arXiv:2601.22176v1 [math.HO] 27 Jan 2026

让·巴拉凯的增殖序列：以数学术语进行研究与分类

伊莎贝尔·塔尔东，[b] 和巴勃罗·马丁-桑塔马里亚，[b]

[a]马拉加大学，西班牙马拉加[b]马拉加高等音乐学院，西班牙马拉加

摘要

巴拉凯的增殖序列通过在序列构建过程中创造一种新的不变量，为古典序列主义的概念带来了有趣的转变：构建给定基础序列的增殖序列时，保持不变的并非相邻音符之间的音程，而是两个相邻序列之间音符的置换，也就是说，序列中音符阶的变换。鉴于这种方法所获得的音程多样性远胜于古典序列主义，这为对序列主义方法感兴趣的作曲家带来了新的可能性。

在本手稿中，我们将从数学角度研究扩展序列所提供的一些尚未探索的可能性，这将使作曲家更加熟悉这些序列，并有可能创作出将序列主义推向新高度的作品。

关键词

Pro扩展序列；Jean Barraqu´e；序列主义；置换法

1. 引言

自1923年以来，勋伯格的十二音技法使作曲家能够以系统而连贯的方式创作无调性音乐。第二维也纳乐派创作了最早一批采用十二音技法的作品，并由此诞生了极为重要的作品，例如勋伯格的《管弦乐变奏曲》作品31、阿尔班·贝尔格的《小提琴协奏曲》以及安东·韦伯恩的《九件乐器协奏曲》。第二次世界大战后，达姆施塔特乐派的成员继续采用这一技法，并扩展了“序列”这一概念的含义：它最初指的是音符的音高，后来还涵盖了力度、奏法、音符时值等其他方面（Bandur（2001））。

在《音乐会指南》于1956年至1959年夏季举办的若干暑期课程中，Jean Barraqu´e向若干学生介绍了一种序列主义的新方法，正如Riotte（1987）所述，而这正是本文将要讨论的内容。他提出了一种全新的材料生成方式，即反复应用联系两个序列的那种变换，从而生成具有广泛音程结构的其他序列。这一构想的结果便是增殖序列这一概念。在其以文学文本“《死亡》

联系 Isabel Tard´on，电子邮件：isabel.tardon.b@gmail.com

维吉尔”（Ozzard-Low（1989））为基础的作品中，他运用增殖序列创作了多部作品，其中一些具有两个生成序列，二者由古典序列主义的通常变换相联系。

于是问题随之而来：当我们应用增殖过程时，这些相关序列会如何变化？我们能生成多少个序列？它们的结构是什么？如何利用先前问题的答案来创作音乐？本文以数学群论为基础，解释不同变换的行为，从而使作曲家全面了解这些序列的性质。为此，我们将讨论序列的构造方式、使用两个相关序列可以得到的增殖次数和结构，以及如何构造具有所需性质的序列，使其与自身的逆行倒影配对时能够产生所需数量的素材。最后，我们将探讨这些发现对作曲家和理论音乐家的意义，并以总结主要成果的结论收尾。

2. 方法论

如引言所述，我们将运用数学群论分析某一类增殖序列的结构性质。这意味着，对于不熟悉数学的读者而言，本文大部分内容将采用较为技术性的论证。不过，我们的目标是尽可能清晰地阐释这些观点，以便音乐家理解；因此，我们会仔细解释所用的每个概念，并着重说明其在增殖序列中的意义。

具体而言，我们将研究由传统序列主义的变换构造而成的增殖序列，因此会分别考察每种变换及其移位，并将具有共同性质的变换归为一组。

我们研究中的一项重要工具是附录A中介绍的 Python 脚本。除了大幅提升序列处理效率之外，我们还获得了经验数据，用以说明并支持增殖背后的数学规律。我们将代码保留在此，供作曲家或其他音乐家使用，使他们即使不太了解增殖序列的构造，也能运用增殖序列，并获取验证我们研究结果的数据。

为了阐释我们关于增殖序列的论述，大多数示例将采用知名作曲家在传统序列主义中使用过的杰出序列，展示这一过程如何作用于这些序列，以及它为我们带来了哪些新素材。

3. 增殖序列的构造

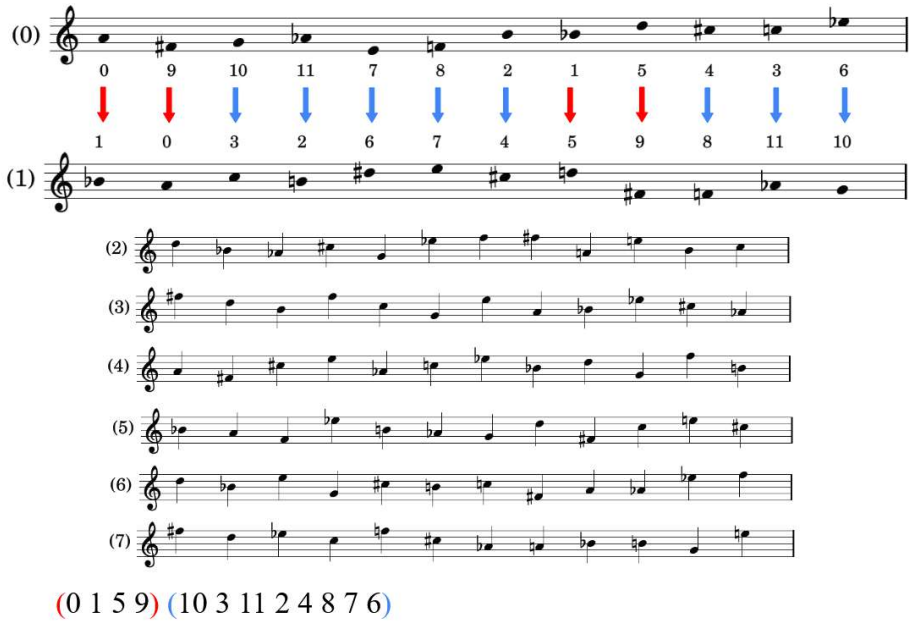
如 Nicolas（1987）所述，Barraqu´e 增殖序列的构造包括选取两个常规十二音序列，然后确定从第一个选定序列变换为第二个选定序列所需的音符变换，并据此构造后续序列。

为说明这一点，我们任取两个序列，将第二个序列置于第一个序列下方，并考察把第一个序列中的一个音符映射到第二个序列中一个音符的箭头，如图1所示。

图中的箭头定义了一个置换，也就是说，一个改变十二音顺序的函数。在这个例子中，所用的两个序列都出自韦伯恩： $[A, F\#\ G, Ab, E, F, B, Bb, D, C\#\ C, Eb]$ 取自他的交响曲作品

21，而 $[Bb, A, C, B, D\#\ \ E, C\#\ \ D, F\#\ \ F, Ab, G]$ 则取自他的弦乐四重奏作品28。将两个序列联系起来的置换，会把音符 A 变为 Bb，把 $F\#$变为A，把 G 变为 C，等等。

根据定义，如果我们将这个置换作用于第一个序列，就会得到第二个序列。但如果将同一个置换作用于第二个序列，会发生什么呢？我们会得到一个全新的第三个序列，其中有一个 B ，而第二个序列在相应位置上是 A；其中有一个 A ，而第二个序列在相应位置上是 $F\#$，依此类推。我们可以再次将这个置换作用于第三个序列，从而得到第四个、第五个序列，等等。我们将这些新序列称为初始序列对的增殖。当重复这一过程时，我们会发现，最终会回到原始序列，如图1所示；这是由群论的基本性质所决定的，因而总会发生（Dixon和Mortimer（1996））。用这种方法得到的序列总数，就是我们所说的置换的阶。图1所示的例子中，阶为8。



Fi图1。 按阶排列韦伯恩交响曲作品21与韦伯恩弦乐四重奏作品28的序列映射 to 得到一个能够生成增殖的置换

为了后续推理，将我们得到的置换表示为若干不相交循环的乘积特别有用。图1中用不同颜色的箭头表示每个循环。在一个循环中，每个音符都会变换为紧随其后写出的音符。对于循环中的最后一个音符，紧随其后的音符就是同一循环中的第一个音符。例如，让我们来看图1中的循环 (0 1 5 9)，它对应音符 (A Bb D $F\#$)。它表示这样的变换：将 A 变为 Bb，将 Bb 变为 D，将 D 变为 $F\#$，并将 $F\#$变回 A。将置换表示为若干不相交循环的乘积，只需将每个循环依次写出，并用括号隔开，顺序不限。任何置换都可以这样表示，而且这种表示清楚地展示了置换中哪些音符发生了变化。此外，置换的阶（即通过增殖得到的序列数量）等于该置换所涉及各循环长度的最小公倍数（Dixon和Mortimer（1996））。

我们将置换的结构定义为若干特定

长度的循环组合，与其不相交循环表示相对应，并将它们记作$[\{C_1\}, \{C_2\}, \ldots]$，其中 $\{C_i\}$ 表示一个长度为 C_i的抽象循环。在图1中，我们可以看到每个循环如何用不同颜色的箭头表示。它有两个循环，长度分别为 4 和 8，因此我们称其结构为 $[\{4\}, \{8\}]$。

3.1. 通过传统序列主义的变换构建的序列

在传统十二音序列主义中，作为作品主要材料的序列可以通过对该序列进行移调、倒影和逆行的任意组合来变换。虽然在上述构建方法中，用于生成其他所有序列的两个序列之间不必存在任何关联，但通过运用这些变换建立关联，在数学和音乐上都极具意义。

通过这些变换得到的序列分为四种类型，具体取决于需要对原始序列进行哪些操作才能得到它们。下面列出这些类型及其缩写，后文将用这些缩写指代相应类型：

(P) 素数：仅对原始序列进行移调 t 即可得到。（R）逆行：将序列按相反顺序（从后往前）读取，再进行移调 t即可得到。（I）倒影：固定第一个音符，将原始序列中的每个音程替换为其互补音程，最后对所得序列进行移调 t 即可得到。（RI）逆行倒影：先进行逆行和倒影，再对所得结果进行移调 t 即可得到。

请注意， $t = 0$ 在所有情况下都是移调。

因此，我们不会选择两个任意且互不相关的序列，而是先选取一个序列，再从其素数形态（P）、逆行形态（R）、倒影形态（I）和逆行倒影形态（RI）的列表中选择第二个序列。使用逆行倒影的构造方式曾由 Hopkins（1978）在讨论作品《..... Au Del`a du Hasard》时提及。

除了序列之间的关系有所不同，构造方法仍然不变：我们再次取上述两个序列，并考察从第一个序列到第二个序列的音符变换。如图2所示，我们得到了一系列音程结构丰富多样的序列，正如之前在图1中所见。

从此处起，本文将重点讨论这种增殖方法：我们将研究它们能够产生多少种增殖、可能形成哪些结构，以及作曲家如何构建初始序列，使其符合自身的创作需要。为避免与排列的其他用法混淆，并求简便起见，我们将通过传统序列主义的变换，从给定序列增殖至其某一变换形态而得到的排列称为“扩增排列”（PP）。

在处理这些序列时，我们将按照处理十二音序列的惯例为音符编号：第一条序列的第一个音符记为零，其他所有音符的编号则为它们与该音符之间相隔的半音数（序列按模12编号）。

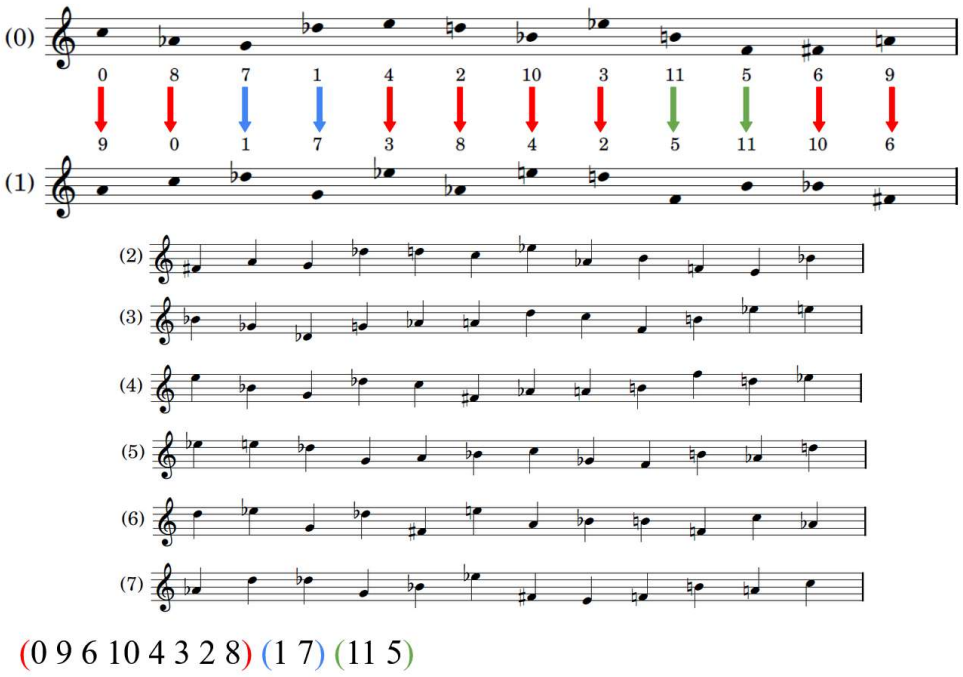


图2. 让·巴拉凯在《.....Au Dela du Hasard》中使用的序列增殖

因此，当我们对一个序列应用变换时，结果如下：

(i) 对于逆行，只需将原始数列倒序重写即可。(ii) 对于移调，将序列中每个数都加上希望移调的半音数，然后将这些数写成模12的形式；若数值不在0到11之间，则加上或减去12，直到其落在该范围内。(iii) 对于倒影，不再按升序计算半音，而是按降序计算，因此得到的音高集合中，第一个数为零，其余数则按原始序列中的数值书写，并在前面加上负号。要将数值重新转换为0到11的编号，只需给所有负数加上12。请注意，这种做法仅适用于序列以0开头的情况。其他情况下的处理方式类似，但记谱会稍微繁琐一些。另一种理解方式是：对于原始序列中的每个数，倒影序列中都有一个对应的数，两者相加的结果为12（在此语境下，12和0视为同一个数）。

3.2. 增殖序列的推广：微分音音阶

通过使用模 n 而非模12，并应用相同的步骤，我们可以推广上述概念，将这一方法的适用范围扩展到不同于半音阶的八度划分。这些划分包括微分音划分，例如四分音或三分音；调式音阶，例如全音音阶；以及任何可以想象的划分。现在，我们不再计算半音，

而是计算序列中的第一个音符与其余音符之间，在相应划分中的音符数量（概念与半音圈相同，只不过音符数量不再局限于12个，而可以是任意数量）。为方便起见，我们可以将这种微分音计量单位称为音分数。

本质上，这意味着给定一组由 n 个音高组成的集合，我们可以在其中建立一种“自然”顺序；在这一顺序中，两个给定音高之间的距离，就是从第一个音高到第二个音高时，沿自然顺序经过的音高数量。由于这一顺序是循环的，当我们写出一个序列（即对这些音高重新排序）时，只需将序列的第一个音高标记为 0，然后通过计算音高之间的距离，为其余音高标注编号，并始终参照最初选定的自然顺序。

还值得一提的是，整体序列主义中涉及的节奏或任何其他音乐参数，也可以通过按照我们认为合适的方式为音乐元素编号，来进行同样的处理。利用这些其他划分方式和参数构建增殖序列，与前文所述的方法类似；前文的方法是将八度划分为十二个半音。

4. 一个由 n 个音符组成的序列可能的增殖数量

开始进行序列作曲时，作曲家必须了解自己可用的材料。对于传统的十二音序列主义而言，这一点相当简单：建立一个 12×12 的矩阵，作曲家便能立即看到自己选定的序列，以及所有可能的移调、倒影和逆行。采用这种方法的序列所具有的不同性质早已得到广泛研究，最初由第二维也纳乐派进行研究，之后又由达姆施塔特乐派及其他音乐家加以探讨。

回到增殖序列，若使用两个彼此无关的任意序列，每个序列含有n 个音符，则可得到的增殖数量唯一的限制，是对称群中大小为 n （即由 n 个元素的所有置换构成的群）的元素的阶。然而，采用一个序列及其由古典序列主义导出的某种变换进行构造时，可得到的增殖数量还受到进一步限制，因为这两个生成序列并非彼此独立。也就是说，对称群的置换中，只有一部分能成为增殖过程（PP）。

因此，出现了一些问题：通过每种变换所能得到的增殖过程（PP）是否都遵循共同的结构？更具体地说，使用一个含有 n 个音符的序列及其某种变换，可以得到多少种增殖？我们将运用前文所述的工具，从系统的角度回答这些问题。在以下4个小节中，我们将考察每种变换的移调变体，并用 t 表示移调次数，用 n表示音符数量。

4.1. 使用倒影研究增殖（*I*）

这是最简单的情况。将一个序列倒影后再进行移调，无论移调次数多少，我们都会得到一个阶（至多）为二的增殖过程；这意味着，在增殖过程中，对倒影应用增殖过程后，我们会再次得到原始序列。

为证明这一论断，设 t为所使用的移调， x为任意一个音符所对应的数字。PP 将把 x 变换为 $-x+t$，再次变换后，

这是因为首先对一个以 0 开始的序列进行倒影，然后再进行移调。注意，这个音符 $-x+t$ 依次将被变换为 $-(-x+t)+t=x$，这意味着 $(x,-x+t)$ 是 PP 的一个循环（二阶循环）。还要注意，如果我们先对序列进行移调，再对其进行倒影，所得序列是相同的；我们从 x 开始，将其移调为 $x+t$，而为了进行倒影，由于此时序列以 t 开始，我们得到 $2t-(x+t)=-x+t$，这与另一种情况下相同。用数学术语来说，倒影与移调可交换。我们任意选取了一些移位和一个任意音符，得到的是一个二阶循环。这意味着，以这种方式得到的 PP 只能具有这些循环，不包括退化情形，即 $x=-x+t$，因为这会使循环的长度为 1。由此可知，PP 将是长度为 1 和 2 的循环之积，因此其整体阶也将为 1 或 2；其中，阶为 1 仅在序列包含一个音符，或包含两个音符且没有移调时出现。

正如我们所见，这种情况完全没有带来任何新材料。

4.2. 利用素数研究增殖过程（*P*）

这种情况也相当简单。当然，使用 P0（即我们据以推导出其余序列的未改变序列）会生成一个恒等置换的增殖过程，它会让所有音符保持原样，因此不会带来任何新材料。但在其他任何情况下，增殖过程都会将任意音符 x 变换为 $x+t$。这会发生在所有音符上，因此，如果我们将增殖过程应用两次，就会得到 $(x+t)+t=x+2t$。一般而言，将增殖过程应用任意次数 k 时，我们会得到 $x+kt$。要确定必须应用多少次才能回到音符 x 并完成循环，只需确定何时$x=x+kt$模 n。这将在经过 $k=n/gcd(n,t)$ 次迭代后发生。也就是说，与前一种情况一样（除了少数长度为 1 的循环，而这种情况不会出现），增殖过程中的每个循环长度都相同，且置换的阶恰好就是这个长度： $n/gcd(n,t)$。增殖过程只不过是原始序列的移调，因此同样不会带来新材料。

4.3. 使用逆行倒影（*RI*）研究增殖

在本节中，我们首先必须讨论应按何种顺序应用逆行、倒影和移调。我们已经证明，倒影与移调可交换，并且很容易观察到，逆行与移调也可交换。相比之下，倒影与逆行不可交换：请注意，如果所遵循的过程是先对序列进行倒影，然后再将其逆行，那么当我们从一个首音符被赋值为零的初始序列开始时，经过倒影再逆行的版本将在最后一个位置出现数字零。相反，如果先对序列进行逆行，再进行倒影，所得结果仍呈现与之前相同的音程分布，但移调不同。

事实证明，无论采用哪一种次序，结构性质都完全相同。仅为便于论述，我们将先倒影再逆行的过程称为 RI，将相反的次序称为 IR。注意，对一个序列先应用 RI 并移调 t，再应用 IR 并移调 $n-t$，得到的序列与原序列相同。若考虑由 $n=7$ 个音符组成的序列 $A=[0,3,4,2,1,6,5]$，先倒影再逆行，并移调 $t=2$，得到序列 $B=[4,3,1,0,5,6,2]$。现在，若对 B 先应用逆行，再应用倒影，并移调 $t'=n-t=5$，我们便回到序列 A。

现在设 A 为任意序列， B 为对它应用 RI 并移调 t 个音分数后得到的序列。根据我们的观察，对 B 应用 IR 并移调 $n-t$，会得到 A。现在设 σ 为对 A 应用 RI 并移调 t 后得到的增殖过程；我们知道， σ 将 A 映射为 B。又由于 σ 将 A 映射为 B，我们知道，将 B 映射为 A 的置换是 σ 的逆置换。此外，根据我们的观察，将 B 映射为 A 的置换，是对 B 应用 IR 并移调 $n-t$ 后得到的增殖过程。总而言之，对 A 应用 RI 得到的增殖过程，是对 B 应用 IR 得到的增殖过程的逆元：两者的增殖过程相同，只是出现的次序相反，如图3所示，使用与之前相同的 A：

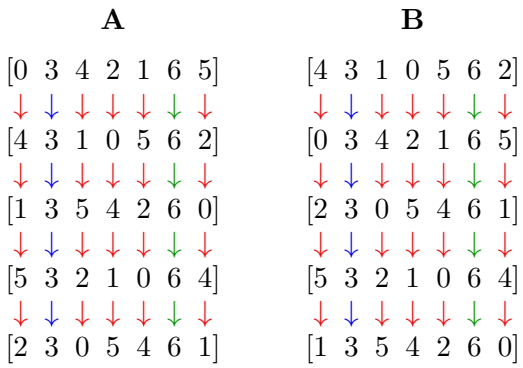


图3. 使用逆行倒影处理 A 的增殖过程（ $t=2$ ）与使用倒影逆行处理 B 的增殖过程（ $t=5$）的比较

用数学术语来说，使用逆行倒影处理 n音符和移调 t的 PP，与使用倒影逆行处理 n 音符和相应移调 $n-t$的 PP 之间存在保持增殖结构的双射。这就是逆行倒影和倒影逆行具有相同结构性质的原因，因此使用其中一种或另一种并无区别。从现在起，我们将采用第一种方案，即先进行先倒影，再进行逆行。这有利于记号表示，因为这样我们只需对从 0 开始的序列进行倒影。解决了这个问题后，我们将开始考察这类 PP 的运作方式。

正如我们在第4.1节中所述，倒影+移调的过程会生成彼此相关的元素对：对其中一个元素应用该过程，就会得到另一个元素。为简便起见，我们将这对元素中的一个数称为另一个数的逆元，尽管这种变换并非只有倒影；实际上，正是这些元素对的存在，使得这种变换实质上成为一种倒影。除 $x=-x+t$ 模 n的情况外，应用变换后这些数会保持不变。我们称这些数为自身的逆元，或称自逆元。这些情况对第4.1节的讨论并无实质影响，但我们需要解这个方程。解得 $2x=t$；利用基本的模运算可知，当 n 为奇数时，该方程恰有一个解，特别是当 $t=0$时，解为 $x=0$；对于其他每一种移调，解的数量都不同（我们不再区分这些情况，因为它们具有相同的性质）。如果 n 为偶数，那么根据 t 是偶数还是奇数，方程分别有两个解或无解。这正是我们要考察的几种情况，每种情况的结果略有不同。

逆行涉及一种全新的行为：同样会涉及某种形式的对，但现在针对的是序列中的位置，而非数本身。相对于中心对称的位置将被

逆行。这意味着，现在，当我们将增殖过程应用于给定的数 x时，我们得到的将不是对该数应用变换倒影+移调的结果，而是将该变换应用于这样一个音符所得的结果：该音符距序列最右端音符的间距，与原始音符距最左端音符的间距相同，我们称之为它的镜像。每个位置都将与其镜像相关联，除非 n 为奇数；在这种情况下，会有一个位置，即中心，其镜像就是它自身。所有其他位置对都具有相同的行为；影响增殖的唯一因素是对的数量以及是否存在中心，因此在这方面，它们对我们而言是完全可互换的。当然，存在中心位置会改变增殖的行为，但我们已经必须区分偶数与奇数，因此无需考虑新的情形。为简便起见，如果我们有一个音符数量为奇数的序列以及它所生成的增殖过程，我们将把包含该序列中处于这一中心位置的音符的增殖过程循环称为该增殖过程的中心循环。

如果我们关注图3的第一列，就会看到倒影+移调将 $A = [0, 3, 4, 2, 1, 6, 5]$ 变为 $[2, 6, 5, 0, 1, 3, 4]$,因此，0是2的逆元，3是6的逆元，4是5的逆元，而1是自逆元。对于逆行而言，2是自身的镜像，0是5的镜像，依此类推。我们可以将该置换分解为(0 41 5 2)(3)(6)。由于中央音符是2，我们的中心循环为(0 4 1 52)。

4.3.1. 当 n 为偶数且 t 为奇数时

现在我们将详细解释 n 为偶数且 t 为奇数的情形，其他情形的推理也都非常相似。在这种情况下，我们的方程 $x = -x + t$ 没有解，因此恰好有 $n/2$ 对互为逆元的数。此外，由于 n 为偶数，不存在中心位置。以下关键观察将解决这一情形，并对其他情形大有帮助：对音符数量为偶数的序列应用倒影逆行和偶数次移位后得到的增殖过程，不可能在同一个循环中包含两个逆元。此外，如果增殖过程中有一个循环$(a\ b\ c. . .)$，则$(. . . c'\ b'\ a')$ 也属于该增殖过程。从这里开始，我们用 x'表示任意音符 x 的逆元。

为了证明这一点，设我们有一个名为 b 的音符，它处于某个位置，并观察 b 所参与的增殖过程的循环。相对于增殖过程，所有位置对的行为都相同，因此不失一般性，我们可以假设 b处于第一个位置。如果 b' 处于对面的位置，那么增殖过程会再次将 b 映射到其自身，循环便会闭合。除此之外， b' 会处于另一个位置。同样，不失一般性，我们可以假设它处于第二个位置。而 b 会被映射到另一个数 c，这意味着 c' 处于 b对面的位置。同样，我们可以令 c处于 b'对面的位置，这样循环（b c）和（c' b'）就会闭合。或者，我们也可以让另一个音符 a 处于b'对面的位置，使循环继续延伸为（a b $c. . .$）和（c' b' $a'. . .$）。同样，我们可以假设 c处于第三个位置，并区分 a' 是否处于它对面的位置。如果是，循环就会再次闭合；如果不是，那么另一个音符 d就是c经过增殖过程后的像。这个过程会持续下去，直到循环闭合。由此可见， b 及其他任何音符都不会与其逆元处于同一个循环中，这就归纳地证明了我们的观察。图4展示了这一过程。

现在，让我们从这种方法可得到的 PP 的角度来表述这一观察。我们知道，对于 PP 中的任意循环，都必须存在另一个长度相同的循环，其中包含第一个循环中各音符的逆元。这意味着，所有可能成为 PP 的排列，其结构都与

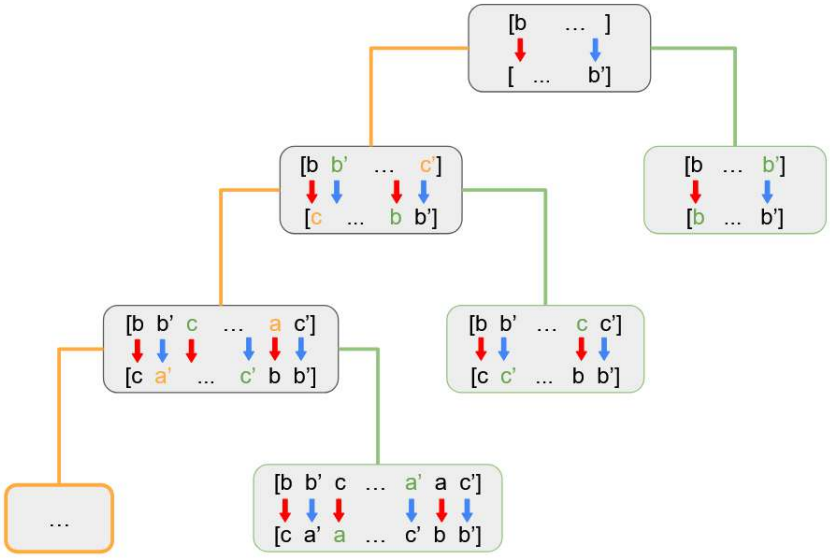


图4. 当 n 为偶数、 t为奇数时构造循环的归纳过程

对 $n/2$ 个音符进行置换，但将每个循环重复 2 次的结果相同。

此时我们可以注意到，实际上，所有具有这些特征的置换都是增殖过程。只要遵循上述归纳过程，就能构造出每一个这样的置换，因为我们可以在任意时刻闭合循环。例如，如果固定 $n = 24$ （偶数）和某个奇数 t，那么具有结构 $[\{1\},\{1\},\{1\},\{1\},\{3\},\{3\},\{7\},\{7\}]$ 的置换是一个有效的增殖过程，因为它将该置换的每个循环重复两次。具有结构 $[\{2\},\{2\},\{2\},\{9\},\{9\}]$ 的置换则无法实现，因为它有奇数个长度为 2 的循环。

4.3.2. 当 n 为偶数且 t 为偶数时

现在，如果 n 为偶数且 t 也为偶数，我们的方程将有两个解，因此会有两个各自等于其逆元的音符。而且序列中仍然没有中心位置。设 x 和 y 是各自等于其逆元的音符，我们可以说 $x' = x$ 和 $y' = y$。

沿用前述推理，但分别将 b 与 b’ 的角色换成 x 与 y，我们从第一位置的 x 开始。现在，若 y 是它的镜像，我们将得到循环$(x\ y)$，而不是 x 与 y 被映到自身。否则，我们假定 y 位于第二位置，从而可以按如下形式闭合该循环 $(x\ c\ y\ c')$ 而不是 $(x\ c)$ 与 $(c'\ y)$。一般而言，我们的增殖过程将具有循环 $(c'\ x\ c\ \ldots\ e\ a\ y\ a'\ \ldots\ f)$而不是先前的 $(a\ x\ c \ldots e)$ 与 $(c'\ y\ a' \ldots f)$。图5给出了一幅示意图，展示包含两个自逆元的循环是如何构造的。

在这种情况下，任意一个PP都类似于前一种情况中的置换，但它取两个长度相同的循环并将它们合并，从而得到一个长度为原来两倍的循环。换句话说，这种情况下所有可能的PP都可以通过选择一个偶数$k \leq n$来得到，它将是其中一个循环的长度（即包含两个自逆元的循环），然后对 $(n-k)/2$ 的任意置换将其每个循环重复

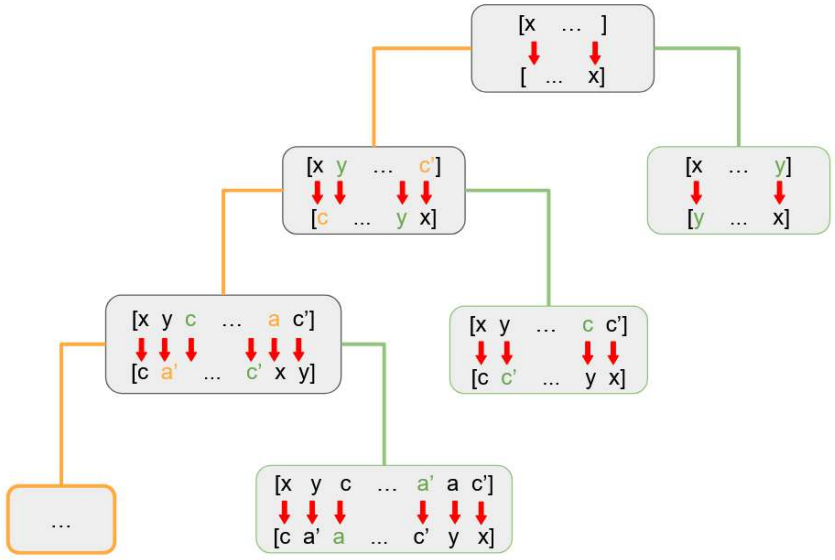


图5。 当 n 为偶数且 t也为偶数时循环构造的归纳过程

两次。此情况下一个PP的示例由结构$[\{2\},\{2\},\{8\}]$给出（注意，这就是图2中得到的置换）。这里 $k=8$，我们通过将 $[\{2\}]$ 的循环重复两次，再与 $\{8\}$合并，得到置换。置换 $[\{6\},\{6\}]$ 无法在这种情况下得到。

4.3.3. 当 n 为奇数且 t 为零时

在这种情况下，只有一个数是其自身的逆元，即数字零，正如本节开头所解释的那样。此外，序列中存在一个中心位置，这意味着该位置的音符将由增殖过程映射到其逆元。沿用上一节的相同推理，包含零这一唯一自逆元的循环应当大致如下所示：$(\ldots\ b'\ a'\ 0\ a\ b\ \ldots)$。在这种情况下，该模式会持续下去，直到我们遇到另一个自逆元，并以如下方式闭合循环：$(c'\ y\ c\ \ldots\ b'\ a'\ 0\ a\ b\ \ldots)$。然而这是不可能发生的，因为我们没有另一个自逆元。但此时中心位置发挥了作用，因为它是我们的结构中唯一的另一处变化，因此也是循环能够闭合的唯一方式。我们按照图6所示的方式继续，直到到达中央音符（记作 c），此时它不会被映射到某个其他的任意音符，而是映射到其自身的逆元 c'。这样，循环将以如下形式闭合：$(c'\ \ldots\ b'\ a'\ 0\ a\ b\ \ldots\ c)$。

因此，现在包含音符零的循环长度为大于一的奇数，因为 0 位于我们序列的第一个位置，所以它不可能映射到自身（除非 $n=1$）。所有其他循环的表现与前几种情况相同。也就是说，这种情况下可能的PP是指包含一个长度为 k 的循环（其中 k 是大于 2 的某个奇数），并且随后是对 $(n-k)/2$ 个音符的任意排列，而该排列的每个循环都重复两次。对于 $n=9$ （以及 $t=0$），使用 $k=5$ 时，$[\{2\},\{2\},\{5\}]$ 是一个PP，但 $[\{4\},\{5\}]$ 不是。

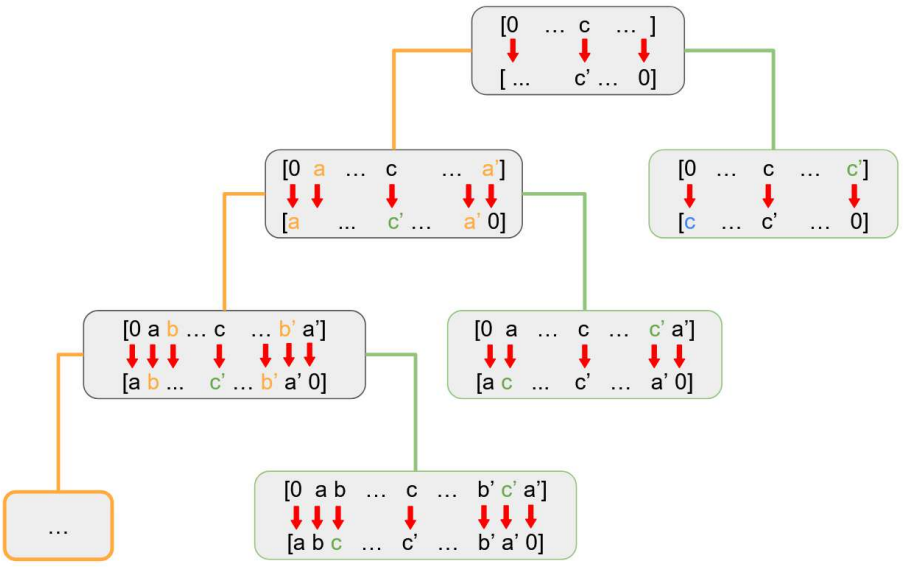


图6。 当 n 为奇数且 $t = 0$ 时构建一个循环的归纳过程

4.3.4. 当 n 为奇数且 t 不为零时

最后这种情况中仍然只有一个数是自身的逆元，但现在，序列中的任何一个音符（零除外）都可能具有这一性质，具体取决于移调；而在之前的情况下，只有零可以如此。由于 n 为奇数，我们还有一个中心位置，因此与上一种情况的唯一差异是，自逆元可以位于任意位置。将自逆元放在非中心位置，就能得到上一种情况的任何其他配置；此外还会出现一种新情况：如果自逆元位于中心，包含它的循环长度可以为 1。因此，包含自逆元的循环长度为奇数，所有其他循环的表现与第4.3.3节中的情况相同。也就是说，这种情况下可得到的可能排列，是指包含一个长度为 k 的循环（其中 k 是某个奇数，现在可以是 1），并且随后是对 $(n-k)/2$ 个音符的任意排列，而该排列的每个循环都重复两次。对于 $n = 15$ （以及 $t \neq 0$），使用 $k = 1$ 时，$[\{1\},\{7\},\{7\}]$ 是一个 PP，但 $[\{2\},\{2\},\{3\},\{8\}]$ 不是。

4.4. 使用逆行研究增殖（***R***）

最后一种情况是最复杂的，因为在某种程度上，根据 n 和 t 的可能取值而产生的新可能性的多样性，使我们在其他各节中得到的结构得以一般化。在这种情况下，我们需要处理逆行和移调，但不涉及倒影。具有讽刺意味的是，倒影使增殖序列变得更加简单，因为它会迫使逆元成对出现，从而使分析更加容易。与第 4.3 节一样，我们必须将移调和逆行视为彼此分离的过程：首先，移调会将每个音符 x 移至 $x + t$，如同第4.2节中那样；然后我们进行逆行，使得增殖过程将一个音符 x 移至其镜像的移调音。

如我们在第4.2节中所讨论的，移调将产生 $gcd(n,t)$ 个长度为$n/gcd(n,t)$ 的循环。请注意，这些循环并不是我们的 PP 中的循环，因为我们尚未应用

逆行，所以我们必须用“循环”一词来表示两种不同的含义：移调所产生的循环，以及构成 PP 本身的循环。再次如第4.2节所述，t 影响我们的 PP 的唯一方式，就是移调循环的数量和长度，而这些只取决于最大公约数。这意味着，对于给定的音符数量 n，与 n 具有相同最大公约数的 t 的不同取值将产生完全相同的结果：可能的 PP 相同，能够导向给定 PP 的序列数量也相同。唯一可能发生变化的因素，是生成 PP 的具体序列。为说明这一点，如果我们选择 $n = 12$，那么这一推理表明，对于 $t = 2$ 和 $t = 10$，我们将得到相同的结果，因为 $gcd(2,12) = gcd(10, 12) = 2$。

换言之，给定 n的某个值，真正决定增殖相对于 t 如何运作的，是移调循环的数量及其长度。正如我们所说，这最终取决于 gcd（t，n），但仅从移调循环的数量和长度来思考这些移位，将有助于理解我们所谓的广义移位，即我们将用于通过逆行处理增殖序列之一般情形的工具。与上一个例子一样，如果我们选择$n = 12$ 和 $t = 2$，我们的移调循环将是（0 2 4 6 8 10）和（1 3 5 7 9 11）。或者，对于 $t = 10$，我们得到（0 10 8 6 4 2）和（1 11 9 7 5 3）。二者都生成2（gcd（n，t））个长度为6（n/gcd（n，t））的循环。

我们将分四节说明通过逆行产生增殖序列的过程：首先讨论两个与其他情况相比行为相当简单的特殊情形，即 $t = 0$ 和 $t = n/2$。第三节讨论 t 和 n 互素的情形，也就是说，$gcd(n, t) = 1$。这是一个非常有助于阐释第四节观点的例子。最后一节讨论一般情形，涵盖所有可能性，包括前面讨论过的情形。

4.4.1. 当 t 为零时

这个特殊情形没什么研究价值，因为它完全不会产生任何变化，与第4.1节的情形相同。逆行过程将第一个音符移至最后一个位置，第二个音符移至倒数第二个位置，依此类推。简言之，增殖过程将每个音符与其镜像位置上的音符对应起来，因此产生的循环长度总是为 2（当 n 为奇数时，位于中间位置的音符会产生一个长度为 1 的循环）。同样，整体增殖过程的阶至多为 2，不会产生新的序列。

4.4.2. 当 n 为偶数且 $t = n/2$

给定一个偶数值的 n，$t = n/2$ 的情况因其与前述推理的关系而颇为特殊。如果分析移调，我们总有 $gcd(n, t) = n/2$，因此该移调由 $n/2$ 个长度为 2 的循环构成。这些长度为 2 的循环是音符对，应用移调后，每对中的音符会彼此互换。接下来，我们必须应用逆行才能得到 PP。回顾第 4.3 节：我们有一个变换，即倒影+移调，它会生成逆元对，并根据具体情况产生至多 2 个不动点。然后，我们必须应用逆行才能得到 PP。现在，我们的变换仅仅是移调，但它确实由成对的“逆元”构成，且没有不动点；这与 n 为偶数、t 为奇数时的 RI 具有相同的结构，因为就循环而言，这种移调的表现与常规倒影相同。由此可知，对于此情况，固定一个偶数n 并通过逆行进行 $t = n/2$ 时，能够得到的可能 PP 与相同偶数 n 及任意奇数 t 下逆行倒影的情况完全相同。不仅如此：我们选择的任何一个 PP，都

可以通过逆行倒影（其中 t 为奇数）实现，且所得序列数量与仅通过逆行（其中 $t = n/2$）实现时相同；这只是标记方式不同，但结构性质相同。

4.4.3. 当 $gcd(n、\ t) = 1$

假设 $gcd(n、\ t) = 1$。为简便起见，证明将按 $t = 1$ 来撰写，尽管同样的推理适用于满足这一条件的任何移调。还值得注意的是，第4.4.4节中描述的一般情形足以证明序列在此处的表现方式。然而，前面的案例研究包含一些无法推广的具体结果，同时也有助于理解一般情形的思想，因此我们有理由先考察 $gcd(n、\ t) = 1$ 的情形。

我们将通过递归过程来研究这些序列；这一过程将帮助我们确定由给定音符数量的任意序列所产生的循环的所有可能组合：也就是说，假设我们知道对于给定音符数量 n，经过某种变换（向序列中添加一个音符）后所有可能的PP，那么就可以将这些结果扩展为 $n+1$ 个音符的所有可能PP。这样，我们从一个因其简单性而已知的基例开始（本例中为 $n = 2$），并递归地将其扩展，以得到 n 的每个可能值。

对于 $n = 2$，唯一可能的结构显而易见（回想一下 $t = 1$）：

原始序列 $\rightarrow [0, 1]$

$\downarrow \downarrow$

逆行 + 移调 $\rightarrow [0, 1]$

现在假设，对于某个数量为 n 的音符，我们已经知道 PP 可能具有的所有结构，并利用这些信息推导处理 $n+1$ 个音符时可以得到的结构。我们将区分两种情况：第一种，n 为偶数，因此 $n+1$ 为奇数；第二种，n 为奇数，而 $n+1$ 为偶数。

我们先假设 n 为偶数，并考虑一个含有 n 个音符的任意序列。为确保归纳过程涵盖 $n+1$ 个音符的所有可能 PP，我们必须检查每个含有 $n+1$ 个音符的 PP，是否都能从一个含有 n 个音符的序列出发，通过某种变换将其扩展到 $n+1$ 个音符。在这种情况下，给定一个含有 $n+1$ 个音符的序列，我们只需删去中心位置的音符，得到一个含有 n 个音符的序列；进行移调时跳过该音符，所有逆行关系都将保持不变，从而得到一个结构相似的 PP。因此，从 n 到 $n+1$ 的归纳步骤，就是在一个含有 n 个音符的序列的中心位置添加一个新音符。这个新音符的名称本身并无特别意义；不过，鉴于含有 n 个音符的序列中已有从 0 到 $n-1$ 的音符，我们将这个新音符称为 n。此前，由于我们已确立 $t = 1$，移调会将 $n-1$ 变为 0。现在我们采用模 $n+1$ 运算，而不是模 n 运算，因此 $n-1$ 将变为 n，而 n 将变为 0。其他所有关系都将保持不变。

对于增殖过程来说，我们的新音符 n将被映射到 0，因为它处于中心位置；而编号为 $n-1$的音符在镜像位置上的音符——它在 n音符序列中与 0 配对——现在将被映射到我们新添加的音符 n。因此，对于我们的 n+1音符序列，其循环结构与它所源自的 n音符序列相同，唯一的例外是包含音符 0 的循环（也可以是任何其他循环，因为我们可以重新标记音符），其中会多出一个音符：

$$\begin{bmatrix} n-1,\ldots & \ldots,b \\ \downarrow & \downarrow \\ b+1,\ldots & \ldots,0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} n-1,\ldots, & n, & \ldots,b \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ b+1,\ldots, & 0, & \ldots,n \end{bmatrix}$$

现在令 n 为奇数。我们再次需要构造一个归纳过程，以确保每个由 $n+1$ 个音符组成的增殖过程，都可以由某个 n 音符序列的归纳扩展得到。在这种情况下，由于 $n+1$ 为偶数，我们可以删除任意一个音符，得到一个由 n个音符组成的序列；其中，逆行所导致的每种关系都会保留下来，唯独被删除音符的镜像除外：它现在没有镜像音符，也不会受到逆行的影响。接着，在归纳步骤中，我们将为每个由 n 个音符组成的序列添加一个新音符，仍称为 n，并将其置于原先位于中心的音符的对称位置。接下来的论述中，我们将把由 n个音符组成的序列中原先位于中心的音符称为 a。

$$[x_1, x_2, \ldots, a, \ldots, x_n] \longrightarrow [x_1, x_2 \ldots, a, n, \ldots, x_n]$$

此时，与前一种情况得到的结果类似，应用置换时，$n-1$ 的镜像会映射到 n，而 n 会映射到 $a+1$，如下所示。

那么，从 n 变到 $n+1$时，新的音符 n 会如何改变循环结构呢？在这种情况下，可能出现两种结果：

(i) 两个循环合并，并在结果中增加一个音符。(ii) 一个循环分裂成两个，并在其中一个新循环中增加一个音符。

这取决于我们称为 a 和 0 的音符是否位于同一个循环中。如果是，包含这两个音符的循环就会分裂；如果不是，包含这两个音符的循环就会合并。

$$\begin{bmatrix} n-1,\ldots, & a, & \ldots,b \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ b+1,\ldots, & a+1, & \ldots,0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} n-1,\ldots, & a, & n,\ldots, & b \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ b+1,\ldots, & 0, & a+1,\ldots, & n \end{bmatrix}$$

在上方显示的左侧序列中，我们有一个形如 $(b, 0, \ldots B_1 \ldots)$ 的循环，以及另一个 $(a, a+1, \ldots B_2 \ldots)$，其中 B_1 和 B_2 表示循环中未知的部分。所考察的置换中，a 和 0 可能位于同一个循环中。在这种情况下，我们得到循环 $(b\ 0 \ldots B_1 \ldots, a, a+1, \ldots B_2 \ldots)$，而不是之前提到的两个循环。右侧序列所示的循环表明，a 现在映射到 0，而不是 $a+1$；b 映射到新的音符 n，而不是 0；n 则映射到 $a+1$。增殖过程中的其他音符都保持不变，因此 0 之后的块B_1、B_2 以及 $a+1$ 都不会改变。

因此，第一种情况中，含有 0 和 a 的循环彼此不同，它们会在右侧序列中合并，形成循环 $(b,\ n,\ a+1,\ \ldots B_2 \ldots,\ a,\ 0,\ \ldots B_1 \ldots)$。第二种情况中，同时含有 0 和 a 的循环将分裂为 $(b,\ n,\ a+1,\ \ldots B_2 \ldots)$ 和 $(a,\ 0,\ \ldots B_1 \ldots)$。

总而言之，归纳过程如下：我们从 $n = 2$ 开始，并知道唯一可能的PP是恒等置换。现在设 n 是一个自然数，并假设我们知道 n 个音符的所有可能的PP。接着，归纳步骤会得出 $n + 1$ 个音符的所有可能的PP，具体如下：

(i) 如果 n 是偶数，那么我们取每个含有 n 个音符的 PP。对于每个 PP 中的每个循环，我们都可以得到另一个含有 $n + 1$ 个音符的 PP，将该循环延长一个音符。(ii) 如果 n 是奇数，我们再次取每个含有 n 个音符且具有中心循环的 PP。对于该循环划分成两个循环的每一种可能方式，我们都可以得到一个含有 $n + 1$ 个音符的新 PP，并在其中一个循环中添加一个额外的音符。此外，对于该 PP 中每个可以与它合并的其他循环，也可以得到一个新 PP，并添加一个额外的音符。

有鉴于此，我们可以利用归纳过程，建立一个相当有力的描述，说明对于每个 n ，所有可能的 PP 是什么；证明该描述成立时，才需要用到递归过程。为此，我们需要做两个观察：

一方面，我们来观察含有 n 个音符的 PP 可以有多少个循环。对于 $n = 2$，唯一的 PP 是恒等变换，它有两个长度为一的循环。从 n 偶数到 $n + 1$ 奇数的归纳步骤不会给结构添加新的循环，因此 $n = 3$ 也会有含两个循环的 PP。从 n 偶数到 $n + 1$ 奇数的步骤可能会拆分一个循环，也可能会合并两个循环；也就是说，我们会得到循环数多一个或少一个的 PP，因此四个音符的 PP 的循环数最多为三个。将这一推理推广到每个 n，可得：若其为偶数，则循环数的最大值为（$n/2$）$+ 1$；若其为奇数，则为（$n + 1$）$/2$。更简洁地说，循环数始终小于或等于（$n/2$）$+ 1$。我们将此称为**条件1**。

另一方面，我们来观察一个增殖过程（PP）可能具有的偶数长度循环数。给定一个增殖过程（PP），我们将该循环数称为 k。对于 $n = 2$，正如我们所说，唯一的增殖过程（PP）有两个长度为 1 的循环，因此这个增殖过程（PP）有 $k = 0$，是一个偶数。从 n 偶数转变为 $n + 1$ 奇数时，我们的归纳过程是将某个增殖过程（PP）循环的长度增加 1。如果该循环原本长度为偶数，现在就会变成奇数，因此 k 会减少 1。反之，如果它原本长度为奇数，现在就会变成偶数， k 会增加 1。从 $n = 2$ 到 $n = 3$ 时，我们唯一的增殖过程（PP）有 $k = 0$，因此，由于一个置换不可能有 $k = -1$，每个由 3 个音符组成的增殖过程（PP）都将有 $k = 1$。注意， k 增加或减少 1 总会改变其奇偶性。另一种情况下，从 n 奇数转变为 $n + 1$ 偶数时，我们将两个循环合并，或将一个循环拆分为两个，然后将其中一个剩余循环的长度增加 1。合并两个循环时，有三种情况：如果两个循环都是偶数长度，就将它们合并，并在结果中增加一个音符；这样会失去两个偶数长度循环，生成一个奇数长度循环，使 k 减少 2。如果一个是偶数长度，另一个是奇数长度，我们会失去一个偶数长度循环，但生成一个新的偶数长度循环，因此 k 保持不变。如果两个都是奇数长度，那么合并后的循环也是奇数长度，所以 k 也保持不变。将一个循环拆分为两个时，结果则相反： k 可以增加 2，也可以保持不变。注意，所有这些操作——增加或减少 2，或保持不变——都会保留 k 的奇偶性。

这说明，对于音符数量固定的所有 PP， k 的奇偶性保持不变。也就是说，给定音符数量 n，不同的 PP 可能有不同的 k值，但奇偶性始终相同。事实上，我们知道，对于 $n = 2$，唯一的 PP 的$k = 0$为偶数。对于 $n = 3$ ，所有 PP 的 $k = 1$ 均为奇数；对于$n = 4$ ，所有 PP 的 k 也为奇数；对于 $n = 5$ ，则再次变为 k 为偶数，以此类推。由此得到以下结果：由增殖序列得到的每个 PP 都将具有

若 $n=1$，则与 k 相关联的值为偶数，模 4 为 2；若 $n=0$，则 k 的值为奇数，模 4 为 3。我们将此称为**条件 2**。

由此，我们得到了每个增殖过程都必须满足的两个条件：其循环数的最大值，以及与之关联的 k 的奇偶性。事实证明，任何仅满足这两个条件的置换确实都是增殖过程，这是一个非凡的结果，我们将在接下来证明。实际上，我们将证明一个稍强的结果，并补充说明：若 n 为奇数且 σ 是增殖过程，那么 σ 中任何长度不为 1 的循环都可以作为中心循环。为用归纳法证明这一点，我们先验证它对 $n=2$ 成立，再证明若它对所有不超过 n 的数都成立，那么它对 $n+1$ 也成立。

2 个音符只有两种置换：一种有两个长度为 1 的循环，另一种是二阶循环。第一种满足条件1和条件 2，但第二种不满足条件 2。正如我们所见，第一种可以通过增殖得到，而第二种不行，因此这说明该结果对基例成立。现在假设 $n \geq 2$ ，且该结果对不超过 n 的数成立，并令 σ 为 $n+1$ 个音符的一个置换，其结构为 $[\{C_1\},\{C_2\},...\{C_m\}]$ ，且满足条件1和条件 2。回想一下， $\{C_i\}$ 表示一个长度为 C_i 的循环。我们将看到，存在一个由 n 个音符构成的增殖过程，我们可以通过归纳变换将其扩展为 σ ，从而证明存在一个由 $n+1$ 个音符构成的序列，能够生成 σ，也就是说， σ 是增殖过程。注意，$(n+1)/2$ 和 $(n/2)+1$（条件1所允许的最大循环数）对于 $n \geq 3$ 都严格小于 n；由于我们是在 $n \geq 2$ 的情况下进行推理，因此 $n+1 \geq 3$。于是， σ 所能具有的循环数必定严格小于 $n+1$，这意味着至少有一个循环的长度不小于 2。不失一般性，假设 $\{C_1\}$ 的长度严格大于 1。归纳步骤将再次分为 n 为偶数和 n 为奇数两种情况：

若 n 为偶数，考虑由结构 $[\{C_1-1\},\{C_2\},.....,\{C_m\}]$给出的一个含有 n 个音符的 PP τ 。它满足条件1，因为 $n/2+1=((n+1)+1)/2$。它也满足条件 2，因为 σ 满足该条件，而将 $\{C_1\}$ 减一会改变 k 的奇偶性，这正是此情形下应发生的变化。既然 τ 满足这些条件，根据归纳法，必然存在一个能以增殖方式产生 τ 的序列。将C_1 减一，与我们把 n 从偶数变为 $n+1$ 奇数时所用的归纳变换相反，因此我们可以将该序列扩展为一个含有 $n+1$ 个音符、恰好产生置换 σ的序列。剩下唯一要检查的是，中心循环可以是 σ中的任意一个循环。但以这种方式扩展序列时，我们增加的循环恰好就是中心的循环，因此，对于 σ 中任意一个长度至少为 2 的循环，我们都可以执行完全相同的过程，从而得到 σ ，且该序列的中心是另一个循环。

现在假设 n 是奇数。若 $m>1$，也就是说，若 σ 有多个循环，则考虑由 $[\{C_1+C_2-1\},\{C_3\},\ldots,\{C_m\}]$ 确定的 n 个音符的置换 τ。置换 τ 比 σ 少一个循环，因此满足条件1；基于与前文类似的推理，它也满足条件 2。于是，根据归纳法， τ 是一个 PP；我们还可以假设循环 $\{C_1+C_2-1\}$ 是中心循环，因为我们可以任选一个长度大于 1 的循环。为了将这个序列扩展为另一个由 $n+1$ 个音符组成的序列，我们将中心循环拆分为 $\{C_1\}$ 和 $\{C_2\}$，从而得到一个由 $n+1$ 个音符组成的序列，该序列增殖为 σ，这正是我们想要的。若 $m=1$，那么 σ 只有一个循环，因此其结构就是 $[\{C\}]$，其中 $C=n+1$。由于 n 是奇数且 $n \geq 2$，我们可以断定 $n \geq 3$。对于这种情况，考虑由结构 $[\{C_1\},\{C_2\}]$给出的 τ，其中 $C_1=n-1$ 且 $C_2=1$；它满足条件1，因为它只有两个循环，也满足条件 2，因为 $n-1$ 与 $n+1$ 具有相同的奇偶性，所以对于 σ 和 τ，均有 $k=1$。于是，同样存在一个由 n 个音符组成的序列，它增殖为 τ；由于 $n-1 \geq 2$，可以将 $\{C_1\}$ 放在中心。我们将这个

序列扩展为由 $n+1$ 个音符组成的序列，将循环 $\{C_1\}$ 和 $\{C_2\}$ 接合起来，从而得到一个在增殖过程中生成 σ 的序列。

我们从一个满足条件 1 和 2 的 σ 音符置换 $n+1$ 出发，通过归纳法构造出一个由 $n+1$ 个音符组成、增殖后得到该置换的序列；这意味着 σ 是一个增殖过程，由此证明得证。

4.4.4. 一般情形：广义换位

我们通过这一过程，得出任意音符数量 n 和任意移调 t 下增殖序列可能具有的结构；其思路与第 4.4.3 节类似。

为了推广上一节的内容，我们需要定义一个在当前研究中至关重要的概念：广义换位。当我们对一个由 n 个音符组成的序列进行移调时，由该移调得到的置换中的循环长度都相同。更具体地说，我们得到 gcd 个长度为 n/gcd 的循环。然而，问题在于：在归纳过程中向序列中添加或删去音符时，换位的结构会遭到破坏，这正是引入这一新概念的原因。

广义换位（GT）先验地是指任何一种变换（任何置换），可用来代替常规换位，再像通常那样与逆行倒影结合。由于我们将在归纳过程中逐个添加音符，因此希望从常规换位出发，在换位的某个循环中反复添加一个音符，从而得到不同类型的可能变换。在一个循环中添加一个音符，意味着在该循环中，某个音符a 变换为另一个音符 b，而现在两者之间多了一个中间音符 c，因此 a变换为 c， c 变换为 b。这也包括添加一个与此前任何音符都没有变换关系的新音符，因此它变换后仍是自身。因此，归纳过程中研究的结构并非全部对应于运用传统序列主义的过程构造出的实际增殖序列，但它们都是构建包含更多音符的序列所必需的步骤。

本研究的基本情形采用 $n=1$，它只有一种可能，因为广义换位只有一个，即恒等置换。再次从偶数个音符推至下一个数目（即奇数个音符），然后再反向进行，从奇数个音符 n推至偶数个音符$n+1$。

假设 n 是一个偶数，对任意给定的广义换位，我们已知所有可能的增殖过程结构。考虑一个含有 $n+1$ 个音符的序列，其中处于中心位置的音符记作 n （请记住，这并非限制条件，因为我们可以重新标记所有音符，使其满足这一条件，同时不改变增殖过程的结构）。与该序列相关联的，是一个涉及所有音符的广义换位。

我们尚不知道这个含有 n+1 个音符的序列可能具有哪些结构，因此必须将它与一个含有 n 个音符、其可能结构已知的序列联系起来，再由此推回含有 n+1 个音符的序列。向前追溯一步，回到含有 n 个音符的序列很简单：只需移除处于中心位置的音符 n。由此得到的 n 音符序列关联着一个广义换位，它是从含有 n+1 个音符的序列所对应的广义换位中移除一个音符后得到的。这样，我们就有了一个 n 音符序列及与之关联的广义换位。根据归纳法，已知对该序列应用广义换位后再将其逆行所得到的循环结构。

为了弄清 n+1音符序列的结构，让我们再次添加音符 n 。如果

新音符不是 GT 的不动点，其推理与$gcd(n,\ t)\ =\ 1$的情况相似：我们需要将该音符添加到给定 n 音符序列中的 PP 的某个循环内，但现在还需考虑一个小限制。音符 n 只能被添加到 PP 的某个循环中，而该循环必须包含一个与 GT 中的 n 处于同一循环的音符。这与第4.4.3节的案例研究一致，因为 n 和 t 互素，所考虑的移调只有一个循环，其中包含所有音符。之所以存在这一限制，是因为由于 n 位于序列的中间位置，它在 PP 中所映射到的音符，正是它在 GT 中所到达的同一个音符。因此，从我们选定的 n+1音符序列通过该移调得到的所有序列，都将具有一个共同点： n 与 GT 中和它共享一个循环的某个音符处于同一循环中。

最后一种情况是， n 是广义换位的不动点。在这种情况下，我们的增殖过程也会有 n 作为不动点，其余部分都保持不变，如此处所示：

$$\begin{bmatrix} x & \dots & y \\ \downarrow & & \downarrow \\ GT(y) & \dots & GT(x) \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} x & \dots & n & \dots & y \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ GT(y) & \dots & n & \dots & GT(x) \end{bmatrix}$$

现在假设 n 是奇数，并研究对于一个含有 $n+1$ 个音符的任意序列，以及我们任意选定的一个广义换位，会发生什么。与第4.4.3节一样，我们将 n放在它的镜像旁边，这样消去 n时，就不必移动好几对音符，而是让 n 的镜像保持为没有配对的中心音符。我们得到一个含有 n 个音符的序列，其广义换位与之前相同，只有一个循环例外：它会少一个音符。

把 n 放回原位后，按照第4.4.3节中的类似推理，会有三种可能的结果：

(i) 中心循环分成两个，其中一个循环会加入 n作为额外音符。(ii) 中心循环与另一个循环合并；后者包含一个音符，该音符在广义换位中与 n 处于同一循环，而 n会加入合并后的循环。(iii) 如果 n 是广义换位中的不动点，那么中心循环只会增加一个音符：

$$\begin{bmatrix} x & \dots & a & \dots & y \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ GT(y) & \dots & GT(a) & \dots & GT(x) \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} x & \dots & a & n & \dots & y \\ \downarrow & & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ GT(y) & \dots & n & GT(a) & \dots & GT(x) \end{bmatrix}$$

正如我们所见，我们在上一节推导出的归纳过程中存在一些修改。现在，我们的条件1和条件2可以重新表述为类似的形式，但也取决于特定的广义换位。但进一步的限制使得很难为这些情形找到封闭的数学描述，因此我们只有一个归纳过程来构造它们，这使我们熟悉这类对象。这对于编写一个程序也很有用，该程序可计算每个 n和 t 的所有可能增殖过程，见附录A。

5. 使用逆行倒影对增殖序列进行分类

正如我们在整个第4节中所解释的，逆行以及倒影+移调会诱导出一些结构性质。这些结构性质在于存在逆元对或对称位置对，以及它们的例外情况（自逆元和中心位置）。由此，我们可以推导出一些不影响其所生成的PP结构的序列变换。这些变换包括互换:

(i) 两对不同的位置 (ii) 一对位置中的两个音符 (iii) 两对不同的逆元 (iv) 一对逆元中的两个音符

如果对长度为$n/gcd(n,t)$的循环不进行倒影，我们也可以自然地推广这些操作，采用相同的思路处理长度大于 2 的循环。这些就是构成分类的所有操作。事实上，其中一些操作可以通过结合其他操作来实现，但这与我们的分析无关；保留所有操作有助于更好地理解这些想法背后的直觉。本节旨在利用这些操作，根据序列生成的 PP 结构对序列进行分类。对于 I 和 P 的情况，这种分类意义不大，因为可能的结构仅由 n 和 t决定，而非具体的序列；不过，对于 RI 和 R，它会带来新的信息。

解释了那些使 PP 保持不变的操作后，下一步是将所有能够通过这些操作彼此变换的序列归为一组，我们称之为等价类。如果固定增殖过程的序列变换以及 n 和 t的值，那么不同的等价类就代表该变换下不同的 PP结构。也就是说，如果两个序列属于同一类，那么我们可以对其中任意一个反复应用这些操作，得到另一个序列，而且两者生成的 PP结构相同。我们还希望这种分类具有逆向性质：两个序列属于不同的类，意味着它们会生成不同结构的 PP。换言之，给定一个 PP结构，所有增殖后形成该 PP 的序列都属于同一个等价类。

不过，对于 R 的情形，其逆命题并不成立。在使用 R 的增殖序列语境中，存在 n 与 t 的取值示例，据此我们可以找到不同的序列，它们增殖为具有相同结构的 PP，但其 PP 存在本质差异，使它们在此分类中属于不同的等价类。其中一个示例见下图，使用 $n = 8$ 与 $t = 1$:

$$[0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 4,\ 7,\ 6],\ [0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 4,\ 6]$$

这两个序列增殖为具有单一长度为 8 的循环结构的排列，但无法通过对彼此应用我们的变换而相互得到。

然而，对于逆行倒影的情形，这一点是成立的，因此我们可以据此按 PP 的结构对这些类型的序列进行分类。这并不使整个想法对 R 失效，但该分类必须考虑对增殖意义不大的参数，因此我们只需认为，在 R 的情形中，每种 PP 结构对应若干个类。

综上所述，这一推理使我们能够为

每一种可生成的 PP 结构选取一个序列，以代表所有生成该结构的序列。这样，对于我们选定的每一种结构，都可以从一个代表序列出发，运用复合准则的操作对其进行变换，从而得到一个会增殖为具有相同结构的 PP 的新序列。我们将展示 $n = 12$ 和 $t = 0$ 这一特殊且最有趣情形的分类，其中列出各结构及其代表序列，并按它们所生成的增殖数量排序，也就是说，按 PP 的阶排序，略去阶为 1 或 2 的 PP。我们还将展示一个实例，说明如何从代表序列出发，运用这些操作对其进行变换，并观察 PP 的结构并未改变。图7给出了每个等价类中的一个基础序列，可用它来得到该类中的其他任意序列，正如我们在图8中所做的那样。

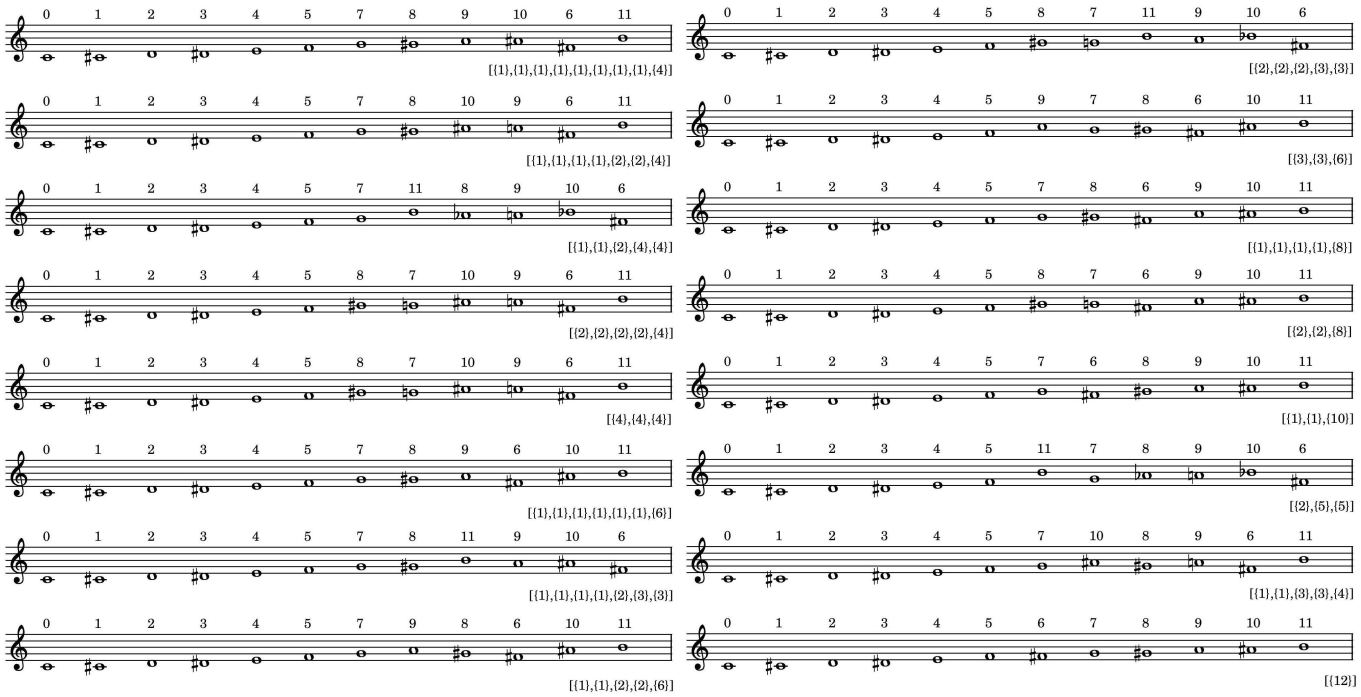


图7. 对 n=12 和 t=0应用逆行倒影时每种可获得循环结构的基础序列

在图8中，我们展示了图7分类的一个应用案例。我们从该分类的最后一个序列开始，该序列生成一个结构为 [{12}]的增殖过程，然后对其进行处理，以得到《粉色中的重音》中所使用的序列；这部作品由Isabel Tard´on创作，灵感来自瓦西里·康定斯基的同名画作。

6. 结论

对于由 n 个音符组成的任意序列的每一种变换和每一种移调，我们发现，当以原始序列及其变换作为生成元时，增殖过程的发生方式存在一种模式。

当第二个生成序列是素数或倒影时，这一过程完全不取决于所选的具体序列，而且与通过古典序列主义所能获得的内容相比，也不会生成任何新材料。在倒影的情况下，置换的阶始终为 2，与移调无关。

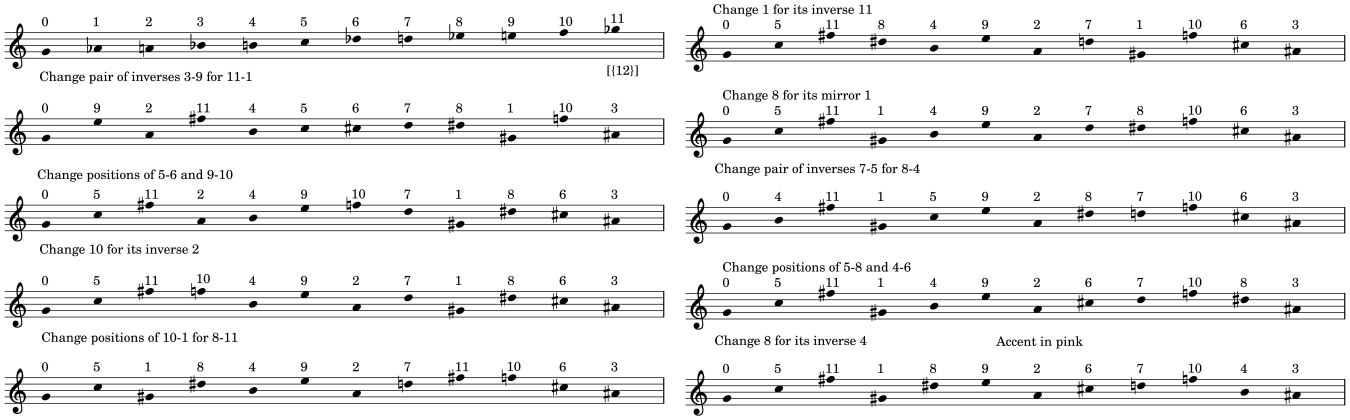


图8. 利用分类创建增殖序列

对于素数，从原始序列到第二个生成元的唯一变换是移调。在这种情况下，若 t 是移调的音程分数数量， n 是序列中的音符数量，那么得到的增殖数量始终为 $n/gcd(n, t)$，且它们均与原始序列互素。

对于倒影和逆行倒影，变化范围要大得多。这两种情况确实能产生传统序列主义无法获得的材料。

从作曲的角度看，以这种方式获得的序列种类繁多，因此可以以单个十二音序列为基础，构建大型音乐项目，而音乐不会变得单调乏味。每个通过增殖获得的序列都有一个包含其所有变换的12x12矩阵；由于构造方法的缘故，这些变换不会完全重合，从而使材料成倍增加。

在逆行倒影的情况下，音符数量的奇偶性和移调的奇偶性都对决定置换可能具有的结构起着关键作用：

(i) 当 n 为偶数且 t 为奇数时，所有PP都具有类似于 $n/2$个音符的置换的结构，但每个循环重复两次。(ii) 当 n 和 t 都为偶数时，所有PP都包含一个由偶数个音符 k 构成的循环，随后是任意一个由$(n-k)/2$ 个音符组成的置换中的每个循环所对应的两个循环。(iii) 当 n 为奇数时，其情况与 n 和 t 都为偶数时完全相同，只是此时 k 为奇数。如果 $t=0$，则还需满足一个额外限制，即 k 必须大于1。

仅对于逆行，我们有以下几种情况：

(i) 当所应用的移调为 $t=0$ 时，置换的阶为 2，不会产生新的素材。(ii) 当 n 是偶数且 $t=n/2$ 时，该过程的表现与具有相同音符数量 n 和奇数移调 t 的 RI 完全相同。(iii) 当使用 R 和移调 t，且满足 $gcd(n,\ t)=1$ 时，所有可获得的 PP 都是循环数量不超过 $(n/2)+1$ 的那些；若 n 对 4 取模的余数为 1 或 2，则含偶数个音符的循环数量为偶数；若 n 对 4 取模的余数为 3 或 0，则该数量为奇数。

(iv) 对于移调可以取任意值的一般情形，这些结构也大致遵循 (iii) 中的限制，但还存在更多限制，其复杂多变，难以归纳出通用规则。不过，我们可以提供一种归纳过程来构造它们。

在篇幅较短的作品中，运用一个序列及其增殖过程，可以创作出内部连贯性很强的音乐；但由于材料之间的关联方式比通常情况更为复杂，听众的预期会不断被打破，而由此实现的声音种类与多样性也令人耳目一新。

总的来说，增殖序列是我们所熟知的序列主义理念的自然演进。本文旨在为作曲家提供相关知识、工具和信心，助其深入这一作曲方法，探索其无穷可能。

致谢

若没有作曲家 Reyes Oteo 的支持，本手稿便无法完成。他最先向我们介绍了增殖序列这一概念，´同时感谢 Cristina Draper 和 Mar´ía de los Angeles G´ómez Molleda 的指导。我们还要感谢 Sebasti´án de la Torre Gil-Delgado 对代码提出的建议，以及审阅者 Osiris Garc´ía Parras、Irene Pastor Gonz´ález 和 Jos´é Luis P´érez Mart´ín；他们阅读手稿终稿后，慷慨地提供了反馈和建议。

参考文献

Bandur, M. (2001). 整体序列主义美学：从音乐到建筑的当代研究。施普林格科学与商业媒体。Dixon, J. D., & Mortimer, B. (1996). 置换群 （第163卷）。施普林格科学与商业媒体。Hopkins, B. (1978). Barraqu´e与序列观念。载于皇家音乐协会会议录 （第105卷，第13–24页）。Nicolas, F. (1987). Barraqu´e对发展的关注。*Entretemps*（5），7。Ozzard-Low, P. (1989). Barraqu´e、Broch、海德格尔：让·巴拉克音乐的哲学导论。德国研究丛刊，*16*（1），93–106。Riotte, A. (1987). Barraqu´e的增殖系列：形式化方法。*Entretemps*，巴黎。

附录A. Python代码

此代码也可在GitHub上通过以下链接获取，并附有更详细的说明：
https://github.com/PabloMartinSantamaria/Proliferating-Series

第一个代码块可自动构建增殖序列，并包含一个函数，用于收集文件夹中每一个可能的增殖序列的数据。

```
1 from数学 import 最大公约数2 from函数工具
im
de
```

```
6 from contextlib import ExitStack 7 from enum import 枚举类 8 class 变换 (枚举类):
9 P,
if "I
13 (
for
n ra
) 19
23 i
cur
retu
使用
殖置
prin
n) 4
0 =
os.p
_阶
ok
54 (
Exi
for
Wit
整歹
阶 ,
"J.v
构 "
```

示例 1：执行此单元格将显示我们对任意序列应用所选变换后得到的增殖。数的列表表示序列，最右侧的数表示移调。

```
增殖 ( Transformation .逆行倒影 ,[0,5,4,1,11,10,3,8,2,7,9,6],7)增殖 (
Tr
```

示例 2：在“desiredPath”中创建一个文件夹，其中包含直至所需音符数量的所有可能扩增排列的数据。将该程序运行至最多 12 个音符将持续数小时。

```
for n in range (1 ,9): for t in range(n): proliferations_data ( Transformation .
RI
de
pr
```

用于计算给定音符数量和变换时所有可能的扩增排列列表的代码：

```
from 数学 import 最大公约数 from 函数工具 import 归约 from 迭代工具 import
排列
retu
_ i
12 (
n
par
pos
t %
26 (
ext
in p
33 (
[(
retu
retu
cyc
```

```
44 seps  = [i for i in range (1, len(GT)) if GT[i]!= GT[i -1]]+[ len(GT)]45 L=list ( 排列 (
rang
1], 
n,GT
(len(
len1
com
brea
68 cy
True
stru
i for
len(S
81 n
wBl
S2 ,r
a[0]
new
ngth
defa
序后
排序
visit
```

108 break 109 if not 标志 : 110 dic[投影]. append (排序后的S) 111 无重复项 . append (排序
后的
115
义换
121
len(
126
129
cycl
137
[:]1
[0]
new
len(
SNe
rang
SNe
(L,n,
isins
广义

```
返回 规范列表 (L)
```

使用示例：第一个输入是音符数量，第二个输入（如适用）是移调。未包含适用于P和I情形的函数。

```
possiblePermutationsRI (12,5)
po
po
```