(L^2(\pi))$ 是 V作为李群的一个不可约酉表示，并且 $x\in M$。当且仅当 (π,x) 经由 $\ker(\phi)$ 因子化时，

$$\|\pi(a)\|\leqslant\|\phi_x(a)\|_{C^*_{\mathrm{inv}}\mathcal{G}_x},\quad\forall a\in C^*(V).$$

由于 $C^*_{\mathrm{inv}}\mathcal{G}_x$ 是 C^*- $C^*\mathcal{G}_x$ 的一个子代数，且群胚$\mathcal{G}_x$ 满足 WCP，因此

$$\|b\|_{C^*_{\mathrm{inv}}\mathcal{G}_x}=\|b\|_{C^*\mathcal{G}_x}=\|b\|_{C^*_r\mathcal{G}_x}=\sup\{\big\|\Xi_{\mathfrak{G}_x/L}(b)\big\|: L\in\mathcal{G}_x^0\},\quad\forall b\in C^*_{\mathrm{inv}}\mathcal{G}_x.$$

因此，当且仅当 (π,x) 经由 $\ker(\phi)$ 因子化时，

$$\|\pi(a)\|\leqslant\sup\{\big\|\Xi_{\mathfrak{G}_x/L}(\phi_x(a))\big\|: L\in\mathcal{G}_x^0\},\quad\forall a\in C^*(V)$$

由 $C_c^\infty(V,\ \Omega^1(V))$ 的稠密性，只需对 $a\in C_c^\infty(V,\ \Omega^1(V))$ 验证上述结论。若 $f\in C_c^\infty(V,\ \Omega^1(V))$, 则 $\Xi_{\mathfrak{G}_x/L}(\phi_x(f))=\Xi_{\mathfrak{G}_x/L,0}(\natural_{x,0*}(f))$。因此，该对 $(\pi,\ x)$ 通过 ϕ 因子化，当且仅当 π 被弱包含于表示 $\{\Xi_{\mathfrak{G}_x/L}\circ\natural_{x,0*}:\ L\in\mathcal{G}_x^0\}$。由命题 4.2.5,

该集合是形如 $\pi\circ\natural_{x,\,0*}$ 的 V 的表示的集合，其中 $\pi\in\mathrm{HN}_x$。这就完成了关于 $C^*_{\mathrm{inv}}\mathcal{G}$ =HN 的证明。仔细审视该证明可见，我们还证明了映射 (4.15) 是 $C^*_{\mathrm{inv}}\mathcal{G}$ 与 HN 之间的同胚。

还需证明 (4.15) 是一个同胚。我们只需证明：若 $A\subseteq\mathbb{R}^\nu_+\backslash 0$ 是一个闭子集（赋予其通常的欧几里得拓扑），那么 A 在 $C^*_{\mathrm{inv}}\mathbb{G}$ 中的闭包与 A 在定义 4.2.7 中的拓扑下的闭包相同。为此，考虑作为 $\mathbb{G}^{(0)}$ 的子集的集合 $M\times A$。它是一个饱和子集。因此，它在 $\mathbb{G}^{(0)}$ 中的闭包 $M\times A$ 也是饱和的。所以，$C^*\mathbb{G}_{M\times A}$ 是 $\overline{C^*\mathbb{G}}$ 的一个商。令 $C^*_{\mathrm{inv}}\mathbb{G}_{M\times A}$ 为 $C^*_{\mathrm{inv}}\mathbb{G}$ 在 $C^*\mathbb{G}_{M\times A}$ 中的像。由于 $C^*_{\mathrm{inv}}\mathbb{G}_{\overline{M\times A}}$ 是 $C^*_{\mathrm{inv}}\mathbb{G}$ 的一个商，其谱是 $C^*_{\mathrm{inv}}\mathbb{G}$ 的一个闭子集。我们将证明其谱实际上是 $C^*_{\mathrm{inv}}\mathbb{G}$ 中 A 的闭包。为此，只需证明 A 是 $C^*_{\mathrm{inv}}\mathbb{G}_{M\times A}$ 的谱的一个稠密子集。注意，根据命题 1.8.5，$\mathbb{G}_{M\times A}$ 满足 SWCP。此外，根据其构造，$M\times A$ 在其对象空间中稠密。因此，根据命题 1.8.1，

$$\|a\|_{C^*\mathbb{G}_{\overline{M\times A}}}=\|a\|_{C^*_r\mathbb{G}_{\overline{M\times A}}}=\sup\{\pi_t(a):t\in A\},\quad\forall a\in C^*\mathbb{G}_{\overline{M\times A}}. \tag{5.17}$$

由于 $C^*_{\mathrm{inv}}\mathbb{G}_{\overline{M\times A}}$ 是 $C^*\mathbb{G}_{M\times A}$ 的子 C^*-代数，(5.17) 对 $a\in C^*_{\mathrm{inv}}\mathbb{G}_{M\times A}$ 仍然成立。这意味着在 $C^*_{\mathrm{inv}}\mathbb{G}_{M\times A}$ 的谱中，A 是稠密的。

我们现在计算 $C^*_{\mathrm{inv}}\mathbb{G}_{M\times A}$ 的谱。事实上，群胚 $\mathbb{G}_{M\times A}$ 与群胚 $\mathbb{G}$ 非常相似。它等于

$$\mathbb{G}_{\overline{M\times A}}=M\times M\times A\sqcup\{(gL,x):(L,x,0)\in\overline{M\times A},g\in\mathfrak{g}_x\}\times\{0\},$$

我们上面给出的用于计算 $C^*_{\mathrm{inv}}\mathbb{G}$ 的谱的证明同样适用于 $C^*_{\mathrm{inv}}\mathbb{G}_{M\times A}$，从而推出 $C^*_{\mathrm{inv}}\mathbb{G}_{M\times A}$ 的谱恰好是 A 在定义 4.2.7 中的拓扑下的闭包。

□

在本章的后续部分，有必要指出非奇异表示的集合具有如下相当自然的描述。$C^*_{\mathrm{inv}}\mathbb{G}$ 中的闭包 $C^\infty_{c,\mathrm{inv},1}(\mathbb{G},\Omega^{\frac12})$ 将记为 $C^*_{\mathrm{inv},1}(\mathbb{G})$。由定理 2.7.4.ii，$C^*_{\mathrm{inv},1}(\mathbb{G})$ 是 $C^*_{\mathrm{inv}}\mathbb{G}$ 的双边理想。因此，$C^*_{\mathrm{inv},1}\mathbb{G}$ 的谱等于 $C^*_{\mathrm{inv}}\mathbb{G}$ 的谱中那些在 $C^*_{\mathrm{inv},1}(\mathbb{G})$ 上不消失的 $C^*_{\mathrm{inv}}\mathbb{G}$ 的不可约酉表示所构成的开子集。

引理 5.2.1. *C^*-代数 $C^*_{\mathrm{inv},\,1}(\mathbb{G})$ 是可分的 I 型代数，其谱为 $(\mathbb{R}^\times_+)^\nu\sqcup\widehat{\mathrm{HN}}^{\mathrm{Nonsing}}\times\{0\}$。*

证明。C^*-代数 $C^*_{\mathrm{inv},\,1}(\mathbb{G})$ 是可分的，因为它是一个可分 C^*-代数的双边理想。根据命题 B.0.3，它是 I 型代数。现在我们来计算其谱。若 $f\in C^\infty_{c,\,\mathrm{inv},\,1}(\mathbb{G},\,\Omega^{\frac12})$，则 f 可以写成形如 $\theta_k(D)*g$ 的元素之和，其中 $1\leq k$ 和 $g\in C^\infty_{c,\,\mathrm{inv}}(\mathbb{G},\,\Omega^{\frac12})$。在 $M\times M\times\mathbb{R}^\nu_+\backslash 0$ 上，

$$\theta_k(D)*g(y,x,t)=t^kD_yg(y,x,t)$$

由于对于所有 $i\in[\![1,\,\nu]\!]$，都有 $1\leq k,1\leqslant k_i$。因此，若 $t\in\mathbb{R}^\nu_+\backslash 0$ 但不在 $(\mathbb{R}^\times_+)^\nu$ 中，则 $\theta_k(D)*g(y,\,x,\,t)$ 为零。因此，$\pi_t(f)$ 为零。另一方面，根据定理 2.7.4.i，若 $t\in(\mathbb{R}^\times_+)^\nu$，则 π_t 在 $C^*_{\mathrm{inv},\,1}\mathbb{G}$ 上不为零。由此我们证明了 $C^*_{\mathrm{inv},\,1}(\mathbb{G})\cap\mathbb{R}^\nu_+\backslash 0=(\mathbb{R}^\times_+)^\nu$。

根据定理 4.2.8 中对 $C^*_{\mathrm{inv}}(\mathbb{G})$ 上拓扑的描述，以及 $\widehat{C^*_{\mathrm{inv},\,1}(\mathbb{G})}$ 是 $\widehat{C^*_{\mathrm{inv}}\mathbb{G}}$ 的一个开子集这一事实，可知 $\widehat{C^*_{\mathrm{inv},1}(\mathbb{G})}\subseteq(\mathbb{R}^\times_+)^\nu\sqcup\widehat{\mathrm{HN}}^{\mathrm{Nonsing}}\times\{0\}$。接下来只需证明，如果 $(\pi,\,x)\in\widehat{\mathrm{HN}}^{\mathrm{Nonsing}}$，那么 π_{inv} 在 $C^\infty_{c,\,\mathrm{inv},\,1}(\mathbb{G},\,\Omega^{\frac12})$ 上不消失。注意，若 $f\in C^\infty_c(\mathfrak{G}_x,\,\Omega^1)$，且 D 是 $\mathfrak{G}_x$ 上满足 $\alpha_\lambda(D)=\lambda^nD$ 的右不变微分算子，其中 $n\in\mathbb{N}^\nu$，则存在 $D'\in\mathrm{DO}^n(M)$ 和 $f'\in C^\infty_{c,\,\mathrm{inv}}(\mathbb{G},\,\Omega^{\frac12})$，使得 $\pi(D(f))=\pi_{\mathrm{inv}}(\theta_n(D)*f')$。这

这显然意味着 π_{inv} 在 $C_{c,\ \mathrm{inv},\ 1}^{\infty}(\mathbb{G},\ \Omega^{\frac{1}{2}})$ 上不为零。 □

5.3 第 4.3 节结果的证明

在继续证明定理 4.3.2 之前，我们需要先证明几个引理。

引理 5.3.1。 设 $k\in\mathbb{C}^{\nu}$, $u\in\Psi^{k}(\mathbb{G})$, $g\in C_{c,\ \mathrm{inv},\ -k+1}^{\infty}(\mathbb{G},\Omega^{\frac{1}{2}})$。极限

$$\sigma^{k}(u)*g:=\lim_{\lambda_1\to+\infty,\cdots,\lambda_\nu\to+\infty}\lambda^{-k}\alpha_{\lambda}(u)*g \tag{5.18}$$

在 $C_{\mathrm{inv}}^{*}\mathbb{G}$ 中存在，因此定义了一个线性映射 $\sigma^{k}(u)*\cdot:\ C_{c,\ \mathrm{inv},\ -k+1}^{\infty}(\mathbb{G},\Omega^{\frac{1}{2}})\to C_{\mathrm{inv}}^{*}\mathbb{G}$。

证明。 设 $f\in C_{c,\ \mathrm{inv},\ k+1}^{\infty}(\mathbb{G},\Omega^{\frac{1}{2}})$ 使得 $u=I_k(f)$。将 f 按照 (2.35) 展开，将 g 按照 (2.33) 展开，并利用 (5.1)，只需证明：若 $f,\ g\in C_{c,\ \mathrm{inv}}^{\infty}(\mathbb{G},\ \Omega^{-\frac{1}{2}})$, $k\in\mathbb{C}_{<0}^{\nu}$, $l\in\mathbb{Z}_{+}^{\nu}$, $D\in\mathrm{DO}^{l}(M)$ with $R(k_i)+l_i>0$ 对所有 $i\in[\![1,\ \nu]\!]$ 都成立，则

$$\lim_{\lambda_1\to+\infty,\cdots,\lambda_\nu\to+\infty}\lambda^{-k}\alpha_{\lambda}(I_k(f))*\theta_l(D)*g$$

存在于 $C_{\mathrm{inv}}^{*}\mathbb{G}$ 中。对于任意 $S\subseteq[\![1,\ \nu]\!]$ 和 $\lambda\in]1,\ +\infty[^{\nu}$，令

$$\Lambda_S^{\lambda}=\{\mu\in(\mathbb{R}_+^{\times})^{\nu}:\forall i\in S,\mu_i\in[1,\lambda_i[\text{ and }\forall i\notin S,\mu_i\in]0,1]\}$$
$$\Lambda_S=\{\mu\in(\mathbb{R}_+^{\times})^{\nu}:\forall i\in S,\mu_i\in[1,+\infty[\text{ and }\forall i\notin S,\mu_i\in]0,1]\}$$

经过变量替换,

$$\begin{aligned}\lambda^{-k}\alpha_{\lambda}(I_k(f))*\theta_l(D)*g&=\int_{]0,\lambda_1]\times\cdots\times]0,\lambda_\nu]}\alpha_{\mu}(f)*\theta_l(D)*g\frac{\mathrm{d}\mu}{\mu^{k+\underline{1}}}\\&=\sum_{S\subseteq[\![1,\nu]\!]}\int_{\Lambda_S^{\lambda}}\alpha_{\mu}(f)*\theta_l(D)*g\frac{\mathrm{d}\mu}{\mu^{k+\underline{1}}}\end{aligned}$$

将 D 写成引理 5.1.5 中的形式后，我们只需处理如下形式的积分

$$\int_{\Lambda_S^{\lambda}}\alpha_{\mu}(f)*\theta_l(D_1D_2)*g\frac{\mathrm{d}\mu}{\mu^{k+\underline{1}}}=\int_{\Lambda_S^{\lambda}}\alpha_{\mu}(f*\theta_{l_S}(D_1))*\theta_{l_{S^c}}(D_2)*g\frac{\mathrm{d}\mu}{\mu^{k+l_S+\underline{1}}}$$

由 (2.23) 可得,

$$\begin{aligned}&\lim_{\lambda_1\to+\infty,\cdots,\lambda_\nu\to+\infty}\int_{\Lambda_S^{\lambda}}\|\alpha_{\mu}(f*\theta_{l_S}(D_1))*\theta_{l_{S^c}}(D_2)*g\|_{C^*\mathbb{G}}\frac{\mathrm{d}\mu}{\mu^{\Re(k)+l_S+\underline{1}}}\\&=\int_{\Lambda_S}\|\alpha_{\mu}(f*\theta_{l_S}(D_1))*\theta_{l_{S^c}}(D_2)*g\|_{C^*\mathbb{G}}\frac{\mathrm{d}\mu}{\mu^{\Re(k)+l_S+\underline{1}}}\\&\leqslant\int_{\Lambda_S}\|f*\theta_{l_S}(D_1)\|_{C^*\mathbb{G}}\|\theta_{l_{S^c}}(D_2)*g\|_{C^*\mathbb{G}}\frac{\mathrm{d}\mu}{\mu^{\Re(k)+l_S+\underline{1}}}<+\infty\end{aligned}$$

结果得证。 □

引理 5.3.2. 设 $k\in\mathbb{C}^{\nu}$ 和 $u\in\Psi^{k}(\mathbb{G})$。若 $\lambda\in(\mathbb{R}_+^{\times})^{\nu}$，则 $\lambda^{-k}\alpha_{\lambda}(u)-u$ 在 $M\times M\times(\mathbb{R}_+^{\times})^{\nu}$ 上的限制属于 $C^{\infty}(M\times M\times(\mathbb{R}_+^{\times})^{\nu},\ \Omega^{\frac{1}{2}})$。此外，存在与 λ 无关的 $C>0$，使得

$$\mathrm{supp}(\lambda^{-k}\alpha_{\lambda}(u)-u)\subseteq M\times M\times[0,C]^{\nu}\backslash 0\cup\mathcal{G}\times\{0\},\quad\forall\lambda\in[1,+\infty[^{\nu}.$$

证明。 设 $f \in C_{c,\mathrm{inv},k+1}^{\infty}(\mathbb{G}, \Omega^{\frac{1}{2}})$ 满足 $u = I_k(f)$。将 f 写成 (2.33) 中的形式后，不失一般性，可假设 $k \in \mathbb{C}_{<0}^{\nu}$。经过变量替换，

$$\lambda^{-k}\alpha_\lambda(u) - u = \int_{]0,\lambda_1]\times\cdots]0,\lambda_\nu]} \alpha_\mu(f)\frac{\mathrm{d}\mu}{\mu^{k+1}} - \int_{]0,1]^\nu} \alpha_\mu(f)\frac{\mathrm{d}\mu}{\mu^{k+1}}$$

So,

$$\lambda^{-k}\alpha_\lambda(u)(y,x,t) - u(y,x,t) = \int_{]0,\lambda_1]\times\cdots]0,\lambda_\nu]} f(y,x,\mu t)\frac{\mathrm{d}\mu}{\mu^{k+1}} - \int_{]0,1]^\nu} f(y,x,\mu t)\frac{\mathrm{d}\mu}{\mu^{k+1}}$$

由于该积分避开了 $\mu = 0$ （它会引入奇点，因为 f 在 $\mathbb{G}$ 上光滑而在$M \times M \times \mathbb{R}_+^\nu$上不光滑）和 $k \in \mathbb{C}_{<0}^{\nu}$，因此差定义了一个光滑函数。由于 f 是紧支撑的，当 t足够大时，该差为零。因此，C 存在。 □

注意，定理 4.2.1、命题 1.8.1以及 $M \times (\mathbb{R}_+^\times)^\nu$ 在 $\mathbb{G}^{(0)}$ 中的稠密性蕴含

$$\|f\|_{C^*\mathbb{G}} = \sup\{\|\pi_t(f)\| : t \in (\mathbb{R}_+^\times)^\nu\}, \quad \forall f \in C_{c,\mathrm{inv}}^{\infty}(\mathbb{G}, \Omega^{\frac{1}{2}}). \tag{5.19}$$

下面的恒等式显然成立

$$\alpha_\lambda(u)_{|t} = u_{|\lambda t}, \quad \forall \lambda \in (\mathbb{R}_+^\times)^\nu, t \in \mathbb{R}_+^\nu\backslash 0, u \in C_{r,s}^{-\infty}(\mathbb{G}, \Omega^{\frac{1}{2}}). \tag{5.20}$$

我们还回顾一下，若$u \in C_{r,\ s}^{-\infty}(\mathbb{G}, \Omega^{\frac{1}{2}})$ 且 $t \in \mathbb{R}^\nu\backslash 0$，则$u_{|t}$是 $\pi_t(u)$的Schwartz核。我们基本上将这两个对象视为同一事物。

引理 5.3.3. 若 $k \in \mathbb{C}^\nu$，$u \in \Psi^k(\mathbb{G})$ 满足 $u_{|1} \in C_c^\infty(M \times M, \Omega^{\frac{1}{2}})$，则对所有 $g \in C_{c,\ \mathrm{inv},-k+1}^{\infty}(\mathbb{G}, \Omega^{\frac{1}{2}})$ 以及 $(\pi, x) \in \widehat{\mathrm{HN}}$，$\pi_{\mathrm{inv}}(\sigma^k(u) * g) = 0$。等价地，$\sigma^k(u) * g \in \mathcal{K}(L^2(M)) \otimes C_0(\mathbb{R}_+^\nu\backslash 0)$，见(5.15)和定理 *4.2.8*。

该引理意味着，$\pi_{\mathrm{inv}}(\sigma^k(u) * g)$ 除去 $C_c^\infty(M \times M, \Omega^{\frac{1}{2}})$ 和 g后，仅依赖于$u_{|1}$。

证明。 由 (5.20) 和引理 5.3.2 可知，对所有 $t \in (\mathbb{R}_+^\times)^\nu$，有

$$u_{|t} = \alpha_t(u)_{|1} = t^k(t^{-k}\alpha_t(u)_{|1} - u_{|1} + u_{|1}) \in C_c^\infty(M \times M, \Omega^{\frac{1}{2}})$$

设 C 如引理 5.3.2 中所述，$C = (C, \cdots, C) \in (\mathbb{R}_+^\times)^\nu$。存在 $h \in C_c^\infty(M \times M \times [C/2, C]^\nu, \Omega^{\frac{1}{2}})$ 使得 $I_k(h)_{|C} = u_{|C}$，参见定理 4.1.3.i 的证明。根据关于 h 的支集的假设，对所有 $\lambda \in [C, +\infty[^\nu$，有 $I_k(h)_{|\lambda} = \lambda^k u_{|C}$。因此，由 (5.20) 和引理 5.3.2 可得，

$$\alpha_\lambda(u - I_k(h))_{|C} = (\alpha_\lambda(u) - \lambda^k u)_{|C} = 0, \quad \forall \lambda \in [1, +\infty[^\nu. \tag{5.21}$$

令 $g \in C_{c,\mathrm{inv},-k+1}^{\infty}(\mathbb{G}, \Omega^{\frac{1}{2}})$。由 (5.21)，$\pi_C(\sigma^k(u - I_k(h)) * g) = 0$。对于任意 $\lambda, \mu \in (\mathbb{R}_+^\times)^\nu$ 和 $u' \in \Psi^k(\mathbb{G})$，我们有

$$\pi_{\lambda\mu}(\sigma^k(u') * g) = \pi_\lambda(\alpha_\mu(\sigma^k(u') * g)) = \mu^k\pi_\lambda(\sigma^k(u') * \alpha_\mu(g))$$

因此，对于所有 $\lambda \in (\mathbb{R}_+^\times)^\nu$，$\pi_\lambda(\sigma^k(u - I_k(h)) * g) = 0$。由 (5.19)，$\sigma^k(u - I_k(h)) * g = 0$。因此，$\sigma^k(u) * g = \sigma^k(I_k(h)) * g$。另一方面，由于 h 的支集与 0 处的纤维相离，利用 (1.42)，对于任意 $\lambda \in (\mathbb{R}_+^\times)^\nu$，$\alpha_\lambda(I_k(h)) * g \in C_c^\infty(M \times M \times \mathbb{R}_+^\nu\backslash 0, \Omega^{\frac{1}{2}})$。因此，$\sigma^k(I_k(h)) * g \in \mathcal{K}(L^2(M)) \otimes C_0(\mathbb{R}_+^\nu\backslash 0)$。 □

Lemma 5.3.4. 若 $l \in \mathbb{Z}_+^\nu$ 且 $X \in F^l$，则 $\pi_{\mathrm{inv}}(\theta_l(X)) = \pi([X]_{l,\ x})$ 作为映射 $C^{-\infty}(\pi) \to C^{-\infty}(\pi)$.

证明。由 $C^\infty(\pi)$ 在 $C^{-\infty}(\pi)$中的稠密性，只需在 $C^\infty(\pi)$上验证等式。根据 (4.14)，我们只需验证当对 $f\in C_{c,\ \mathrm{inv}}^{\infty}(\mathbb{G},\ \Omega^{\frac{1}{2}})$复合 $\pi_{\mathrm{inv}}(f)$时，两者相等。设 $(V,\ \natural)$为一个 ν-分次李基。我们选取 V，使得存在 $v_0\in V^l$ 满足 $\natural(v_0)=X$ （由引理 3.1.1 可知这样的对象存在）。于是，$\natural_{x,\ 0}(v_0)=[X]_{l,\ x}$，由注 3.5.4 及 (4.13) 中 π_{inv} 的定义可得该引理。

□

引理 5.3.5. 设 $(\pi,x)\in\widehat{\mathrm{HN}}^{\mathrm{Nonsing}}$，$k\in\mathbb{C}^\nu$。则有

$$C^\infty(\pi)=\left\{\sum_{i=1}^n\pi_{\mathrm{inv}}(g_i)\xi_i:g_i\in C^\infty_{c,\mathrm{inv},k}(\mathbb{G},\Omega^{\frac{1}{2}}),\xi_i\in C^\infty(\pi)\right\}.$$

证明. 通过反复应用定理 A.0.7 和引理 5.3.4，我们得到

$$C^\infty(\pi)=\left\{\sum_{i=1}^n\pi_{\mathrm{inv}}(\theta_{l_i}(D_i))\xi_i:l_i\in\mathbb{Z}_+^\nu,k\preceq l_i,D_i\in\mathrm{DO}^{l_i}(M),\xi_i\in C^\infty(\pi)\right\}.$$

对每个 ξ_i应用 (4.14)，由 (2.33) 即得结论。 □

引理 5.3.6. 设 $u\in\Psi^0(\mathbb{G})$和 $f\in C_c^\infty(M)$满足 $u_{|1}=\delta_f$，则对于任意$h\in C_{c,\ \mathrm{inv},\ 1}^{\infty}(\mathbb{G},\ \underline{\Omega}^{\frac{1}{2}})$和$(\pi,x)\in\widehat{\mathrm{HN}}$，$\pi_{\mathrm{inv}}(\sigma^0(u)*h)=f(x)\pi_{\mathrm{inv}}(h)$。

证明. 由引理 5.3.3，只需对单个 u证明该引理。我们沿用引理 5.1.1.iii 证明中的记号。因此，设 $g\in C_{c,\ \mathrm{inv}}^{\infty}(\mathbb{G},\ \Omega^{\frac{1}{2}})$满足 $\alpha_0(g)=\theta_0(\delta_f)$，并且对于任意$S\subseteq[\![1,\ \nu]\!]$，令 g_S如 (5.6) 所示。由 (5.8) 和 (5.1)，

$$\delta_f=\sum_{S\subseteq[\![1,\nu]\!]}\sum_{S'\subseteq S}(-1)^{|S'|}I_{\kappa_{S'}}(g_S)_{|\underline{1}}=\sum_{S\subseteq[\![1,\nu]\!]}\sum_{S'\subseteq S}(-1)^{|S'|}I_0(\theta_{-\kappa_{S'}}(\delta_1)*g_S)_{|\underline{1}}.$$

因此我们取 $u=\sum_{S\subseteq[\![1,\nu]\!]}\sum_{S'\subseteq S}(-1)^{|S'|}I_0(\theta_{-\kappa_{S'}}(\delta_1)*g_S)$。设 $h\in C_{c,\mathrm{inv},1}^{\infty}(\mathbb{G},\underline{\Omega^{\frac{1}{2}}})$。现在我们来计算 $\sigma^0(u)*h$。如果 $S'\neq[\![1,\nu]\!]$，那么

$$\alpha_\lambda(I_0(\theta_{-\kappa_{S'}}(\delta_1)*g_S))*h=\lambda^{-\kappa_{S'}}\theta_{-\kappa_{S'}}(\delta_1)*\alpha_\lambda(I_{\kappa_{S'}}(g_S))*h$$

是一个在 $\mathcal{G}\times\{0\}$ 上消失的不变函数，因为 $\kappa_{S'}\neq0$。因此，由 (1.37)（L^1-估计），

$$\alpha_\lambda(I_0(\theta_{-\kappa_{S'}}(\delta_1)*g_S))*h\in\mathcal{K}(L^2(M))\otimes C_0(\mathbb{R}_+^\nu\backslash0).$$

因此，该极限也属于 $\mathcal{K}(L^2(M))\otimes C_0(\mathbb{R}_+^\nu\backslash0)$。对于最后一项（含 $S'=S=[\![1,\nu]\!]$的项），由 (5.7) 可得，

$$\sigma^0(I_0(g_{[\![1,\nu]\!]}))*h=\int_{(\mathbb{R}_+^\times)^\nu}\alpha_\lambda(g_{[\![1,\nu]\!]})*h\frac{\mathrm{d}\lambda}{\lambda^{\underline{1}}}=\int_{(\mathbb{R}_+^\times)^\nu}\frac{\partial^\nu}{\partial\lambda_1\cdots\partial\lambda_\nu}\alpha_\lambda(g)*h\,\mathrm{d}\lambda.$$

我们断言，对任意 $i\in[\![1,\nu]\!]$，都存在 $C>0$ 使得

$$\|\alpha_\lambda(g)*h\|_{C^*\mathbb{G}}\leqslant C\lambda_i^{-1},\quad\forall\lambda\in(\mathbb{R}_+^\times)^\nu,\tag{5.22}$$

对某个常数 $C>0$ 成立。为此，若 $\lambda_i\leqslant1$，则 $\|\alpha_\lambda(g)*h\|$ 由 $\|g\|_{C^*\mathbb{G}}\|h\|_{C^*\mathbb{G}}$ 控制，见 (2.23)。若由 (2.33) 得到 $\lambda_i\geqslant1$，我们可以假设 $h=\theta_l(D)*h'$，其中 $l\in\mathbb{Z}_+^\nu$、$h'\in C_{c,\ \mathrm{inv}}^{\infty}(\mathbb{G},\ \Omega^{\frac{1}{2}})$、$D\in\mathrm{DO}^{\underline{l}}(M)$、$1\preceq l$。应用引理 5.1.5 （取 $S=\{i\}$），我们可以假设 $D=D_1D_2$，且

$D_1 \in \mathbf{DO}^{l_S}(M)$，且 $D_2 \in \mathbf{DO}^{l_{S^c}}(M)$。由 (2.23)，我们有

$$\begin{aligned}\|\alpha_\lambda(g) * h\|_{C^*\mathbb{G}} &= \left\|\alpha_\lambda(g * \theta_{l_S}(D_1)) * \theta_{l_{S^c}}(D_2) * h'\right\|_{C^*\mathbb{G}} \lambda_i^{-l_i} \\ &\leqslant \|g * \theta_{l_S}(D_1)\|_{C^*\mathbb{G}} \left\|\theta_{l_{S^c}}(D_2) * h'\right\|_{C^*\mathbb{G}} \lambda_i^{-l_i}.\end{aligned}$$

最后，由于 $1 \preceq l$（因此 $1 \leqslant l_i$）且 $1 \leqslant \lambda_i$，可得 (5.22)。由 (5.22)，

$$\int_{(\mathbb{R}_+^\times)^\nu} \frac{\partial^\nu}{\partial\lambda_1 \cdots \partial\lambda_\nu} \alpha_\lambda(g) * h \,\mathrm{d}\lambda = (-1)^\nu \alpha_0(g) * h = (-1)^\nu \theta_0(\delta_f) * h$$

结论得证。 □

定理 4.3.2 的证明。 由引理 5.3.5 和引理 5.3.1 可知，对于任意 $\xi \in C^\infty(\pi)$，极限 (4.17) 在 $L^2(\pi)$ 的拓扑中收敛，从而定义了一个连续线性映射 $C^\infty(\pi) \to L^2(\pi)$。为检验其像属于 $C^\infty(\pi)$，且收敛确实发生在 $C^\infty(\pi)$ 的拓扑中，只需利用恒等式 $\sigma^{k+l}(\theta_l(D) * u) = \theta_l(D) * \sigma^k(u)$。因此，定理 4.3.2.iii 得证。由对偶性，定理 4.3.2.i 得证。由引理 5.3.3 可知，$\sigma^k(v,\ \pi,\ x)$ 与满足 $I_k(f) = v$ 的 f 的选择无关。这证明了在紧支撑情形下符号是良定义的。紧支撑情形下的定理 4.3.2.iv 很容易证明。结合紧支撑情形下的定理 4.3.2.iv 和引理 5.3.6，可推得符号在非紧支撑情形下是良定义的。现在证明定理 4.3.2.v。若 $v \in \Psi_c^k(M)$ 且 $k < l$ 且 $\xi \in C^\infty(\pi)$，则

$$\begin{aligned}\sigma^l(v,\pi,x) &= \lim_{\lambda_1 \to +\infty, \cdots, \lambda_\nu \to +\infty} \pi_{\mathrm{inv}}(\lambda^{-l} \alpha_\lambda(I_k(f)))\xi \\ &= \lim_{\lambda_1 \to +\infty, \cdots, \lambda_\nu \to +\infty} \lambda^{k-l} \pi_{\mathrm{inv}}(\lambda^{-k} \alpha_\lambda(I_k(f)))\xi = 0 \times \sigma^k(v,\pi,x) = 0.\end{aligned}$$

定理 4.3.2 的其余部分证明起来很直接。 □

5.4 零阶算子的 C^*-代数

本节的目标是研究伪微分算子的 C^*-代数。最终，我们希望证明以下几点：

i. 阶为 $k \in \mathbb{C}^\nu_{\leqslant 0}$ 的紧支撑算子（及其符号）是有界的。

ii. 0 阶算子的 C^*-代数是 I 型的，其不可约表示都来自第 4.3 节定义的主符号，或来自 $L^2(M)$ 上的自然表示。

iii. 定理 B.0.8 的第三个假设得到满足，见命题 5.4.9。

完成这三个步骤后，我们就可以应用定理 B.0.8。第 4.4 节、第 4.5 节和第 4.6 节的所有结果便都能轻松得出。

我们的首要目标是证明零阶算子是有界的。

引理 5.4.1. 对任意 $f,\ g \in C_{c,\ \mathrm{inv},\ 1}^\infty(\underline{\mathbb{G}},\ \Omega^{\frac{1}{2}})$，$p \in]0,\ +\infty[$，

$$\int_{(\mathbb{R}_+^\times)^\nu} \|f * \alpha_\lambda(g)\|_{C^*\mathbb{G}}^p \frac{\mathrm{d}\lambda}{\lambda^{\underline{1}}} < +\infty$$

证明。对任意 $S \subseteq [\![1,\ \nu]\!]$，令 $\Lambda_S = \{\lambda \in (\mathbb{R}_+^\times)^\nu :\ \forall i \in S,\ \lambda_i < 1,\ \ \forall i \in S^c,\ \lambda_i \geqslant 1\}$。我们只需证明在每个 Λ_S 上的积分是有限的。我们固定 S。我们将 f 写成 (2.35) 中的形式，并将 g 写成 (2.33) 中的形式。由于 L^p-函数之和仍为 L^p（即使对 $p<1$ 亦然），我们可以假设 f 与 g 具有形式 $f' * \theta_k(D)$ 与 $\theta_l(D') * g'$，其中 $f',\ g' \in C_{c,\ \mathrm{inv}}^{\infty}(\mathbb{G},\ \Omega^{\frac{1}{2}})$，$D \in \mathrm{DO}^k(M)$，$D' \in \mathrm{DO}^{\underline{l}}(M)$，$\underline{1} \leq k$，$1 \leq l$。因此，由 (2.32) 和 (2.31)，

$$f * \alpha_\lambda(g) = \lambda^k f' * \theta_{l+k}(DD') * \alpha_\lambda(g').$$

现在我们将引理 5.1.5 应用于 DD'。因此，我们可以假设 DD' 具有 $D_1 D_2$ with $D_1 \in \mathrm{DO}^{k_S+l_S}(M)$, $D_2 \in \mathrm{DO}^{k_{S^c}+l_{S^c}}(M)$ 的形式。因此，

$$f * \alpha_\lambda(g) = \lambda^{k_S - l_{S^c}} f' * \theta_{l_S+k_S}(D_1) * \alpha_\lambda(\theta_{k_{S^c}+l_{S^c}}(D_2) * g').$$

因此，由 (2.23) 得，

$$\|f * \alpha_\lambda(g)\|_{C^*\mathbb{G}}^p \leqslant \left\|f' * \theta_{l_S+k_S}(D_1)\right\|_{C^*\mathbb{G}}^p \left\|\theta_{k_{S^c}+l_{S^c}}(D_2) * g'\right\|_{C^*\mathbb{G}}^p \lambda^{pk_S - pl_{S^c}}$$

由于 $1 \leq k$ and $1 \leq l$，可知对所有 $i \in [\![1,\ \nu]\!]$，$1 \leqslant k_i$ and $1 \leqslant l_i$。若 $i \in S$，则 $pk_S - pl_{S^c}$ 的第 i 个坐标等于 $pk_i > 0$。若 $i \notin S$，则 $pk_S - pl_{S^c}$ 的第 i 个坐标等于 $-pl_i < 0$。因此，积分 $\int_{\Lambda_S} \lambda^{pk_S - pl_{S^c} - 1} \mathrm{d}\lambda$ 收敛。结论得证。– □

命题 5.4.2。*i.* 任意 $u \in \Psi^0(\mathbb{G})$ 都可延拓为 $C_{\mathrm{inv}}^* \mathbb{G}$ 的一个有界乘子。事实上，若 $f \in C_{c,\ \mathrm{inv},\ 1}^{\infty}(\mathbb{G}, \Omega^{\frac{1}{2}})$，则

$$\|I_0(f)\|_{\mathcal{M}(C_{\mathrm{inv}}^*\mathbb{G})} \leqslant \sqrt{\int_{(\mathbb{R}_+^\times)^\nu} \|f^* * \alpha_\lambda(f)\|_{C^*\mathbb{G}}^{\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}\lambda}{\lambda^{\underline{1}}}} \sqrt{\int_{(\mathbb{R}_+^\times)^\nu} \|f * \alpha_\lambda(f)^*\|_{C^*\mathbb{G}}^{\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}\lambda}{\lambda^{\underline{1}}}} \tag{5.23}$$

ii. 对于引理 *5.3.1* 中定义的任意 $u \in \Psi^0(\mathbb{G})$，$\sigma^0(u)$，$C_{\mathrm{inv},1}^*(\mathbb{G})$可延拓为一个有界乘子。此外，

$$\left\|\sigma^0(u)\right\|_{\mathcal{M}(C_{\mathrm{inv},\underline{1}}^*\mathbb{G})} \leqslant \|u\|_{\mathcal{M}(C_{\mathrm{inv}}^*\mathbb{G})}. \tag{5.24}$$

iii. 对于任意 $k \in \mathbb{C}_{\leqslant 0}^\nu$，$v \in \Psi_c^k(M)$，$v * L^2(M) \subseteq L^2(M)$ 和 $v\colon L^2(M) \to L^2(M)$ 是有界的。此外，若 $\boldsymbol{R}(k_i) < 0$ 对某个 i成立，则 $v * L^2(M) \subseteq L^2(M)$ 和 $v\colon L^2(M) \to L^2(M)$ 是紧的。

iv. 对于任意 $k \in \mathbb{C}_{\leqslant 0}^\nu$，$v \in \Psi_c^k(M)$ 和 $(\pi, x) \in \widehat{\mathrm{HN}}^{\mathrm{Nonsing}}$，$\sigma^k(v,\pi,x) * L^2(\pi) \subseteq L^2(\pi)$ 和 $\sigma^k(v,\pi,x)\colon L^2(\pi) \to L^2(\pi)$ 是有界的。此外，若对所有 i都有 $\boldsymbol{R}(k_i) < 0$，则 $\sigma^k(v,\pi,x)\colon L^2(\pi) \to L^2(\pi)$ 是紧的。

证明。我们来证明命题 5.4.2.i。设 $f \in C_{c,\ \mathrm{inv},\ 1}^{\infty}(\mathbb{G},\ \Omega^{\frac{1}{2}})$ 使得 $u = I_0(f)$。我们需要证明 u 可延拓为 $C_{\mathrm{inv}}^*\mathbb{G}$ 的有界乘子。它在元素的稠密集合 $C_{c,\ \mathrm{inv}}^{\infty}(\mathbb{G},\ \Omega^{\frac{1}{2}})$ 上已经是良定义的。因此，设 $g \in C_{c,\ \mathrm{inv}}^{\infty}(\mathbb{G},\ \Omega^{\frac{1}{2}})$。我们需要给出 $\|u * g\|_{C^*\mathbb{G}}$ 的界。由 (5.19)，我们只需对 $\pi_t(u * g)$ 给出关于 $t \in (\mathbb{R}_+^\times)^\nu$ 一致的界。形式上，我们有

$$\pi_t(u * g) = \left(\int_{]0,1]^\nu} \pi_t(\alpha_\lambda(f)) \frac{\mathrm{d}\lambda}{\lambda^{\underline{1}}}\right) * \pi_t(g).$$

因此，只需证明这些积分 $\int_{]0,1]^\nu} \pi_t(\alpha_\lambda(f))\, \mathrm{d}_{\lambda^{\underline{1}}}\lambda$ 定义了有界算子，其算子范数关于 t 一致有界。根据 Cotlar–Stein 引理，参见 [Hör85,

引理 18.6.5], 只需证明

$$\sup_{t\in(\mathbb{R}_+^\times)^\nu}\sup_{\mu\in]0,1]^\nu}\int_{]0,1]^\nu}\|\pi_t(\alpha_\mu(f)^**\alpha_\lambda(f))\|_{\mathcal{L}(L^2(M))}^{\frac12}\frac{\mathrm{d}\lambda}{\lambda^{\underline{1}}}<+\infty,$$
$$\sup_{t\in(\mathbb{R}_+^\times)^\nu}\sup_{\mu\in]0,1]^\nu}\int_{]0,1]^\nu}\|\pi_t(\alpha_\lambda(f)*\alpha_\mu(f)^*)\|_{\mathcal{L}(L^2(M))}^{\frac12}\frac{\mathrm{d}\lambda}{\lambda^{\underline{1}}}<+\infty.$$

我们只考虑第一种情况。第二种情况的处理类似。由 (2.23),

$$\|\pi_t(\alpha_\mu(f)^*\alpha_\lambda(f))\|_{\mathcal{L}(L^2(M))}\leqslant\|\alpha_\mu(f)^*\alpha_\lambda(f)\|_{C^*\mathbb{G}}=\left\|f^**\alpha_{\lambda\mu^{-1}}(f)\right\|_{C^*\mathbb{G}}.$$

因此，只需证明

$$\int_{(\mathbb{R}_+^\times)^\nu}\|f^**\alpha_\lambda(f)\|_{C^*\mathbb{G}}^{\frac12}\frac{\mathrm{d}\lambda}{\lambda^{\underline{1}}}<+\infty.$$

这由引理 5.4.1 得出。命题 5.4.2.i 的证明至此完成。

现在证明命题 5.4.2.ii。由 (2.35)，若 $g\in C_{c,\mathrm{inv},1}^\infty(\mathbb{G},\Omega^{\frac12})$，则 $\alpha_\lambda(u)^{-}*g\in C_{c,\mathrm{inv},1}^\infty(\mathbb{G},\Omega^{\frac12})$。因此，$\sigma^0(u)^{\intercal}*g$ 属于 $C_{\mathrm{inv},1}^*(\mathbb{G})$。由 (2.23) 可推得 $\|\alpha_\lambda(u)\|_{\mathcal{M}(C^*{}_{\mathrm{inv}}\mathbb{G})}=\|u\|_{\mathcal{M}(C^*{}_{\mathrm{inv}}\mathbb{G})}$。因此，$\sigma^0(u)$ 可延拓为 $C_{\mathrm{inv},1}^*(\mathbb{G})$ 上的有界乘子，其伴随为 $\sigma^0(u^*)$，且 (5.24) 成立。

现在证明命题 5.4.2.iii。将 v 替换为 v^**v后，我们可以假设对所有 i，$k\in\mathbb{R}^\nu$ 满足$k_i\leqslant0$。任意非退化的 C^*-代数表示都会诱导出其乘子代数的一个表示，参见 [Lan95，第 4] 章。情形 $k=0$ 可利用 $C_{\mathrm{inv}}^*(\mathbb{G})$的表示 π_1 由命题 5.4.2.i 得出。因此，我们可以假设对于某个 i，$k_i<0$。根据定理 4.1.3.vii，当 n足够大时，$(v^**v)^n$连续地从 $L^2(M)$映射到 $H^{2nk}(M)\subseteq C^1(M)$。由于 v是紧支撑的，其像包含在某个 $K\subseteq M$紧集对应的 $C_c^1(K)$中。包含映射 $C^1(K)\hookrightarrow L^2(M)$ 是紧的（Rellich 定理）。因此，$(v^**v)^n*\cdot\colon L^2(M)\to L^2(M)$ 是有界且紧的。由此可得，$v*\cdot\colon L^2(M)\to L^2(M)$ 是有界且紧的。

我们来证明命题 5.4.2.iv。再次通过将 v 替换为 v^**v，我们可以假设对所有 i 都有 $k\in\mathbb{R}^\nu$ 与 $k_i\leqslant0$。形式上，我们有

$$\sigma^k(v,\pi,x)=\int_{(\mathbb{R}_+^\times)^\nu}\pi_{\mathrm{inv}}(\alpha_\lambda(f))\frac{\mathrm{d}\lambda}{\lambda^{k+\underline{1}}}$$

我们现在在 $k_i=0$ 的坐标上使用 Cotlar-Stein 引理，并在 $k_i<0$ 的那些坐标上使用黎曼-勒贝格引理定理 A.0.8。更确切地说，首先回顾：由于幂零李群的 C^*-代数是极限型的，见 [Dix77，第 13.11 页.12]，$\pi_{\mathrm{inv}}(\alpha_\lambda(f))$ 是一个紧算子。我们将该积分分成 $\int_{(\mathbb{R}_+^\times)^\nu\setminus]0,1]^\nu}+\int_{]0,1]^\nu}$。根据定理 A.0.8，第一个积分按范数收敛。因此，它定义了一个紧有界算子。对于第二个积分，令 $S=\{i\in[\![1,\nu]\!]\colon\ k_i=0\}$。若 $S=\varnothing$，则第二个积分也按范数收敛（因为对所有 i 都有 $k_i<0$），因此它也定义了一个紧算子。若 $S\neq\varnothing$，我们按如下方式进行：我们将该积分分成

$$\int_{]0,1]^\nu}\pi_{\mathrm{inv}}(\alpha_\lambda(f))\frac{\mathrm{d}\lambda}{\lambda^{k+\underline{1}}}=\int_{]0,1]^S}\int_{]0,1]^{S^c}}\pi_{\mathrm{inv}}(\alpha_\lambda(f))\frac{\mathrm{d}\lambda}{\lambda^{k+\underline{1}}}.$$

我们上面使用 Cotlar–Stein 的论证同样适用于证明积分 $\int_{]0,1]^{S^c}}$ 的有界性。此外，由 Cotlar–Stein 引理得到的算子 $\int_{]0,1]^{S^c}}$ 的算子范数上界对 $\lambda\in]0,1]^S$ 中的所有元素都是一致的。由此可知，该积分在强算子拓扑下收敛到一个有界算子。

□

现在我们转向第二个目标，即分析由 0 阶紧支撑算子生成的 C^*-代数。

命题 5.4.3. 映射

$$\sigma^0(\Psi^0(\mathbb{G})) \to \overline{\Psi_c^0(M)}, \quad \sigma^0(u) \mapsto \pi_{\underline{1}}(\sigma^0(u)), \quad \forall u \in \Psi^0(\mathbb{G}), \tag{5.25}$$

是良定义的，并可延拓为闭包 $\sigma^0(\Psi^0(\mathbb{G})) \subseteq L(C^*_{\mathrm{inv},1}(\mathbb{G}))$ 与 $\Psi_c^0(M) \subseteq \overline{L(L^2(M))}$ 之间的 $*$-同构。特别地，$\sigma^0(\Psi^0(\mathbb{G}))$ 与 $\Psi_c^0(M)$ 的谱同胚。

证明。设 $u \in \Psi^0(\mathbb{G})$。我们断言

$$\pi_{\underline{1}}(\sigma^0(u)) - \pi_{\underline{1}}(u) \in \mathcal{K}(L^2(M)). \tag{5.26}$$

为证明这一点，若 C 如引理 5.3.2 中所述，则对任意 $t \in]C, +\infty[^{\nu}$, $\pi_t(\sigma^0(u)) = \pi_t(u)$。由 $\sigma^0(u)$ 的等变性，$\pi_t(\sigma^0(u)) = \pi_1(\sigma^0(u))$ 由引理 5.3.2 和 (5.20)，$u_{|t} - u_{|1} \in C_c^\infty(M \times M, \Omega^{\frac{1}{2}})^{-}$ 我们的论断得证。

由 (4.3)，$\pi_1(u) \in \Psi_c^0(M)$。根据定理 4.1.3.i，$\mathcal{K}(L^2(M)) \subseteq \overline{\Psi_c^0(M)}$。因此，$\pi_1(\sigma^0(u)) \in \Psi_c^0(M)$，且映射 (5.25) 是良定义的。由 (5.19) 及 $\sigma^0(u)$ 的等变性可知，它是一个等距映射。显然它是满射。 □

现在我们来分析 $\sigma^0\overline{(\Psi^0(\mathbb{G})) \simeq \Psi_c^0(M)}$。由引理 5.2.1 和命题 5.4.2.ii，可得一个映射

$$(\mathbb{R}_+^\times)^\nu \sqcup \widehat{H\mathbb{N}}^{\mathrm{Nonsing}} \to \widehat{\overline{\sigma^0(\Psi^0(\mathbb{G}))}}. \tag{5.27}$$

由于对于任意 $u \in \Psi^0(\mathbb{G})$ 和 $\lambda \in (\mathbb{R}_+^\times)^\nu$，$\alpha_\lambda(\sigma^0(u)) = \sigma^0(u)$，(5.27) 可下降为一个映射

$$\{\underline{1}\} \sqcup \widehat{H\mathbb{N}}^{\mathrm{Nonsing}}/(\mathbb{R}_+^\times)^\nu = \big((\mathbb{R}_+^\times)^\nu \sqcup \widehat{H\mathbb{N}}^{\mathrm{Nonsing}}\big)/(\mathbb{R}_+^\times)^\nu \to \sigma^0(\widehat{\overline{\Psi^0(\mathbb{G})}}). \tag{5.28}$$

定理 5.4.4。C^*-代数 $\sigma^0(\Psi^0(\mathbb{G}))$ 是 I 型的。此外，(5.28) 是一个同胚，其中左端赋予商拓扑。特别地，$\{1\}$ 是 $\sigma^0(\Psi^0(\mathbb{G}))$ 的一个开稠密子集。

证明。为证明该定理，我们将证明 $\sigma^0(\Psi^0(\mathbb{G}))$ 与交叉积 $\overline{C^*_{\mathrm{inv},\ 1}\mathbb{G} \rtimes_r (\mathbb{R}_+^\times)^\nu}$Morita 等价。关于 Morita 等价和交叉积的一般参考资料，可参见 Raeburn 和 Williams [RW98，第 3] 章，以及 Williams [Wil07，第 2]章。我们需要以下结果：

i. 如果 A 和 B 是 Morita 等价的 C^*代数，那么 A 的谱与 B 的谱同胚，参见 [RW98，推论 3.33]。此外，如果 A 和 B 是可分的，那么根据 [Dix77，第 9]章，A 是 I 型当且仅当 B 是 I 型。

ii. 我们还需要一个关于 C^*代数交叉积的结果，该结果归功于 Rieffel [Rie90]。Rieffel 的结果后来由 Buss 和 Echterhoff [BE16]加以改进。我们将陈述 Buss 和 Echterhoff 的版本。由于我们只需要他们关于 $(\mathbb{R}_+^\times)^\nu$群的定理，因此我们仅对幺模群陈述该定理

定理 5.4.5。设 G 是一个作用于 A上的幺模局部紧第二可数群，A为一个 C^*-代数，$d\mu$ 是 G上的 ***Haar*** 测度。假设 $\boldsymbol{A} \subseteq A$ 是一个稠密线性子空间，且对任意 a，$b \in \boldsymbol{A}$，$\int_G \|b^* \alpha_t(a)\|\, d\mu(t) < +\infty$。那么，以下结论成立：

(a) 若 $a, b \in \boldsymbol{A}$，则 $\int_G \alpha_t(ab^*)\, d\mu(t)$ 收敛并定义了 $L(A)$ 中的一个元素。[1]

[1]关于积分收敛的确切含义，参见 [BE16，定义 2, 2] 。

(b) 由 $\{\int_G \alpha_t(ab^*)\,d\mu(t):\ a,b\in A\}$ 在 $L(A)$ 中生成的 C^*-代数与约化交叉积 $A\rtimes_r G$ 的一个双边理想 *Morita* 等价。

根据引理 5.4.1，我们可以对 $A=C^*_{\mathrm{inv},1}\mathbb{G}$、$\mathcal{A}=C^\infty_{c,\mathrm{inv},1}(\mathbb{G},\Omega^{\frac12})$, $G=(\mathbb{R}^\times_+)^\nu$ 应用定理 5.4.5。若 f, $g\in C^\infty_{c,\mathrm{inv},1}(\mathbb{G},\Omega^{\frac12})$, 则

$$\int_{(\mathbb{R}^\times_+)^\nu}\alpha_\lambda(f*g^*)\frac{\mathrm{d}\lambda}{\lambda^{\underline{1}}}=\sigma^0(I_0(f*g)).$$

引理 5.4.6。 C^*-代数 $C^*_{\mathrm{inv},1}\mathbb{G}\rtimes_r(\mathbb{R}^\times_+)^\nu$ 是可分的 I 型代数。此外，它的谱等于 $\{1\}\sqcup\widehat{\mathrm{HN}}^{\mathrm{Nonsing}}/(\mathbb{R}^\times_+)^\nu$。

引理 5.4.7。有

$$\overline{\mathrm{span}(\{\sigma^0(I_0(f*g)):f,g\in C^\infty_{c,\mathrm{inv},\underline{1}}(\mathbb{G},\Omega^{\frac12})\})}=\overline{\sigma^0(\Psi^0(\mathbb{G}))}.$$

引理 5.4.7 和定理 5.4.5 表明，$\sigma^0(\Psi^0(\mathbb{G}))$ 与交叉积 $C^*_{\mathrm{inv},1}\mathbb{G}\rtimes_r(\mathbb{R}^\times_+)^\nu$ 的一个双边理想 Morita 等价。因此，根据命题 B.0.3 和引理 5.4.6，$\sigma^0(\Psi^0(\mathbb{G}))$ 是可分的 I 型代数，其谱是谱 $C^*_{\mathrm{inv},1}\mathbb{G}\rtimes_r(\mathbb{R}^\times_+)^\nu$ 的一个开子集。由于 $\sigma^0(\Psi^0(\mathbb{G}))$ 的谱已经包含 $\{1\}\sqcup\widehat{\mathrm{HN}}^{\mathrm{Nonsing}}/(\mathbb{R}^\times_+)^\nu$, , 因此 $\sigma^0(\Psi^0(\mathbb{G}))$ 与 $C^*_{\mathrm{inv},1}\mathbb{G}\rtimes_r(\mathbb{R}^\times_+)^\nu$ Morita 等价。证明引理 5.4.6 和引理 5.4.7 后，定理 5.4.4 的证明即告完成。

□

引理 *5.4.6* 的证明。 设 $(V,\natural)$ 是一个如引理 3.7.1 中所述的 ν-分次基。回顾定理 4.2.8 的证明，我们有一个短正合列

$$0\to\mathcal{K}(L^2(M))\otimes C_0(\mathbb{R}^\nu_+\backslash 0)\to C^*_{\mathrm{inv}}\mathbb{G}\to C^*_{\mathrm{inv}}\mathcal{G}\to 0,$$

并且 $C^*_{\mathrm{inv}}\mathcal{G}$ 是 C^*-代数 $C^*(V)\otimes C_0(M)$ 的一个商。 C^*-代数 $C^*_{\mathrm{inv},1}\mathbb{G}$ 是 $C^*_{\mathrm{inv}}\mathbb{G}$ 的一个双边理想，由引理 5.2.1 可知，其谱等于 $(\mathbb{R}^\times_+)^\nu\sqcup\widehat{\mathrm{HN}}^{\mathrm{Nonsing}}\times\{0\}$。因此，$C^*_{\mathrm{inv},1}\mathbb{G}$ 处于一个短正合列中

$$0\to\mathcal{K}(L^2(M))\otimes C_0((\mathbb{R}^\times_+)^\nu)\to C^*_{\mathrm{inv},\underline{1}}\mathbb{G}\to C^*_{\mathrm{inv},\underline{1}}\mathcal{G}\to 0,$$

其中$C^*_{\mathrm{inv},1}\mathcal{G}$ 是 $C^*_{\mathrm{inv}}\mathcal{G}$ 的双边理想，其谱为 $\widehat{\mathrm{HN}}^{\mathrm{Nonsing}}$。取关于 $(\mathbb{R}^\times_+)^\nu$ 的交叉积，得到

$$0\to\mathcal{K}(L^2(M))\otimes\left(C_0((\mathbb{R}^\times_+)^\nu)\rtimes(\mathbb{R}^\times_+)^\nu\right)\to C^*_{\mathrm{inv},\underline{1}}\mathbb{G}\rtimes(\mathbb{R}^\times_+)^\nu\to C^*_{\mathrm{inv},\underline{1}}\mathcal{G}\rtimes(\mathbb{R}^\times_+)^\nu\to 0.$$

根据交叉积的定义，$C_0((\mathbb{R}^\times_+)^\nu)\rtimes(\mathbb{R}^\times_+)^\nu=\mathcal{K}(L^2(\mathbb{R}^\times_+)^\nu)$。因此，只需证明 $C^*_{\mathrm{inv},1}\mathcal{G}\ \rtimes(\mathbb{R}^\times_+)^\nu$ 是 I 型，且其谱为 $\widehat{\mathrm{HN}}^{\mathrm{Nonsing}}/(\mathbb{R}^\times_+)^\nu$。 C^*-代数$C^*_{\mathrm{inv},1}\mathcal{G}$ 是 $C^*_{\mathrm{nonsing}}(V)\otimes C_0(M)$ 的商，其谱为 $\widehat{\mathrm{HN}}^{\mathrm{Nonsing}}$; $C^*_{\mathrm{nonsing}}(V)$ 的定义见定理 A.0.6 之前的段落。因此，$C^*_{\mathrm{inv},1}\mathcal{G}\rtimes(\mathbb{R}^\times_+)^\nu$ 也是 $(C^*_{\mathrm{nonsing}}(V)\otimes C_0(M))\rtimes(\mathbb{R}^\times_+)^\nu$的一个商。结论由定理 A.0.6 和命题 B.0.3 得出。

□

引理 *5.4.7* 的证明。 根据 (5.24)，只需证明

$$\overline{\{I_0(f*g):f,g\in C^\infty_{c,\mathrm{inv},\underline{1}}(\mathbb{G},\Omega^{\frac12})\}}=\overline{\{I_0(f):f\in C^\infty_{c,\mathrm{inv},\underline{1}}(\mathbb{G},\Omega^{\frac12})\}},$$

其中闭包是在 $\mathcal{M}(C^*_{\mathrm{inv}}\mathbb{G})$ 中取的。只需证明，若 $f,g\in C^\infty_{c,\mathrm{inv},1}(\mathbb{G},\Omega^{\frac12})$，则

$$I_0(f)*I_0(g)\in\overline{\{I_0(f'*g'):f',g'\in C^\infty_{c,\mathrm{inv},\underline{1}}(\mathbb{G},\Omega^{\frac12})\}}.$$

将 f 按 (2.33) 中的形式书写，并将 g 按 (2.35) 中的形式书写，再利用 (5.1)，只需证明以下结论：若$f,g\in C^\infty_{c,\mathrm{inv}}(\mathbb{G},\Omega^{\frac12})$且 $D\in\mathrm{DO}^k(M)$和 $D'\in\mathrm{DO}^lM$对某个 $k,l\in\mathbb{N}^\nu$成立，则

$$\theta_k(D)*I_{-k}(f)*I_{-l}(g)*\theta_l(D')\in\overline{\mathrm{span}(\{I_0(f'*g'):f',g'\in C^\infty_{c,\mathrm{inv},\underline{1}}(\mathbb{G},\Omega^{\frac12})\})}\subseteq\mathcal{M}(C^*_{\mathrm{inv}}\mathbb{G}).$$

仿照引理 5.1.1.i 的证明，见 (5.3)，只需证明对于任意 $S\subseteq[\![1,\nu]\!]$，

$$\theta_k(D)*I_{-k-l}\left(\int_{]0,1]^\nu}\alpha_{\lambda_S}(f)*\alpha_{\lambda_{S^c}}(g)\frac{\mathrm{d}\lambda}{\lambda^{\tau_S}}\right)*\theta_l(D')\in\overline{\{I_0(f'*g'):f',g'\in C^\infty_{c,\mathrm{inv},\underline{1}}(\mathbb{G},\Omega^{\frac12})\}},\tag{5.29}$$

其中 λ_S、λ_{S^c}和 τ_S在 (5.4) 中定义。此外，根据定理 2.8.3，该积分在$C^\infty_{c,\mathrm{inv}}(\mathbb{G},\Omega^{\frac12})$中收敛。考虑映射

$$C^\infty_{c,\mathrm{inv}}(\mathbb{G},\Omega^{\frac12})\to\mathcal{M}(C^*_{\mathrm{inv}}\mathbb{G}),\ h\mapsto\theta_k(D)*I_{-k-l}(h)*\theta_l(D')=I_0(\theta_k(D)*h*\theta_l(D')).\tag{5.30}$$

由 (5.23) 和引理 5.4.1 的证明可得，(5.30) 是连续的，其中$C^\infty_{c,\mathrm{inv}}(\mathbb{G},\Omega^{\frac12})$赋有其 LF拓扑，见定义 2.6.1。（此处需要对定理 2.6.5.ii 中的映射使用注 2.6.4。）将 (5.29) 中的积分写成$C^\infty_{c,\mathrm{inv}}(\mathbb{G},\Omega^{\frac12})$中的黎曼和之极限，即可得到引理 5.4.7。

□

由命题 5.4.3 和定理 5.4.4 可立即推出以下结论：

推论 5.4.8。令 $C^*\mathrm{HN}$ 为 $\Psi^0_c(M)$ 的商，其谱为$\widehat{}\mathrm{HN}^{\mathrm{Nonsing}}/(\mathbb{R}^\times_+)^\nu$。则有一个短正合列

$$0\to\mathcal{K}(L^2(M))\to\overline{\Psi^0_c(M)}\xrightarrow{\sigma^0}C^*\mathrm{HN}\to0\tag{5.31}$$

特别地，对于任意 $v\in\Psi^0_c(M)$，若 $\sigma^0(v,\pi,x)\colon\ L^2(\pi)\to L^2(\pi)$ 对所有 $(\pi,x)\in\widehat{}\mathrm{HN}^{\mathrm{Nonsing}}$ 均消失，则 $v*\cdot\colon\ L^2(M)\to L^2(M)$ 是一个紧算子。

最后，我们证明存在满足定理 B.0.8 第三个假设的算子。设 K 如定理 B.0.8 中所述。

命题 5.4.9。假设 M 是紧的。存在一族 $v_k\in\Psi^k(M)$，对 $k\in K$ 满足

i. 算子 v_0 在 $\Psi^0(M)$中可逆，

ii. 对任意 $v\in\Psi^0(M)$，映射

$$k\in K\mapsto v_k*v*v_{-k}\in\overline{\Psi^0(M)}\tag{5.32}$$

是连续的。

证明。我们从以下引理开始。

引理 5.4.10. 存在 $g\in C^\infty(M\times M,\Omega^{\frac12})$，它是正的（作为算子 $L^2(M)\to L^2(M)$），使得算子 $g*\cdot\colon C^{-\infty}(M,\Omega^{\frac12})\to C^\infty(M,\Omega^{\frac12})$ 是单射。

证明. 取 $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 为 $C^\infty(M,\Omega^{\frac12})$ 中的一个稠密序列。我们取

$$g(y,x)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n f_n(y)\overline{f_n(x)},$$

其中 a_n 是严格正常数，它们以足够快的速度收敛到 0，使得级数在 $C^\infty(M\times M,\Omega^{\frac12})$ 中收敛。 □

存在 $f\in C_{c^,\mathrm{inv},1}^{\infty}(\mathbb{G},\Omega^{\frac12})$，它作为 $C^*\mathbb{G}$ 的元素是正的，并且对于任意 $(\pi,x)\in\widehat{\mathrm{HN}}^{\mathrm{Nonsing}}$，$\pi_{\mathrm{inv}}(f)$:$L^2(\pi)\to L^2(\pi)$ 都是单射。证明只需对 [Moh26, 引理 2.17.2], 的证明作直接改编，留给读者完成。

我们定义 v_k 如下:

$$v_k=I_k(f)_{|\underline{1}}+g$$

设 $k=0$ 和 $h\in L^2(M),\xi\in L^2(\pi)$。内积 $\langle v_0*h,h\rangle_{L^2(M)}$ 和 $\langle\sigma^0(v_0,\pi,x)\xi,\xi\rangle_{L^2(\pi)}$ 都是良定义的。因此，由 g 在 $L^2(M)$ 上的单射性可得 $v_0*\cdot\colon L^2(M)\to L^2(M)$ 的单射性；由 $\pi_{\mathrm{inv}}(f)$ 的单射性可得 $\sigma^0(v_0,\pi,x)=\int_{(\mathbb{R}_+^\times)^\nu}\alpha_\lambda(f)\,\mathrm{d}_{\lambda^1}^{\lambda}$ 在 $L^2(\underline{\pi})$ 上的单射性。由命题 B.0.1，我们推得 v_0 是左可逆的。由于 $v_0^*=v_0$，它在 $\Psi^0(M)$ 中可逆。

由 (5.23)、引理 5.4.1 的证明以及引理 5.1.1.i 可知，(5.32) 连续。 □

综上，我们可以应用定理 B.0.8。我们假设 M 是紧的，使得恒等算子属于 $\Psi^0(M)$（这由定理 4.1.3.iv 得出）。需要恒等算子是为了使 $\Psi^0(M)$ 成为一个含单位元的 C^*-代数，这是定理 B.0.8 的一个假设，参见定义 B.0.5。

定理 5.4.11。 假设 M 是紧的。那么，

i. 若 $k\in\mathbb{R}^\nu$，且 $(\pi,x)\in\widehat{\mathrm{HN}}^{\mathrm{Nonsing}}$，则空间 $H^k(M)$ 和 $H^k(\pi)$ 是希尔伯特空间，并且

$$\begin{aligned}
&C^{-\infty}(M,\Omega^{\frac12})=\bigcup_{k\in\mathbb{R}^\nu}H^k(M), && C^{-\infty}(\pi)=\bigcup_{k\in\mathbb{R}^\nu}H^k(\pi)\\
&C^{\infty}(M,\Omega^{\frac12})=\bigcap_{k\in\mathbb{R}^\nu}H^k(M), && C^{\infty}(\pi)=\bigcap_{k\in\mathbb{R}^\nu}H^k(\pi)\\
&H^0(M)=L^2(M) && H^0(\pi)=L^2(\pi)\\
&H^l(M)\subseteq H^k(M), && H^l(\pi)\subseteq H^k(\pi) && \text{if } k\preceq l
\end{aligned}$$

ii. 对任意 $k\in\mathbb{C}^\nu$、$v\in\Psi^k(M)$，如果这些映射

$$\begin{aligned}
v*\cdot : C^\infty(M,\Omega^{\frac12}) &\longrightarrow C^\infty(M,\Omega^{\frac12}),\\
v^**\cdot : C^\infty(M,\Omega^{\frac12}) &\longrightarrow C^\infty(M,\Omega^{\frac12}),\\
\sigma^k(v,\pi,x) : C^\infty(\pi) &\longrightarrow C^\infty(\pi),\quad \forall(\pi,x)\in\widehat{\mathrm{HN}}^{\mathrm{Nonsing}}\\
\sigma^{\bar{k}}(v^*,\pi,x) : C^\infty(\pi) &\longrightarrow C^\infty(\pi),\quad \forall(\pi,x)\in\widehat{\mathrm{HN}}^{\mathrm{Nonsing}}
\end{aligned}$$

是单射，那么对于所有 $(\pi、\ x) \in \widehat{\ }\mathrm{HN}^{\mathrm{Nonsing}}$，

$$\begin{aligned} v*\cdot &: C^{-\infty}(M,\Omega^{\frac{1}{2}}) \longrightarrow C^{-\infty}(M,\Omega^{\frac{1}{2}}) \\ v*\cdot &: H^{l}(M) \longrightarrow H^{l-\Re(k)}(M) \qquad \forall l \in \mathbb{R}^{\nu} \\ v*\cdot &: C^{\infty}(M,\Omega^{\frac{1}{2}}) \longrightarrow C^{\infty}(M,\Omega^{\frac{1}{2}}) \\ \sigma^{k}(v,\pi,x) &: C^{-\infty}(\pi) \longrightarrow C^{-\infty}(\pi) \\ \sigma^{k}(v,\pi,x) &: H^{l}(\pi) \longrightarrow H^{l-\Re(k)}(\pi) \qquad \forall l \in \mathbb{R}^{\nu} \\ \sigma^{k}(v,\pi,x) &: C^{\infty}(\pi) \longrightarrow C^{\infty}(\pi) \end{aligned} \tag{5.33}$$

是拓扑同构。

iii. 对任意 $k \in \mathbb{C}^{\nu}$，存在 $v_k \in \Psi^{k}(M)$，使得 (5.33) 是拓扑同构

证明。我们通过取 $\Psi^{0}(M)$ 的完备化，并使用 C*-范数 $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(L^{2}(M))}$，得到$\Psi^{0}(M)$，从而应用定理 B.0.8。 □

5.5 第 4.4 节结果的证明

定理 4.4.2 的证明。 我们首先在假设 M 是紧的情况下证明定理 4.4.2。因此，目前我们假设 M 是紧的。

定理 4.4.2.i、定理 4.4.2.ii、定理 4.4.2.iii 和定理 4.4.2.vi 可由定理 5.4.11 得出。定理 4.4.2.v 可直接由定理 5.4.11.iii 和定理 4.1.3.vii 得出。定理 4.4.2.iv 可直接由定理 5.4.11.iii 和命题 5.4.2.iii 得出。

我们现在不再假设 M 是紧的。索伯列夫空间是局部的。更精确地说，若 $w \in C^{-\infty}(M,\Omega^{\frac{1}{2}})$，则 $w \in H^{k}_{\mathrm{loc}}(M)$ 当且仅当对任意 $x \in M$，存在 x 的开邻域 U，使得 $w_{|U} \in H^{k}_{\mathrm{loc}}(U)$，其中 $H^{k}_{\mathrm{loc}}(U)$ 是利用$\mathcal{F}^{\bullet}_{|U}$定义的，见(4.6)。

引理 5.5.1. 对每一个 $x \in M$，在$\dim(M)$维球面 $S^{\dim(M)}$上存在一个深度为 N 的弱交换加权次黎曼结构$\mathcal{G}^{\bullet}$，并且存在 x的开邻域 $U \subseteq M$、开子集 $U' \subseteq S^{\dim(M)}$ 以及微分同胚 $\phi\colon\ U \to U'$，使得$\mathcal{F}^{k}_{|U} = \phi^{*}(\mathcal{G}_{|U'})$。

证明。设 $\phi\colon\ U' \to V'$ 是从 x 的开邻域 U' 到 $S^{\dim(M)}$的开子集 V' 的任意微分同胚。设 $\chi \in C^{\infty}_{c}(V')$ 是在 $\phi(x)$的某个邻域V上等于1的光滑函数。我们取 $U = \phi^{-1}(V)$。对每个 $k \in \mathbb{Z}^{\nu}_{+}$，若对所有 i都有 $k_i < N_i$，则我们将$\mathcal{G}^{k}$ 定义为$\mathcal{X}(S^{\dim(M)})$ 中由 $\chi\phi_{*}(X)$ 生成的子模，其中 $X \in \mathcal{F}^{k}$。否则，我们取$\mathcal{G}^{N} = \mathcal{X}(S^{\dim(M)})$。显然，族$\mathcal{G}^{\bullet}$ 由有限生成模组成。此外，由恒等式，

$$[\chi\phi_{*}(X),\chi\phi_{*}(Y)] = \chi^{2}\phi_{*}([X;Y]) + \phi_{*}(X)(\chi)\chi\phi_{*}(Y) - \phi_{*}(Y)(\chi)\chi\phi_{*}(X) \tag{5.34}$$

由此可知，$\mathcal{G}^{\bullet}$满足 (2.5)，其中 $i,j \in \mathbb{N}$使得 $i+j < N$。由于 $i,j \in \mathbb{N}$使得 $i+j = N$时，(2.5) 显然成立，因此我们推得 $\mathcal{G}^{\bullet}$ 是 ν-分次次黎曼结构，定义在$S^{\dim(M)}$上。最后，由于 $\chi = 1$ 在 V上，$\phi^{*}(\mathcal{G}^{\bullet}_{|V}) = \mathcal{F}^{\bullet}_{|U}$。 □

利用引理 5.5.1 证明定理 4.4.2 时，我们可以假设 M是 $S^{\dim(M)}$的一个开子集。因此，该定理由紧情形得出。定理 4.4.2 的证明至此完成。 □

定理 4.4.4 的证明。 由于该结论在 x处是局部的，根据引理 5.5.1，我们可以假设 M 是紧的。论证与定理 4.4.2 完全相同。 □

定理 4.4.5 的证明。 根据定理 5.4.11.iii，我们可以假设 $k=l=0$。该结果现在由推论 5.4.8，以及 $C^\infty(\pi)$ 在 $L^2(\pi)$ 中关于 $L^2(\pi)$-拓扑的稠密性得出。 □

定理 4.4.6 的证明。 由于该陈述在 x 处是局部的，根据引理 5.5.1，我们可以假设 M 是紧的。根据定理 5.4.11.iii，我们可以假设 $k=l=0$。

将集合 $S/(\mathbb{R}_+^\times)^\nu$ 视为 $\widehat{\mathrm{HN}}^{\mathrm{Nonsing}}/(\mathbb{R}_+^\times)^\nu$ 的子集，它等于集合 $\{(\pi,x)\}\backslash\{(\overline{\pi,x})\}$，其中 $\{(\pi,x)\}$ 的闭包是在 $\widehat{\mathrm{HN}}^{\mathrm{Nonsing}}/(\mathbb{R}_+^\times)^\nu$ 中取得的。集合 $\{(\pi,x)\}$ 是 $\widehat{\mathrm{HN}}^{\mathrm{Nonsing}}/(\mathbb{R}_+^\times)^\nu$ 的闭子集。根据定理 5.4.4 和命题 5.4.3 中对 $\Psi^0(M)$ 的谱的计算，我们可以定义一个商 $\Psi^0(M)$，其谱为 $\{(\pi,x)\}$。我们将此商记为 A，根据命题 B.0.3，它是 I 型的。根据 Dix77，命题 3.3.2]，A 是 $\Psi^0(M)$ 关于半范数 $v\mapsto\left\|\sigma^0(v,\pi,x)\right\|_{\mathcal{L}(L^2(\pi))}$ 的豪斯多夫完备化。现在，令 B 为 $\Psi^0(M)$ 关于半范数 $v\mapsto\left\|\sigma^0(v,\pi,x)\right\|_{\mathcal{L}(L^2(\pi))/\mathcal{K}(L^2(M))}$ 的豪斯多夫完备化。显然，B 是 A 的一个商。事实上，由于在 A 的谱中，点 (π,x) 是稠密的，命题 B.0.4（更确切地说，是其证明）表明，B 的谱恰好是集合 S。

通过计算 B 的谱，我们推得，若 $v\in\Psi^0(M)$，则 v 在 B 中消失；也就是说，$L^2(\pi)\xrightarrow{\sigma^0(v,\pi x)}L^2(\pi)$ 是紧的，当且仅当对所有 $(\pi',x)\in S$，$L^2(\pi')\xrightarrow{\sigma^0(v,\pi' x)}L^2(\pi')$ 都消失。根据 $C^\infty(\pi)$ 的稠密性，这等价于 $C^\infty(\pi')\xrightarrow{\sigma^0(v,\pi' x)}C^\infty(\pi')$ 消失。由此完成定理 4.4.6.i 的证明。

为得到定理 5.4.11，我们使用了定理 B.0.8，并用范数 $v\mapsto\|v\|_{\mathcal{L}(L^2(M))}$ 完备化了 $\Psi^0(M)$。这里，我们将改为应用定理 B.0.8，但用半范数 $v\mapsto\left\|\sigma^0(v,\pi,x)\right\|_{\mathcal{L}(L^2(\pi))/\mathcal{K}(L^2(M))}$ 完备化 $\Psi^0(M)$。由定理 B.0.8.iii 以及上文对 B 的谱的计算，我们得到如下结论：若 $v\in\Psi^0(M)$，则 v 在 B 中左可逆，当且仅当对所有 $(\pi',x)\in S$，$C^\infty(\pi')\xrightarrow{\sigma^0(v,\pi' x)}C^\infty(\pi')$ 都是单射。由此可得定理 4.4.6.iia 与定理 4.4.6.iic 等价。定理 4.4.6.iia 与定理 4.4.6.iib 等价，则是定理 B.0.8.i 的表述。

最后，我们需要证明，如果 $H^{\Re(k)+l}(\pi)\xrightarrow{\sigma^k(v,\pi x)}H^l(\pi)$ 是 Fredholm 的，那么其核仅由光滑向量组成（因此它不依赖于 l）。这再次是定理 B.0.8 的一个应用。这一次，我们用半范数 $v\mapsto\left\|\sigma^0(v,\pi,x)\right\|_{\mathcal{L}(L^2(\pi))}$ 补全 $\Psi^0(M)$。根据上面对 A 的谱的计算，定理 B.0.8.iii 表明，v 在 A中左可逆，当且仅当对于所有 $(\pi',x)\in S$，$C^\infty(\pi)\xrightarrow{\sigma^0(v,\pi' x)}C^\infty(\pi)$ 都是单射的，并且 $C^\infty(\pi')\xrightarrow{\sigma^0(v,\pi x)}C^\infty(\pi')$ 是单射。换言之，如果 $H^{\Re(k)+l}(\pi)\xrightarrow{\sigma^k(v,\pi x)}H^l(\pi)$ 是 Fredholm 的，那么它左可逆，当且仅当它在 $C^\infty(\pi)$上是单射的。这就完成了定理 4.4.6.ii 的证明。

□

5.6 第4.6节结果的证明

定理 4.4.1 和定理 4.4.2 的证明。 出于技术原因，我们将先证明第 4.6 节中的结果，然后再证明第 4.5 节中的结果。设 $\tilde{\mathbb{G}}\rightrightarrows\tilde{\mathbb{G}}^{(0)}$ 和 $\tilde{\tilde{\mathbb{G}}}\rightrightarrows\tilde{\tilde{\mathbb{G}}}^{(0)}$ 是与 $\mathcal{F}$ 和 $\mathcal{F}$ 相关联的 $\tilde{\ }$ $\tilde{\tilde{\ }}$ 切群胚，Φ 为定理 2.8.4 中的映射。设 $k\in\mathbb{C}^\nu$ 和 $l\in\mathbb{C}^\nu$。若 $f\in C_{c,\mathrm{inv},k+\underline{1}}^\infty(\tilde{\mathbb{G}},\Omega^{\frac12})$ 且 $g\in C_{c,\mathrm{inv},l+\underline{1}}^\infty(\tilde{\tilde{\mathbb{G}}},\Omega^{\frac12})$，则 $\Phi(f,g)\in C_{c,\mathrm{inv},(k,l)+\underline{1}}^\infty(\mathbb{G},\Omega^{\frac12})$，并且有

$$I_{(k,l)}(\Phi(f,g))=\int_{]0,1]^{\tilde\nu}\times]0,1]^{\tilde{\tilde\nu}}}\alpha_{(\lambda,\mu)}(\Phi(f,g))\frac{\mathrm{d}\lambda\,\mathrm{d}\mu}{\lambda^{k+\underline{1}}\mu^{l+\underline{1}}}=\int_{]0,1]^{\tilde\nu}\times]0,1]^{\tilde{\tilde\nu}}}\Phi(\alpha_\lambda(f),\alpha_\mu(g))\frac{\mathrm{d}\lambda\,\mathrm{d}\mu}{\lambda^{k+\underline{1}}\mu^{l+\underline{1}}}$$

So,

$$\begin{aligned} I_{(k,l)}(\Phi(f,g))_{|\underline{1}} &= \int_{]0,1]^{\tilde{\nu}}\times]0,1]^{\tilde{\tilde{\nu}}}} \Phi(\alpha_\lambda(f),\alpha_\mu(g))_{|\underline{1}} \frac{\mathrm{d}\lambda\,\mathrm{d}\mu}{\lambda^{k+\underline{1}}\mu^{l+\underline{1}}} \\ &= \int_{]0,1]^{\tilde{\nu}}\times]0,1]^{\tilde{\tilde{\nu}}}} \alpha_\lambda(f)_{|\underline{1}} * \alpha_\mu(g)_{|\underline{1}} \frac{\mathrm{d}\lambda\,\mathrm{d}\mu}{\lambda^{k+\underline{1}}\mu^{l+\underline{1}}} = I_k(f)_{|\underline{1}} * I_l(g)_{|\underline{1}}. \end{aligned} \tag{5.35}$$

由此我们证明了 $\tilde{\Psi}^k_c(M) * \tilde{\tilde{\Psi}}^l_c(M) \subseteq \Psi^{(k_{,c}\ \ l)}(M)$。

我们现在证明 (4.23)。事实上，这可由 (2.45) 立即得出，参见定理 4.1.3.iii 的证明。至此，定理 4.6.1.i 的证明完成。

定理 4.6.1.iii 与定理 4.6.1.iv 的证明是直接的，留给读者。我们现在证明定理 4.6.2。设 k,l，f,g 如 (5.35) 中所示。由 (5.35)，我们有

$$\begin{aligned} \sigma^{(k,l)}(I_k(f)_{|\underline{1}} * I_l(g)_{|\underline{1}},\pi,x) &= \lim_{\lambda_1\to+\infty,\cdots,\lambda_{\tilde{\nu}}\to+\infty,\mu_1\to+\infty,\cdots,\mu_{\tilde{\tilde{\nu}}}\to+\infty} \lambda^{-k}\mu^{-l}\pi_{\mathrm{inv}}(\alpha_{(\lambda,\mu)}(\Phi(f,g))) \\ &= \lim_{\lambda_1\to+\infty,\cdots,\lambda_{\tilde{\nu}}\to+\infty,\mu_1\to+\infty,\cdots,\mu_{\tilde{\tilde{\nu}}}\to+\infty} \lambda^{-k}\mu^{-l}\tilde{\pi}_{\mathrm{inv}}(\alpha_\lambda(f))\tilde{\tilde{\pi}}_{\mathrm{inv}}(\alpha_\mu(g)) \\ &= \sigma^k(I_k(f),\tilde{\pi},x)\otimes\sigma^l(I_l(f),\tilde{\tilde{\pi}},x). \end{aligned}$$

由此，(4.25) 容易得出。由定理 5.4.11，(4.26) 同样成立。至此完成定理 4.6.2 的证明。最后，定理 4.6.1.ii 由定理 4.6.2 与定理 5.4.11 推出。 □

5.7 截面4.5中结果的证明

˜我们首先需要修改次黎曼结构。我们将用式（5.11）中定义的$\mathcal{F}$替换$\mathcal{F}$。定理 4.6.1 保证，与$\mathcal{F}$ 相关的演算包含于与˜$\mathcal{F}$相关的演算中，并且索引适当时，索列夫空间不发生变化。定理 4.6.2 与（5.12）共同保证主符号不发生变化。因此，只需对$\mathcal{F}$的演算证明本节的˜结果即可。总而言之，我们将假设 $\nu\geqslant 2$，并且$N_{(0,\cdots,0,1)}=\mathcal{X}(M)$。这意味着如下结论：

i. 对任意 $x\in M$，一旦将（4.8）中的并集写成余球面丛的并集，它就是不交并。因此，存在一个投影映射

$$\widehat{\mathrm{HN}}^{\mathrm{Nonsing}} \to (T^*M\backslash 0)/\mathbb{R}_+^\times, \tag{5.36}$$

它是连续的。

ii. 如果 $\chi\in\Psi^k_{\mathrm{classical}}(M)$满足 $k\in\mathbb{C}$，那么根据命题 4.1.5，$\chi\in\Psi^{(0,\cdots,0,k)}(M)$ 以及

$$\sigma^{(0,\cdots,0,k)}(\chi,\pi,x)=\sigma^k_{\mathrm{classical}}(\chi,\xi,x),\quad \forall(\xi,x)\in T^*M\backslash 0,\pi\in\widehat{\mathrm{HN}}^{\mathrm{Nonsing}}_{(\xi,x)}. \tag{5.37}$$

特别地，由引理 5.7.1 和定理 4.4.2.vi，$\chi * H^l_{\mathrm{loc}}(M)\subseteq H^{l-(0_{,\cdots,0,k)\,\mathrm{loc}}}(M)$ 对所有$l\in\mathbb{R}^\nu$成立。这将在本截面中被反复使用。

我们还回顾标准术语：称 $\chi\in\Psi^k_{\mathrm{classical}}(M)$ 在锥$\Gamma\subseteq T^*M\backslash 0$上是光滑化的，如果 $\Gamma\subseteq\{(\xi,x):\ (\xi,-\xi;\ x,x)\notin$ 波前集$(\chi)\}$。这意味着波前集$(\chi * w)\cap\Gamma=\varnothing$ 对所有$w\in C^\infty(M,\Omega^{\frac{1}{2}})$成立。

容易证明，给定任意闭锥 Γ_1,Γ_2 使得 $\Gamma_1\cap\Gamma_2=\varnothing$，存在 $\chi\in\Psi^0_{\mathrm{classical}}(M)$ 使得 χ 在 Γ_1上是光滑化的，且 χ 在 Γ_2上是椭圆的。

现在我们将定理 4.1.3.viii 和 (4.23) 推广。

引理 5.7.1 $\chi \in \Psi^k_{c\,\mathrm{classical}}(M)$ $v \in \Psi^l_c(M)$ $k \in \mathbb{C}$ $l \in \mathbb{C}^\nu$ $[\chi\ v] \in \Psi_c^{<l+(0\ \cdots\ 0\ k)}(M)$ 若,且其中 和，则，,,,。

证明。 这个证明与 (4.23) 的证明非常相似，留给读者完成。 □

定理 4.5.2 的证明。 定理 4.5.2.i 由定理 4.4.2.i 立即推出。回顾波前集的如下经典刻画。

定理 5.7.2 ([Hör85，定理 18.1。27])。 设 $w \in C^{-\infty}(M,\ \Omega^{\frac{1}{2}})$。对于任意 $(\xi, x) \in T^*M\backslash 0$,$(\xi,\ x) \notin$ 波前集(w) 当且仅当存在 $\chi \in \Psi^0_{\mathrm{classical}}(M)$，使得 χ 在 (ξ, x) 处是椭圆的，且 $\chi * w \in C^\infty(M,\ \Omega^{\frac{1}{2}})$。

定理 4.5.2.v 中的蕴含关系 $\Longrightarrow$ 由定理 5.7.2 以及经典伪微分算子保持索伯列夫空间 $H^l_{\mathrm{loc}}(M)$（对所有 $l \in \mathbb{R}^\nu$）这一事实立即推出。对于定理 4.5.2.v 中的蕴含关系 $\Longleftarrow$，我们可以找到 $\chi' \in \Psi^0_{\mathrm{classical}}(M)$，使得 $\chi' * \chi - \delta_1$ 在锥形邻域 $(\xi,\ x)$中是光滑化的。因此，

$$w = \chi' * \chi * w + (\delta_1 - \chi' * \chi) * w$$

有 $\chi' * \chi * w \in H^l_{\mathrm{loc}}(M)$，且 $(\xi,\ x) \notin$ 波前集$((\delta_1 - \chi' * \chi) * w)$。

我们来证明定理 4.5.2.vi。若 $\sigma^0_{\mathrm{classical}}(\chi, \xi, x) \neq 0$，则在 ($\xi$ 的一个开邻域上有 $\sigma^0_{\mathrm{classical}}(\chi, \eta, y) \neq 0, x)$。因此，由于空间波前集$_l(w)$ 的补集是林德勒夫的，存在一个序列 $\chi_n \in \Psi^0_{\mathrm{classical}}(M)$，使得对任意 n, $\chi_n * w \in H^l_{\mathrm{loc}}(M)$，以及任意 $(\xi, x) \notin$ 波前集$_l(w)$，都存在 n，满足 $\sigma^0_{\mathrm{classical}}(\chi_n, \xi, x) \neq 0$。由于经典伪微分算子保持索伯列夫空间，$\chi_n^* * \chi_n * w \in H^l_{\mathrm{loc}}(M)$。令 $c_n > 0$ 为一个收敛到 0 足够快的序列，使得级数 $\chi = \sum_n c_n \chi_n^* * \chi_n$ 在空间 $\Psi^0_{\mathrm{classical}}(M)$ 中收敛，且 $\sum_n c_n \chi_n^* * \chi_n * w$ 在弗雷歇空间 $H^l_{\mathrm{loc}}(M)$ 中收敛。（这里，可能需要通过添加一个平滑算子来修改 χ_n 的支集，使得 χ_n 具有一致的适当支撑，这意味着 χ 是适当支撑的。）有 $\chi * w \in H^l_{\mathrm{loc}}(M)$，并且对所有 $(\xi, x) \notin$ 波前集$_l(w)$，都有 $\sigma^0_{\mathrm{classical}}(\chi, \xi, x) \neq 0$。

定理 4.5.2.ii 立即由定理 4.5.2.vi 得出。

定理 4.5.2.iv 立即由 (4.5) 和定理 4.4.2.vi 得出。

我们来证明 $\mathrm{WF}(w) = \bigcup_{l\in\mathbb{R}^\nu} \mathrm{WF}_l(w)$。根据定理 5.7.2 和定理 4.5.2.v，包含映射 $\supseteq$ 显然成立。对于包含映射 $\subseteq$，令 $(\xi,\ x) \notin \bigcup_{l\in\mathbb{R}^\nu} \mathrm{WF}_l(w)$。我们可以找到一个 $\chi \in \Psi^0_{\mathrm{classical}}(M)$，使得 χ 在 $(\xi,\ x)$处是椭圆的，并且 χ 在 $\bigcup_{l\in\mathbb{R}^\nu} \mathrm{WF}_l(w)$的一个锥形开邻域上是光滑化的。

根据定理 4.5.2.vi，对于每个 $l \in \mathbb{R}^\nu$，我们可以找到 $\chi_l \in \Psi^0_{\mathrm{classical}}(M)$，使得对于任意 l、$\chi_l * w \in H^l_{\mathrm{loc}}(M)$，$\chi_l$ 在 $\bigcup_{l\in\mathbb{R}^\nu} \mathrm{WF}_l(w)$的补集上是椭圆的。我们可以用 χ_l除 χ，即存在 $\chi'_l \in \Psi^0_{\mathrm{classical}}(M)$，使得 $\chi = \chi'_l * \chi_l$ 模去平滑算子成立。因此，$\chi * w \in \bigcap_l H^l_{\mathrm{loc}}(M) = C^\infty(M,\ \Omega^{\frac{1}{2}})$。所以，根据定理 5.7.2，$(\xi,\ x) \notin \mathrm{WF}(w)$。

恒等式 $\mathrm{WF}_l(w + w') \subseteq \mathrm{WF}_l(w) \cup \mathrm{WF}_l(w')$ 很容易证明。 □

定理 4.5.3 的证明。 我们来证明定理 4.5.3.i。由于这是关于 x 的局部性质，根据引理 5.5.1，我们可以假设 M 是紧的。根据定理 5.4.11.iii，我们可以假设 $v \in \Psi^0(M)$。固定 $(\xi, x) \in \Gamma$。取 $\chi \in \Psi^0_{\mathrm{classical}}(M)$ 使得 $\sigma^0_{\mathrm{classical}}(\chi, \xi, x) = 0$，且对所有 $(\eta, y) \in T^*M\backslash\mathbb{R}_+ \cdot (\xi, x)$，都有 $\sigma^0_{\mathrm{classical}}(\chi, \eta, y) \neq 0$。令 g 如引理 5.4.10 中所示，$\tilde{v} = v^* * v + \chi^* * \chi + g \in \Psi^0(M)$。由 (5.37),

$$\sigma^0(\tilde{v}, \pi, y) = \sigma^0(v, \pi, y)^* \sigma^0(v, \pi, y) + |\sigma^0_{\mathrm{classical}}(\chi, \eta, y)|^2, \quad \forall \pi \in \widehat{\mathrm{HN}}^{\mathrm{Nonsing}}_{(\eta,y)}.$$

因此，$\tilde{v}$ 满足定理 5.4.11.ii 的假设。由定理 5.4.11.ii，可得定理 4.5.3.i。

现在我们证明 Γ 是开集。由于这是局部性质，我们可以假设 M 是紧的。由定理 5.4.11.iii，我们可以假设 $v \in \Psi^0(M)$。由定理 4.5.3.i,

$$\Gamma = \{(\xi, x) \in T^*M\backslash 0 : \forall \pi \in \widehat{\mathrm{HN}}^{\mathrm{Nonsing}}_{(\xi,x)},\ \sigma^0(v,\pi,x) : L^2(\pi) \to L^2(\pi) \text{ is injective}\}$$

考虑 C^*-代数 $\Psi^0(M)/\mathcal{K}(\overline{L^2(M)})$。存在一个显然的映射 $C((T^*M\backslash 0)/\mathbb{R}^\times_+) \to \Psi^0(M)/\mathcal{K}(\overline{L^2(M)})$，它将余切球丛上的光滑函数映射为相应的经典伪微分算子模去紧算子。引理 5.7.1 表明，$C((T^*M\backslash 0)/\mathbb{R}^\times_+)$ 的像包含在 C^*-代数 $\Psi^0(M)/\mathcal{K}(L^2(M))$ 的中心中。因此，C^*-代数 $\Psi^0(M)/\mathcal{K}(L^2(M))$ 在 $(T^*M\backslash 0)/\mathbb{R}^\times_+$ 上纤维化。这一纤维化在谱上诱导出一个纤维化，恰好就是 (5.36) 给出的纤维化。在纤维化的 C^*- 代数中，纤维左可逆的点集是开集，见 [Bla96，命题 2.4]。由命题 B.0.1 可知，Γ 是开集。

现在证明定理 4.5.3.iii。首先假设 M 是紧的。根据定理 5.4.11.iii，可以假设 $v \in \Psi^0(M)$。固定 $\chi \in \Psi^0_{\mathrm{classical}}(M)$，使得 χ 在 Γ的补集上是椭圆的，且 χ 在 Γ'上是光滑化的。令 $g \in C^\infty(M \times M、\Omega^{\frac{1}{2}})$ 如引理 5.4.10 所示。将 v 替换为 $v^* * v + \chi^* * \chi + g$后，可以假设 v 是形式自伴的，并且$v * \cdot : C^\infty(M、\Omega^{\frac{1}{2}}) \to C^\infty(M、\Omega^{\frac{1}{2}})$是单射，且对所有 $(\pi, x) \in \widehat{\mathrm{HN}}^{\mathrm{Nonsing}}$，$\sigma^0(v, \overline{\pi}, x)$:$C^\infty(\pi) \to C^\infty(\pi)$是单射。根据定理 5.4.11.ii，$v * \cdot : C^{-\infty}(M、\Omega^{\frac{1}{2}}) \to C^{-\infty}(M、\Omega^{\frac{1}{2}})$是拓扑同构。令 v' 为其逆映射。由于 $v^* = v$，$v'^* = v'$。根据定理 5.4.11.ii，v'将 $C^\infty(M、\Omega^{\frac{1}{2}})$映射到 $C^\infty(M、\Omega^{\frac{1}{2}})$，并将 $H^l(M)$映射到 $H^l(M)$。因此，根据施瓦茨核定理$v' \in G^{-\infty}_r$，$_s(M \times M、\Omega^{\frac{1}{2}})$。为完成紧情形下定理 4.5.3.iii 的证明，我们需要证明

$$\mathrm{WF}_l(v' * w) = \mathrm{WF}_l(w), \quad \forall w \in C^{-\infty}(M, \Omega^{\frac{1}{2}}),\ l \in \mathbb{R}^\nu.$$

由于 v'是 v的逆映射，等价地，我们需要证明 $\mathrm{WF}_l(v * w) = \mathrm{WF}_l(w)$。根据定理 4.5.2.iv，我们需要证明 $\mathrm{WF}_l(w) \subseteq \mathrm{WF}_l(v * w)$。由于 $v * \cdot$ 是索伯列夫空间上的拓扑同构，只需证明 $\mathrm{WF}(w) \subseteq \mathrm{WF}(v * w)$。固定 $(\xi, x) \notin \mathrm{WF}(v * w)$。

引理 5.7.3。存在一个序列 $(\chi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \Psi^0_{\mathrm{classical}}(M)$和 $\chi_\infty \in \Psi^0_{\mathrm{classical}}(M)$，使得对所有 $n \in \mathbb{N}$

i. $\chi_n * v * w \in C^\infty(M, \Omega^{\frac{1}{2}})$

ii. 若 $n、m \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ 满足 $m < n$，则 $\chi_n * \chi_m - \chi_n$ 是一个平滑算子，即它们将 $C^{-\infty}(M、\Omega^{\frac{1}{2}})$映射到 $C^\infty(M、\Omega^{\frac{1}{2}})$。

iii. $\sigma^0_{\mathrm{classical}}(\chi_\infty、\xi、x) \neq 0$。

证明。由定理 5.7.2，存在 $\chi \in \Psi^0_{\mathrm{classical}}(M)$，使得 χ 在 $(\xi、x)$ 和 $\chi * v * w \in C^\infty(M$ 处是椭圆的，$\Omega^{\frac{1}{2}})$。令 $U \subseteq M$为 x 周围的一个开坐标图。取 $K_n \subseteq T^*M\backslash 0$为 $(\xi$ 的一列闭锥形邻域，$x)$，使得 $K_n \subseteq \{(\eta、y) \in T^*U\backslash 0 : \sigma^0(\chi、\eta、y) \neq 0\}$、$K_{n+1} \subseteq \mathrm{Int}(K_n)$，并且 $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n$是 $(\xi$ 的一个锥形邻域，$x)$。令 $\kappa_n \in C^\infty(T^*M\backslash 0)$ 为零次齐次函数，使得 $\kappa_n = 1$ 在 K_{n+1}上成立，$\mathrm{supp}(\kappa_n) \subseteq \mathrm{int}(K_n)$。令 $\kappa_\infty \in C^\infty(T^*M\backslash 0)$ 满足$\kappa_\infty(\xi、x) = 1$ 且 $\mathrm{supp}(\kappa_\infty) \subseteq \bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n$。因此，若对任意 m，$m < n$，则 $\kappa_n\kappa_m = \kappa_n\ n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$。令$\chi_n$、$\chi_\infty \in \Psi^0_{\mathrm{classical}}(M)$ 为经典伪微分算子，其全符号分别为 κ_n 和κ_∞。第一条断言由以下事实得出：由于 $K_n \subseteq \{(\eta, y) \in T^*U\backslash 0 : \sigma^0(\chi、\eta、y) \neq 0\}$，存在 $\chi' \in \Psi^0_{\mathrm{classical}}(M)$，使得 $\chi_n = \chi' * \chi$ 模去平滑算子成立。第二条断言现由 [Hör85，定理 18.1.8] 得出。第三条断言显然成立。

□

我们定义索伯列夫空间

$$H_n^t(M) = \sum_{l\in\mathbb{Z}_+^\nu, l_1+\cdots+l_\nu\geqslant n} H^{t+l}(M), \quad n\in\mathbb{N}, t\in\mathbb{R}^\nu.$$

换言之， $H_n^t(M)$等于满足存在序列 $t=t_0\prec t_1\prec\cdots\prec t_n=t'$的所有 $H^{t'}(M)$之和。根据定理 4.4.2.v， $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} H_n^t(M)=C^\infty(M)$。此外， $\Psi^0(M)$中的算子（因而 0 阶经典伪微分算子也同样）保持 $H_n^t(M)$。

根据定理 4.4.2.i，存在某个 $t\in\mathbb{R}^\nu$ 使得 $w\in H^t(M)$。我们固定这样的 t。

引理 5.7.4。对于所有 $n\in\mathbb{N}$， $\chi_n * w\in H_n^t(M)$。

证明。 我们将通过归纳法证明这一点。我们有

$$\begin{aligned} v*\chi_1*w &= [v,\chi_1]*w+\chi_1*v*w && \bmod C^\infty(M,\Omega^{\frac12})\\ &= [v,\chi_1]*w && \bmod C^\infty(M,\Omega^{\frac12})\end{aligned}$$

因此，根据引理 5.7.1 和定理 4.4.2.vi， $v*\chi_1*w\in H_1^{t+k}(M)$。于是，根据定理 5.4.11.ii， $\chi_1*w\in H_1^t(M)$。由于 $\chi_n*\chi_1-\chi_n$是光滑化的，对于所有 $n\in\mathbb{N}$都有 $\chi_n*w\in H_1^t(M)$。现在，

$$\begin{aligned} v*\chi_2*w &= v*\chi_2*\chi_1*w\\ &= [v,\chi_2]*\chi_1*w+\chi_2*v*\chi_1*w && \bmod C^\infty(M,\Omega^{\frac12})\\ &= [v,\chi_2]*\chi_1*w+\chi_2*[v,\chi_1]*w && \bmod C^\infty(M,\Omega^{\frac12})\\ &= [v,\chi_2]*\chi_1*w+[\chi_2,[v,\chi_1]]*w+[v,\chi_1]*\chi_2*w && \bmod C^\infty(M,\Omega^{\frac12})\end{aligned}$$

根据引理 5.7.1，三个项都属于 $H_2^t(M)$ 和 $\chi_2*w\in H_1^t(M)$，而 $\chi_1*w\in H_1^t(M)$。因此， $v*\chi_2*w\in H_2^t(M)$。根据定理 5.4.11， $\chi_2*w\in H_2^t(M)$。更一般地，

$$v*\chi_n*w=\sum_{S\subseteq[\![1,n]\!],S\neq\varnothing}[\chi_{s_1},[\chi_{s_2},\cdots,[v,\chi_{s_{|S|}}]]\cdots]*\chi_{\max S^c}*w \qquad \bmod C^\infty(M,\Omega^{\frac12}),$$

其中 s_1， $\cdots$， $s_{|S|}$是 S中按降序排列的元素，并约定$\chi_{\max S^c}*w=w$若 $S=[\![1,\ n]\!]$。归纳过程现在显而易见。 □

由于对所有 $n\in\mathbb{N}$,

$$\chi_\infty*w=\chi_\infty*\chi_n*w \mod C^\infty(M,\Omega^{\frac12}),$$

由此可得 $\chi_\infty*w\in\bigcap_{n\in\mathbb{N}}H_n^t(M)=C^\infty(M)$。因此，根据定理 5.7.2， $(\xi,\ x)\notin$属于波前集(w)。这就完成了在 M 是紧集的情况下定理 4.5.3.iii 的证明。

现在我们证明一般情形下的定理 4.5.3.iii，其中 M 不一定是紧的。

引理 5.7.5。 对于任意 $k\in\mathbb{R}^\nu$，存在 $v_k\in\Psi^k(M)$，使得 $v_k^*=v_k$，并且对于任意 $x\in M$，$\pi\in\widehat{\mathrm{HN}}_x^{\mathrm{Nonsing}}$， $\sigma^k(v_k,\ \pi,\ x)$： $C^\infty(\pi)\to C^\infty(\pi)$是单射。

证明。 利用单位分解论证，由引理 5.5.1 和定理 5.4.11.iii 可得此结论。假设 $k\in\mathbb{R}^\nu$ 是必要的，因为要使单位分解论证成立，需要对正算子求和。细节留给读者。

□

令 $\Gamma'\subseteq\Gamma$ 为一个闭锥， $\chi\in\Psi^0_{\mathrm{classical}}(M)$ 使得 χ 在 Γ的补集上是椭圆的，且 χ 在 Γ'上是光滑化的。通过将 v 替换为 $v^**v^*_{-R(k)}*v_{-\Re(k)}*v+\chi^**\chi$，我们可以假设

满足 $v \in \Psi^0(M)$ $v = v^*$，并且对所有 $(\pi,\ x) \in \widehat{\mathrm{HN}}^{\mathrm{Nonsing}}$, $\sigma^0(v,\ \pi,\ x)$：
$C^\infty(\pi) \to C^\infty(\pi)$ 是单射。

引理 5.7.6. 分布 v 有一个拟逆，即存在 $v' \in C_r^{-\infty}{}_{,s}\ (M \times M, \Omega^{\frac{1}{2}})$ 使得

$$\delta_1 - v' * v, \delta_1 - v * v' \in C^\infty(M \times M, \Omega^{\frac{1}{2}}).$$

证明. 根据引理 5.5.1 和我们刚刚证明的紧情形下的定理 4.5.3.iii，可以在局部为 v 构造拟逆。此外，这些拟逆在对角线之外是光滑的。因此，通过使用单位分解论证和定理 4.1.3.viii，我们可以找到 $v' \in C_r^{-\infty}{}_{,s}\ (M \times M, \Omega^{\frac{1}{2}})$使得 v' 在对角线之外是光滑的，且 $v'' = \delta_1 - v' * v \in C_r^{-\infty}{}_{,s}\ (M \times M, \Omega^{\frac{1}{2}})$ 满足

$$v'' * H^k_{\mathrm{loc}}(M) \subseteq H^{<k}_{\mathrm{loc}}(M), \quad \forall k \in \mathbb{R}^\nu \tag{5.38}$$

设 $n \in \mathbb{N}$。将 v'替换为 $(1 + v'' + (v'')^2 + \cdots (v'')^n) * v'$后，我们可以假设 $v'' = \delta_1 - v' * v$使索伯列夫空间的阶尽可能大幅下降。因此，取足够大的 n，并使用定理 4.4.2.v（以及经典索伯列夫嵌入定理），我们可以假设$v'' \in C(M \times M, \Omega^{\frac{1}{2}})$ 在对角线之外是光滑的，因为 v和 v'在对角线之外是光滑的。于是可以将 v''写成 $v''_1 + v''_2$，其中 $v''_1 \in C^\infty(M \times M, \Omega^{\frac{1}{2}})$ 和 $v''_2 \in C(M \times M, \Omega^{\frac{1}{2}})$ 可延拓为范数为 < 1的有界算子 $L^2(M) \to L^2(M)$。这里可以用舒尔判别法来估计 v''_2。由于 v'' 是适当支撑的，我们可以假设 v''_1 和 v''_2 是适当支撑的。级数$\sum_{n=0}^\infty (v''_2)^n$收敛到一个有界算子 $L^2(M) \to L^2(M)$。根据施瓦茨核定理，该算子由分布 $v''' \in C^{-\infty}(M \times M, \Omega^{\frac{1}{2}})$的卷积给出。将 v'''写成

$$v''' = \delta_1 + v'' + v'' * v''' * v'',$$

我们推得 v'''和 $(v''')^*$将 $C_c^\infty(M, \Omega^{\frac{1}{2}})$映射到 $C^\infty(M, \Omega^{\frac{1}{2}})$（事实上，映射到 $C_c^\infty(M, \Omega^{\frac{1}{2}})$内部，因为支集是真支的）。因此，$v''' \in C_r^{-\infty}{}_{,s}\ (M \times M, \Omega^{\frac{1}{2}})$。最后，

$$v''' * v' * v = \delta_1 - v''' * v''_1,$$

并且 $v''' * v''_1$是平滑算子，因为 v''_1是光滑化的，且 $v''' \in C_r^{-\infty}{}_{,s}\ (M \times M, \Omega^{\frac{1}{2}})$。由此我们得到了一个左参数子。取伴随后，我们得到一个右参数子。 □

因此，我们证明了 v 有一个拟逆 v'。由引理 5.5.1 和紧情形下的定理 4.5.3.iii，拟逆 v' 必须满足 $\mathrm{WF}_l(v' * w) \subseteq \mathrm{WF}_l(w)$ 且 $\mathrm{WF}_l(v'^* * w) \subseteq \mathrm{WF}_l(w)$，对所有$w \in C^{-\infty}(M, \Omega^{\frac{1}{2}})$ 和 $l \in \mathbb{R}^\nu$ 均成立。定理 4.5.3.iii 的证明至此完成。

包含映射 $\Gamma \subseteq \{(\xi, x) \in T^*M \backslash 0 :\ (-\xi, \xi;\ x, x) \in$波前集$(v)\}$直接由定理 4.5.3.iii 得出。至此完成定理 4.5.3.ii 的证明。

我们现在证明定理 4.5.3.iv。由定理 4.5.3.iii 容易推出 (4.19)。现在，假设 $(\xi, x) \in T^*M \backslash 0$ 与 $l \in \mathbb{R}^\nu$满足

$$(\xi, x) \in \mathrm{WF}_{l+\Re(k)}(w) \iff (\xi, x) \in \mathrm{WF}_l(v * w)$$

对所有 $w \in C^{-\infty}(M, \Omega^{\frac{1}{2}})$。我们将证明 $(\xi,\ x) \in \Gamma$。由于这是一个局部命题，根据引理 5.5.1，我们可以假设 M 是紧的。由定理 5.4.11.iii 得到的算子 $v_l \in \Psi^l(M)$ 根据我们上面的证明满足 (4.19)，其中 $\Gamma = T^*M \backslash 0$。因此，将 v替换为 $v_l * v * v_{-l-k}$后，我们可以假设 $v \in \Psi^0(M)$，并且

$$(\xi, x) \in \mathrm{WF}_0(w) \iff (\xi, x) \in \mathrm{WF}_0(v * w). \tag{5.39}$$

设 $\chi \in \Psi^0_{\text{classical}}(M)$，其经典主符号仅在 $\mathbb{R}^\times_+ \cdot (\xi,\ x)$处消失。我们还固定一个算子 $v' \in \Psi^{(-1,\ \cdots,\ -1)}(M)$，如定理 5.4.11.iii 中所述。考虑向量空间

$$H = \{w \in C^{-\infty}(M, \Omega^{\frac{1}{2}}) : v * w,\ \chi * w,\ v' * w \in L^2(M)\}$$

配备范数

$$\|w\|_H := \max\left(\|v * w\|_{L^2(M)}, \|\chi * w\|_{L^2(M)}, \|v' * w\|_{L^2(M)}\right).$$

空间 H是完备的，因为 $v' * \cdot \colon H^{(-1,\ \cdots,\ -1)}(M) \to L^2(M)$ 是一个拓扑同构。我们断言，$H = L^2(M)$ 作为一个集合。包含映射 $L^2(M) \subseteq H$ 显然成立。对于另一个包含关系，令$w \in H$。由于 $\chi * w \in L^2(M)$，波前集$_0(w) \subseteq \mathbb{R}^\times_+(\xi,\ x)$。由于 $v * w \in L^2(M)$，波前集$_0(v * w) = \varnothing$。因此，由 (5.39)，$(\xi,\ x) \notin$波前集$_0(w)$。于是，波前集$_0(w) = \varnothing$。因此，由定理 4.5.2.ii，$w \in L^2(M)$。包含映射$L^2(M) \to H$ 显然是连续的。由开映射定理，它是一个拓扑同构。因此，存在 $C > 0$ 使得

$$\|w\|_{L^2(M)} \leqslant C \|w\|_H .$$

这意味着算子 $v^* * v + \chi^* * \chi + v'^* * v' \colon L^2(M) \to L^2(M)$ 可逆。算子 $v'^* * v'$将 $L^2(M)$映射到 $H^{(2,\ \cdots,\ 2)}(M)$。因此，作为算子 $L^2(M) \to L^2(M)$，根据定理 4.4.2.iv，它是紧的。所以，$v^* * v + \chi^* * \chi$在 $\Psi^0(M)/\mathcal{K}(L^2(M))$中可逆。根据推论 5.4.8，
$\sigma^0(v^* * v + \chi^* * \chi\ \pi\ x)\quad L^2(\pi) \to L^2(\pi)$ $\pi \in \overline{\frown^{\text{Nonsing}}_x}$ 5 37 ,,: 对所有 HN 都是单射。因此，由 (.)，并且由于 χ的经典主符号在 $(\xi,\ x)$处消失，$\sigma^0(v,\ \pi,\ x) \colon L^2(\pi) \to L^2(\pi)$ 对所有 $\pi \in \overline{\frown \text{HN}^{\text{Nonsing}}_{(\xi\ x)}}$，都是单射。因此，$(\xi,\ x) \in \Gamma$。至此，定理 4.5.3.iv 的证明完成。

现在证明定理 4.5.3.v。固定 $v'' \in \Psi^k_c(M)$。设 $\Gamma_n \subseteq \Gamma$ 是一列开锥，使得 $\bigcup_n \Gamma_n = \Gamma$，并且 $\Gamma_n \subseteq \Gamma_{n+1}$。对每个 n，我们固定 v'_n，如将定理 4.5.3.iii 应用于 Γ_n 所得，并取 $\overline{\chi_n} \in \Psi^0_{\text{classical}}(M)$，使得 χ_n 在 Γ_{n-1}上是椭圆的，在 $\overline{\Gamma}_n$ 的补集上是平滑的，并且 χ_n 是（形式上）正的。由于 v'_n 在对角线以外光滑，通过在对角线以外修改 v'_n 和 χ_n，我们可以假设算子 $(v'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 和 $(\chi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是一致适当支撑的。

对每个 n，令 $r_n = \delta_1 - v'_n * v$。因此，我们有

$$\chi_n * v'' = \chi_n * v'' * r_n + \chi_n * v'' * v'_n * v \tag{5.40}$$

由 (4.18) 和 (4.5)（应用于 v''）可知，$\chi_n * v'' * r_n$ 是一个平滑算子；由于 v'' 是紧支撑的，它是一致紧支撑的。因此，$\chi_n * v'' * r_n \in C^\infty_c(M \times M,\ \Omega^{\frac{1}{2}})$。对每个 n，算子 $\chi_n * v'' * v'_n$将 $L^2_{\text{loc}}(M)$ 映射到 $L^2_{\text{loc}}(M)$。为此，令 $w \in L^2_{\text{loc}}(M)$。那么，

$$\begin{aligned}
\text{WF}_0(\chi_n * v'' * v'_n * w) &\subseteq \text{WF}_0(v'' * v'_n * w) && \text{by Theorem 4.5.2.iv} \\
&\subseteq \text{WF}_{\Re(k)}(v'_n * w) && \text{by Theorem 4.5.2.iv} \\
&= \text{WF}_0(w) && \text{by (4.18)} \\
&= \varnothing && \text{by Theorem 4.5.2.ii.}
\end{aligned}$$

此外，由于 v'' 是紧支撑的，其像实际上位于 $L^2(M)$中。因此，算子$\chi_n * v'' * v'_n$ 将 $L^2(M)$ 映射到 $L^2(M)$。故由闭图定理可知它是连续的。现在，

我们取一个序列 $c_n > 0$，它足够快地收敛到0，使得这些和

$$\begin{aligned}
\chi &= \sum_n c_n \chi_n && \text{converges in } \Psi^0_{\text{classical}}(M) \\
r &= \sum_n c_n \chi_n * v'' * r_n && \text{converges in } C_c^\infty(M \times M, \Omega^{\frac{1}{2}}) \\
v' &= \sum_n c_n \chi_n * v'' * v'_n && \text{converges in } \mathcal{L}(L^2(M))
\end{aligned}$$

由 (5.40)，我们有

$$\chi * v'' = r + v' * v. \tag{5.41}$$

由此可得 (4.20)。若 $\Gamma = T^*M \backslash 0$，则无需进行上述操作。只需对 $\Gamma' = \Gamma$ 应用定理 4.5.3.iii 即可。细节留给读者。这就完成了定理 4.5.3.v 的证明。

最后，我们证明定理 4.5.3.vi。由定理 5.4.11.iii，我们可以假设 $k = 0$。由定理 4.5.3.i，$\sigma^0(v,\ \pi,\ x)$ 在 $L^2(\pi)$ 上是单射。因此，由 (5.31) 和命题 B.0.1，v 在 $\Psi^0(M)/\mathcal{K}(L^2(M))$ 中是左可逆的，也就是说，它模紧算子左可逆。 □

定理 4.5.5 的证明。只需对 $v^* * v$ 和 $v * v^*$ 应用定理 4.5.3。 □

附录

附录 A

基里洛夫轨道方法

设 G 为单连通幂零李群，$\mathfrak{g}$ 为其李代数。因此，指数映射 $\exp: \mathfrak{g} \to G$ 是一个微分同胚。对于任意 $\xi \in \mathfrak{g}^*$，令 $B_\xi: \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathbb{R}$ 为反对称双线性形式 $B_\xi(v,w) = \xi([v,w])$，且 $\ker(B_\xi) = \{v \in \mathfrak{g}: B_\xi(v,w) = 0, \forall w \in \mathfrak{g}\}$。由于 B_ξ 是反对称的，$\mathrm{Codim}(\ker(B_\xi))$ 为偶数。令 $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ 为一个李子代数，使得 $B_\xi(\mathfrak{h},\mathfrak{h}) = 0$，$H \subseteq G$ 为积分 $\mathfrak{h}$ 的李子群。映射 $\exp$ 限制为微分同胚 $\mathfrak{h} \to H$，因此特别地，H 是闭的。我们定义希尔伯特空间 $L^2(G/H,\xi)$ 为可测函数 $f: G \to \Omega^{\frac{1}{2}}(\frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{h}})$ 的空间，其中满足对所有 $x \in G$ 和 $y \in \mathfrak{h}$，$f(x\exp(y)) = f(x)e^{i\xi(y)}$，并且 $\int_{G/H} |f|^2 < +\infty$。我们在 $L^2(G/H,\xi)$ 上有一个 G 的酉表示，其定义为

$$\Xi_{G/H,\xi}(f) * g(x) = \int_G f(y)g(y^{-1}x), \quad f \in C_c^\infty(G, \Omega^1(\mathfrak{g})), g \in L^2(G/H,\xi). \tag{A.1}$$

关于基里洛夫轨道方法的主定理可概述如下：

定理 A.0.1（[CG90，第2节。2]）。*i.* 对任意 $\xi \in \mathfrak{g}^*$，存在一个满足 $B_\xi(\mathfrak{h}、\mathfrak{h}) = 0$ 和 余维$(\mathfrak{h}) =$ 余维(核$(B_\xi))/2$ 的李子代数 $\mathfrak{h}$。我们称 $\mathfrak{h}$ 为 ξ 的极化李子代数。

ii. 若 $\xi \in \mathfrak{g}^*$ 且 $\mathfrak{h}$ 是一个极化李子代数，则 $\Xi_{G/H,\xi}$ 是不可约酉表示。此外，G 的任意不可约酉表示都与某个 $\xi \in \mathfrak{g}^*$ 且 $\mathfrak{h}$ 为极化李子代数时的 $\Xi_{G/H,\xi}$ 酉等价。

iii. 若 $\xi' \in \mathfrak{g}^*$ 和 $\mathfrak{h}$ 分别是 ξ 与 ξ' 的极化李子代数，且 ξ 和 $\mathfrak{h}'$，则 $\Xi_{G/H,\xi}$ 与 $\Xi_{G/H',\xi'}$ 酉等价，当且仅当存在 $g \in G$，使得 $\xi = \mathrm{Ad}^*(g)\xi'$。

由定理 A.0.1.iii 中的 $\xi = \xi'$，可知 $\Xi_{G/H,\xi}$ 的等价类不依赖于 $\mathfrak{h}$。因此，我们有一个双射

$$\mathfrak{g}^*/G \to \hat{G}, \quad [\xi] \mapsto [\Xi_{G/H,\xi}], \quad \xi \in \mathfrak{g}^* \tag{A.2}$$

其中，$\mathfrak{g}^*/G$ 是 $\mathfrak{g}^*$ 关于余伴随作用的商。

定理A.0.2（Brown 定理 [Bro73]）。当 $\mathfrak{g}/G$ 配备商拓扑且 G 配备 *Fell* 拓扑时，映射（A.2）是一个同胚。

定理 A.0.1 给出了在 $\mathfrak{h}$ 为极化时表示 $\Xi_{G/H,\xi}$ 的不可约性。Ludwig 的以下定理 [Lud78] 分析了 $\Xi_{G/H,\xi}$ 在一般情形下的表示。

定理 A.0.3。 设 $\xi \in \mathfrak{g}^*$ 和 $\mathfrak{h}$ 为满足 $B_\xi(\mathfrak{h},\mathfrak{h}) = 0$的李子代数。那么， $\Xi_{G/H,\xi}$ 弱包含的 G 的不可约酉表示集合，通过双射 (A.2)对应于集合

$$\overline{\bigcup_{g\in G}\{\mathrm{Ad}^*(g)\eta \in \mathfrak{g}^* : \eta_{|\mathfrak{h}} = \xi\}}/G$$

光滑向量 不可约情形下，表示 $\Xi_{G/H,\xi}$ 的光滑向量有一个非常简单的刻画:

定理 A.0.4 ([CG90，推论 4.1。2])。 设 $\xi \in \mathfrak{g}^*$, $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ 为一个极化李子代数，那么若利用任意一个弱 *Maclev* 基（见 *[CG90]*）将 $L^2(G/H,\xi)$ 与某个 $k \in \mathbb{Z}_+$ 的 $L^2(\mathbb{R}^k)$ 等同，则 $\Xi_{G/H,\xi}$ 的光滑向量空间等于 $\mathbb{R}^k$上的 *Schwartz* 函数空间。

分次李代数 若 $\mathfrak{g} = \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}_+^\nu} \mathfrak{g}_k$ 且 $\mathfrak{g}_0 = 0$，并且对所有 $k,l \in \mathbb{Z}_+^\nu$，都有 $[\mathfrak{g}_k,\mathfrak{g}_l] \subseteq \mathfrak{g}_{k+l}$，则称 $\mathfrak{g}$ 为 ν-分次的。这样的代数允许一个 $\mathbb{R}_+^\nu$-膨胀 $\alpha_\lambda : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$，见 (2.6)。

谱的分解：我们将用到 I. Beltita、D. Beltita 和 J. Ludwig 关于空间 $\mathfrak{g}^*/G$ 结构的以下结果： [BBL17，定理 4.11 和命题 4.5，以及定义 2。9]

定理 A.0.5。存在一个有限的开子集序列 $\varnothing = V_0 \subseteq V_1 \subseteq \cdots \subseteq V_n = \mathfrak{g}^*$，对某个 n，使得

i. 对任意 $i \in [\![0,\ n]\!]$，V_i 在余伴随作用下是闭的，并且在规范的向量空间 $\mathbb{R}_+^\times$-膨胀下是闭的。

ii. 对所有 $i \in [\![0,\ n-1]\!]$，商 $(V_{i+1}\backslash V_i)/G$ 是豪斯多夫局部紧空间（事实上是半代数空间）。此外， $V_n\backslash V_{n-1} = [\mathfrak{g},\ \mathfrak{g}]^\perp$。注意，[$\mathfrak{g}$ 上的余伴随作用在 $\mathfrak{g}]^\perp$ 上是平凡的。

iii. 若 I_i 表示 C^*G 的闭双边理想，其谱为 V_i，则有

$$0 = I_0 \subseteq I_1 \cdots \subseteq I_{n-1} \subseteq I_n = C^*G,$$

and

$$I_{i+1}/I_i \simeq C_0((V_{i+1}\backslash V_i)/G) \otimes \mathcal{K}(l^2(\mathbb{N})),\quad \forall i \in [\![0, n-2]\!]$$
$$I_n/I_{n-1} \simeq C_0(V_n\backslash V_{n-1})$$

iv. 若 $\mathfrak{g}$ 由 $\mathbb{Z}_+^\nu$ 按 ν 分次，则可以假设每个 V_i 对于$\lambda \in (\mathbb{R}_+^\times)^\nu$的膨胀 α_λ 都是不变的。

定理 A.0.5.iv 并未在 [BBL17], 中明确陈述，但从集合 V_i 的构造可以轻易推出，参见 [BBL17，第4.1节和第4.2]节（需要选择一个由纯元素组成的 Jordan–Hölder 基）。

直和： 对于 $i \in \{1,\ 2\}$，如果 G_i 是单连通幂零李群， $\mathfrak{g}_i$ 是它们的李代数，$\xi_i \in \mathfrak{g}_i^*$，并且 $\mathfrak{h}_i \subseteq \mathfrak{g}_i$ 是极化李子代数，那么 $\mathfrak{h}_1 \oplus \mathfrak{h}_2 \subseteq \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$ 是 $\xi_1 \oplus \xi_2$ 的极化李子代数。此外，

$$\Xi_{(G_1\times G_2)/(H_1\times H_2),\xi_1\oplus\xi_2} \simeq \Xi_{G_1/H_1,\xi_1} \otimes \Xi_{G_2/H_2,\xi_2}. \tag{A.3}$$

分次李代数中的一些辅助结果： 受 (2.37) 启发，我们称 ν-分次李代数 $\mathfrak{g}$ 为弱交换的，如果对于任意 $|\{i \in [\![1,\ \nu]\!] :\ k_i \neq 0\}| > 1$，都有 $\mathfrak{g}_k = 0$。我们定义 $\mathfrak{g}^{\hat{i}} = \bigoplus_{j\in\mathbb{Z}_+} \mathfrak{g}^{(0,\ \cdots,\ \overbrace{0,\ j,\ 0\cdots,\ 0}^{\nu-i-1})}$。因此，我们有

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{i=1}^{\nu} \mathfrak{g}^{\hat{i}}, \quad \forall x \in M. \tag{A.4}$$

此外，$[\mathfrak{g}^i,\ \mathfrak{g}^j] = 0$ 对所有 $i,\ j \in [\![1,\ \nu]\!]$ 满足 $i \neq j$。

集合 $\{\xi \in \mathfrak{g}^* :\ \exists i \in [\![1,\ \nu]\!],\ \ \xi_{|\mathfrak{g}^{\hat{i}}} = 0\}$ 在余伴随作用下封闭。若一个不可约酉表示通过 (A.2) 对应于一个包含在上述集合中的余伴随轨道，我们就称其为奇异的。否则，我们称其为非奇异的。

我们用 $C^*_{\mathrm{nonsing}}G$ 表示 C^*G 的闭理想，其谱为非奇异不可约酉表示的集合。我们用 G_{nonsing} 表示 G的非奇异不可约酉表示的等价类，即 $C^*_{\mathrm{nonsing}}G$ 的谱。

定理 A.0.6。 交叉积 $C^*_{\mathrm{nonsing}}G \rtimes (\mathbb{R}_+^\times)^\nu$ 是一个 C^* 型 I 代数，其谱同胚于 $\hat{}\ G_{\mathrm{nonsing}}/(\mathbb{R}_+^\times)^\nu$。

证明。 这由定理 A.0.5 得出。需要验证 $(\mathbb{R}_+^\times)^\nu$ 在局部紧空间 $(V_{i+1}\backslash V_i)/G$ 的开子集 $\hat{}\ G_{\mathrm{nonsing}} \cap ((V_{i+1}\backslash V_i)/G)$ 上的作用是自由且适当的。细节留给读者。

□

定理 A.0.7。 若 π 是 G的非奇异表示，且 $\xi \in C^\infty(\pi)$ 是一个光滑向量，那么对任意 $i \in [\![1、\nu]\!]$，都存在某些 $X_1、\ \cdots、\ X_n \in \mathfrak{g}^i$ 以及 $\xi_1、\ \cdots、\ \xi_n \in C^\infty(\pi)$，使得 $\xi = \pi(X_1)\xi_1 + \cdots + \pi(X_n)\xi_n$，其中 $\pi(X_i)$ 由 π的微分定义。

证明。 将 G 写成由积分 $\mathfrak{g}^i$的子群的乘积后，命题可化为如下形式：若 G 是单连通幂零李群，π 是一个非平凡的不可约酉表示，那么对某些 $X_1,\ \cdots,\ X_n \in \mathfrak{g}$和 $\xi_1,\ \cdots,\ \xi_n \in C^\infty(\pi)$，有 $\xi = \pi(X_1)\xi_1 + \cdots + \pi(X_n)\xi_n$。这是初等的。由 Dixmier-Malliavin 定理，我们可以假设对某些 $f \in C_c^\infty(G)、\ \eta \in C^\infty(\pi),\ \ \xi = \pi(f)\eta$ 成立。π 非平凡这一事实意味着平凡表示不弱包含于 π。因此，存在 $g \in C_c^\infty(G)$ 使得 $\int g = 1$ 但$\|\pi(g)\|_{\mathcal{L}(L^2(\pi))} < 1$。于是，$\mathrm{Id} - \pi(g) : L^2(\pi) \to L^2(\pi)$ 可逆。因此，对某个 $\eta' \in L^2(\pi)$，有 $\eta = \eta' - \pi(g)\eta'$。从而 $\xi = \pi(f - f * g)\eta'$。由于 $\int f - f * g = 0$，我们可以将其写成形如 $X_i * f_i$的函数之和，其中 $X_i * f_i$ 是与 X_i对应的右不变向量场在 f_i上的作用，参见 [AMY22，命题 2.1]。因此，ξ 是形如 $\pi(X_i)\pi(f_i)\eta'$的元素之和。

□

定理 A.0.8 （黎曼-勒贝格引理）。 若 $f \in C_c^\infty(G)$ 和 π 是 G的非奇异不可约酉表示，则对于所有 $i \in [\![1、\ \nu]\!]$ 和 $n \in \mathbb{N}$，存在 $C > 0$ 使得

$$\|\pi(\alpha_\lambda(f))\|_{\mathcal{L}(L^2(\pi))} \leqslant \frac{C}{\lambda_i^n}, \quad \forall \lambda \in (\mathbb{R}_+^\times)^\nu.$$

证明。 该证明是对 [Moh26，引理 2.11] 的直接改编。 □

附录 B

最大次椭圆性的抽象定理

命题 B.0.1 ([Moh26])。 设 A 是一个含幺 C^*-代数。元素 $a \in A$ 左可逆，当且仅当对于 A的每个不可约表示 π， $\pi(a) : L^2(\pi) \to L^2(\pi)$ 都是单射。

定义 B.0.2 （Kaplansky 和 Glimm）。若一个 A C^*-代数 A 满足以下条件，则称其为

- 极限型：对于 A 的每个不可约表示 π，$\mathcal{K}(L^2(\pi)) = \pi(A)$。
- I 型：对于 A 的每个不可约表示 π，$\mathcal{K}(L^2(\pi)) \subseteq \pi(A)$。

关于极限型和 I 型 C^*-代数的详细讨论，请参阅 [Dix77 的第 4 章和 9] 。我们感兴趣的极限型 C^*-代数的例子包括单连通幂零李群的C^*-代数；I 型 C^*-代数的例子则包括我们演算中 0 阶闭包伪微分算子。

命题 B.0.3 ([Dix77，命题 4.3.5、命题 4.3.4，以及第9]章。 若 I 是 C^*-代数 A的双边理想，则 A 是 I 型，当且仅当 I 和 A/I 是 I 型。

命题 B.0.4. 设 A 是一个 I 型 C^*-代数， π 是 A 的一个不可约表示，且单点集 $\{\pi\}$ 是$\hat{}A$的开稠密子集。那么，对任意 $a \in A$， $\pi(a) \in K(L^2(\pi))$ 当且仅当对于所有 $\pi' \in \hat{}A \backslash \{\pi\}$，都有 $\pi'(a) = 0$ 。

证明。 由于 $\{\pi\}$ 在 $\widehat{A}$中稠密， $\pi : A \to \mathcal{L}(L^2(\pi))$ 是单射，见 [Dix77，命题 3.3.2]。因此，若将 A 视为 $\mathcal{L}(L^2(\pi))$的一个 C^*- 子代数，则 $J := \{a \in A : \pi(a) \in \mathcal{K}(L^2(\pi))\}$ 等于 $\mathcal{K}(L^2(\pi))$。因此， J 的谱是一个单点集。同时，由于 J 是 A的一个闭双边理想$\hat{}$，其谱是 A 的一个开子集，由那些在 J上不消失的不可约表示组成。显然， π 在 J上不消失。因此 $\hat{} J = \{\pi\}$。

□

定义 B.0.5。 C^*-演算（带有 $\nu \geqslant 1$-参数）是由 $\mathbb{C}$-向量空间 $(\mathrm{A}_k)_{k \in \mathbb{C}^\nu}$组成的族，使得对每个 k, $l \in \mathbb{C}^\nu$，都有一个乘积映射 $\mathrm{A}_k \times \mathrm{A}_l \to \mathrm{A}_{k+l}$ ，该映射是双线性且满足结合律，即 $(ab)c = a(bc)$ ，若 $a \in \mathrm{A}_{k_1}$, $b \in \mathrm{A}_{k_2}$, $c \in \mathrm{A}_{k_3}$。存在单位元 $0 \neq 1 \in \mathrm{A}_0$, ，即对所有 $a \in \mathrm{A}_k$，都有 $1a = a1 = a$ 。我们还有一个对合映射 $a \in \mathrm{A}_k \mapsto a^* \in \mathrm{A}_{\bar{k}}$ ，它是反线性的，并满足 $1^* = 1$ 和 $(ab)^* = b^* a^*$ ，对所有 $a \in \mathrm{A}_{k_1}$, $b \in \mathrm{A}_{k_2}$ 均成立。我们还有一个 C^*-半范数 $\|\cdot\|_{\mathcal{A}_0}$ 定义在 A_0，上，即一个满足 $\|ab\|_{\mathcal{A}_0} \leqslant \|a\|_{\mathcal{A}_0} \|b\|_{\mathcal{A}_0}$ 且对所有 $a, b \in \mathrm{A}_0$ 都有 $\|a^* a\|_{\mathcal{A}_0} = \|a\|^2$ A_0 的半范数。我们用 A_0 表示 A_0 的豪斯多夫完备化。

我们不假设当 $k \neq l$ 时，可以将 $\mathcal{A}_k$ 和 $\mathcal{A}_l$ 中的元素相加。对于我们的应用，没有必要作出这一假设。此外，在光滑流形上，阶为 $k \in \mathbb{C}$ 和 $l \in \mathbb{C}$ 的经典伪微分算子的和是经典伪微分算子，当且仅当 $k - l \in \mathbb{Z}$。

定义 B.0.6. C^*-演算 $(\mathcal{A}_k)_{k\in\mathbb{C}^\nu}$ 的一个表示由一个非零的 $\mathbb{C}$-向量空间 $C^\infty(\pi)$ 构成，该空间配备正定半双线性形式 $\langle\cdot,\ \cdot\rangle\colon C^\infty(\pi)\times C^\infty(\pi)\to\mathbb{C}$，以及一族线性映射 $\pi_k : \mathcal{A}_k \to \mathrm{End}(C^\infty(\pi))$，对每个 $k \in \mathbb{C}^\nu$ 均有定义，并满足以下条件：

i. 若 $k,\ l \in \mathbb{C}^\nu$, $a \in \mathcal{A}_k$, $b \in \mathcal{A}_b$, $\xi,\ \eta \in C^\infty(\pi)$，则

$$\pi_0(1) = \mathrm{Id}_{\mathbb{C}^\infty(\pi)},\quad \pi_k(a)\pi_l(b) = \pi_{k+l}(ab),\quad \langle\pi_k(a)\xi,\eta\rangle = \langle\xi,\pi_{\bar{k}}(a^*)\eta\rangle.$$

ii. 若 $k \in \mathbb{C}^\nu_{\leqslant 0}$ 且 $a \in \mathcal{A}_k$，则 $\pi_k(a)$ 可延拓为一个有界算子 $L^2(\pi)\to L^2(\pi)$，其中$L^2(\pi)$ 是 $C^\infty(\pi)$ 关于范数 $\|\xi\|^2_{L^2(\pi)} := \langle\xi,\ \xi\rangle$的希尔伯特空间完备化。我们还假设，若 $a \in \mathcal{A}_0,$，则

$$\|\pi_0(a)\| \leqslant \|a\|_{\overline{\mathcal{A}_0}}. \tag{B.1}$$

因此，π_0 延拓为 $\mathcal{A}_0$的一个表示。

iii. 空间 $C^\infty(\pi)$ 赋予由半范数族$\|\pi_k(a)\xi\|_{L^2(\pi)}$（对 $k \in \mathbb{C}^\nu$ 以及 $a \in \mathcal{A}_k$）生成的拓扑后是完备的。

如果该表示作为 C^*-代数 $\mathcal{A}_0$,的表示是不可约的，则称其为不可约表示；也就是说，如果 $L \subseteq L^2(\pi)$ 是一个在 $\pi_0(\mathcal{A}_0)$作用下不变的闭子空间，那么 $L = 0$ 或 $L = L^2(\pi)$。

我们将 $C^{-\infty}(\pi)$ 记作 $C^\infty(\pi)$上的连续反线性泛函空间。$\xi \in C^{-\infty}(\pi)$ 在 $\eta \in C^\infty(\pi)$ 上的作用记作 $\langle\eta,\xi\rangle$。空间 $C^{-\infty}(\pi)$ 赋予由半范数 $\xi \mapsto |\langle\eta,\xi\rangle|$（对每个 $\eta \in C^\infty(\pi)$）生成的拓扑。显然有连续线性嵌入 $C^\infty(\pi) \subseteq L^2(\pi) \subseteq C^{-\infty}(\pi)$。对于每个 $k \in \mathbb{C}^\nu$，我们按照如下公式将 π_k 延拓为一个线性映射$\pi_k : \mathcal{A}_k \to \mathcal{L}(C^{-\infty}(\pi))$

$$\langle\eta,\pi_k(a)\xi\rangle := \langle\pi_{\bar{k}}(a^*)\eta,\xi\rangle,\quad \forall a \in \mathcal{A}_k, \xi \in C^{-\infty}(\pi), \eta \in C^\infty(\pi).$$

有多种方式可以定义与表示 π 相关的索伯列夫空间。这里我们采用限制最严格的一种。我们的主定理表明，它们与限制最宽松的一种相同，见 (B.5)。令 $H^k(\pi)$ 为满足以下条件的 $\xi \in C^{-\infty}(\pi)$ 的集合：存在一个序列$(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq C^\infty(\pi)$，使得 $\xi_n \to \xi$ 属于 $C^{-\infty}(\pi)$；并且对于任意 $l \in \mathbb{C}^\nu$ 和 $a \in \mathcal{A}_l$，只要$R(l) \leqslant k$，就有 $\pi_l(a)\xi \in L^2(\pi)$，且 $\pi_l(a)\xi_n \to \pi_l(a)\xi$ 属于 $L^2(\pi)$。我们赋予 $H^k(\pi)$ 由以下半范数族生成的拓扑：对于所有 $l \in \mathbb{C}^\nu$ 和满足$\mathcal{A}_l$ 的 $a \in$，半范数为 $\xi \mapsto \|\pi_l(a)\xi\|_{L^2(\pi)}$，其中$R(l) \leqslant k$。显然，

$$H^0(M) = L^2(\pi),\quad H^l(\pi) \subseteq H^k(\pi),\quad \text{if } k \leqslant l,$$

并且若 $k \in \mathbb{C}^\nu$、$l \in \mathbb{R}^\nu$ 和 $a \in \mathcal{A}_k$，则 $\pi_k(a)(H^l(\pi)) \subseteq H^{l-\Re(k)}(\pi)$，且映射 $H^l(\pi) \xrightarrow{\pi_k(a)} H^{l-\Re(k)}(\pi)$ 是连续的。空间 $C^\infty(\pi)$、$C^{-\infty}(\pi)$、$H^k(\pi)$ 分别称为与表示 π 相关的光滑向量空间、分布向量空间和索伯列夫空间。

命题 B.0.7 ([Moh26])。我们有

$$C^\infty(\pi) = \bigcap_{k\in\mathbb{R}^\nu_+} H^k(\pi). \tag{B.2}$$

在下面的定理中， K是 $k \in \mathbb{C}^\nu$的集合，使得$R(k_i)$，$I(k_i) \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$对所有$i \in [\![1, \nu]\!]$，且 $k_i \neq 0$ 至多对一个 i。

定理 B.0.8 ([Moh26])。 设 $(A)_{k\in\mathbb{C}^\nu}$ 是一个 C^*-演算， $\Sigma(A)$ 是 $(A)_{k\in\mathbb{C}^\nu}$ 的一个表示集合，并满足以下条件：

i. C^*-代数 A_0 是 $\overline{I}$型的。

ii. A_0 的任意不可约表示都与某个 π_0 酉等价，其中 $\pi \in \Sigma(A)$。

iii. 可以找到一族元素 $v_k \in A_k$ ，其中 $k \in K$ 满足：

(a) 元素 v_0 在 A_0 中可逆。

(b) 对任意 $a \in A_0,$ ，映射

$$k \in K \mapsto v_k a v_{-k} \in \overline{\mathcal{A}_0} \tag{B.3}$$

是连续的，其中 A_0 配备了来自 $\|\cdot\|_{\mathcal{A}_0}$的范数拓扑。

则以下结论成立：

i. 设 $k \in \mathbb{C}^\nu$ 和 $a \in A_k$。若对于任意 $\pi \in \Sigma(A)$， $C^\infty(\pi) \xrightarrow{\pi_k(a)} C^\infty(\pi)$ 和 $C^\infty(\pi) \xrightarrow{\pi_k(a^*)} C^\infty(\pi)$都是单射，则对每个 $(A)_{k\in\mathbb{C}^\nu}$ 的表示 π （不一定不可约，也不一定属于 $\Sigma(A)$），映射

$$\begin{aligned} &\pi_k(a) : C^{-\infty}(\pi) \to C^{-\infty}(\pi) \\ &\pi_k(a) : H^l(\pi) \to H^{l-\Re(k)}(\pi) \quad \forall l \in \mathbb{R}^\nu \\ &\pi_k(a) : C^\infty(\pi) \to C^\infty(\pi) \end{aligned} \tag{B.4}$$

都是拓扑同构。此外，对于任意 $k \in \mathbb{C}^\nu$，存在满足上述条件的 $v \in A_k$ 。

ii. 对于 $(A)_{k\in\mathbb{C}^\nu}$的任意表示 π， $H^k(\pi)$ 都是 *Hilbert* 空间，并且

$$H^k(\pi) = \{\xi \in C^{-\infty}(\pi) : \pi_k(a)\xi \in L^2(\pi),\ \forall a \in \mathcal{A}_k\} \tag{B.5}$$

以及 $C^{-\infty}(\pi) = \bigcup_{k\in\mathbb{R}^\nu} H^k(\pi)$。

iii. 若 $a \in A_0,$ ，则 a 在 A_0 中左可逆，当且仅当对于所有 $\pi \in \Sigma(A)$， $C^\infty(\pi) \xrightarrow{\pi_0(a)} C^\infty(\pi)$ 都是单射

参考文献

[AR00] C. Anantharaman-Delaroche 和 J. Renault。《可约群胚》。第 36 卷。《数学教育丛书专著》 [《数学教育丛书专著》]。附 Georges Skandalis 撰写的序言及 E. Germain 撰写的附录 B。L'Enseignement Mathématique，日内瓦，2000 年，第 196 页。isbn：2-940264-01-5。[Ana21] Claire Anantharaman-Delaroche。关于群胚与半群的弱包含性质的一些评论。2021 年。arXiv： 1604.01724 [math.OA]。[AMY22] I. Androulidakis、O. Mohsen 和 R. Yuncken。最大次椭圆算子及 Helffer-Nourrigat 猜想的伪微分演算。2022 年。arXiv：2201.12060 [math.AP]。[AS09] I. Androulidakis 和 G. Skandalis。"奇异叶状结构的全纯群胚"。载于：《纯粹与应用数学杂志》626（2009），第 1–37 页。issn：0075-4102。doi：10.1515/CRELLE.2009.001。[Aro67] N. Aronszajn。"次笛卡尔空间与亚黎曼空间"。载于：《美国数学会通报》14（1967）。[BBL17] I. Beltiţă、D. Beltiţă 和 J. Ludwig。"幂零李群的 C^*-代数的傅里叶变换"。载于：Int. Math. Res. Not. IMRN 3（2017），第 677–714 页。issn：1073-7928。doi： 10.1093/imrn/rnw040。[Bla96] É. Blanchard。"Hopf C^*-代数的变形"。载于：《法国数学会通报》124.1（1996），第 141–215 页。issn：0037-9484。[Bou67] N. Bourbaki。《数学原本》。第 XXXIII 分册。《微分与解析流形》。结果分册（第 1 至 7 段）。科学与工业新知 [当代科学与工业专题], 第 1333 号。Hermann，巴黎，1967 年，第 97 页。[BHY25a] J. Bradd、N. Higson 和 R. Yuncken。李群胚、佐竹紧化与温和对偶，I：佐竹群胚。2025 年。arXiv： 2511.22637 [math.RT]。[BHY25b] J. Bradd、N. Higson 和 R. Yuncken。李群胚、佐竹紧化与温和对偶，II：Harish-Chandra 原理。2025 年。arXiv：2511.22635 [math.RT]。[Bro73] I. Brown。"幂零李群的对偶拓扑"。载于：《高等师范学校科学年刊》（第 4 辑）6（1973），第 407–411 页。issn：0012-9593。[BE16] A. Buss 和 S. Echterhoff。"Rieffel 真作用"。载于：《算子理论杂志》75.1（2016），第 49–73 页。issn：0379-4024,1841-7744。doi： 10.7900/jot.2014oct28.2047。[CP19] W. Choi 和 R. Ponge。"Carnot 流形上的切映射与切群胚"。载于：《微分几何及其应用》62（2019），第 136–183 页。issn：0926-2245。doi： 10.1016/j.difgeo.2018.11.002。

[Chr+92] M. Christ 等.《带膨胀的群上的伪微分算子》. 载于：《杜克数学杂志》68.1 (1992), 第 31–65 页. ISSN：0012-7094. DOI： 10.1215/S0012-7094-92-06802-5.[Con94] A. Connes.《非交换几何》. Academic Press, Inc., 圣迭戈，加利福尼亚州，1994 年，第 xiv+661 页. ISBN：0-12-185860-X.[CG90] L. Corwin 和 F. Greenleaf.《幂零李群的表示及其应用》. 第一部分. 第 18 卷. 剑桥高等数学研究丛书. 基础理论与实例. 剑桥大学出版社，剑桥，1990 年，第 viii+269 页. ISBN：0-521-36034-X.[CŚ21] R. Cushman 和 J. Śniatycki.《Aronszajn 和 Sikorski 亚笛卡尔微分空间》. 载于：《波兰科学院数学通报》69.2 (2021), 第 171–180 页. ISSN：0239-7269,1732-8985. DOI： 10.4064/ba201118-1-11.[Deb13] C. Debord.《全纯群胚的纵向光滑性》. 载于：《巴黎科学院数学报告》351.15-16 (2013), 第 613–616 页. ISSN：1631-073X. DOI： 10.1016/j.crma.2013.07.025.[DS14] C. Debord 和 G. Skandalis.《绝热群胚、由 $\mathbb{R}_+^*$ 产生的交叉积与伪微分演算》. 载于：Adv. Math. 257 (2014), 第 66–91 页. ISSN：0001-8708. DOI：10.1016/j.aim.2014.02.012.[DS15] C. Debord 和 G. Skandalis.《伪微分扩张与光滑群胚作用的绝热变形》. 英文. 载于：《数学科学通报》139.7 (2015), 第 750–776 页. ISSN：0007-4497. DOI： 10.1016/j.bulsci.2014.12.001.[Dix77] J. Dixmier. C^*-代数. Francis Jellett 法译英，北荷兰数学文库，第 15 卷. 北荷兰出版公司，阿姆斯特丹—纽约—牛津，1977 年，第 xiii+492 页. ISBN：0-7204-0762-1.[DM78] J. Dixmier 和 P. Malliavin.《无穷次可微函数与向量的因子分解》. 载于：《数学科学通报》(2) 102.4 (1978), 第 307–330 页. ISSN：0007-4497.[Eng78] R. Engelking.《维数理论》. 第 19 卷. 北荷兰数学文库. 由作者从波兰语译出并修订. 北荷兰出版公司，阿姆斯特丹—牛津—纽约；波兰科学出版社，华沙，1978 年，第 x +314 页（附勘误表）. ISBN：0-444-85176-3.[EY17] E. van Erp 和 R. Yuncken.《滤过流形的切群胚》. 载于：《伦敦数学会通报》49.6 (2017), 第 1000–1012 页. ISSN：0024-6093. DOI： 10.1112/blms.12096.[EY19] E. van Erp 和 R. Yuncken.《伪微分演算的群丛方法》. 载于：《纯粹与应用数学杂志》756 (2019), 第 151–182 页. ISSN：0075-4102. DOI： 10.1515/crelle-2017-0035.[Fra22] M. Francis.《李群胚的 Dixmier-Malliavin 定理》. 载于：《李理论杂志》32.3 (2022), 第 879–898 页. ISSN：0949-5932.[GS77] V. Guillemin 和 S. Sternberg.《几何渐近》. 第 14 卷 . 数学综述丛书 . 美国数学会，罗德岛州普罗维登斯，1977 年，第 xviii+474 页（一幅插图）.[Heb98] W. Hebisch.《满足 Rockland 条件的算子》. 载于：《数学研究》131.1 (1998), 第 63–71 页. ISSN：0039-3223. DOI： 10.4064/sm-131-1-63-71.

[HN79] B. Helffer 和 J. Nourrigat.《幂零分次李群上左不变齐次假椭圆算子的刻画》. 载于：《交换偏微分方程》4.8 (1979), 第 899–958 页. ISSN：0360-5302. DOI： 10.1080/03605307908820115.[HN85] B. Helffer 和 J. Nourrigat. 向量场多项式算子的最大假椭圆性. 第 58 卷. 数学进展丛书. Birkhäuser Boston, Inc.，波士顿，马萨诸塞州，1985 年，第 x+278 页. ISBN：0-8176-3310-3.[Hel94] S. Helgason. 对称空间上的几何分析. 第 39 卷. 数学综述与专著. 美国数学会，罗德岛州普罗维登斯，1994 年，第 xiv+611 页. ISBN：0-8218-1538-5. DOI： 10.1090/surv/039.[Hör67] L. Hörmander.《二阶微分方程的假椭圆性》. 载于：《数学学报》119 (1967), 第 147–171 页. ISSN：0001-5962. DOI： 10.1007/BF02392081.[Hör85] L. Hörmander. 线性偏微分算子的分析. *III*. 第 274 卷. 数学科学基础原理丛书 [数学科学基本原理]. 伪微分算子. Springer-Verlag，柏林，1985 年，第 viii+525

isbn: 3-540-13828-5.[Hör90] L. Hörmander.《线性偏微分算子分析》。I。第二版。Springer 研究版。分布理论与傅里叶分析。Springer-Verlag，柏林，1990，第 xii+440 页。isbn: 3-540-52343-X。doi: 10.1007/978-3-642-61497-2.[Kas88] G. G. Kasparov。“等变 KK-理论与诺维科夫猜想”。载于：Invent. Math. 91.1（1988），第 147–201 页。issn: 0020-9910。doi: 10.1007/BF01404917.[Lan95] E. C. Lance。希尔伯特 C*-模。第 210 卷。伦敦数学会讲义丛书。算子代数学家工具箱。剑桥大学出版社，剑桥，1995，第 x+130 页。isbn: 0-521-47910-X。doi: 10.1017/CBO9780511526206.[LMV17] J.-M. Lescure、D. Manchon 与 S. Vassout。“关于群胚上分布的卷积”。载于：J. Noncommut. Geom. 11.2（2017），第 757–789 页。issn: 1661-6952。doi: 10.4171/JNCG/11-2-10.[Lud78] J. Ludwig。“幂零李群的群代数中的好理想”。载于：Math. Z. 161.3（1978），第 195–210 页。issn: 0025-5874,1432-1823。doi: 10.1007/BF01214503.[Moh24] O. Mohsen。“次黎曼几何中的切群胚与切锥”。载于：《杜克数学杂志》173.16（2024），第 3179–3218 页。doi: 10.1215/00127094-2024-0013.[Moh26] O. Mohsen。抽象最大假椭圆性及其应用。2026。arXiv: 2601[math.OA].[Mun00] J. Munkres。《拓扑》。第二版。Prentice Hall, Inc.，新泽西州上萨德尔里弗，2000，第 xvi+537 页。isbn: 0-13-181629-2.[Ozo72] V. Ozols。“基灵向量场长度的临界点”。载于：《微分几何杂志》7（1972），第 143–148 页。issn: 0022-040X.[RW98] I. Raeburn 与 D. P. Williams。Morita 等价与连续迹 C*-代数。第 60 卷。数学综述与专著。美国数学会，罗德岛州普罗维登斯，1998，第 xiv+327 页。isbn: 0-8218-0860-5。doi: 10.1090/surv/060.[Ren80] J. Renault。C*-代数的群丛方法。第 793 卷。数学讲义。Springer，柏林，1980，第 ii+160 页。isbn: 3-540-09977-8.

[Ren87] J. Renault。“群胚代数的交叉积的表示”。载于：《算子理论杂志》18.1（1987），第 67–97 页。issn: 0379-4024.[Rie90] M. A. Rieffel。“群在 C^*-代数上的适当作用”。载于：算子代数映射（宾夕法尼亚州费城，*1988*）。第 84 卷。数学进展。Birkhäuser Boston，马萨诸塞州波士顿，1990，第 141–182 页。isbn: 0-8176-3476-2.[Ros02] W. Rossmann。李群：通过线性群的导论。英文。第 5 卷。牛津研究生数学教材。牛津：牛津大学出版社，2002。isbn: 0-19-859683-9.[RS76] L. P. Rothschild 与 E. Stein。“亚椭圆微分算子与幂零群”。载于：《数学学报》137.3-4（1976），第 247–320 页。issn: 0001-5962。doi: 10.1007/BF02392419.[Rud91] W. Rudin。泛函分析。第二版。纯数学与应用数学国际丛书。麦格劳-希尔公司，纽约，1991，第 xviii+424 页。isbn: 0-07-054236-8.[Sik72] R. Sikorski。微分几何导论（波兰科学出版社[2]）。第 Tom 42 卷。数学图书馆丛书 [数学图书馆]。波兰科学出版社，华沙，1972，第 369 页。[Śni13] J. Śniatycki。奇异空间的微分几何与对称性约化。第 23 卷。新数学专著丛书。剑桥大学出版社，剑桥，2013，第 xii+235 页。isbn: 978-1-107-02271-3。doi: 10.1017/CBO9781139136990.[Str14] B. Street。多参数奇异积分。英文。第 189 卷。《数学年刊研究》。新泽西州普林斯顿：普林斯顿大学出版社，2014。isbn: 978-0-691-16251-5; 978-0-691- 16252-2; 978-1-4008-5275-8。doi: 10.1515/9781400852758.[Str23] B. Street。极大次椭圆性。英文。第 93 卷。德格鲁伊特数学研究丛书。柏林：De Gruyter，2023。isbn: 978-3-11-108517-3; 978-3-11-108564-7。doi: 10.1515/9783111085647

.

[Trè67] F. Trèves。《拓扑向量空间、分布与核》。Academic Press，纽约-伦敦，1967年，第xvi+624页。[Wil15] R. Willett。“一个最大 C^*代数与约化 C^*代数相同的非顺从广群”。载于：《明斯特数学杂志》8.1（2015），第241–252页。issn：1867-5778,1867-5786。doi：10.17879/65219671638。[Wil07] D. P. Williams。《交叉积》 C^*-代数。第134卷。数学综述与专著。美国数学会，罗德岛州普罗维登斯，2007年，第xvi+528页。isbn：978-0-8218-4242-3。doi： 10.1090/surv/134。