arXiv:2601.22163v1 [math.CO] 10 Jan 2026

″厄尔多斯正方形装填猜想

ANSHUL RAJ SINGH

Abstract. 设 $f(n)$ 表示装入单位正方形或（单位等边三角形）中的互不重叠的正方形（或等边三角形）的边长总和的最大值。本文探讨 f 的一些性质，并考察正方形情形与三角形情形的相似之处。我们证明，厄尔多斯的一个猜想——即对于所有 k，$f(k^2+1) = k$ ——等价于级数 $\sum_{k\geqslant 1}(f(k^2+1) - k)$ 的收敛。我们还探讨平行四边形的情形，并讨论其与单位正方形及三角形情形的相似之处。

1. Introduction引言

设 $f(n)$ 表示装入单位正方形中的 n 个互不重叠的正方形的边长总和的最大值。柯西-施瓦茨不等式的一个简单应用表明，对于所有 n，$f(n^2) = n$。厄尔多斯 [1] 猜想，对于所有正整数 n，$f(n^2+1) = n$，但这一问题至今仍未解决。

本文首先考察单位等边三角形（边长为单位长度）情形下的这一猜想，结果发现它与单位正方形情形非常相似。稍微修改 f 的定义后，我们还将看到，平行四边形情形也具有相同的性质。

2. Main results

定理 1. 令 $f\colon \mathbb{N}\to\mathbb{R}$，使得对所有 $a\leqslant b$，都有

$$af(m)\leqslant a^2-b^2+bf(b^2-a^2+m)\ and\ f(m^2+1)\geqslant m \quad (*)$$

对任意正整数 m。令 $\epsilon(k) := f(k^2+1) - k$，则

(1) 若对于某个 n，有 $\epsilon(n) = 0$，则对所有 $k\leqslant n$，都有 $\epsilon(k)$。(2) 若对于某个 n，有 $\epsilon(n) > 0$，则 $\epsilon(k) = \Omega(1/k)$，即存在正常数 c 和整数 k_0，使得对所有 $k\geqslant k_0$，都有 $\epsilon(k) \geqslant c/k$。

证明。若 n 满足 $\epsilon(n) = 0$，我们要证明对所有 $k\leqslant n$，都有 $\epsilon(k) = 0$。令 $n\geqslant k$ 满足 $\epsilon(n) = 0$。设 $m = k^2+1, a = k$，且 $b = n$。将这些值代入（$*$），得到

$$kf(k^2+1)\leqslant k^2-n^2+nf(n^2-k^2+k^2+1)\Rightarrow kf(k^2+1)\leqslant k^2.$$

因此，对于所有 $k\leqslant n$，$f(k^2+1) = k$。这就证明了 (1)。

现在令 n 满足 $f(n^2+1) = n+\alpha$，其中 $\alpha>0$。令 $a = n$、$m = n^2+1$ 和 $b\geqslant n$，因此由 $(*)$ 可得

$$nf(n^2+1) = n^2+n\alpha\leqslant n^2-b^2+bf(b^2+1) = n^2+b\epsilon(b).$$

因此，对于所有 $b\geqslant n$，$\epsilon(b)\geqslant n\alpha/b$。这就证明了 (2)。 □

日期：2026年2月2日。

3. The Case of triangle

设 a_1、a_2、.....、a_n 为装填在一个单位等边三角形（边长为 1）内、彼此不重叠的等边三角形的边长。设 $f(n)$ = 为所有这些 n 个三角形的可能装填方式中的最大值。注意，通过比较面积可得 $\sqrt{3}(a_1^2+\cdots+a_n^2)/4 \leqslant \sqrt{3}/4 \implies a_1^2+\cdots+a_n^2 \leqslant 1$。另一方面，根据柯西-施瓦茨不等式，我们有

$$n \geqslant (a_1^2+\cdots+a_n^2)(n) \geqslant (a_1+\cdots a_n)^2 \implies f(n) \leqslant \sqrt{n}.$$

由于等边三角形总能用数量为平方数的全等小等边三角形铺砌，因此对于所有正整数 k，我们有 $f(k^2) = k$。由此自然引出一个类似于 Erd˝os 猜想的问题：对于所有 k，我们能否说 $f(k^2+1) = k$？

定理 2. *$f(k^2+1)$ 对于所有 k，当且仅当 $\sum_{k\geqslant 1}\epsilon(k)$ 收敛时成立。*

首先，我们声称 f 满足 $(*)$。注意，$f(k^2+1) \geqslant k$，示例见图1 .

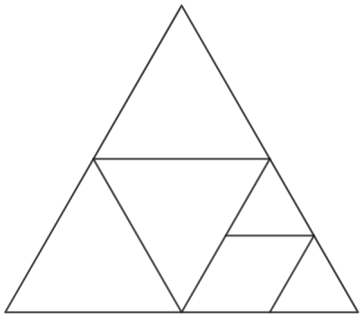


图1，示例：$n = 2$，边长总和 $= 2$

现在来 证明另一个不等式，我们采用与 Iwan Praton [2] 类似的论证。

取一个单位等边三角形，将其划分为 $b \times b$ 标准三角形网格，见图2，每个三角形的边长为 $1/b$。从右下角移除一个 $a \times a$ 子网格，并用 n 个互不重叠、处于最优配置的三角形替代，即使边长总和最大化。现在我们有 n 个边长缩小为原来的 a/b 的正方形，因此其边长总和为 $af(n)/b$，以及 b^2-a^2 个边长为 $1/b$ 的正方形。因此，三角形边长总和为 $(b^2-a^2)/b + af(n)/b$。此外，三角形总数为 b^2-a^2+n。于是，根据 f 的定义，我们得到

$$b - \frac{a^2}{b} + a\frac{f(n)}{b} \leqslant f(b^2-a^2+n) \implies af(n) \leqslant a^2 - b^2 + bf(b^2-a^2+n).$$

这表明 f 满足（$*$）。

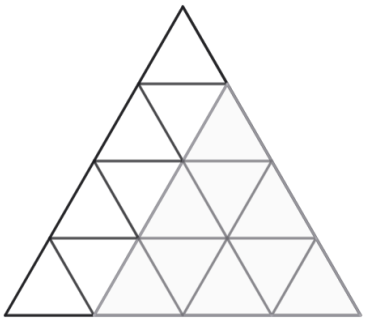


图2，示例： $b = 4, a = 3$

注意，这一论证适用于任何能够用数量为平方数、且与其相似的全等图形铺砌的形状。

现在由 定理 *1*，我们得到，若 $f(n^2+1) = n$对某个 n成立，则 $f(k^2+1) = k$对所有$k \leqslant n$都成立。特别地，若 $f(k^2+1) = k$对无穷多个 k成立，则 $f(k^2+1) = k$对所有 k都成立。现在我们证明定理 *2*。

定理 *2* 的证明。 正向显然。对于逆向部分，假设级数收敛，那么根据定理 *1*的第 (2) 部分，我们不可能有一个 n ，使得 $\epsilon(n) > 0$，否则 $\epsilon(k) = \Omega(1/k) \implies \sum_{k\geqslant 1} \epsilon(k)$ 发散。 □

4. The Case of Unit Square (Erdős)

设 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 为装入单位正方形内的互不重叠的正方形的边长。设 $f(n) = \max\{a_1 + \cdots + a_n\}$。则 f 满足 (∗)。这也可通过与等边三角形情形相同的论证得到证明。

因此，我们得到相同的结果，即，当且仅当级数 $\sum_{k\geqslant 1} \epsilon(k)$ 收敛时，Erd″os 猜想成立。此外，我们还得到：如果对于无穷多个 k， $f(k^2+1) = k$，则该猜想成立。

5. The Case of parallelograms

显然，对于这种情形，我们必须修改 f。不妨设平行四边形的一条边为 1，另一条边为 x。设覆盖该平行四边形的相似平行四边形的边分别为 a_i 和 $a_i x$，其中 $i = 1, 2, \ldots, n$。于是， $f(n) := \max\{a_1 + \cdots + a_n\}$。容易看出，由于该平行四边形可以用若干个与其相似且全等的平行四边形铺砌，其中铺砌数量为平方数，因此该 f 满足 (∗)。所以，前一种情形中的结果同样适用于本情形。

References

[1] Erd″os, Paul, 《数论、组合学和组合几何中的一些问题》。《泛农数学》（1994），261-269。[2] Praton, I.，正方形内的正方形装填。《数学杂志》（2008），358-361