arXiv:2601.22171v1 [math.DG] 22 Jan 2026

SU(1,1) 的伪黎曼谱三元组

JORT J.A.M. DE GROOT

Abstract. 我们利用 SU(1,1) 的调和分析证明，三元组 $(\mathcal{A},\ \mathcal{H},\ D)$ 中，D（闭包后的）Kostant 三次狄拉克算子作用在希尔伯特空间 $\mathcal{H}=L^2(\mathrm{SU}(1,1))\otimes\mathbb{C}^2$ 上，且其 $*$-代数为 $\mathcal{A}=C_c^\infty(\mathrm{SU}(1,1))\otimes 1$，既构成 Van den Dungen、Paschke 和 Rennie 意义下的伪黎曼谱三元组，也构成 Van den Dungen 和 Rennie 意义下的不定谱三元组。

1. Introduction

非交换几何计划的一项重大成就是 Alain Connes 的重构定理 [3], 。该定理指出，对于一个满足另外五个条件且 $\mathcal{A}$ 可交换的谱三元组 $(\mathcal{A},\ \mathcal{H},\ D)$，存在唯一对应的光滑、有向、紧（自旋^c）流形 X，其上具有 $\mathcal{A}=C^\infty(X)$，且黎曼度量由 D 构造而成。然而，迄今尚不清楚如何为不一定紧致且配备伪黎曼度量的流形证明类似定理。因此，这类流形所适用的谱三元组的正确表述仍是一个悬而未决的问题。

人们曾多次尝试在不同的设定中构造谱三元组。以下列举的例子并不完整：伪黎曼谱三元组（`依照 Strohmaier 的方法） [19], 等变洛伦兹谱三元组 [15], 半有限谱三元组 [2], Krein谱三元组 [5], 伪黎曼谱三元组（`依照 Van den Dungen、Paschke、Rennie 的方法） [4], 以及不定谱三元组 [6, 7]。后一种伪黎曼谱三元组是对半有限谱三元组和等变洛伦兹谱三元组的推广，并且与为半有限谱三元组（尤其是局部指标定理）所构建的框架相兼容 [4]。另一方面，Krein谱三元组提供了一种互补的视角。不定谱三元组与后来提出的伪黎曼谱三元组处于相似的地位。事实上，这两种定义密切相关，甚至可能等价，尽管目前仍缺少相应的证明。

通常，伪黎曼流形上的狄拉克算子并非对称算子。因此，在描述伪黎曼流形的谱三元组的假设中，不再要求狄拉克算子本质自伴。相反，狄拉克算子 D 被要求是闭的且稠密定义的。伪黎曼谱三元组 [4] 的定义包含对二阶算子的假设，这些假设确保存在一个相关的谱三元组，该谱三元组通过

Date: 2026年。2020 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类：58B34，次要分类：22E30、53C50。*Key words and phrases.* 伪黎曼流形，非交换几何，Plancherel定理。

维克旋转得到。由此可得到一个 K-同调类，从而可以应用局部指标公式。然而，维克旋转有两种可能。另一方面，不定谱三元组 [6, 7] 的定义包含对一阶算子的假设，并将两个 谱三元组与该不定谱三元组相关联。此外，这一过程可以逆转，且可以由这两个谱三元组重构出不定谱三元组。

伪黎曼谱三元组和不定谱三元组的动机性例子，均由伪黎曼自旋流形给出（M, g），其切丛分解为 $TM = E_t \oplus E_s$，其中 g 在 E_t 上负定，在 E_s 上正定。由此可以定义反射 $r\colon TM \to TM$，其定义为 $r := 1 - 2T$，其中 T 是投影 $TM \to E_t$，以及黎曼度量 g_E（v, w）：$= g$（rv, w）（其中 $v, w \in TM$）。若所得黎曼流形是完备的且具有有界几何，并且其狄拉克丛也具有有界几何，那么由度量 g 得到的几何Dirac算子 D 确定一个伪黎曼谱三元组 [4, （命题 3.8], ）和一个不定谱三元组 [7, （命题 4.5]）。此外，在这两种情况下，对谱三元组的假设都保证了狄拉克算子的实部与虚部的组合 $D_\pm = \mathrm{Re}\, D \pm \mathrm{Im}\ D$ 确定一个符合 [2] 意义下的含幺谱三元组。这里 $\mathrm{Re}\ D = \frac{1}{2}(D + D^*)$，$\mathrm{Im}\ D = -\frac{i}{2}(D - D^*)$，其中 D^* 是 D 的希尔伯特空间伴随。

本文旨在构造与李群 SU(1，1) 相关的伪黎曼谱三元组和不定谱三元组。尽管可以证明，SU(1，1) 的底流形满足文献 [4]和 [6, 7]，中构造所需的上述条件，但本文提出以下几点：

1）与 SU(1,1) 的群结构相关的调和分析可用于探讨谱三元组的公理。这一点在仅使用流形结构的几何构造中并未被考虑。此外，依赖于 SU(1,1) 调和分析的证明更容易适应量子群的设定[1]。2）利用反射 r 定义的维克旋转，可以借助 SU(1,1) 上的嘉当对合得到自然的解释。确切地说，由 Killing 型 B 得到的伪黎曼度量，经由 $\mathfrak{su}$(1,1) 的标准嘉当对合 θ 与一个黎曼度量相关联，其中该黎曼度量由双线性形式 $B_\theta(X, Y) := B(X, \theta Y)$ 定义，适用于 $X, Y \in \mathfrak{su}$(1,1)。3）我们不使用几何Dirac算子，而是使用 SU(1,1) 上自然出现的另一个狄拉克算子，即 Kostant 三次狄拉克算子 [11]，它在模去一个常数后平方为卡西米尔算子。事实上，正如后文将表明的，对于伪黎曼谱三元组的构造，三次狄拉克算子的优势在于二阶算子 $R_D = \frac{i}{2}(D^2 - D^{*2})$ 为零，这大大简化了谱三元组的光滑性假设。此外，对于不定谱三元组的构造，使用三次狄拉克算子的优势在于 D 的实部与虚部反对易，这比谱三元组假设中所要求的弱反对易更强。

[1]这是后续研究将继续探讨的方向，研究对象是局部紧量子群 $\mathrm{SU}_q(1, 1) \rtimes \mathbb{Z}_2$。

4）我们认为，对于不定谱三元组，正确的假设是狄拉克算子的实部与虚部弱反对易，无论在偶情形还是奇情形中均如此。这是对 [6], 中奇不定谱三元组定义的一种修正，该定义指出，在奇情形中实部与虚部应当弱对易。我们通过详细讨论 SU(1,1) 的例子来支持弱反对易才是正确概念这一主张，并在实部与虚部弱反对易的假设下，恢复[6] 的倍增构造，从而由奇谱三元组得到偶不定谱三元组。

此外，齐性空间上的狄拉克算子 G/K 可以简单地定义为 G 上的三次狄拉克算子与 K上的三次狄拉克算子之差。希望通过这种方式了解 SU(1，1) 上的谱三元组，从而获得庞加莱 圆盘 SU(1，1)/U(1) 上的谱三元组。然而，本文将不再继续探讨这一方向。

本文的结构如下。第 2 节中，我们固定 SU(1，1) 的记号，并计算三次狄拉克算子。此外，我们还讨论该算子如何融入几何表述。随后，在第 3 节中，我们阐释 SU(1，1) 的调和分析，这是后续各节证明中最重要的工具。第 4 节给出伪黎曼谱三元组和不定谱三元组的定义，并表述主要定理，说明 SU(1，1) 与三次狄拉克算子共同构成这两类谱三元组。第 5 节全部用于证明这些定理。

致谢。 感谢 Hessel Posthuma 和 Mikhail Isachenkov 在本项目期间给予我的指导和富有洞见的反馈。同时感谢 Koen van den Dungen 和 Adam Rennie, 就本文讨论的两个谱三元组提供了有益的通信交流。最后，感谢 Teun van Nuland，感谢他围绕引理 5.11 的证明所进行的宝贵讨论。

2. The cubic Dirac operator on SU(1，1)

李群 SU(1，1) 是由保持符号为 $J=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$ 的 Hermitian 型且行列式为单位的复 2×2-矩阵构成的群，即:

$$\mathrm{SU}(1,1)=\{A\in M_2(\mathbb{C})\mid \det A=1, AJA^*=J\}.$$

SU(1，1) 的李代数是由 $\{e_1,e_2,e_3\}$ 张成的实李代数 $\mathfrak{su}(1,1)$，其李括号为 $[e_1,e_2]=e_3$、$[e_2,e_3]=-e_1$、$[e_3,e_1]=-e_2$。关于 Killing 型 $B(X,Y):=\mathrm{Tr}\,\mathrm{ad}\,X\,\mathrm{ad}\,Y$on $\mathfrak{su}(1,1)$，该基是正交的；该型是对称的、双线性的且非退化的，这是因为 $\mathfrak{su}(1,1)$ 是半单的。计算可得

$$B(e_1,e_1)=2,\qquad B(e_2,e_2)=2,\qquad B(e_3,e_3)=-2.$$

从而 B-对偶基为 $\{e^1,e^2,e^3\}:=\{\frac{1}{2}e_1,\frac{1}{2}e_2,-\frac{1}{2}e_3\}$。万有包络代数 $\mathcal{U}(\mathfrak{su}(1,1))$的中心由下式给出的卡西米尔元Ω生成

$$\Omega=e_1e^1+e_2e^2+e_3e^3=\tfrac{1}{2}e_1^2+\tfrac{1}{2}e_2^2-\tfrac{1}{2}e_3^2.$$

克利福德代数 Cl($\mathfrak{su}(1,1)$) 是由 $\mathfrak{su}(1,1)$ 的元素生成的结合代数，其关系为

$$XY+YX=2B(X,Y),\qquad X,Y\in\mathfrak{su}(1,1).$$

这些关系对应于 [14]中所采用的约定。克利福德代数作为向量空间与外代数 $\wedge\mathfrak{su}(1,1)$ 同构。该同构由量子化映射 $q\colon \wedge\mathfrak{su}(1,1) \to \mathrm{Cl}(\mathfrak{su}(1,1))$ 显式实现（参见例如[14, 命题 2.7]），它对所有 $X_1, \ldots, X_k \in \mathfrak{su}(1,1)$ 由下式给出

$$q(X_1 \wedge \cdots \wedge X_k) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} \operatorname{sgn}(\sigma) X_{\sigma_1} \cdots X_{\sigma_k},$$

其中 S_k 是由 1、……、k 组成的置换群，而 $\operatorname{sgn}(\sigma)$ 表示置换 σ 的奇偶性。

Killing 型的不变性意味着它是完全反对称的，从而定义了 $\wedge^3\mathfrak{su}(1,1)$ 中一个称为结构常数张量的元素，用（对偶）基表示为

$$\phi \coloneqq -\frac{1}{12} \sum_{abc} B([e_a, e_b], e_c) e^a \wedge e^b \wedge e^c.$$

经显式计算可得

$$\phi = -\tfrac{1}{8} e_1 \wedge e_2 \wedge e_3. \tag{2.1}$$

Kostant 和 Sternberg [12]最先指出，结构常数张量 $q(\phi) = -\frac{1}{8} e_1 e_2 e_3$ 在量子化映射下的像的平方是一个常数。Kostant 据此定义了一个狄拉克算子 [11], ，并称之为三次狄拉克算子。它是 $\mathcal{U}(\mathfrak{su}(1,1)) \otimes \mathrm{Cl}(\mathfrak{su}(1,1))$ 中如下形式的一个元素

$$D_0 \coloneqq \sum_a e^a \otimes e_a + 1 \otimes q(\phi). \tag{2.2}$$

三次狄拉克算子的平方为

$$D_0^2 = \Omega \otimes 1 + \tfrac{1}{24} \operatorname{Tr} \Omega \otimes 1,$$

其中的迹是在伴随表示中计算的。

注 2.1。事实上，上文定义的三次狄拉克算子是 Kostant 在 [11]中定义的狄拉克算子的一个特例。更一般的情形考虑一个二次李代数 $\mathfrak{g}$，其中 $\mathfrak{k} \subset \mathfrak{g}$ 是一个二次子代数。令 $\mathfrak{p} = \mathfrak{k}^\perp$ 为 $\mathfrak{k}$ 在 $\mathfrak{g}$中的正交补，于是 $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$。相对狄拉克算子是元素 $D_{\mathfrak{g},\,\mathfrak{k}} \in (\mathcal{U}(\mathfrak{g}) \otimes \mathrm{Cl}(\mathfrak{p}))^{\mathfrak{k}\text{-inv}}$，其定义见命题 7. [14, 7]

$$D_{\mathfrak{g},\mathfrak{k}} = \sum_a {}^{(\mathfrak{p})} e_a \otimes e^a + q(\phi_{\mathfrak{p}}).$$

这里，求和符号 $\sum_{a,\ b(\mathfrak{p})}$ 表示对 $\mathfrak{p}$的一组基求和，而 $\phi_{\mathfrak{p}}$ 是 $\mathfrak{p}$的结构常数张量（即仅对 $\mathfrak{p}$的一组基求和）。

相对狄拉克算子也可以通过将 $\mathfrak{g}$ 和 $\mathfrak{k}$ 的三次狄拉克算子作差得到。为此，令 $\lambda_{\mathfrak{g}}(\xi) \coloneqq -\frac{1}{4} \sum_{a,b} B(\xi, [e_a, e_b]) e^a \wedge e^b$。对于$\xi \in \mathfrak{k}$，根据$[\mathfrak{k}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{p}$，该式可分解为 $\lambda_{\mathfrak{g}}(\xi) = \lambda_{\mathfrak{k}}(\xi) + \lambda_{\mathfrak{p}}(\xi)$，其中 $\lambda_{\mathfrak{p}}(\xi) \in \wedge^2\mathfrak{p}$。定义单射代数同态 $j\colon \mathcal{U}(\mathfrak{k}) \otimes \mathrm{Cl}(\mathfrak{k}) \to \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \otimes \mathrm{Cl}(\mathfrak{g})$，将生成元 $K \otimes 1, 1 \otimes K \in \mathcal{U}(\mathfrak{k}) \otimes \mathrm{Cl}(\mathfrak{k})$ 分别映射到元素 $K \otimes 1 + 1 \otimes q(\lambda_{\mathfrak{p}}(K))$ 和 $1 \otimes K$ 中的 $\mathcal{U}(\mathfrak{g}) \otimes \mathrm{Cl}(\mathfrak{g})$。记 $D_{\mathfrak{g}}$ 为 $\mathfrak{g}$ 的三次狄拉克算子，记 $D_{\mathfrak{k}}$ 为 $\mathfrak{k}$ 的三次狄拉克算子，则 $D_{\mathfrak{g},\mathfrak{k}} \coloneqq D_{\mathfrak{g}} - j(D_{\mathfrak{k}})$。相对狄拉克算子的平方为

$$D_{\mathfrak{g},\mathfrak{k}}^2 = \Omega_{\mathfrak{g}} - j(\Omega_{\mathfrak{k}}) + \tfrac{1}{24} \operatorname{Tr}_{\mathfrak{g}} \Omega_{\mathfrak{g}} - \tfrac{1}{24} \operatorname{Tr}_{\mathfrak{k}} \Omega_{\mathfrak{k}},$$

其中迹是在伴随表示中计算的 [11, 定理 2。13] [14, 定理 7。4]。

我们使用泡利矩阵在 $\mathbb{C}^2$ 上表示克利福德代数 Cl($\mathfrak{su}(1,1)$)，如下：

$$c(e_1)=\sqrt{2}\sigma_1,\qquad c(e_2)=\sqrt{2}\sigma_2,\qquad c(e_3)=\sqrt{2}i\sigma_3, \tag{2.3}$$

其中

$$\sigma_1=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\qquad \sigma_2=\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix},\qquad \sigma_3=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}. \tag{2.4}$$

在此表示中，三次狄拉克算子 (2.2) 的形式为

$$D_0=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-ie_3+\frac{1}{2}&e_1-ie_2\\e_1+ie_2&ie_3+\frac{1}{2}\end{pmatrix}. \tag{2.5}$$

三次狄拉克算子作用于（典范）旋量丛 $S=$SU(1，1)$\times\mathbb{C}^2$ 的截面上，该旋量丛通过右平移平凡化。为理解这一作用，考虑 SU(1，1) 的左正则表示，它是在函数$f\in C^\infty$(SU(1，1)) 上定义的 SU(1，1) 作用，其定义为

$$(L_hf)(g)=f(h^{-1}g).$$

李代数 $\mathfrak{su}$(1，1) 的相应作用是右不变向量场的作用，

$$(X\cdot f)(g)=\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}f\big(e^{-tX}g\big),$$

它唯一地扩张为泛包络代数 $\mathcal{U}(\mathfrak{su}(1,1))$ 的作用。由于旋量丛的截面是光滑函数 s: SU(1，1) $\to\mathbb{C}^2$，克利福德代数 Cl($\mathfrak{su}$(1，1)) 通过表示式 (2.3) 以克利福德乘法作用于 $\Gamma(S)$。综上，我们得到 $\mathcal{U}(\mathfrak{su}(1,1))\otimes$Cl($\mathfrak{su}$(1，1)) 在$\Gamma(S)$ 上的作用。

注 2.2。 SU(1，1) 上还有另一个旋量丛，可由万有覆盖流形 SU(1，1) 得到$\widetilde{\ }$。不过，本文只考虑典范旋量丛。

2.1. 几何表述。 狄拉克算子可以通过将切丛上的度量相容联络提升到旋量丛上，以几何方式构造。三次狄拉克算子也以这种方式得到，这一点最早由 Goette [8] 和 Agricola [1]观察到。对于旋量丛和切丛通过左平移平凡化的情形，构造过程可见第 [14, 章 9]。下面简要说明这一结果如何适用于我们的情形，即通过右平移平凡化丛。

在某种意义上，SU(1，1) 的切丛上有两种值得考虑的自然联络。其中第一种联络使右不变向量场平坦。这种联络称为自然联络 ∇^{nat}，对于 X^R 和 Y^R 右不变向量场，它定义为

$$\nabla^{\mathrm{nat}}_{X^R}Y^R=0,$$

其挠率为 $T(X^R,\ Y^R)=-[X^R,Y^R]$。

注记 2.3. 向量场的交换子 $[X^R,Y^R]$ 本身就是一个右不变向量场。利用 BCH公式，可计算得出 $[X^R,Y^R]=-[X,Y]^R$，其中$[X,Y]$ 是李代数中的交换子。

第二个联络是 Levi-Civita联络 ∇^{met}，它是相对于（伪黎曼）度量定义的

$$g(X,Y)(h) = -\tfrac{1}{2}B(dR_{h^{-1}}X(e), dR_{h^{-1}}Y(e)),$$

对于向量场 X，$Y \in \mathfrak{X}$(SU(1，1)) 和 $h \in$SU(1，1)。对于右不变向量场 X^R 和 Y^R，∇^{met} 由 [2]给出

$$\nabla^{\mathrm{met}}_{X^R} Y^R = \tfrac{1}{2}[X^R, Y^R].$$

这两个联络定义了一个单参数联络族

$$\nabla^t = (1-2t)\nabla^{\mathrm{nat}} + 2t\nabla^{\mathrm{met}}.$$

三次狄拉克算子是联络 ∇^t 的几何Dirac算子，其中 $t = \frac{1}{3}$ [1]， [14, 定理 9。1]。联络 ∇^t 确定了一个狄拉克算子单参数族 D_0^t，其定义为

$$D_0^t = \sum_a e^a \otimes e_a + 3t \otimes q(\phi). \tag{2.6}$$

3. Spectral decomposition

我们着手计算 D_0 的谱，这需要对 SU(1， 1) 进行一些调和分析，尤其是 SU(1，1) 的 Plancherel定理以及温和表示的矩阵元。

为此，将李代数 $\mathfrak{su}$(1,1) 用泡利矩阵 (2.4) 表示为 $e_1 = \frac{1}{2}\sigma_1$, $e_2 = \frac{1}{2}\sigma_2$, $e_3 = \frac{i}{2}\sigma_3$。于是， $\bar{g} \in$SU(1,1) 的任意元素都可以用欧拉角参数化

$$g(\varphi, t, \psi) = e^{\varphi e_3} e^{te_1} e^{\psi e_3}, \qquad \varphi \in [0, 2\pi), \quad \psi \in [-2\pi, 2\pi), \quad t \geq 0. \tag{3.1}$$

李群 SU(1,1) 是幺模的，因此带有一个左右不变的 Haar测度 dg，且该测度在相差一个比例因子的意义下唯一。用欧拉角表示时，我们固定乘法常数，并将 Haar测度定义为

$$dg \coloneqq \frac{1}{4\pi^2} \sinh t \; d\varphi \; dt \; d\psi. \tag{3.2}$$

借助 Haar测度，将平方可积函数空间 L^2(SU(1,1)) 定义为紧支撑函数 C_c^∞(SU(1,1)) 关于内积的希尔伯特空间完备化

$$\langle f, h \rangle = \int_{\mathrm{SU}(1,1)} f(g)\overline{h(g)} \; dg.$$

李代数 $\mathfrak{su}$(1,1) 在 L^2(SU(1,1)) 上作为无界算子作用。

Let $\widehat{\mathrm{SU}(1，1)}$ 表示 SU(1，1) 的酉对偶。正如我们很快将会看到的，三次狄拉克算子的各个分量作用于适配 SU(1，1) 中某个选定椭圆子群的酉不可约表示的矩阵元时，具有良好的性质。为利用这一事实，我们采用 L^2(SU(1，1)) 的 Plancherel 分解。它将 $\widehat{}$ 平方可积函数表示为 SU(1，1) 上希尔伯特空间的直积分，并以 Plancherel测度为积分测度（这是一个著名的结果，最早由

[2]Levi-Civita联络的这一表达式可以由科斯祖尔公式推导得出

$$\begin{aligned} g(2\nabla_X Y, Z) =& X(g(Y,Z)) + Y(g(X,Z)) - Z(g(X,Y)) \\ &+ g([X,Y],Z) - g([X,Z],Y) - g([Y,Z],X). \end{aligned}$$

由 Harish-Chandra [9]) 得到。我们按照 [20] 的方法，尝试明确写出这一分解。

处于Plancherel测度支集中的酉不可约表示称为温和表示。对于 SU(1，1)，它们是离散级数表示 $T_l^{\pm}$、 $l = -\frac{1}{2}$、-1、$-\frac{3}{2}$.....以及主酉级数 T_χ、 $\chi =($ $i\rho - \frac{1}{2}$， $\epsilon)$、 $\rho \in \mathbb{R}$、 $\epsilon = 0$、$1\,2$。请注意，我们采用了 [20] 的标记约定。分别用 $\mathcal{H}_l^{\pm}$ 和 $\mathcal{H}_\chi$ 表示相应的希尔伯特空间。为这些希尔伯特空间分别选取基 $(v^{l,}{}_n{}^{\pm})$ 和 (v_n^χ) 后，表示的矩阵元定义为

$$\begin{aligned} T_\chi(g)v_n^\chi &= \sum_m t_{mn}^\chi(g)v_m^\chi, \\ T_l^{\pm}(g)v_n^{l,\pm} &= \sum_m t_{mn}^{l,\pm}(g)v_m^{l,\pm}. \end{aligned} \tag{3.3}$$

我们所使用的具体基 $(v^{l,}{}_n{}^{\pm})$ 和 (v_n^χ) 适配于椭圆子群$\{e^{se_3} \mid s \in \mathbb{R}\}$，因此将 e_3 的作用对角化。在此基下，算子ie_3、 $e_1 - ie_2$ 和 $e_1 + ie_2$ （作为 D_0 的分量出现）在矩阵元 (3.3) 上充当升降算子（例如参见 [20]）。对于主酉级数，可得

$$\begin{aligned} -ie_3 t_{mn}^\chi &= m' t_{mn}^\chi, \\ (e_1 - ie_2)t_{mn}^\chi &= -(\tau - m' + 1)t_{m-1,n}^\chi, \\ (e_1 + ie_2)t_{mn}^\chi &= -(\tau + m' + 1)t_{m+1,n}^\chi. \end{aligned} \tag{3.4}$$

这里 $m,\ n \in \mathbb{Z}$, $m' = m + \epsilon$ 以及 $\tau = i\rho - \frac{1}{2}$。此外，对于负离散级数，可以得到

$$\begin{aligned} -ie_3 t_{mn}^{l,-} &= m' t_{mn}^{l,-}, \\ (e_1 - ie_2)t_{mn}^{l,-} &= -\sqrt{(l - m' + 1)(-l - m')}\, t_{m-1,n}^{l,-}, \\ (e_1 + ie_2)t_{mn}^{l,-} &= \sqrt{(l - m')(-l - m' - 1)}\, t_{m+1,n}^{l,-}, \end{aligned} \tag{3.5}$$

其中 $-\infty < m,\ n < l - \epsilon$, $m' = m + \epsilon$，且当 $2l \in \mathbb{Z}_{\text{odd}}$ 时为 $\epsilon = \frac{1}{2}$，当 $2l \in \mathbb{Z}_{\text{even}}$ 时为 $\epsilon = 0$。最后，对于正离散级数，其作用为

$$\begin{aligned} -ie_3 t_{mn}^{l,+} &= m' t_{mn}^{l,+} \\ (e_1 - ie_2)t_{mn}^{l,+} &= \sqrt{(l + m')(-l + m' - 1)}\, t_{m-1,n}^{l,+} \\ (e_1 + ie_2)t_{mn}^{l,+} &= -\sqrt{(l + m' + 1)(-l + m')}\, t_{m+1,n}^{l,+} \end{aligned} \tag{3.6}$$

其中 $-l - \epsilon \le m,\ n < \infty$, $m' = m + \epsilon$，并且当 $2l \in \mathbb{Z}_{\text{odd}}$ 时还有 $\epsilon = \frac{1}{2}$，当 $2l \in \mathbb{Z}_{\text{even}}$ 时为 $\epsilon = 0$。为证明 (3.4)-(3.6)，将这些表示实现为作用在圆上的某类光滑函数上（参见 [20, 第 6.4 节）。椭圆基底就是通常的基底 $e^{-in\theta}$，而矩阵元即为傅里叶系数。将矩阵元表示为欧拉角 (3.1) 的函数后，通过李代数的无穷小作用计算该作用；无穷小作用可通过计算 $\frac{dg}{d\varphi}g^{-1}$, $\frac{dg}{dt}g^{-1}$ 和 $\frac{dg}{d\psi}g^{-1}$ 得到。

— — —

3.1. **Plancherel分解**。 设 π 是 SU(1，1) 的一个酉不可约表示。对于 $f \in L^1$(SU(1，1))，其在 π 处的傅里叶变换为

$$\hat{f}(\pi) \coloneqq \int f(g)\pi(g^{-1})\, dg, \tag{3.7}$$

其中 dg 为 Haar测度（3.2）。

回顾一下， τ 在 L^2(SU(1,1))上的双侧正则表示定义为$\tau(g_1,g_2)f(g) = f(g_2^{-1}gg_1)$, 并且两个可积函数 $f_1, f_2 \in L^1$(SU(1,1))的卷积仍是一个可积函数 $f_1 * f_2(g) = \int f_1(h)f_2(h^{-1}g)dh$。此外，回顾一下，SU(1,1)的酉表示 $\pi \in$ 确定了 $\mathcal{H}_\pi$ 的对偶空间 $\mathcal{H}'_\pi$ 上的对偶表示 $\bar{\pi}$ ，其定义为 $\bar{\pi}(g) = \pi(g^{-1})'$。将希尔伯特空间张量积 $\mathcal{H}_\pi \hat{\otimes} \mathcal{H}_{\bar{\pi}}$ 视为 $\mathcal{H}_\pi$上的希尔伯特–施密特算子空间后，Plancherel定理如下。

定理 3.1 (SU(1,1) 的 Plancherel 定理,1) [9])。傅里叶变换 $f \to \hat{f}$将 $L^1(\mathrm{SU}(1,1)) \cap L^2(\mathrm{SU}(1,1))$ 映射到 $\int^{\oplus} \mathcal{H}_\pi \hat{\otimes} \mathcal{H}_{\bar{\pi}} d\mu(\pi)$，并扩张为从 $L^2(\mathrm{SU}(1,1))$ 到 $\int^{\oplus} \mathcal{H}_\pi \hat{\otimes} \mathcal{H}_{\bar{\pi}} d\mu(\pi)$ 上的酉映射，该映射将双侧正则表示 τ与 $\int^{\oplus} \pi \hat{\otimes} \bar{\pi} d\mu(\pi)$交织起来。这里 $d\mu(\pi)$ 是 *Plancherel*测度

$$d\mu(\pi) = d\mu(T_l^-) + d\mu(T_l^+) + d\mu(T_\chi),$$

$$d\mu(T_l^-) = d\mu(T_l^+) = (-l - \tfrac{1}{2})dl, \qquad d\mu(T_\chi) = \frac{1}{2} \sum_{\epsilon = 0, \frac{1}{2}} \rho \tanh \pi(\rho + i\epsilon) d\rho,$$

其中 dl 在 $\frac{1}{2}\mathbb{Z}_{<0}$ 上取计数测度,– 而在 $\mathbb{R}$上取勒贝格测度。对于 ϕ属于 $\{f * g \mid f, g \in L^1 \cap L^2\}$线性张成空间的情形，有傅里叶反演公式

$$\phi(g) = \int \mathrm{Tr}\left[\pi(g)\hat{\phi}(\pi)\right] d\mu(\pi).$$

Plancherel定理，尤其是傅里叶反演公式，使我们能够将李代数的无穷小作用写成一族（无界）算子，它们作用于 L^2(SU(1，1)) 的 Plancherel分解上。

最后，我们对 SU(1，1) 上的一类函数作一番说明；后文将证明定义 4.1 的条件 (4)，需要用到这类函数。这些函数是 $\mathcal{C}$(SU(1，1)) 上的 Harish-Chandra Schwartz函数，它们构成一类特殊函数，在 L^2(SU(1，1)) 中稠密，与 $\mathbb{R}^n$ 上的 Schwartz函数类似。特别地，它们具有快速衰减性质，包含光滑紧支撑函数 C_c^∞(SU(1，1))，且傅里叶变换将 $\mathcal{C}$(SU(1，1))⁀ 映到 $\mathcal{C}$(SU(1，1)) 上，参见例如 [21]。

4. 谱三元组

回顾克利福德代数 Cl(SU(1，1)) 的表示 $\mathbb{C}^2$，见 (2.3)。在 $\mathbb{C}^2$ 上取标准内积，我们得到 L^2-旋量空间L^2(SU(1，1)) $\otimes \mathbb{C}^2$，其齐次元素 $\varphi \otimes v$ 和 $\psi \otimes w$ 的内积定义为

$$\langle \varphi \otimes v, \psi \otimes w \rangle = \langle \varphi, \psi \rangle_{L^2(\mathrm{SU}(1,1))} \langle v, w \rangle_{\mathbb{C}^2},$$

其中 $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{C}}$ 是 $\mathbb{C}^2$ 上的标准内积，取为关于第二个变量反线性的。

我们可以利用这个内积计算三次狄拉克算子的希尔伯特空间伴随。为此，回忆狄拉克算子为 $D_0 = \sum_a e^a \otimes e_a + 1 \otimes q(\phi)$。于是，对 φ， $\psi \in C_c^\infty$(SU(1，1))，利用 Haar 测度的左不变性，我们得到，对 e^i, $i = 1$，2，3，

$$\langle e^i \cdot \varphi, \psi \rangle = \int \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \varphi\big(e^{-te^i} g\big) \overline{\psi(g)}\, dg = \int \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \varphi(g) \overline{\psi\big(e^{te^i} g\big)}\, dg = \langle \varphi, -e^i \cdot \psi \rangle.$$

因此，希尔伯特空间伴随 $(e^i)^*$ 扩张 $-e^i$，且其定义域稠密。由此我们得出，e^i 是可闭的，其伴随是 $-e^i$ 的闭包。由 (2.3) 可立即推得克利福德代数生成元的伴随，我们得到 $c(e_1)^* = c(e_1)$、$c(e_2)^* = c(e_2)$ 和 $c(e_3)^* = -c(e_3)$。由此可知，$q(\phi)$是自伴的。结合上述结果，我们得到

$$D_0^* = \sum_a (e^a)^* \otimes c(e_a)^* + 1 \otimes q(\phi)^*$$

其定义域在 $C_c^\infty(\mathrm{SU}(1,1)) \otimes \mathbb{C}^2$中稠密，因此 D_0 是可闭的，我们将其闭包记为 $D := D_0$。此外，其伴随算子 D^* 是以下算子的闭包：

$$E_0 = -e^1 \otimes c(e_1) - e^2 \otimes c(e_2) + e^3 \otimes c(e_3) + 1 \otimes q(\phi).$$

希尔伯特空间 $L^2(\mathrm{SU}(1,1)) \otimes \mathbb{C}^2$ 和狄拉克算子 D 用于 SU(1，1) 的谱三元组中。

4.1. 伪黎曼谱三元组。 利用狄拉克算子 D，我们定义两个二阶算子。具体而言，令 $\langle D\rangle^2 := \frac{1}{2}(DD^* + D^*D)$ 和 $R_D := \frac{i}{2}(D^2 - D^{*2})$。算子 $\langle D\rangle^2$ 是正的，因此可以将光滑向量集定义为 $\mathcal{H}_\infty := \bigcap_{k\geq 0} \mathrm{dom}\langle D\rangle^k$。于是，对于满足 $T\colon \mathcal{H}_\infty \to \mathcal{H}_\infty$ 的 $T \in B(\mathcal{H})$，令 $\delta(T) := [(1+\langle D\rangle^2)^{1/2}, T]$。正则 r 阶伪微分算子集为 $\mathrm{OP}^r(\langle D\rangle) := (1+\langle D\rangle^2)^{r/2}\big(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{dom}\ \delta^n\big)$。

定义 4.1 ([4])。伪黎曼谱三元组 $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D)$ 由以下部分组成：
$*$-代数 $\mathcal{A}$ 表示在希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 上为有界算子，并且给定一个稠密定义的闭算子 D：$\mathrm{dom}\ D \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$，满足

(1) $\mathrm{dom}\ D^*D \cap \mathrm{dom}\, DD^*$ 在 $\mathcal{H}$ 中稠密，且 $\langle D\rangle^2$ 在此定义域上本质自伴。(2a) $R_D\colon \mathcal{H}_\infty \to \mathcal{H}_\infty$，且 $[\langle D\rangle^2, R_D] \in \mathrm{OP}^2(\langle D\rangle)$。(2b) 对所有 $a \in \mathcal{A}$，$aR_D(1+\langle D\rangle^2)^{-1}$ 是紧的。(3) 对所有 $a \in \mathcal{A}$，$[D,a]$ 和 $[D^*,a]$ 延拓为 $\mathcal{H}$ 上的有界算子。(4) 对所有 $a \in \mathcal{A}$，$a(1+\langle D\rangle^2)^{-1/2}$ 是紧的。

我们的一个主要结果是，带有三次狄拉克算子的 SU(1，1) 构成一个伪黎曼谱三元组。

定理 4.2。 令 $C_c^\infty(\mathrm{SU}(1,1))$ 通过逐点乘法作用于 $L^2(\mathrm{SU}(1,1))$。那么三元组 $(\mathcal{A},\mathcal{H},D) := (C_c^\infty(\mathrm{SU}(1,1)) \otimes 1, L^2(\mathrm{SU}(1,1)) \otimes \mathbb{C}^2, D)$，其中 D 是三次狄拉克算子的闭包，按照定义 *4.1* 的意义，是一个伪黎曼谱三元组。

下一节将证明该定理。不过，我们先来看看其中一些关键要素。

对于伪黎曼谱三元组而言，两个尤为重要的算子是 $\langle D\rangle^2 = \frac{1}{2}(DD^* + D^*D)$ 和 $R_D = \frac{i}{2}(D^2 - D^{*2})$。我们来计算这些算子。

注意到 $D_0E_0 \subset DD^*$，且由于 D_0E_0 定义在 $\mathrm{dom}(D_0)$ 上，这意味着DD^* 是稠密定义的。类似地，D^*D 也是稠密定义的，其定义域包含 $\mathrm{dom}(D_0)$，由此得出 $\mathrm{dom}(D^*D) \cap \mathrm{dom}(DD^*)$ 在 $\mathcal{H}$ 中稠密。此外，DD^* 和 D^*D 都是自伴且正的，因此 $\langle D\rangle^2$ 是对称且正的。

由于 $\langle D\rangle^2$ 扩张了$_{1\,2}(D_0E_0+E_0D_0)$，在 D_0 的定义域上，$\langle D\rangle^2$ 的作用由下式给出

$$\begin{aligned}&\tfrac{1}{2}(D_0E_0+E_0D_0)=\\&\frac{1}{2}\begin{pmatrix}(-ie_3+\frac{1}{2})^2-(e_1-ie_2)(e_1+ie_2) & 0\\ 0 & (ie_3+\frac{1}{2})^2-(e_1+ie_2)(e_1-ie_2)\end{pmatrix}.\end{aligned}\tag{4.1}$$

利用作用式 (3.4)–(3.6)，可以很容易地计算 $\langle D\rangle^2$ 的矩阵分量作用于主酉级数和离散级数的矩阵元时的结果。由此得到

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}(-e_1^2-e_2^2-e_3^2-2ie_3+\tfrac{1}{4})t^{\chi}_{mn}&=(\tfrac{1}{2}|\tau|^2+m'(m'+1)+\tfrac{1}{8})t^{\chi}_{mn},\\ \tfrac{1}{2}(-e_1^2-e_2^2-e_3^2-2ie_3+\tfrac{1}{4})t^{l,-}_{mn}&=(-\tfrac{1}{2}l(l+1)+m'(m'+1)+\tfrac{1}{8})t^{l,-}_{mn},\\ \tfrac{1}{2}(-e_1^2-e_2^2-e_3^2-2ie_3+\tfrac{1}{4})t^{l,+}_{mn}&=(-\tfrac{1}{2}l(l+1)+m'(m'+1)+\tfrac{1}{8})t^{l,+}_{mn},\end{aligned}\tag{4.2}$$

and

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}(-e_1^2-e_2^2-e_3^2+2ie_3+\tfrac{1}{4})t^{\chi}_{mn}&=(\tfrac{1}{2}|\tau|^2+m'(m'-1)+\tfrac{1}{8})t^{\chi}_{mn},\\ \tfrac{1}{2}(-e_1^2-e_2^2-e_3^2+2ie_3+\tfrac{1}{4})t^{l,-}_{mn}&=(-\tfrac{1}{2}l(l+1)+m'(m'-1)+\tfrac{1}{8})t^{l,-}_{mn},\\ \tfrac{1}{2}(-e_1^2-e_2^2-e_3^2+2ie_3+\tfrac{1}{4})t^{l,+}_{mn}&=(-\tfrac{1}{2}l(l+1)+m'(m'-1)+\tfrac{1}{8})t^{l,+}_{mn}.\end{aligned}\tag{4.3}$$

这里 $\tau=i\rho-\frac{1}{2}$，其中 $\rho\in\mathbb{R}$，因此 $|\tau|^2=\rho^2+\frac{1}{4}$。此外，回想一下 $m'=m+\epsilon$；对于主酉级数的矩阵元，m，n 可以取任意整数值；而对于负离散级数，$-\infty<m$，$n<l-\epsilon$；对于正离散级数，$-l-\epsilon\le m$，$n<\infty$。

另一方面，注意到 R_D 扩张了 $_{1\,2}(D_0^2-E_0^2)$。容易得到 $E_0^2=D_0^2$，并且由于 $D_0^2-E_0^2$ 定义在一个稠密定义域上，我们得出 $R_D=0$。

注记 4.3。 $R_D=0$ 对于三次狄拉克算子而言，这一事实是一大优势，因为这意味着定义 4.1 中的条件 (2a) 和 (2b) 会自动满足。值得注意的是，对于狄拉克算子的单参数族 D_0^t (2.6)，算子 R_D 并不为零。事实上，简单计算可得，$\langle D^t\rangle^2$ 可延拓

$$\tfrac{1}{2}\big(D_0^tE_0^t+E_0^tD_0^t\big)=\Big(\tfrac{1}{2}(-e_1^2-e_2^2-e_3^2)+\tfrac{9}{8}t^2\Big)\otimes 1-\tfrac{1}{4}(1+3t)e_3\otimes c(e_1)c(e_2),\tag{4.4}$$

而 R_{D^t} 可延拓

$$\tfrac{i}{2}\big((D_0^t)^2-(E_0^t)^2\big)=\tfrac{i}{4}(1-3t)\big(e_1\otimes c(e_2)c(e_3)+e_2\otimes c(e_1)c(e_3)\big).\tag{4.5}$$

4.2. 不定谱三元组。 不定谱三元组[6] 的第一个版本并不完全令人满意，因为伪黎曼自旋流形这一主要例子不满足相关假设。具体而言，第一个版本要求一阶算子 $\mathrm{Re}\ D:=\frac{1}{2}(D+D^*)$ 和 $\mathrm{Im}\ D:=-\frac{i}{2}(D-D^*)$ 以某种特定意义近似反交换。为了使这一条件在该例子中成立，必须对类空反射 r 施加额外假设。随后在 [7], 中改进了这一界定：现在要求 $\mathrm{Re}\ D$ 和 $\mathrm{Im}\,D$ 弱反交换，这得益于 Lesch 和 Mesland 的相关结果 [13]。

设 S 与 T 为希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 上的两个闭无界算子。它们的反对易子 $\{S,T\}=ST+TS$ 定义在定义域

$$\mathrm{dom}\{S,T\}=\{x\in\mathrm{dom}\,S\cap\mathrm{dom}\,T\mid Sx\in\mathrm{dom}\,T\ \&\ Tx\in\mathrm{dom}\,S\}.$$

此外，若 S 与 T 是自伴的，则当 [13, 时称它们为弱反对易。定义 2.1]

(1) 存在常数 $C>0$，使得对于所有 $x\in\mathrm{dom}\{S,T\}$，我们有

$$\langle\{S,T\}x,\{S,T\}x\rangle\leq C(\langle x,x\rangle+\langle Sx,Sx\rangle+\langle Tx,Tx\rangle);$$

(2) 存在一个 $\lambda_0>0$，使得 $(S+\lambda)^{-1}(\mathrm{dom}\ T)\subset\mathrm{dom}\{S,T\}$ 对于 $\lambda\in i\mathbb{R}$, $|\lambda|\geq\lambda_0>0$。

若满足上述要求，且将反对易子替换为交换子，则称算子 S 和 T 弱交换。

定义 4.4 ([7])。不定谱三元组 $(\mathcal{A},\ \mathcal{H},\ D)$ 由一个在希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 上表示为有界算子的 $*$-代数$\mathcal{A}$，以及一个稠密定义的闭算子 D: dom $D\subset\mathcal{H}\to\mathcal{H}$ 组成，满足

(1) Re D和 Im D在 dom D上本质自伴。(2) 对 (Re D, Im D) 是弱反对易的。(3) 对所有 $a\in\mathcal{A}$, $[D,a]$和 $[D^*,a]$都可扩张为作用于 $\mathcal{H}$ 上的有界算子。(4) 对所有 $a\in\mathcal{A}$, $a(1+DD^*+D^*D)^{-1}$ 都是紧的。

备注 4.5。事实上，定义 4.4 描述的是一个奇不定谱三元组。如果存在算子 $\Gamma\in B(\mathcal{H})$，使得对所有 $a\in\mathcal{A}$ 和 $\Gamma D+D\Gamma=0$，$\Gamma=\Gamma^*$、$\Gamma^2=1$、$\Gamma a=a\Gamma$，则称该谱三元组为偶的。注意，在 [6] 中，奇不定谱三元组要求 (Re D, Im D) 这一对算子是弱对易的，而不是 (Re D, Im D) 弱反对易（或者，在 [6], 的框架下，要求几乎对易而非几乎反对易）。然而，我们认为，如上所示修改定义更为妥当，因为它与奇维伪黎曼流形的情形相容。在更一般的无界 Kasparov 模框架下，正确的定义同样要求算子弱反对易，而非弱对易。根据上述定义，从奇不定 Kasparov 模得到偶不定 Kasparov 模的倍增过程，比 [6],中的过程更直接，并且使用算子

$$\widetilde{D}=\begin{pmatrix}0 & D\\ D & 0\end{pmatrix},$$

作用于 $\mathbb{Z}_2$ 分次希尔伯特空间 $\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}$。

我们的主要结果之一是，带有三次狄拉克算子的 SU(1，1) 构成一个不定谱三元组。

定理 4.6。令 $C_c^\infty(\mathrm{SU}(1,\ 1))$ 通过逐点乘法作用于 $L^2(\mathrm{SU}(1,\ 1))$。那么三元组 $(\mathcal{A},\mathcal{H},D):=(C_c^\infty(\mathrm{SU}(1,\ 1))\otimes 1, L^2(\mathrm{SU}(1,\ 1))\otimes\mathbb{C}^2, D)$，其中 D 为三次狄拉克算子的闭包，是意义下定义 *4.4* 的一个不定谱三元组。

下一节将证明该定理以及定理 4.2。不过，我们先更详细地考察一下一阶算子 D的实部 D 和 Im D。

回忆一下， D的实部为 Re $D=\frac{1}{2}(D+D^*)$，虚部为 Im $D=-\frac{i}{2}(D-D^*)$。这些算子分别扩展了$\frac{1}{2}(D_0+E_0)$和 $-\frac{i}{2}(D_0-E_0)$，

在表示式 (2.3) 中，我们有

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}(D_0+E_0) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-ie_3+\frac{1}{2} & 0\\ 0 & ie_3+\frac{1}{2}\end{pmatrix},\\ -\tfrac{i}{2}(D_0-E_0) &= -\frac{i}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0 & e_1-ie_2\\ e_1+ie_2 & 0\end{pmatrix}.\end{aligned} \tag{4.6}$$

反对易子 $\{\mathrm{Re}\,D,\ \mathrm{Im}\ D\}$ 扩展了上述算子的反对易子。简单计算可得 $\{\mathrm{Re}\ D,\ \mathrm{Im}\ D\}=0$，其形式为

$$\{\tfrac{1}{2}(D_0+E_0), -\tfrac{i}{2}(D_0-E_0)\}=0. \tag{4.7}$$

注 4.7。 与伪黎曼谱三元组类似，对于不定谱三元组，使用三次狄拉克算子也有很大优势。事实上，三次狄拉克算子使得反对易子 $\{\mathrm{Re}\ D,\ \mathrm{Im}\ D\}$ 为零。若改为考虑狄拉克算子的单参数族 D_0^t (2.6)，则反对易子为

$$\{\tfrac{1}{2}(D_0^t+E_0^t), -\tfrac{i}{2}(D_0^t-E_0^t)\}=\begin{pmatrix}0 & (3t-1)(e_1-ie_2)\\ (3t-1)(e_1+ie_2) & 0\end{pmatrix},$$

这是一个非零的一阶微分算子，除非 $t=\frac{1}{3}$。 –

注 4.8。 再次强调，弱反对易才是奇不定谱三元组（定义 4.4）的正确概念。请注意，交换子$[\mathrm{Re}\ D,\ \mathrm{Im}\ D]$ 扩展了算子

$$[\tfrac{1}{2}(D_0+E_0), -\tfrac{i}{2}(D_0-E_0)]=-\frac{i}{2}\begin{pmatrix}0 & \{e_1-ie_2,-ie_3\}\\ -\{e_1+ie_2,-ie_3\} & 0\end{pmatrix}.$$

这是一个二阶算子，因此 $\mathrm{Re}\ D$ 和 $\mathrm{Im}\,D$ 不能弱对易。事实上，不难构造一个函数序列，清楚地表明不存在常数 $C>0$ 使得

$$\langle[\mathrm{Re}\,D,\mathrm{Im}\,D]x,[\mathrm{Re}\,D,\mathrm{Im}\,D]x\rangle\le C(\langle x,x\rangle+\langle\mathrm{Re}\,Dx,\mathrm{Re}\,Dx\rangle+\langle\mathrm{Im}\,Dx,\mathrm{Im}\,Dx\rangle).$$

例如，取负离散级数中矩阵元的序列 (x_{-m})，其中 $l=1$； $x_{-m}=\begin{pmatrix} t^1, & & & \\ & t^1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \overset{-}{mn}, \\ & & & \overset{-}{m+1,} & \overset{-}{n}\end{pmatrix}$，且 $-m=2$， 3，4，.....。那么

$$\begin{aligned}&\langle[\mathrm{Re}\,D,\mathrm{Im}\,D]x_{-m},[\mathrm{Re}\,D,\mathrm{Im}\,D]x_{-m}\rangle\\ &\qquad=-\frac{1}{4}(-2m-1)^2(1-m)(-m-2)\langle x_{-m},x_{-m}\rangle,\end{aligned}$$

其随 m^4 缩放，而

$$\begin{aligned}&\langle x_{-m},x_{-m}\rangle+\langle\mathrm{Re}\,Dx_{-m},\mathrm{Re}\,Dx_{-m}\rangle+\langle\mathrm{Im}\,Dx_{-m},\mathrm{Im}\,Dx_{-m}\rangle\\ &\qquad=\big(1+\tfrac{1}{2}(m+\tfrac{1}{2})^2-\tfrac{1}{2}(1-m)(-m-2)\big)\langle x_{-m},x_{-m}\rangle,\end{aligned}$$

其（至多）随 m^2缩放。

5. Proofs

现在我们转而证明定理 4.2 和定理 4.6。对这两个定理而言，证明紧预解式条件最为费力。其他要求则逐一验证。

5.1. **伪黎曼谱三元组**。 对于定理 4.2 中的伪黎曼谱三元组，回想一下，如第 4.1 节所述，算子 R_D 为零。因此，还需证明 $\langle D\rangle^2$ 是本质自伴的， $[D,a]$ 和$[D^*,a]$ 可延拓为 $\mathcal{H}$ 上的有界算子（对所有 $a\in\mathcal{A}$均成立），且加权预解式 $a(1+\langle D\rangle^2)^{-1/2}$ 对所有 $a\in\mathcal{A}$均为紧的。

引理 5.1。 无界算子 $\langle D\rangle^2=\frac{1}{2}(DD^*+D^*D)$ 在$\mathrm{dom}(D^*D)\cap\mathrm{dom}(DD^*)$上本质自伴。

证明。 根据温和表示 (4.2) 和 (4.3) 的矩阵元上各分量的作用可知， $\langle D\rangle^2$ 在由定理 3.1 得到的 L^2(SU(1， 1)) $\otimes\mathbb{C}^2$ 直积分分解上按纤维作用，且在每个纤维上均为对角作用。 $\langle D\rangle^2$ 的正性意味着每个纤维上的谱都包含于区间 $[0,\infty)$。因此， $\langle D\rangle^2+1$ 在每个纤维上的谱都包含于区间 $[1,\infty)$。这意味着 $\langle D\rangle^2+1$ 的值域稠密，因此我们得出结论： $\langle D\rangle^2$ 在 $\mathrm{dom}\,D^*D\cap\mathrm{dom}\,DD^*$ 上本质自伴。□

引理 5.2. 所有 $a\in\mathcal{A}$ 都保持 定义域 D和 定义域D^*，并且对所有 $a\in\mathcal{A}$， $[D,a]$和 $[D^*,a]$均可延拓为 $\mathcal{H}$ 上的有界算子。

证明。 显然， D_0 和 E_0 的定义域在$\mathcal{A}$的作用下保持不变。为证明 a 保持D的定义域，设 $w\in$ 属于D的定义域。于是存在一个序列 $(v_n)\subset$ 属于D_0的定义域，使得 $v_n\to w$ 且 $D_0v_n\to Dw$。由于 a 是有界算子，因此 $av_n\to aw$也成立。要使 aw 属于D的定义域，我们需要对某个 $v\in\mathcal{H}$有 $D_0av_n\to v$；于是，由于 Da 是闭算子， $v=Daw$ 。我们用三次狄拉克算子的表达式 (2.2) 对此进行明确验证。设 $a=f\otimes 1$ ，其中$f\in C_c^\infty$ 属于 (SU(1,1)，那么利用莱布尼茨法则可得

$$D_0av_n=D_0fv_n=fD_0v_n+\left(\sum_i e^i(f)\otimes c(e_i)\right)v_n.$$

由于 f 光滑且紧支撑，方括号中的表达式是 $\mathcal{H}$上的有界算子。因此，利用 D_0v_n的收敛性，我们得出 a 保持 $\mathrm{dom}\,D$不变。此外，根据上述计算，我们发现交换子 $[D,a]=\sum_i e^i(f)\otimes c(e_i)$可延拓为$\mathcal{H}$上的有界交换子。

类似的计算表明， $\mathcal{A}$ 保持 $\mathrm{dom}\,D^*$ 不变，并且对于所有 $a\in\mathcal{A}$， $[D^*,a]$ 可延拓为 $\mathcal{H}$ 上的有界算子。□

我们暂且推迟证明紧预解式，先考察不定谱三元组的要求。

5.2. **不定谱三元组**。 回顾一下，如第 4.2 节所述，反对易子 $\{\mathrm{Re}\ D,\ \mathrm{Im}\,D\}$为零。此外，引理 5.2 在此情形下同样适用。因此，要证明定理 4.6，还需证明 $\mathrm{Re}\,D$和 $\mathrm{Im}\ D$是本质自伴在 $\mathrm{dom}\,D$ 上自伴，且预解式 $a(1+DD^*+D^*D)^{-1}$ 是紧的，对所有 $a\in\mathcal{A}$。

引理 5.3. 无界算子 $\mathrm{Re}\,D$ 在 $\mathrm{dom}\,D$上本质自伴。

证明。 证明与引理 5.1 的证明类似。不同之处在于，本例中由作用 (3.4)–(3.6) 可知，每个纤维上的谱都是实数。因此， $\mathrm{Re}\ D\pm i$ 的值域稠密，由此得出 $\mathrm{Re}\,D$ 在 $\mathrm{dom}\,D$ 上本质自伴。□

为证明 $\operatorname{Im} D$ 本质自伴，我们使用以下事实，该事实陈述于 [16,问题 X.28] 中。

命题 5.4。 设 T为对称算子，并假设 $\operatorname{dom} T^2$的定义域 T^2 是稠密的。若 T^2 在 $\operatorname{dom} T^2$上是本质自伴的，则 T是本质自伴的。

引理 5.5。 无界算子 $\operatorname{Im} D$ 在 $\operatorname{dom} D$上是本质自伴的。
证明。 注意到 $(\operatorname{Im} D)^2$ 延拓了 $\big(-\frac{i}{2}(D_0 - E_0)\big)^2$，后者的定义域 $\operatorname{dom} D_0$是稠密的。因此，若我们能够证明 $(\operatorname{Im} D)^2$ 在 $\bar{\operatorname{dom}} D^2$上是本质自伴的，则由命题 5.4 可知，$\operatorname{Im} D$ 在 $\operatorname{dom} D$上是本质自伴的。由 (4.6) 可知，$(\operatorname{Im} D)^2$ 延拓了

$$-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}(e_1 - ie_2)(e_1 + ie_2) & 0\\ 0 & (e_1 + ie_2)(e_1 - ie_2)\end{pmatrix}.$$

注意，在主酉级数的矩阵元上，

$$(e_1 - ie_2)(e_1 + ie_2)t^{\chi}_{mn} = -(|\tau|^2 + m'(m'+1))t^{\chi}_{mn},$$
$$(e_1 + ie_2)(e_1 - ie_2)t^{\chi}_{mn} = -(|\tau|^2 + m'(m'-1))t^{\chi}_{mn},$$

并且同样地，离散级数在矩阵元上的作用也是对角的，且系数为实数。仿照引理 5.3 的证明，可知 $(\operatorname{Im} D)^2$ 是本质自伴的，从而 $\operatorname{Im} D$ 是本质自伴的。□

5.3. **加权预解式**。 我们将证明伪黎曼谱三元组的加权预解式是紧的，这也可用于证明不定谱三元组的加权预解式同样是紧的。

由于 $\langle D\rangle^2$ 是本质自伴且正的，算子 $\langle D\rangle^2+1$ 可逆，并具有正的有界逆$(\langle D\rangle^2 + 1)^{-1}$。其平方根 $R := (\langle D\rangle^2 + 1)^{-1/2}$称为 $\langle D\rangle$的预解式。要使$(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D)$成为伪黎曼谱三元组，要求加权预解式 aR 对所有 $a \in \mathcal{A}$都是紧的。为证明这一点，我们将 aR^p 写成积分算子，并证明当 p 足够大时，该算子是希尔伯特–施密特算子。然后，利用下述预备结果，我们可以得出 aR 本身是紧的：

引理 5.6. 设 A 是 $\mathcal{H}$ 上的有界算子，且 B 有界且自伴。若对于某个 $q \in \mathbb{R}_{>0}$，AB^q 是紧的，则对于所有 $q > 0$，它都是紧的。
证明。 假设存在一个 $q_0 > 0$，使得 AB^{q_0} 是紧的。若 $q > q_0$，则 $AB^q = AB^{q_0}B^{q-q_0}$ 是紧的，因为 B^{q-q_0} 是有界算子，而紧算子构成一个理想。

另一方面，若 $q < q_0$，注意到 $AB^{q_0}A^*$ 是紧的，且对于 $C = AB^{q_0/2}$ 可写成 CC^* 的形式，因此利用 $z \mapsto \sqrt{z}$ 的函数演算和极分解，$AB^{q_0/\sqrt{2}}$ 也是紧的。重复这一过程，最终可得，对于某个满足 $q_0/2^n < q$ 的自然数 n，$AB^{q_0/2^n}$ 是紧的。因此，AB^q 也是紧的。□

注意， R 可以写成一个对角矩阵

$$R = \begin{pmatrix}R_+ & 0\\ 0 & R_-\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}R_+ & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & R_-\end{pmatrix}, \tag{5.1}$$

其对角元为 $R_{\pm}=\Big(-\frac{1}{2}(e_1^2+e_2^2+e_3^2)\mp ie_3+\frac{9}{8}\Big)^{-1/2}$。记作 $a=f\otimes 1$；由于紧算子构成一个理想，若 fR_+ 和 fR_- 均为紧算子，则 aR 是紧算子（作用于 L^2(SU(1，1))）。

算子 $R_{\pm}$ 在 Plancherel 分解上表现为算子场 $\pi\to R_{\pm}(\pi)$，且在分解中的每个希尔伯特空间上，其作用都是对角的。也就是说，若令 v_n^{χ} 和 $v^{l,\ n}{}^{\pm}$为前文的椭圆基，则 $R_{\pm}(\pi)$的作用为

$$
\begin{aligned}
R_{\pm}(T^{\chi}) &= \sum_m \Big(\tfrac{1}{2}|\tau|^2+m'(m'\pm 1)+\tfrac{9}{8}\Big)^{-1/2} v_m^{\chi}\otimes (v_m^{\chi})^*,\\
R_{\pm}(T^{l,-}) &= \sum_m \Big(-\tfrac{1}{2}l(l+1)+m'(m'\pm 1)+\tfrac{9}{8}\Big)^{-1/2} v_m^{l,-}\otimes (v_m^{l,-})^*,\\
R_{\pm}(T^{l,+}) &= \sum_m \Big(-\tfrac{1}{2}l(l+1)+m'(m'\pm 1)+\tfrac{9}{8}\Big)^{-1/2} v_m^{l,+}\otimes (v_m^{l,+})^*.
\end{aligned}
\tag{5.2}
$$

这里，第二个张量因子包含对偶基中的元素。

设 $\varphi\in\mathcal{C}$(SU(1，1)) 是 SU(1，1) 上的 Harish-Chandra施瓦茨函数。对于$f\in C_c^{\infty}$(SU(1，1))， fR_+ 在 φ 上的作用为

$$
\begin{aligned}
(fR_+\varphi)(g) &= \int f(g)\,\mathrm{Tr}\big[R_+(\pi)\pi(g)\hat{\varphi}(\pi)\big]d\mu(\pi)\\
&= \int f(g)\,\mathrm{Tr}\big[R_+(\pi)\pi(g)\int \varphi(h)\pi(h^{-1})dh\big]d\mu(\pi)
\end{aligned}
\tag{5.3}
$$

将 R_+ 提升到 $p>0$ 次幂后，我们的目标是将其改写为如下形式的积分算子：$\int K(g,\ h)\varphi(h)dh$，其中 $K\in L^2$(SU(1，1))$\hat{\otimes}L^2$(SU(1，1))，该算子是希尔伯特–施密特算子，因而是紧的。为此，我们需要一些关于无穷级数收敛的结果。

命题 5.7 ([18])。设 $Q(x,y)=ax^2+by^2$ 是一个二次型，满足 $a,b>0$，则级数 $\sum_{\mathbb{Z}^2\setminus 0}Q\ m\ n(,)^{q/2}$ 绝对收敛于 $q>3$。

Siegel 最初得到了这一结果的证明 [18], 另见 [10, 定理 1.3]。

引理5.8. 级数

$$
S_{\pm}^{-}\coloneqq \sum_{l\le -\frac{1}{2}}\Big(-l-\tfrac{1}{2}\Big)\sum_m \frac{1}{\Big(-\frac{1}{2}l(l+1)+m'(m'\pm 1)+\frac{9}{8}\Big)^{q/2}}
$$

当 $l\in\mathbb{Z}$ 时，满足 $l\in\frac{1}{2}\mathbb{Z}_{<0}$，$m<l-\epsilon$，$m'=m+\epsilon$ 和 $\epsilon=0$；而当$l\in\frac{1}{2}\mathbb{Z}_{\mathrm{odd}}$ 时，满足 $\epsilon=\frac{1}{2}$；该级数在 $q>3$ 收敛。

证明。通过定义 $-k=m+\epsilon-l$ 来替换 m，并通过定义 $n=-2l-1$ 来替换 l，从而得到 $S_{\pm}^{-}$，它是关于自然数的双重求和。由此形式可立即得到级数不等式

$$
S_1\coloneqq \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\frac{1}{2}n}{\Big(4k^2+\frac{25}{8}n^2\Big)^{q/2}}\le S_{\pm}^{-}\le \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\frac{1}{2}n}{\Big(k^2+\frac{1}{8}n^2\Big)^{q/2}}=:S_2.
$$

定义二次型 $Q_1(x,y) = 4x^2 + \frac{25}{8}y^2$ 和二次型 $Q_2(x,y) = x^2 + \frac{1}{8}y^2$，以便将 $S_i = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{n}{Q_i(k,n)^{q/2}}$ 写成 $i = 1,2$。现在注意，我们可以改写

$$\sum_{\mathbb{Z}^2\setminus 0}\left|\frac{n}{Q_i(k,n)^{q/2}}\right| = 8S_i + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{Q_i(0,n)^{q/2}}.$$

根据命题 5.7，左侧对于 $q>3$ 绝对可求和。此外，和式 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{Q_i(0,n)^{q/2}}$ 众所周知，并且对于 $q>2$ 收敛。因此，我们得出结论：级数 S_i、$i=1$，2 对于 $q>3$ 均收敛，进而级数 $S_{\pm}^{-}$ 对于 $q>3$ 收敛。□

引理5.9。级数

$$S_{\pm}^{+} := \sum_{l\le -\frac{1}{2}}\Big(-l-\tfrac{1}{2}\Big)\sum_{m}\frac{1}{\Big(-\frac{1}{2}l(l+1)+m'(m'\pm 1)+\frac{9}{8}\Big)^{q/2}}$$

其中 $m \ge -l-\epsilon$ 和 l、m'、ϵ 如引理*5.8*中所示，对于 $q>3$ 收敛。

证明。令 $k = m+l+\epsilon+1$ 来替换 m，并令 $n=-2l-1$ 来替换 l。于是我们得到两个关于自然数的和，并得出级数不等式

$$S_1 := \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\frac{1}{2}n}{\Big(2k^2+\frac{9}{8}n^2\Big)^{q/2}} \le S_{\pm}^{+} \le \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\frac{1}{2}n}{\Big(\frac{1}{2}k^2+\frac{1}{8}n^2\Big)^{q/2}} =: S_2.$$

由此可知，与引理5.8的证明类似，级数 $S_{\pm}^{+}$ 对于 $q>3$ 收敛。□

引理 5.10。级数

$$S_{\pm}^{\chi} = \sum_{\epsilon=0,\frac{1}{2}}\int_0^{\infty}\sum_{m}\frac{1}{\Big(\frac{1}{2}\rho^2+m'(m'\pm 1)+\frac{5}{4}\Big)^{q/2}}\rho\tanh\pi(\rho+i\epsilon)d\rho$$

与 $m\in\mathbb{Z}$ 和 $m' = m+\epsilon$ 在 $q>3$时收敛。

证明。将关于 ϵ 的求和展开后，我们得到 $S_{\pm}^{\chi} = S^{\chi,0}_{\pm} + S^{\chi,1/2}_{\pm}$ 其中

$$S_{\pm}^{\chi,0} := \int_0^{\infty}\sum_{m\in\mathbb{Z}}\frac{\rho\tanh\pi\rho}{\Big(\frac{1}{2}\rho^2+m(m+1)+\frac{5}{4}\Big)^{q/2}}d\rho,$$

$$S_{\pm}^{\chi,1/2} := \int_0^{\infty}\sum_{m\in\mathbb{Z}}\frac{\rho\coth\pi\rho}{\Big(\frac{1}{2}\rho^2+(m+1)^2+1\Big)^{q/2}}d\rho.$$

我们首先考虑 $S^{\chi,0}_{\pm}$。为了应用富比尼定理，我们计算

$$\tilde{S}_{\pm}^{\chi,0} := \sum_{m\in\mathbb{Z}}\int_0^{\infty}\frac{\rho\tanh\pi\rho}{\Big(\frac{1}{2}\rho^2+m(m+1)+\frac{5}{4}\Big)^{q/2}}d\rho.$$

注意，通过逼近双曲正切，我们得到以下不等式

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}}\int_1^\infty \frac{\frac{1}{2}\rho}{\left(\frac{1}{2}\rho^2+m(m+1)+\frac{5}{4}\right)^{q/2}}d\rho \leq$$

$$\tilde{S}_\pm^{\chi,0} \leq \sum_{m\in\mathbb{Z}}\int_0^\infty \frac{\rho}{\left(\frac{1}{2}\rho^2+m(m+1)+\frac{5}{4}\right)^{q/2}}d\rho$$

这些积分通过换元法显式求解，并在 $q>2$时收敛，从而得到

$$\frac{1}{q-2}\sum_{m\in\mathbb{Z}}\frac{1}{\left(m(m+1)+\frac{7}{4}\right)^{q/2-1}} \leq \tilde{S}_\pm^{\chi,0} \leq \frac{1}{q/2-1}\sum_{m\in\mathbb{Z}}\frac{1}{\left(m(m+1)+\frac{5}{4}\right)^{q/2-1}}.$$

现在两边剩余的被加项关于 m是二次的，因此在 $q>3$时收敛。

对于 ${S^\chi}_{,\pm}{}^{1/2}$，注意，通过估计双曲余切，我们得到不等式

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}}\int_0^\infty \frac{\rho}{\left(\frac{1}{2}\rho^2+(m+1)^2+1\right)^{q/2}}d\rho \leq \sum_{m\in\mathbb{Z}}\int_0^\infty \frac{\rho\coth\pi\rho}{\left(\frac{1}{2}\rho^2+(m+1)^2+1\right)^{q/2}}d\rho.$$

$$\leq \sum_{m\in\mathbb{Z}}\int_0^1 \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\rho^2+(m+1)^2+1\right)^{q/2}}d\rho + \sum_{m\in\mathbb{Z}}\int_1^\infty \frac{2\rho}{\left(\frac{1}{2}\rho^2+(m+1)^2+1\right)^{q/2}}d\rho$$

类似的方法表明这些界在 $q>3$时收敛。应用富比尼定理即完成该证明。□

有了上述结果，我们就可以证明本节的主要结论。

引理 5.11。令 $a\in\mathcal{A}$ 和 $R=(\langle D\rangle^2+1)^{-1/2}$ 为 $\langle D\rangle$的预解式。那么 aR是作用于 $\mathcal{H}$ 上的紧算子。

证明。我们证明，对于 $q>3$， aR^q 是希尔伯特–施密特算子；由引理 5.6，这意味着 aR的紧性。记 $a=f\otimes 1$为 $f\in C_c^\infty$(SU(1，1))；那么，当且仅当 fR_+^q和 fR_-^q都是作用于 L^2(SU(1，1))上的希尔伯特–施密特算子时， aR^q才是希尔伯特–施密特算子。我们证明，对于 $q>3$， fR_+^q 是希尔伯特–施密特算子。

令 $\varphi\in\mathcal{C}$(SU(1，1))，那么 $\widehat{\varphi}\in\mathcal{C}$(SU(1，1)) 是迹类，因此其逆傅里叶变换有良好定义。利用 (5.2)， fR_+^q 的作用为

$$fR_+^q\varphi(g)=\int f(g)\,\mathrm{Tr}\left[R_+^q(\pi)\pi(g)\int\varphi(h)\pi(h^{-1})dh\right]d\mu(\pi).$$

要将 fR_+^q 写成积分算子，我们需要交换积分次序。注意，根据 (5.2) 很容易验证，对于 $q>1$， R_+^q 是迹类，因此我们可以改写为

$$fR_+^q\varphi(g)=\int f(g)\int\mathrm{Tr}\left[R_+^q(\pi)\pi(gh^{-1})\right]\varphi(h)dhd\mu(\pi).$$

为交换两个积分，我们应用富比尼定理。由于 g 固定，我们考虑

$$\int\int\left|\mathrm{Tr}\left[R_+^q(\pi)\pi(gh^{-1})\right]\varphi(h)\right|dhd\mu(\pi)\leq\int\mathrm{Tr}\left[R_+^q(\pi)\right]d\mu(\pi)\int|\varphi(h)|dh$$

写出迹和 Plancherel测度后，得到

$$\int \mathrm{Tr}\left[R_+^q(\pi)\right]d\mu(\pi) = S_+^+ + S_+^- + S_+^\chi,$$

根据引理 5.8、5.9 和 5.10，且如我们所假设的 $q > 3$，该级数收敛。因此，由富比尼定理，我们得到

$$fR_+^q\varphi(g) = \int f(g)\int \mathrm{Tr}\left[R_+^q(\pi)\pi(gh^{-1})\right]d\mu(\pi)\varphi(h)dh =: \int K(g,h)\varphi(h)dh.$$

由引理 5.8–5.10 可知，$R_+^q \in L^2(\mathrm{SU}(1,1))$。因此，利用 Plancherel定理，$\int \mathrm{Tr}\left[R_+^q(\pi)\pi(gh^{-1})\right]d\mu(\pi)$ 是 $L^2(\mathrm{SU}(1,1))$ 的一个元素（变量为 h）。由于 $f \in L^2(\mathrm{SU}(1,1))$，我们得出 $K_+(g,h) \in L^2(\mathrm{SU}(1,1) \times \mathrm{SU}(1,1))$。

对于 $\psi \in L^2(\mathrm{SU}(1,1))$，设 $(\varphi_m) \subset \mathcal{C}(\mathrm{SU}(1,1))$ 是一个在 L^2-范数下收敛于 ψ 的序列，则它也在 $L^2(\mathrm{SU}(1,1))$ 中收敛于 $fR_+^q\varphi_m \to fR_+^q\psi$。存在一个子列，仍记为 φ_m，使其几乎处处逐点收敛。利用 K_+ 是一个 L^2-核这一事实，我们得到

$$\lim_{m\to\infty}(fR_+^q\varphi_m)(g) = \lim_{m\to\infty}\int K_+(g,h)\varphi_m(h)dh = \int K_+(g,h)\psi(h)dh,$$

我们用它来写出

$$fR_+^q\psi(g) = \int K_+(g,h)\psi(h)dh.$$

因此，fR_+^q 是一个积分算子，其核属于 $L^2(\mathrm{SU}(1,1) \times \mathrm{SU}(1,1))$，因此$fR_+^q$是希尔伯特–施密特算子。由于 fR_-^q 的证明类似，证明至此完成。

□

注 5.12. 引理 5.11 的证明与（结合）[16,定理 IX.29]和 [17, 定理 XI.20]的证明类似

定理 4.2 和 4.6 的证明所需的艰苦工作现在已经完成，剩下的只是将这些结果结合起来。

定理 *4.2* 的证明。 我们检查定义 4.1 的条件。对于条件 (1)，根据引理 5.1，$\langle D\rangle^2$ 在 $\mathrm{dom}\, D^*D \cap \mathrm{dom}\ DD^*$ 上本质自伴。条件 (2) 自动满足，因为 $R_D = 0$。条件 (3) 已在引理 5.2 中证明。最后，条件 (4) 已在引理 5.11 中证明。□

定理 *4.6* 的证明。由引理 5.3 和 5.5 可知，定义 4.4 的条件 (1) 得到满足。条件 (2) 由 $\{\mathrm{Re}\ D, \mathrm{Im}\ D\} = 0$ 得到。条件 (3) 由引理 5.2 得到。条件 (4) 的证明与引理 5.11 类似，利用 $a(1 + DD^* + D^*D)^{-1} = a(1 + 2\langle D\rangle^2)^{-1}$。□

注记 5.13。 如上所述，针对三次狄拉克算子 D 对定义 4.1 中条件 (1)、(3) 和 (4) 的证明，对单参数族 D^t(2.6) 同样成立，只需对参数 t 作少许调整。特别是，调整 $\langle D^t\rangle^2$ 后（如 (4.4) 所示），引理 5.8–5.10 中的级数收敛。然而，要得出 $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D^t)$ 是一个伪黎曼谱三元组，还需证明 R_{D^t} (4.5) 满足条件 (2a) 和 (2b)；若 $t \neq \frac{1}{3}$，这并非易事。此处我们不再继续证明。 –

类似地，定义 4.4 中条件 (1)、(3) 和 (4) 的证明对单参数族 D^t 同样成立。不过，我们不证明当 $t \neq \frac{1}{3}$ 时，$(\mathrm{Re}\ D^t, \mathrm{Im}\, D^t)$ 这一对弱反对易。

References

[1] I. Agricola，自然约化空间上的联络、其狄拉克算子及弦理论中的齐性模型。 *Commun. Math. Phys.* **232** (2003)，第 3 期，535–563，MR 1952476[2] A. L. Carey、V. Gayral、A. Rennie、F. A. Sukochev，*Index theory for locally compact noncommutative geometries* 231, 2014, 美国数学会回忆录。美国数学会，普罗维登斯，MR 3221983[3] A. Connes，论流形的谱刻画。 *J. Noncommut. Geom.* **7** (2013 1, 1 82, 3032810)，第 – 期，MR K. van den Dungen、M. Paschke、A. Rennie，伪黎曼谱三元组与谐振子。 *J. Geom. Phys.* **73** (2013 1, 37 55, 3090101)，第 – 期，MR K. van den Dungen，Krein谱三元组与费米子作用量 *Math. Phys. Anal.* ( ) 第 *Geom.* **19** 2016 1, 22, 3472113 期，MR K. van den Dungen、A. Rennie，不定卡斯帕罗夫模与伪黎曼流形。 *Ann. Henri Poincaré* **17** (2016 11, 3255 3286, 3556521) 第 – 期，MR K. van den Dungen，《不定卡斯帕罗夫模与伪黎曼流形》的补遗。 *Ann. Henri Poincaré* **20** (2019) 第 9 期，3007–3017，MR 3995895[8] S. Goette，齐性空间上的等变 η-不变量。 *Math. Z.* **232** (1999)，第 1 期，1–42，MR 1714278[9] Harish-Chandra，实幺模群的普朗歇雷公式。( ) 第 – 期，MR 0017050 K. Hiroe、T. Oda，带调和多项式的爱泼斯坦 ζ 函数的 Hecke-Siegel 拉回公式。 *J. Number Theory* **128** (2008 4, 835 857, 2400043)，第 – 期，MR B. Kostant，三次狄拉克算子与等秩子群表示的欧拉数多重态的出现。 *Duke Math. J.* **100** (1999)，第 3 期，447–501，MR 1719734[12] B. Kostant、S. Sternberg，辛约化、BRS 上同调与无限维克利福德代数。 *Ann. Phys.* **176** (1987 1, 49 113, 0893479)，第 – 期，MR M. Lesch、B. Mesland，希尔伯特模中正则自伴算子的和。 *J. Math. Anal. Appl.* **472** (2019 1, 947 980, 3906406) 第 – 期，MR E. Meinrenken，. 数学前沿成果丛书，第 3 辑，第 58 卷，施普林格，柏林，2013，MR 3052646[15] M. Paschke、A. Sitarz，等变洛伦兹谱三元组。 2006，math-ph/ 0611029 M. Reed、B. Simon，*Methods of modern mathematical physics. II: Fourier analysis, self-adjointness* 学术出版社，纽约—伦敦，1975，MR 0493420[17] M. Reed、B. Simon，*Methods of modern mathematical physics. IIÍ: Scattering theory*学术出版社，纽约—伦敦，1979，0529429 MR C. L. Siegel，. 塔塔基础研究院数学研究丛书 9，[18] *Advanced analytic number theory* 1980，0659851 塔塔基础研究院，孟买，MR A. Strohmaier，论非交换几何与伪黎曼几何。 *J. Geom. Phys.* ( )，第 – 期，MR **56** 2006 2, 175 195, 2173892 [20] N. Y. Vilenkin、A. U. Klimyk，*Representation of Lie groups and special functions.* , *Volume 1: Simplest Lie groups* *special functions and integral transforms. Transl.* . 数学应用丛书，苏联丛书，*from the Russian by V. A. Groza and A. A. Groza* 72, 克卢沃学术出版社，多德雷赫特，1991，MR 1143783[21] N. R. Wallach，*Real reductive groups I*. 纯粹与应用数学丛书，第 132 卷，学术出版社，波士顿，马萨诸塞州，1988，MR 0929683

Korteweg–de Vries Institute voor Wiskunde、 University of Amsterdam、 Sciencepark 105-107、 1090 GE Amsterdam、 The Netherlands *Email address*: j.j.a.m.groot@uva.nl