arXiv:2601.22314v1 [math.AC] 29 Jan 2026

整闭诺特整环的几何构型

Gyu Whan Chang* Giulio Peruginelli†

2026年2月2日

摘要

本文完整地描述了 $\mathbb{Z}[X]$ 与 $\mathbb{Q}[X]$之间的整闭诺特整环族。我们通过对这两个多项式环之间的克鲁尔整环进行分类，得到这一结果。为此，我们首先根据剩余域的扩张是代数的还是超越的，对位于某个素数 $p \in \mathbb{Z}$之上的 $\mathbb{Z}_{(p)}$ 的 $\mathbb{Q}(X)$进行描述。我们通过考察 $\mathbb{C}_p$中的超度量球，统一了这类赋值的已知描述； $\mathbb{C}_p$是域 $\mathbb{Q}_p$ 在p-进数域的代数闭包上的完备化。随后，我们研究这类离散赋值环与 $\mathbb{Q}[X]$ 的交 R 何时具有有限特征，从而使 R 成为克鲁尔整环；最后，我们计算 R的除子类群。结果表明，这样的环由那些能将 $\mathbb{C}_p$ 的有限个超度量球同时映射到其赋值整环 $\mathbb{O}_p$中的多项式构成，其中 $p \in \mathbb{Z}$ 遍历素数集合。根据 Heinzer 的一项结果，这一类克鲁尔整环恰好是 $\mathbb{Z}[X]$ 与 $\mathbb{Q}[X]$之间的整闭诺特整环。这种新颖的方法为这一类整闭整环提供了几何上的理解。此外，我们还描述了 $\mathbb{Z}[X]$与 $\mathbb{Q}[X]$之间的唯一分解整环。

关键词：诺特整环、整闭整环、离散赋值环、克鲁尔整环、唯一分解整环。数学主题分类主分类 13F05、13B22、13E05、13B25、13F20

目录

引言 **2**

1 预备知识
51.1 克鲁尔整环的代数性质.5 1.1.1 克鲁尔整环的理想分解性质.5

*仁川国立大学数学教育系，大韩民国仁川 22012。电子邮箱：whan@inu.ac.kr

†帕多瓦大学“图利奥·莱维-奇维塔”数学系，意大利帕多瓦的里雅斯特街 63 号，35121。电子邮箱：gperugin@math.unipd.it，ORCID：https://orcid.org/0000-0001-7694-8920

1.1.2 克鲁尔整环的除子类群.5 1.2 整值多项式环.6 1.3 剩余超越扩张.7 1.3.1 单项式赋值.7 1.3.2 剩余超越扩张的参数化.8

2 多项式序的挠扩张 10
2.1 V到 $K(X)$的挠扩张集合上的偏序.10 2.2 完备化上的剩余超越扩张.12

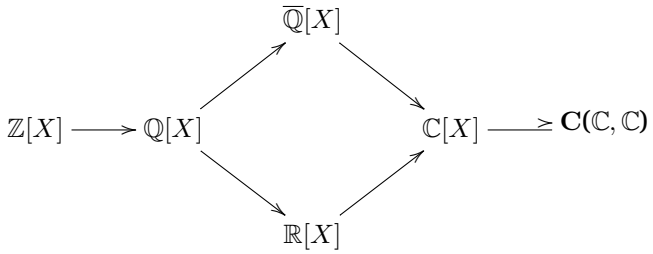
3 Comp 表 $\mathbb{Q}$（X）的离散赋值环 1 **4**
3.1 $\mathbb{Z}_{(p)}$ 到 $\mathbb{Q}(X)$的扩张.15 3.1.1 剩余代数扩张.15 3.1.2 剩余超越扩张.16 3.1.3 $\mathbb{Q}(X)$的单位离散赋值环.16 3.2 $\mathbb{C}_p$ 中单位赋值整环与超度量球的多项式序 17

4 多项式克鲁尔整环 **21**
4.1 多项式克鲁尔整环的表示.21 4.2 局部情形.22 4.2.1 不可约表示.23 4.2.2 非幺素理想.27 4.2.3 唯一分解整环.28 4.3 全局情形.30 4.3.1 多项式克鲁尔整环何时为戴德金整环.30 4.3.2 $\mathbb{Z}[X]$ 上单项式赋值的中心.32 4.3.3 有限特征.35 4.3.4 构造类群预先指定的克鲁尔整环.39 4.3.5 几乎戴德金整环及其推广.40

引言

设$\mathbf{X}$ 为一个拓扑空间， $\mathbb{C}$ 为复数域，且$\mathbf{C}(\mathbf{X}\ \mathbb{C})$为$\mathbf{X}$上的连续复值函数环。则$\mathbf{C}(\mathbf{X}\ \mathbb{C})$是含幺交换环。已知$\mathbf{C}(\mathbf{X}\ \mathbb{C})$是整环当且仅当$\mathbf{X}$ 不可约，即$\mathbf{X}$ 不能表示为真闭子集的有限并。还已知$\mathbf{C}(\mathbf{X}\ \mathbb{C})$是诺特的当且仅当$\mathbf{X}$ 是有限集，并且在此情形下，若$\mathbf{X}$ 是豪斯多夫的，则$\mathbf{C}(\mathbf{X}\ \mathbb{C}) \cong \mathbb{C}^{|\mathbf{X}|}$ 它是一个零维诺特环。诺特整环类在数学的所有领域中，尤其是在交换代数与代数几何中，具有极其重要的意义。

令$\overline{\mathbb{Q}}$ 为 $\mathbb{Q}$ 的代数闭包，且 X 为 $\mathbb{C}$上的不定元，则我们有 $\mathbf{C}(\mathbb{C},\ \mathbb{C})$ 的子环如下图所示:



尽管 $\mathbf{C}(\mathbb{C},\ \mathbb{C})$ 既不是整环，也不是诺特环，但 $\mathbf{C}(\mathbb{C},\ \mathbb{C})$ 包含诺特整环 $\mathbb{C}[X]$。因此，我们可以提出这样的问题：能否对 $\mathbf{C}(\mathbb{C},\ \mathbb{C})$ 的诺特子环进行分类。然而，这似乎是一项非常困难的任务，因此，作为朝着这一目标迈出的漫长旅程的第一步，本文将对所有包含 $\mathbb{Z}[X]$ 的 $\mathbb{Q}[X]$ 的整闭诺特子环进行分类。为此，我们描述这些多项式环之间的克鲁尔整环。现在，我们回顾这一类整环的定义。

如果一个整环是仅有一个非零素理想的主理想整环，则称其为离散赋值环（DVR）；等价地，它是一个非域的诺特赋值整环。设 D 是一个商域为 K 的整环，$X^1(D)$ 是 D的高度为一的素理想集合。若满足以下三个条件，则 D 是克鲁尔整环:

(a) $D = \bigcap_{P\in X^1(D)} D_P$,

(b) 对所有 $P \in X^1(D)$，D_P 都是离散赋值环，并且

(c) 对所有除有限多个 $P \in X^1(D)$ 以外的情形，D 的每个非零非单位元都是 D_P 的单位元。

克鲁尔整环包括戴德金整环、唯一分解整环（UFD）、诺特整环的整闭包，以及克鲁尔整环上的多项式环/幂级数环（例如参见 [13] 和 [14]）。特别地，如果 D 是一个域，那么 $X^1(D) = \emptyset$，因此它满足克鲁尔整环的三个条件。由此，域是克鲁尔整环。

设 $\mathbb{Z}$ 为整数环，$\mathbb{Q}$ 为有理数域，X 为 $\mathbb{Q}$ 上的一个不定元。沿用 [10], 的说法，我们称包含 $\mathbb{Z}[X]$ 的 $\mathbb{Q}[X]$ 的子环为 $\mathbb{Z}$ 的多项式扩环。在 [27], 中，Peruginelli 将 $\mathbb{Z}$ 的多项式扩环称为多项式戴德金整环，若其本身是戴德金整环。随后，他刻画了剩余域的特征为素数且为有限域、并具有特定皮卡群性质的多项式戴德金整环。后来，在 [28],中，Peruginelli 完全分类了多项式戴德金整环 R，去除了对剩余域基数的限制；特别是，他证明了 R 等于某个代数上的整数值多项式环。本文将 $\mathbb{Z}$ 的多项式扩环称为多项式克鲁尔整环，若它同时也是克鲁尔整环；我们将对多项式克鲁尔整环作出完整刻画，从而能够完整刻画包含 $\mathbb{Z}[X]$ 的 $\mathbb{Q}[X]$ 子环中的整闭诺特整环。

众所周知，D 是克鲁尔整环，当且仅当存在一个由商域为 K 的互异离散赋值环组成的族 F，使得：（i）$D = \bigcap V$；（ii）D 中的每个非零元素都是所有$V\in F$中的单位

但 F [23, 中的有限个环满足命题 3], , 在这种情况下, F 称为克鲁尔整环 D的定义族。

设 E 为整函数环。那么对于所有 $Q \in X^1(E)$, $E = \bigcap E_Q$, E_Q 都是离散赋值环 (E), 但其交$E = \bigcap E_Q$ 不具有有限特征, 也就是说, E 不满足克鲁尔整环的条件$_{Q\in X^1(E)}$ (c), 因此 E 不是克鲁尔整环。因此, 为了刻画多项式克鲁尔整环, 我们首先对 $\mathbb{Q}(X)$的离散赋值环进行分类, 随后必须证明这类离散赋值环组成的一个族何时具有有限特征性质（即上述性质(c)）。

设 W 是 $\mathbb{Q}(X)$的一个离散赋值环, 其极大理想为 M。那么, 要么 $W \cap \mathbb{Q} = (0)$, 要么对于某个素数 $p \in \mathbb{Z}$, $W \cap \mathbb{Q} = \mathbb{Z}_{(p)}$。众所周知, $W \cap \mathbb{Q} = (0)$当且仅当对于某个不可约 $f \in \mathbb{Q}[X]$, 有 $W = \mathbb{Q}[X]_{f\mathbb{Q}[X]}$, 或者$W = \mathbb{Q}[\frac{1}{X}]_{(\frac{1}{X})}$ (例如参见 [11])。本文主要关注情形 $W \cap \mathbb{Q} = \mathbb{Z}_{(p)}$。在 [28], , 本文的第二作者完整地分类了满足 W/M 是 $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$的代数扩张的离散赋值环(W, M)。本文将沿着Alexandru和Popescu的工作思路（[1]）, 回顾 W 是 $\mathbb{Z}_{(p)}$的剩余超越扩张（即W/M 是超越于 $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$的）的离散赋值环(W, M)的分类。本文共分五节, 包括引言。第1节和第1.2节首先回顾克鲁尔整环的理想分解性质、克鲁尔整环及整值多项式环的除子类群等概念, 这些内容有助于我们对这类多项式克鲁尔整环作出良好的表示。在第1.3节中, 我们回顾单项式赋值的概念; 这是将商域为 K 的赋值整环 V扩张到有理函数域$K(X)$的一种标准方法, 我们将用它来描述 V到$K(X)$的剩余超越扩张集合 $\mathcal{W}_{\mathrm{rt}}$。在第1.3.2节中, 我们说明如何利用相对于 V的一个固定扩张 U, 通过K 中的超度量球对 $\mathcal{W}_{\mathrm{rt}}$ 的元素进行参数化。众所周知, V 到 $K(X)$的剩余超越扩张 W 是 V的挠扩张, 也就是说, W的值群是 $\underline{V}$的值群的挠扩张。我们在第2节研究 V到$K(X)$的挠扩张 W_1和 W_2 之间的序关系, 即若 $W_1 \cap K[X] \subseteq W_2 \cap K[X]$, 则称 $W_1 \leq W_2$。若此情形成立, 则特别有 $W_1 \cap W_2 \cap K[X] = W_1 \cap K[X]$。在第2.2节中, 我们研究 V 的完备化 V 的剩余超越扩张$\widehat{\ }$, 并证明 $\mathcal{W}_{\mathrm{rt}}$ 与 V到 $K(X)$的剩余超越$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$扩张之间存在双射。

在第3节中, 我们利用第2节的结果, 通过代数闭包 $\mathbb{Q}_p$ 中的超度量球, 对 p 进域 $\mathbb{Q}_p$ 的代数扩张 $\underline{\mathbb{Z}_{(p)}}$ 到 $\mathbb{Q}(X)$ 中的剩余超越扩张进行参数化, 其中 $p \in \mathbb{Z}$ 是某个素数。随后, 我们借助 $\mathbb{C}_p$ 中可能具有无穷半径的超度量球, 统一描述 $\mathbb{Q}(X)$ 的离散赋值环: 它们要么在 $\mathbb{Z}_{(p)}$ 上剩余超越, 要么剩余代数。我们证明, 这些离散赋值环上存在一种偏序, 与这些超度量球之间的包含关系相对应, 但需对伽罗瓦群 $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_p/\mathbb{Q}_p)$ 的作用取模（定理 3.19）。最后, 在第4节中, 我们首先研究固定素数 $p \in \mathbb{Z}$ 下, 介于 $\mathbb{Z}_{(p)}[X]$ 与 $\mathbb{Q}[X]$ 之间的克鲁尔整环类（§4.2）; 作为特例, 我们刻画这两个多项式环之间的唯一分解整环（§4.2.3）。我们完整描述这类环的素谱, 并以几何方式刻画素理想何时为极大理想。随后, 我们在第4.3节中将这些结果推广到整体情形。具体而言, 我们考虑一个非空的整数素数集 Λ, 并对每个 $p \in \Lambda$, 取 $\mathbb{Q}(X)$ 的有限个离散赋值环 $W_{p,\,j}$, 其中 $X \in W_{p,\,j}$ 且 $W_{p,\,j} \cap \mathbb{Q} = \mathbb{Z}_{(p)}$, m_p 和 $R = \bigcap_{p\in\Lambda} \left(\bigcap_{j=1}^{m_p} (W_{p,\,j} \cap \mathbb{Q}[X]) \right)$。我们研究 $W_{p,\,j}$ 中哪些是多余的, 以及 R 何时具有有限

特征，从而使 R 成为克鲁尔整环（定理 4.34）。我们还计算克鲁尔整环 R 的除子类群 $\mathrm{Cl}(R)$，证明 $\mathrm{Cl}(R)$ 是可数族有限生成阿贝尔群的直和；反过来，我们证明，对于任意这样的群 G，都存在一个介于 $\mathbb{Z}[X]$ 与 $\mathbb{Q}[X]$ 之间的非戴德金克鲁尔整环，其除子类群同构于 G （§4.3.4）。此外，我们还刻画了介于 $\mathbb{Z}[X]$ 与 $\mathbb{Q}[X]$ 之间的唯一分解整环（推论4.37）。

1 预备知识

1.1 Krull整环的代数性质

设 D 是一个整环，其商域为 K，且 $F(D)$ 是 D 的非零分式理想I的集合；也就是说，I 是 K 的一个 D-子模，满足对某个 $0 \neq d \in D$ 有 $dI \subseteq D$。对于每个 I、$J \in F(D)$，令 $(I :_K J) = \{x \in K \mid xJ \subseteq I\}$，则 $(I :_K J) \in F(D)$。特别地，$I^{-1} = (D :_K I)$ 且 $I_v = (I^{-1})^{-1}$，因此 $(I^{-1})_v = (I_v)^{-1} = I^{-1}$。若一个 $I \in F(D)$ 满足 $II^{-1} = D$，则称其为可逆理想。众所周知，I 可逆当且仅当 I 是有限生成的，且对 D 的所有极大理想 M，ID_M 都是主理想；此外，若 I 可逆，则 $(II^{-1})_v = D$ 且 $I_v = I$。

1.1.1 克鲁尔整环的理想分解性质

戴德金整环 D 是一个整环，其中每个非零理想都可以写成素理想的有限积。于是 D 是戴德金整环当且仅当 D 是整闭的一维诺特整环，当且仅当 D 的每个非零理想都可逆。已知 D 是戴德金整环当且仅当 D 是（克鲁尔）维数至多为一的克鲁尔整环。此外，诺特整环的整闭包是克鲁尔整环 [23, 定理 2]，，因此二维诺特整环的上环是克鲁尔整环当且仅当它是整闭的诺特整环 [18, 定理 9]。因此，克鲁尔整环可视为戴德金整环的高维推广，故自然要问：克鲁尔整环能否像戴德金整环那样由理想分解性质来刻画。

对于 $I \in F(D)$，设 $I_t = \bigcup\{J_v \mid J \in F(D)\ J \subseteq I$且 J是有限生成的$\}$。那么 $I_t \in F(D)$，且映射 $t\colon F(D) \to F(D)$，由 $I \mapsto I_t$ 给出，是良定义的。对于所有 $I, J \in F(D)$ 和 $0 \neq a \in K$，t-运算还具有以下四个性质：(i) $D_t = D$，(ii) $(aI)_t = aI_t$，(iii) $I \subseteq I_t$，并且若 $I \subseteq J$，则 $I_t \subseteq J_t$；以及 (iv) $(I_t)_t = I$。若一个 $I \in F(D)$ 满足 $(II^{-1})_t = D$，则称其为 t-可逆。于是，我们利用 t-运算来刻画克鲁尔整环如下：D 是克鲁尔整环，当且仅当对于 D 的任意非零理想 I，存在某个 $P_1, \ldots, P_n \in X^1(D)$ 和正整数 $e_1, \ldots, e_n$，使得 $I_t = (P_1^{e_1} \cdots P_n^{e_n})_t$；当且仅当对于 D 的任意非零元素 a，存在某个$P_1, \ldots, P_n \in X^1(D)$ 和正整数 $e_1, \ldots, e_n$，使得 $aD = (P_1^{e_1} \cdots P_n^{e_n})_t$；当且仅当 D 的每个非零（素）理想都是 t-可逆的；当且仅当 D 的每个非零素理想都包含一个 t-可逆素理想。在此情形下，对于所有 $I \in F(D)$，$I_v = I_t$ （例如参见 [21]）。

1.1.2 克鲁尔整环的除子类群

设 $\mathcal{D}(D) = \{I_v \mid I \in F(D)\}$。那么，$\mathcal{C}(D)$ 在 $I * J = (IJ)_v$ 下构成交换半群，并且$\mathcal{D}(D)$ 是一个群，即对所有 $I \in \mathcal{D}(D)$，均有 $(II^{-1})_v = D$，当且仅当 D 是完全整闭的。接下来，令 $\mathrm{Inv}(D)$ 为 D 的可逆分式理想群，$\mathrm{Prin}(D) = \{xD \mid x \in K, x \neq 0\}$。那么，$\mathrm{Inv}(D)$ 是 $\mathcal{D}(D)$ 的子群，$\mathrm{Prin}(D)$ 是 $\mathrm{Inv}(D)$ 的子群，因此 $\mathrm{Prin}(D) \subseteq \mathrm{Inv}(D) \subseteq$

$\mathcal{D}(D)$。完全整闭整环 D 的除子类群定义为 $\mathrm{Cl}(D)=\mathcal{D}(D)/\mathrm{Prin}(D)$，即 $\mathcal{C}(D)$ 对 $\mathrm{Prin}(D)$ 取商所得的商群；整环 D 的理想类群或皮卡群定义为 $\mathrm{Inv}(D)/\mathrm{Prin}(D)$，即 $\mathrm{Inv}(D)$ 对 $\mathrm{Prin}(D)$ 取商所得的商群。因此，若 D 是完全整闭的，则 $\mathrm{Pic}(D)$ 是 $\mathrm{Cl}(D)$ 的子群。

已知，$x\in K$ 在 D 上几乎整，如果且仅如果存在 D的某个非零理想 I，使得 $xI\subseteq I$；因此，赋值整环 V 完全整闭，当且仅当 V 的（克鲁尔）维数至多为一；特别地，离散赋值环是完全整闭的。克鲁尔整环 D 定义为若干离散赋值环的交，因此 D 完全整闭，且其除子类群也有良好定义。

π-整环 D 是克鲁尔整环，且 $\mathrm{Pic}(D)=\mathrm{Cl}(D)$；等价地，$D$ 的每个非零主理想都可以写成素理想 [21, 的有限乘积 IV。 π-整环]。因此，戴德金整环 D 是 π-整环，且 $\mathrm{Pic}(D)=\mathrm{Cl}(D)$。唯一分解整环是克鲁尔整环，而克鲁尔整环 D 是唯一分解整环，当且仅当 $\mathrm{Cl}(D)=\{0\}$。若克鲁尔整环 D 的 $\mathrm{Cl}(D)$ 是挠群，则称其为近似阶乘整环；等价地，给定 $a,\ b\in D$，存在一个正整数 n（取决于 $a,\ b$），使得$a^nD\cap b^nD$ 是主理想。因此，克鲁尔整环 D 的除子类群衡量了D 偏离唯一分解整环的程度，并反映了克鲁尔整环的理想分解性质。

1.2 整数值多项式环

设 D 是一个商域为 K 的整环，X 是 D 上的不定元，$D[X]$ 是 D 上的多项式环，而 A 是一个无挠 D-代数。通过将 A 和 K 嵌入扩张的 K-代数 $B=A\otimes_D K$ 中，我们可以在元素 $a\in A$ 处对多项式 $f\in K[X]$ 求值，从而使得 $f(a)\in B$。若 $f(a)\in A$，则称 $f(X)$ 在 a 处取整数值。给定 A 的一个子集 S，我们将定义在 S 上的整数值多项式环记为

$$\mathrm{Int}_K(S,A)=\{f\in K[X]\mid f(s)\in A,\forall s\in S\}$$

显然，$D[X]\subseteq\mathrm{Int}_K(S,\ A)\subseteq K[X]$。若 $S=A$，则令 $\mathrm{Int}_K(A)=\mathrm{Int}_K(A,\ A)$；若 $A=D$，则省略下标 K，即 $\mathrm{Int}(S,\ D)=\mathrm{Int}_K(S,\ D)$ 且 $\mathrm{Int}(D)=\mathrm{Int}_K(D,\ D)$。

给定商域为 K的赋值整环 V，子集 S 在 K 中的多项式闭包定义为满足下列条件的最大子集 S：

$$\mathrm{Int}(S,V)=\mathrm{Int}(\overline{S},V).$$

若子集 S 属于 K，则称其为多项式闭，当且仅当 $S=S$。Chabert证明，当 V 的秩为一时，K 的多项式闭子集构成 K上的闭子集拓扑 [9] 。对于更高秩的赋值整环，这一结论不再成立 [30]。

众所周知，$\mathrm{Int}(\mathbb{Z})$是一个非诺特二维Pr¨ufer整环 [8, 备注 VI.1.8] 且$\mathrm{Pic}(\mathrm{Int}(\mathbb{Z}))$是以可数无限集为基的自由阿贝尔群 [16, 推论 7]。设 $\mathbb{P}$为 $\mathbb{Z}$的素数集合。对 $p\in\mathbb{P}$，设 $\mathbb{Z}_p$ 为 p-进整数环，$T_p=\{\alpha\in\mathbb{Z}_p\mid\alpha\text{ 在 }\mathbb{Q}\}$上是超越的，$\mathbb{Z}_{(p),\alpha}=\{\varphi\in\mathbb{Q}(X)\mid\varphi(\alpha)\in\mathbb{Z}_p\}$，且$M_{(p),\alpha}=\{\varphi\in\mathbb{Q}(X)\mid\varphi(\alpha)\in p\mathbb{Z}_p\}$对 $\alpha\in T_p$成立。则$\mathbb{Z}_{(p),\alpha}$ 是 $\mathbb{Q}(X)$的离散赋值环，其极大理想为$M_{(p),\alpha}$,

$$\mathrm{Int}(\mathbb{Z})=\bigcap_{p\in\mathbb{P}}\Big(\bigcap_{\alpha\in T_p}(\mathbb{Z}_{(p),\alpha}\cap\mathbb{Q}[X])\Big),$$

$\mathrm{ht}(M_{(p),\alpha} \cap \mathrm{Int}(\mathbb{Z})) = 1$，且$\mathbb{Z}_{(p),\alpha}/M_{(p),\alpha} = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$。值得注意的是，若 $R = \mathrm{Int}(\mathbb{Z})$，则 $R = \bigcap_{P \in X^1(R)} R_P$, R_P 对所有 $P \in X^1(R)$都是离散赋值环，但 R 不是克鲁尔整环。

1.3 剩余超越扩张

设 V 是一个赋值整环，其商域为 K； X 是 K 上的一个不定元，而 $K(X)$ 是有理函数域，即 $K[X]$ 的商域。我们用 v 表示 K 上的一个赋值，其对应的赋值整环为 V；用 Γ_v 表示 v 的值群。我们还用 Γ_v 表示 Γ_v 的可除包，即 $\Gamma_v = \Gamma_v \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$。

本节回顾关于 V 到 $K(X)$ 的剩余超越扩张的一些已知事实，也就是 $K(X)$ 的域 W 中位于 V 之上的赋值整环（即 $W \cap K = V$），且其剩余域扩张是超越的。我们用 $\mathcal{W}_{\mathrm{rt}}$ 表示 V 到 $K(X)$ 的剩余超越扩张集合。相反，如果 W 是 V 到 $K(X)$ 的一个扩张，且剩余域扩张是代数的，我们就称其为剩余代数扩张。

1.3.1 单项式赋值

本小节回顾单项式赋值的概念。单项式赋值是一类特殊的从 V 到 $K(X)$ 的扩张，用于描述剩余超越扩张这一类扩张。

定义 1.1. 设 $\alpha \in K$ 和 δ 是值群 Γ 中的元素，且该值群包含 Γ_v。对于满足 $f(X) = a_0 + a_1(X-\alpha) + \ldots + a_n(X-\alpha)^n$ 的 $f \in K[X]$，定义：

$$v_{\alpha,\delta}(f) = \inf\{v(a_i) + i\delta \mid i = 0, \ldots, n\}$$

函数 $v_{\alpha,\delta}$ 自然地扩张为 $K(X)$ 上的赋值（[7, 第 VI 章，第 10 节，引理 1]），称为单项式赋值。我们用 $V_{\alpha,\delta}$ 表示与 $v_{\alpha,\delta}$ 相关联的 $K(X)$ 的赋值整环。显然，$V_{\alpha,\delta}$ 位于 V 之上。注意，$V_{0,0} = V(X)$，即 $\alpha = 0$ 和 $\delta = 0$ 的情形对应于平凡高斯扩张。还要注意，$V_{\alpha,\delta} \cap K[X] = V[\frac{X-\alpha}{c}]$，其中 $c \in K$ 的赋值为 δ（例如参见 [26,备注 3.4]）。

令 $\overline{K}$ 为 K 的代数闭包，u 为 v 到 K 的扩张，且 U 为 $\overline{u}$ 的赋值整环。给定 $(\alpha, \delta) \in K \times \Gamma_v$，我们用 $\overline{v_{\alpha,\delta}}$ 表示 $u_{\alpha,\delta}$ 在 $K(X)$ 上的限制；注意该赋值取决于所选的 v 到 K 的扩张 u，见 [26, 备注 3.9]。如果 $V_{\alpha,\delta}$（分别为 $U_{\alpha,\delta}$）是与 $v_{\alpha,\delta}$（分别为 $u_{\alpha,\delta}$）相关联的赋值整环，那么显然有 $V_{\alpha,\delta} = U_{\alpha,\delta} \cap K(X)$。我们也称 $(\alpha, \delta) \in K \times \Gamma_v$ 是 $V_{\alpha,\delta}$ 的定义的极小对（相对于 K），如果对于每个满足 $u(\beta - \alpha) \geq \delta$ 的 $\beta \in K$，都有 $[K(\beta) : K] \geq [K(\alpha) : K]$。等价地，在定义赋值 $u_{\alpha,\delta}$ 的所有数对中，次数 $[K(\alpha) : K]$ 最小（见 [1, 命题3] 和 [2]）。我们强调，当 $\alpha \in K$ 时，$f \in K[X]$ 的 $(X-\alpha)$-进展开的系数 $a_0, \ldots, a_n$ 属于 K，未必属于 K。

注1.2。假设对于每个 $a \in K$，都有 $\delta > v(a)$。我们将这样的 δ 记作 ∞。给定 $\alpha \in K$，对于每个满足 $f(X) = a_0 + a_1(X-\alpha) + \ldots + a_n(X-\alpha)$ 的 $f \in K[X]$，其中 a_0，……，$a_n \in K$，我们有

$$v_{\alpha,\infty}(f) = u(a_0) = u(f(\alpha))$$

因此在这种情况下 $V_{\alpha,\infty} = V_\alpha = \{\phi \in K(X) \mid \phi(\alpha) \in U\}$。

注 1.3。 (1) 设 U 是 V 到 K 的一个固定扩张。给定 $\overline{\alpha} \in K$ 以及全序群中包含 Γ_v 的一个元素 δ，众所周知，$V_{\alpha,\ \delta}$ 是 V 的剩余超越扩张，当且仅当 δ 属于 Γ_v（例如参见 [2] 或 [26, 引理 3.5]）。在此情况下，根据 [2, 定理 2.1], ，$V_{\alpha,\ \delta}$ 的值群相对于 V 的值群 Γ_v 具有有限指数。特别地，如果 V 是离散赋值环，那么 V 到 $K(X)$ 的剩余超越扩张也是离散赋值环。

(2) 设 V 是一个离散赋值环，U 是 V 到 K 的一个固定扩张。给定一个（极小）数对 $(\alpha,\ \delta) \in K \times \overline{\Gamma_v}$，交 $V_{\alpha,\ \delta} \cap K[X]$ 显然是一个克鲁尔整环，但不是 Prüfer 环，因为赋值上环 $V_{\alpha,\ \delta}$ 在 V 上剩余超越，见 [26, 定理 3.15]。

众所周知，如果我们将范围限制在克鲁尔整环族 $\{V_{\alpha,\delta} \cap K[X] \mid (\alpha,\ \delta) \in K \times \Gamma_v\}$ 内，该族具有一个自然序，即:

$$V_{\alpha_1,\delta_1} \cap K[X] \subseteq V_{\alpha_2,\delta_2} \cap K[X] \Leftrightarrow \delta_1 \leq \delta_2 \text{ and } v(\alpha_1 - \alpha_2) \geq \delta_1 \tag{1.4}$$

（见 [4, 命题 1.1]; 另见 [26,备注 3.10]），因此

$$V_{\alpha_1,\delta_1} \cap K[X] = V_{\alpha_2,\delta_2} \cap K[X] \Leftrightarrow \delta_1 = \delta_2 \text{ and } v(\alpha_1 - \alpha_2) \geq \delta_1 \tag{1.5}$$

我们将在引理 2.1 中看到，前述条件确实等价于 $V_{\alpha_1,\ \delta_1} = V_{\alpha_2,\ \delta_2}$。

若 $(\alpha,\ \delta) \in K \times \Gamma_v$，并考虑球 $B(\alpha,\ \delta) = \{x \in K \mid v(x - \alpha) \geq \delta\}$，则条件 (1.4) 成立当且仅当 $B(\alpha_2,\ \delta_2) \subseteq B(\alpha_1,\ \delta_1)$。在 $V = \mathbb{Z}_{(p)}$ 的情形下，对某个素数 p，我们在第 3.2 节将这一序推广到数对 $(\alpha,\ \delta) \in \mathbb{C}_p \times \mathbb{Q}$ 的情形。

Alexandru、Popescu 和 Zaharescu 的主要结果是以下关于 V 到 $K(X)$ 的剩余超越扩张的刻画（见 [1, 2, 4]）。

定理 1.6。 设 V 是商域为 K 的赋值整环，且 U 是 V 到 K 的一个固定扩张。设 W 是 V 到 $K(X)$ 的剩余超越扩张。那么存在一个极小对 $(\alpha, \delta) \in K \times \Gamma_v$，使得 W 是单项式赋值 $U_{\alpha,\delta}$ 在域 $K(X)$ 上向 $K(X)$ 的限制。

注意，定理 1.6 中 $U_{\alpha,\delta}$ 在 $K(X)$ 上的赋值整环是 U 到 $K(X)$ 的剩余超越扩张。下面的引理是 [26, 引理 3.13] 向任意秩赋值整环的推广。

引理 1.7。 设 U 是 V 到 K 的一个扩张，且 $(\alpha, \delta) \in K \times \Gamma_v$。那么

$$V[X] \subset U_{\alpha,\delta} \cap K(X) \Leftrightarrow u(\alpha) \geq 0 \ \ and\ \delta \geq 0.$$

证明。 注意到该包含关系等价于 $u_{\alpha,\ \delta}(X) \geq 0$（特别地，等价于 $U[X] \subset U_{\alpha,\ \delta}$）。我们有 $u_{\alpha,\ \delta}(X) = \min\{\delta, u(\alpha)\}$，因此该断言成立。 □

1.3.2 剩余超越扩张的参数化

在本小节中，我们说明如何借助包含于 K 中的超度量球来对 $\mathcal{W}_{\mathrm{rt}}$ 进行参数化，其中相对于某个固定的扩张 U，该扩张是 V 到 K 的扩张。

令 G_K 为绝对伽罗瓦群 $\mathrm{Gal}(K/K)$。注意，G_K 也等于 $K(X)/K(X)$ 的伽罗瓦群。给定 U 从 V 到 K 的一个扩张，我们将 $\mathcal{D}(U)$ 记为 U 的分解群，即: $\mathcal{D}(U) = \{\sigma \in G_K \mid \sigma(U) = U\}$。

引理 1.8. 令 U 为 V 到 K 的一个固定扩张。令 $(\alpha,\overline{\delta}) \in K\times\Gamma_v$，其中 $\delta = u(c)$ 对某个 $c\in K$ 成立，并且 $\overline{\sigma}\in G_K$。于是有

$$\sigma(U_{\alpha,\delta}) = \sigma(U)_{\sigma(\alpha),\delta}.$$

特别地，若 $\sigma\in\mathcal{D}(U)$，则 $\sigma(U_{\alpha,\delta}) = U_{\sigma(\alpha),\delta}$。

证明。由于 $\frac{X-\alpha}{c}$ 是 U_α 中的单位，δ 且 U_α，δ 在 U 的剩余域 k_U 上是剩余超越的，由此可得 $\sigma\left(\frac{X-\alpha}{c}\right) = \frac{X-\sigma}{\sigma}(\alpha)$ (~~c~~) ~~是~~ $\sigma(U_{\alpha,\delta})$ ~~中~~的单位，且 $\sigma(U_{\alpha,\delta})$ 在 $k_{\sigma(U)}$ 上是剩余超越的（注意 $\sigma(U_{\alpha,\delta})$ 是 $\sigma(U)$ 到 $K(X)$ 的扩张）。回顾与 $\sigma(U) = U'$ 相关联的赋值等于 $u'=u\circ\sigma^{-1}$（[12, 命题 3.2.16, (1)]），故 $u'(\sigma(c)) = \delta$。于是该断言由 [7, 第 VI 章，§10，命题 2] 得出。

如果 $\sigma\in\mathcal{D}(U)$，则最后的断言立即成立。 □

接下来我们给出一个判据，用以判断 U 到 $K(X)$ 的两个剩余超越扩张何时收缩到 $\overline{K}(X)$ 的同一个赋值整环（它是 V 到 $K(X)$ 的一个剩余超越扩张）。这在 [24]中已以类似方式完成。特别地，给定 V到 $K(X)$ 的一个剩余超越扩张 $V_{\alpha,\delta}$，其中 $(\alpha,\delta)\in \overline{K}\times\Gamma_v$，我们描述位于 U 之上的、$V_{\alpha,\delta}$ 到 $K(X)$ 的扩张集合（亦见 [3, 定理 2.2]）。

定理 1.9. 设 U 是 V到 K 的一个固定扩张，并设 $(\alpha,\overline{\delta}), (\alpha',\delta')\in K\times\Gamma_v$。则下列条件等价。

(1) $U_{\alpha,\delta}\cap K(X) = U_{\alpha',\delta'}\cap K(X)$.

(2) $\sigma(U_{\alpha,\ \delta}) = U_{\alpha',\ \delta'}$ 对某个 $\sigma\in\mathcal{D}(U)$。

(3) $\delta=\delta'$ *and* $u(\sigma(\alpha)-\alpha')\geq\delta$, *for some* $\sigma\in\mathcal{D}(U)$.

特别地，位于 U 之上的，从剩余超越扩张 $W = U_{\alpha,\ \delta}\cap K(X)$ 到$K(X)$ 的扩张集合等于 $\overline{\{U_{\sigma(\alpha),\delta}\mid\sigma\in\mathcal{D}(U)\}}$。

证明。(1) $\Rightarrow$ (2) 根据 [12, 共轭定理 3.2，15], 存在 $\sigma\in G_K$ 使得 $\sigma(U_{\alpha,\ \delta}) = U_{\alpha',\ \delta'}$。我们断言 $\sigma\in\mathcal{D}(U)$。事实上，令 $x\in U\subset U_{\alpha,\ \delta}$。那么 $\sigma(x)\in\sigma(U_{\alpha,\ \delta})\cap K = U_{\alpha',\ \delta'}\cap K = U$。因此，(2)成立。

(2) $\Rightarrow$ (3) 根据引理 1.8，$U_{\sigma(\alpha),\ \delta} = \sigma(U_{\alpha,\ \delta}) = U_{\alpha',\ \delta'}$。根据 [4, 命题 1.1]，$\delta'=\delta$ 并且$u(\sigma(\alpha)-\alpha')\geq\delta$，这就是条件（3）。

(3) $\Rightarrow$ (1) 不等式 $u(\sigma(\alpha)-\alpha')\geq\delta$ 等价于 $\alpha'\in B_u(\sigma(\alpha)\ \delta) = \{x\in K\mid u(\sigma(\alpha)-x)\geq\delta\}$，因此 (α',δ) 是 $U_{\sigma(\alpha),\delta}$ 的另一组定义对，由 [1, 命题 3] 可得 $U_{\alpha',\delta} = U_{\sigma(\alpha),\delta}$。由引理 1.8，我们还有 $U_{\sigma(\alpha),\delta} = \sigma(U_{\alpha,\delta})$，因此 $U_{\alpha,\delta}$ 和 $U_{\alpha',\delta}$ 向下收缩到 $K(X)$ 后，得到相同的赋值整环。因此，(1) 成立。

最后一个断言可由前一部分和引理 1.8 立即推出。 □

对于下一个定理，我们固定以下记号：给定 V 到 K 的一个扩张 U，令 $\mathcal{B}_u$ 为相对于 $\overline{U}$ 的 K 中的超度量球集合 $B_u(\alpha,\ \delta) = \{x\in K\mid u(x-\alpha)\geq\delta\}$，其中 $(\alpha,\ \delta)\in\overline{K}\times\Gamma_v$。值得注意的是，定理 1.9 的条件(3）等价于以下条件：对于某个 $\sigma\in\mathcal{D}(U)$，$\sigma(B_u(\alpha,\ \delta)) = B_u(\sigma(\alpha)\ \delta) = B_u(\alpha',\ \delta)$。

根据引理 1.8， $\mathcal{D}(U)$ 作用于 $\mathcal{B}_u$，因为对于 $\sigma \in \mathcal{D}(U)$，我们有 $\sigma(B_u(\alpha,\ \delta)) = B_u(\sigma(\alpha)\ \delta)$。特别地， $\mathcal{D}(U)$ 不会改变超度量球的半径。我们用 $\mathcal{B}_u/\mathcal{D}(U)$ 表示 $\mathcal{B}_u$ 在分解群 $\mathcal{D}(U)$ 作用下的等价类集合。根据引理 1.8， $\mathcal{B}_u/\mathcal{D}(U)$ 中的一个元素等于 $[B_u(\alpha,\ \delta)] = \{B_u(\sigma(\alpha)\ \delta) \mid \sigma \in \mathcal{D}(U)\}$；特别要注意，这样的一个等价类由有限多个闭球构成（即，至多与 α 在 K 上的共轭元个数相同）。

定理 1.10. 设 U 是 V 到 K的一个固定扩张。那么，由 $[B_u(\alpha,\delta)] \mapsto U_{\alpha,\delta} \cap K(X)$ 给出的映射 $\Theta : \mathcal{B}_u/\mathcal{D}(U) \to \mathcal{W}_{rt}$ 是双射。

证明. 为证明映射 Θ 是良定义的，我们首先注意到，给定 $(\alpha,\delta) \in K \times \Gamma_v$，由注 1.3 可知 $U_{\alpha,\delta} \cap K(X)^{-} \in \mathcal{W}_{\mathrm{rt}}$。此外，若对于某个 $\sigma \in \mathcal{D}(U)$，有 $\sigma(B_u(\alpha,\delta)) = B_u(\sigma(\alpha)\ \delta) \in [B_u(\alpha,\delta)]$，则由定理 1.9 可知 $U_{\alpha,\delta} \cap K(X) = U_{\sigma(\alpha),\delta} \cap K(X)$。

Θ 的满射性由定理 1.6 得出。最后，单射性同样由定理 1.9 得出。事实上，假设 $\Theta([B_u(\alpha,\delta)]) = \Theta([B_u(\alpha',\delta')])$，也就是说，$U_{\alpha,\delta} \cap K(X) = U_{\alpha',\delta'} \cap K(X)$。那么，由定理 1.9 可知， $\delta = \delta'$ 且 $u(\sigma(\alpha) - \alpha') \geq \delta$，因此 $B_u(\alpha',\delta') = B_u(\sigma(\alpha)\ \delta)$。于是，$[B_u(\alpha,\delta)] = [B_u(\alpha',\delta')]$。 □

2 挠扩张的多项式序

我们称从 V 到 $K(X)$ 的扩张 W 是挠的，如果 $\Gamma_w \subseteq \Gamma_v$；我们用 $\mathcal{W}_{\mathrm{t}}$ 表示从 V 到 $K(X)$ 的所有挠扩张的集合。注意，根据注 1.3，从 V 到 $K(X)$ 的剩余超越扩张是挠的，因此 $\mathcal{W}_{\mathrm{rt}} \subseteq \mathcal{W}_{\mathrm{t}}$。我们强调，并非从 V 到 $K(X)$ 的所有剩余代数扩张都是挠的。例如， $\{\phi \in K(X) \mid \phi(0) \in V\}$ 是 V 的一个剩余代数扩张（其剩余域与 V 的剩余域相同），但它不是挠的（其一维赋值上环是 $K[X]_{(X)}$；参见命题 4.17 以及注 3.3）。

2.1 V 到 K 的挠扩张集合上的偏序(X)

设 W_1, W_2 属于 $\mathcal{W}_{\mathrm{t}}$。在 [4, 第 282], 页，下面的定义仅针对剩余超越扩张（它们是挠扩张）给出:

$$w_1 \leq w_2 \Leftrightarrow w_1(f) \leq w_2(f), \forall f \in K[X]$$

其中最后一个不等式是在 Γ_v中考虑的。更一般地，我们对挠扩张给出相同的定义。注意到，任意 $f \in K[X]$ 都可写为 $^{g}{}_{(X)\ c}$ ，其中 $g \in V[X]$ 和$c \in V$, $c \neq 0$满足条件，且赋值 w_1, w_2 在 K上相同，因此前述条件等价于：对每个 $g \in V[X]$，均有$w_1(g) \leq w_2(g)$。显然，我们有

$$w_1 = w_2 \Leftrightarrow w_1(f) = w_2(f),\ \forall f \in K[X] \Leftrightarrow W_1 = W_2.$$

特别地，当且仅当 $w_1 \leq w_2$ 且 $w_1 \neq w_2$时，我们也称 $w_1 < w_2$ 。

引理 2.1. 设 $W_i \in \mathcal{W}_t$ 和 M_i 是 W_i 关于 $i = 1$的极大理想，2。

(1) 下列陈述等价。

(a) $w_1 \leq w_2$。(b)
$W_1 \cap K[X] \subseteq W_2 \cap K[X]$.
(c) $M_1 \cap K[X] \subseteq M_2 \cap K[X]$。

(2) $W_1 = W_2$ 当且仅当 $W_1 \cap K[X] = W_2 \cap K[X]$，当且仅当 $M_1 \cap K[X] = M_2 \cap K[X]$。

(3) $(\mathcal{W}_t, \leq)$ 是一个偏序集。

证明。(1) (a) $\Rightarrow$ (c)。设 $f \in M_1 \cap K[X]$ 非零。那么 $0 < w_1(f) \leq w_2(f)$，因此 $f \in M_2 \cap K[X]$。于是 $M_1 \cap K[X] \subseteq M_2 \cap K[X]$.

(c) $\Rightarrow$ (b)。设 $g \in W_1 \cap K[X]$ 非零。若 $g \in M_1$，则 $g \in M_2 \cap K[X] \subseteq W_2 \cap K[X]$。接下来假设 $g \notin M_1$ 且 $g \notin W_2 \cap K[X]$。由于 W_2 是 V的一个挠扩张，存在 $n \in \mathbb{N}$ 和 $b \in V$，使得 $w_2(g^n) = nw_2(g) = -v(b) < 0$ 或 $w_2(g^n b) = 0$。注意，$w_1(g^n b) = nw_1(g) + w_1(b) = v(b) > 0$，所以根据假设，$g^n b \in M_1 \cap K[X] \subseteq M_2 \cap K[X]$。因此$w_2(g^n b) > 0$，这与假设矛盾，说明 $g \in W_2 \cap K[X]$。于是 $W_1 \cap K[X] \subseteq W_2 \cap K[X]$.

(b) $\Rightarrow$ (a)。假设 $f \in K[X]$ 非零。那么要么 $f \in W_1$，要么 $\frac{1}{f} \in W_1$；又由于 W_1 是 V上的挠元，因此存在一个正整数 $n \in \mathbb{N}$ 和 $0 \neq c \in K$，使得 $nw_1(f) = v(c)$。于是，$w_1(\frac{f^n}{c}) = 0$。特别地，$\frac{f^n}{c} \in W_1 \cap K[X] \subseteq W_2 \cap K[X]$，因此我们还有

$$0 \leq w_2\left(\frac{f^n}{c}\right) \Leftrightarrow w_2(f) \geq \frac{v(c)}{n} = w_1(f),$$

因此该不等式成立。

(2) 显然，$W_1 = W_2$ 蕴含 $W_1 \cap K[X] = W_2 \cap K[X]$ 和 $M_1 \cap K[X] = M_2 \cap K[X]$。反过来，若 $W_1 \cap K[X] = W_2 \cap K[X]$ 或 $M_1 \cap K[X] = M_2 \cap K[X]$，则由 (1)，对每个 $f \in K[X]$，都有 $w_1(f) = w_2(f)$，这意味着 $w_1 = w_2$ 在 $K(X)$ 上成立。因此，$W_1 = W_2$。

(3) 这直接由上面的 (1) 和 (2) 得出。 □

采用引理 2.1 中的记号。那么 $w_1 < w_2$ 当且仅当 $W_1 \cap K[X] \subset W_2 \cap K[X]$，当且仅当 $M_1 \cap K[X] \subset M_2 \cap K[X]$。下面的推论给出了这一严格不等式的另一种刻画。

推论 2.2. 设 $W_i \in \mathcal{W}_t$ 和 M_i 是 $i = 1$的 W_i 的极大理想，2。那么下列陈述成立。

(1) $w_1 < w_2$ 当且仅当 $M_1 \cap K[X] \subset M_2 \cap (W_1 \cap K[X])$，在此情形下，$M_1 \cap K[X]$ 是 $W_1 \cap K[X]$的素非极大理想。(2) $W \in \mathcal{W}_t$ 是$(\mathcal{W}_t, \leq)$ 的极大元，当且仅当 W 是剩余代数的。

证明。(1) 假设 $w_1 < w_2$。则由引理 2.1，存在 $f \in (W_2 \cap K[X]) \setminus (W_1 \cap K[X])$，故 $w_1(f) < 0 \leq w_2(f)$。由于 W_1是 V 的挠扩张，存在 $n \in \mathbb{N}$和 $0 \neq a \in K$使得 $w_1(f^n) = v(a)$。于是我们有

$$0 = w_1\left(\frac{f^n}{a}\right) < w_2\left(\frac{f^n}{a}\right),$$

故 $\frac{f^n}{a} \in M_2 \cap (W_1 \cap K[X])$ 但 $\frac{f^n}{a} \notin M_1 \cap K[X]$。反之，设 $M_1 \cap K[X] \subset M_2 \cap (W_1 \cap K[X])$。则 $M_2 \cap (W_1 \cap K[X]) \subseteq M_2 \cap K[X]$ 蕴含 $M_1 \cap K[X] \subset M_2 \cap K[X]$。因此由引理 2.1 得 $w_1 < w_2$。

(2) ($\Rightarrow$) 假设 W 是剩余超越的。根据定理 1.6，存在 $(\alpha, \delta) \in K \times \Gamma_v$，使得 $W = U_{\alpha,\delta} \cap K(X)$（其中 U 是 V 到 K 的一个固定扩张）。若 $\delta' \in \Gamma_v$ 严格大于 δ，则有 $W \cap \overline{K}[X] \subsetneq W' \cap K[X]$，其中 $W' = U_{\alpha,\delta'} \cap K(X)$。事实上，$U_{\alpha,\delta} \cap K[X] \subsetneq U_{\alpha,\delta'} \cap K[X]$，因为 $\frac{X-\alpha}{c'}$ 属于后一个环而不属于前一个环（其中 $c' \in K$ 的值为 δ'），并且根据定理 1.9，$U_{\alpha,\delta} \cap K[X] \subsetneq U_{\alpha,\delta'} \cap K[X]$。

($\Leftarrow$) 假设 $W \in \mathcal{W}_{\mathrm{t}}$ 是剩余代数的。我们有以下包含关系，其中 M 是 W 的极大理想：

$$\frac{V}{M \cap K} \subseteq \frac{W \cap K[X]}{M \cap K[X]} \subseteq \frac{W}{M}.$$

由此可知，$(W \cap K[X])/(M \cap K[X])$ 是一个域，因此 $M \cap K[X]$ 是 $W \cap K[X]$ 的一个极大理想。根据推论的第一部分，W 是 $(\mathcal{W}_{\mathrm{t}}, \trianglelefteq)$ 的一个极大元。 □

值得注意的是，若 K 是代数闭且极大完备的（即它不允许任何真即刻扩张），则很容易看出，V 到 $K(X)$ 不存在剩余代数挠扩张。因此，在这种情况下，根据推论 2.2，$\mathcal{W}_{\mathrm{t}}$ 没有极大元。

2.2 完备化上的剩余超越扩张

令 V（分别为 K）表示 V（分别为 K）的 v-进完备化，令 $\mathcal{W}_{\mathrm{t}}$ 表示 V 到 $K(X)$ 的所有挠扩张构成的集合，令 $\mathcal{W}_{\mathrm{rt}}$ 表示 V 到 $K(X)$ 的所有剩余超越扩张构成的集合。在本小节中，我们证明，从 $\mathcal{W}_{\mathrm{t}}$（分别为 $\mathcal{W}_{\mathrm{rt}}$）到 $\mathcal{W}_{\mathrm{t}}$（分别为 $\mathcal{W}_{\mathrm{rt}}$）的映射 $W \mapsto W \cap K(X)$ 是双射。

引理 2.3。设 W 是 V 到 $K(X)$ 的一个扩张，使得 $\tilde{w}(X) > v(a)$，其中 $a \in K$。若 $\sim W = W \cap K(X)$，则有

$$\frac{\widetilde{W} \cap \widehat{K}[X]}{\widetilde{M} \cap \widehat{K}[X]} = \frac{W \cap K[X]}{M \cap K[X]},$$

其中 M、M 分别是 W、W 的极大理想。

证明。显然，包含关系 ($\supseteq$) 成立。对于另一个包含关系，我们需要证明：对每个 $f \in W \cap K[X]$，都存在 $g \in W \cap K[X]$，使得 $\tilde{w}(f-g) > 0$。假设 $d = d_f(X) = \sum_{i=0} \alpha_i X^i$。我们选取 $g \in K[X]$、$g(X) = \sum_{i \geq 0} a_i X^i$，使得对每个 $i = 0, \ldots\ldots, d$，都有 $v(\alpha_i - a_i) + iv(a) > 0$。特别地，

$$\tilde{w}(f-g) \geq \min\{v(\alpha_i - a_i) + i\tilde{w}(X)\} > \min\{v(\alpha_i - a_i) + iv(a)\} > 0 \tag{2.4}$$

因此 $f - g \in M$。注意到 $g \in W$，由此得证。 □

令 $V_\infty = \{\psi \in K(X) \mid \psi(\infty) \in V\}$，其中 $\psi(\infty)$ 定义为 $\varphi(0)$，且 $\varphi(X) = \psi(1/X)$（参见 $\sim$[25]）。那么，引理 2.3 中关于 W 的假设等价于 $W \neq V_\infty$。注意，每个 $W \in \mathcal{W}_{\mathrm{t}}$ 都满足引理 2.3 的假设。

引理 2.5. 设 R $V[X/a] \subseteq R \subseteq K[X]$ $a \in K$ 是一个整环，对于某个非零的，并令 $\widetilde{R} = R \cap K[X]$。设 W 是 $K(X)$ 的一个赋值整环，它扩张了 V，并令 $\widetilde{W} = W \cap K(X)$。那么， $R \subset W$ 当且仅当 $R \subset W$。

证明。蕴含关系（$\Leftarrow$）显然。反过来，设 $R \subset W$ 且令 $f \in R$。特别地，$f \in \widehat{K}[X] = \widehat{K}[X/a]$，因此 $f(X) = \sum_{i=0}^{d} \alpha_i (X/a)^i$，其中 $\alpha_i \in \widehat{K}$。令 $g(X) = \sum_{i=0}^{d} a_i (X/a)^i \in K[X]$ 满足对每个 $i = 0, \ldots\ldots, d$，均有 $v(\alpha_i - a_i) \geq 0$。于是 $h := f - g \in V[X/a] \subseteq R$，从而 $g = f - h \in R \cap K[X] = R$。根据假设，$g \in W$ $h \in W$ $V[X/a] \subset W$，并注意到，因为蕴含 $V[X/a] \subset \widetilde{W}$。因此， $f = h + g \in W$，证毕。 □

下面的推论立即可得。

推论 2.6。设 W_i 是 V 到 $K(X)$ 的扩张，使得 $\tilde{w}_i(X) > v(a)$ 对某些 $a \in K$、及 $i = 1$成立，2。令 $W_i = W_i \cap K(X)$，其中 $i = 1, 2$。则有

$$W_1 \cap K[X] \subseteq W_2 \cap K[X] \Leftrightarrow \widetilde{W_1} \cap \widehat{K}[X] \subseteq \widetilde{W_2} \cap \widehat{K}[X]. \tag{2.7}$$

证明。只需注意到， $\tilde{w}_1$ 的假设意味着 $V[X/a] \subseteq W_1 \cap K[X]$，然后应用引理 2.5。 □

引理 2.8。设 W 是 V 到 $K(X)$ 的剩余超越扩张，并且 $K(X)$ (分别为 W) 关于 W的 $K(X)$ (分别为 W) 的完备化。则以下陈述成立：

(1) $K(X)$ 是 $K(X)$的子域。

(2) W 是 $W \cap K(X)$的即刻扩张。

(3) $W \cap K(X)$ 是 V的剩余超越扩张。

证明。由于 Γ_w/Γ_v 是挠的，因此 K 等于 $K(X)$中 K 的拓扑闭包。因此，我们可以将 $K(X)$嵌入 $K(X)$。设 $W = W \cap K(X)$。由于 $V \subseteq V$ 和 $W \subseteq W$ 是即刻扩张，因此 W 是 W 的即刻扩张，且 W 在 V上是剩余超越的。特别地，由于 $K(X) \subseteq K(X) \subseteq K(X)$，可知 $W \subseteq W$ 也是即刻扩张，因此 W 也是 V的剩余超越扩张。如果 X 在 K上是代数的，那么 $K \subseteq K(X)$将是有限扩张，因此 W 不可能在 V上是剩余超越的。于是 X 在K上是超越的。 □

引理 2.9. 设 W 是 V 到 $K(X)$的剩余超越扩张。那么 $W \cap K(X)$ 是 V的剩余超越扩张。

证明。根据 [1, 命题 1], , 存在 $f \in K[X] \cap W$，使其模 M 的剩余类在 $V/M = V/M$上超越。根据引理 2.3，如果 $g \in K[X]$是一个与 f次数相同、且在 v-进意义下充分接近 f的多项式，那么 $g \in W \cap K(X)$、 f和 g模 M有相同的剩余类，因此 g是剩余超越的于 V/M。于是， $W \cap K(X)$是 V的剩余超越扩张。 □

定理 2.10。 **</style}若，则 (**X) $\in \mathcal{W}_{t}$。此外，若 $W_i \in \mathcal{W}_t$ 且 $W_i = W_i \cap K(X)$ 对 $i = 1,2$成立，则 $w_1 \leq w_2$ 当且仅当 $\tilde{w}_1 \leq \tilde{w}_2$。特别地， $W_1 = W_2$ 当且仅当 $W_1 = W_2$。

证明。显然，若有 $W \in \mathcal{W}_{\mathrm{t}}$，则 $W \cap K(X) \in \mathcal{W}_{\mathrm{t}}$，因为 $\Gamma_v = \Gamma_{\hat{v}}$。因此，根据引理 2.1，命题 $w_1 \leq w_2 \Leftrightarrow \tilde{w}_1 \leq \tilde{w}_2$ 等价于（2.7），而后者由推论 2.6 得出。

对于最后一个断言，(⇐) 是直接的。反之，设 $W_1 = W_2$ $W_1 \cap K[X] = 。则 W_2 \cap K[X]$，因此根据（2.7），有 $W_1 \cap K[X] = W_2 \cap K[X]$。于是，根据引理 2.1， $W_1 = W_2$。 □

推论 2.11。由 $W \mapsto W \cap K(X)$ 给出的映射 Φ： $\mathcal{W}_{rt} \to \mathcal{W}_{rt}$ 是双射。

证明。注意，若 $W \in \mathcal{W}_{\mathrm{rt}}$，则由引理 2.9可知 $W = W \cap K(X) \in \mathcal{W}_{\mathrm{rt}}$。因此， Φ 是良定义的。于是，由引理 2.8可知 Φ 是满射的，且由定理 2.10可知 Φ 是单射的。 □

备注 2.12。设 Ψ 是从 $\mathcal{W}_{\mathrm{t}}$ 到 $\mathcal{W}_{\mathrm{t}}$ 的映射，它将 W 映到 $W \cap K(X)$。显然，Ψ 到 $\mathcal{W}_{\mathrm{rt}}$ 的限制等于 Φ。与推论 2.11的证明中一样， Ψ 是良定义的，并且由定理 2.10可知是单射的。然而，Ψ 不是满射的：若 $\alpha \in K$ 在 K上是超越的，则 $V_\alpha = \{\phi \in K(X) \mid \phi(\alpha) \in V\}$ 是 V的挠扩张，而 $V_\alpha = \{\psi \in K(X) \mid \psi(\alpha) \in V\}$ 则不是，因为 V_α 包含在离散赋值环 $K[X]_{(X-\alpha)}$中。

3 $\mathbb{Q}(X)$的离散赋值环完整列表

本节将完整描述商域为 $\mathbb{Q}(X)$ 的离散赋值环族。

令 $\mathbb{P}$ 为 $\mathbb{Z}$ 中素数的集合，因此 $\{p\mathbb{Z} \mid p \in \mathbb{P}\}$ 是整数环 $\mathbb{Z}$ 的非零（主）素理想集合。设 $W \subset \mathbb{Q}(X)$ 是一个极大理想为 M 的离散赋值环。以下两种情况必有一种成立：

- $W \cap \mathbb{Q} = \mathbb{Q}$。

对于某个 $p \in \mathbb{P}$， • $W \cap \mathbb{Q} = \mathbb{Z}_{(p)}$。

在第一种情况下，我们称 W 为非幺赋值整环；在第二种情况下，称 W 为幺赋值整环。对于每个 $p \in \mathbb{P}$，令 $\mathcal{W}_p$ 为满足 $W \cap \mathbb{Q} = \mathbb{Z}_{(p)}$ 的 $\mathbb{Q}(X)$ 的离散赋值环 W 的集合。

这是一个经典结果（例如参见 [11, 第 3] 页）：若 W 是非单位赋值整环，则根据 $X \in W$ 或 $X \notin W$，W 等于以下离散赋值环之一：

- 对某个不可约的 $g \in \mathbb{Q}[X]$， $W = \mathbb{Q}[X]_{(g)}$。
- $W = \mathbb{Q}[1/X]_{(1/X)}$.

若对于某个 $p \in \mathbb{P}$， $W \in \mathcal{W}_p$，则我们区分以下两种情况：

1. W 是关于 $\mathbb{Z}_{(p)}$的剩余代数。 2. W 是关于 $\mathbb{Z}_{(p)}$的剩余超越。

本文中，对于每个 $p \in \mathbb{P}$，我们定义：

- $\mathcal{W}_{p,\mathrm{ra}} = \{W \in \mathcal{W}_p \mid W \text{ is residually algebraic over } \mathbb{Z}_{(p)}\}$;

- $\mathcal{W}_{p,\ \mathrm{rt}} = \{W \in \mathcal{W}_p \mid W$ 在 $\mathbb{Z}_{(p)}\}$ 上是剩余超越的。

特别地，$\mathcal{W}_p = \mathcal{W}_{p,\mathrm{ra}} \cup \mathcal{W}_{p,\mathrm{rt}}$ 和 $\mathcal{W}_{p,\mathrm{ra}} \cap \mathcal{W}_{p,\mathrm{rt}} = \emptyset$。此外，令

$$\mathcal{W} = \bigcup_{p\in\mathbb{P}} \mathcal{W}_p,\ \ \mathcal{W}_{\mathrm{ra}} = \bigcup_{p\in\mathbb{P}} \mathcal{W}_{p,\mathrm{ra}},\ \ \mathcal{W}_{\mathrm{rt}} = \bigcup_{p\in\mathbb{P}} \mathcal{W}_{p,\mathrm{rt}},$$

因此，$\mathcal{W}$ 是 $\mathbb{Q}(X)$ 的离散赋值环集合，$\mathcal{W}_{\mathrm{ra}}$ 是 $\mathbb{Q}(X)$ 中某个 $\mathbb{Z}_{(p)}$ 的剩余代数扩张对应的离散赋值环集合，其中 $p \in \mathbb{P}$，而 $\mathcal{W}_{\mathrm{rt}}$ 是 $\mathbb{Q}(X)$ 中某个 $\mathbb{Z}_{(p)}$ 的剩余超越扩张对应的离散赋值环集合，其中 $p \in \mathbb{P}$。

3.1 $\mathbb{Z}_{(p)}$ 到 $\mathbb{Q}(X)$的扩张

令 $\mathbb{Q}_p$、$\mathbb{Z}_p$ 分别表示 p-进数域和 p-进整数环，它们分别是 $\mathbb{Q}$、$\mathbb{Z}_{(p)}$ 关于由 p-进赋值诱导的拓扑的完备化。令 $\mathbb{Q}_p$ 为 $\mathbb{Q}_p$ 的一个固定代数闭包，令 $\mathbb{Z}_p$ 为 $\mathbb{Z}_p$ 在 $\mathbb{Q}_p$中的整闭包；由于 $\mathbb{Q}_p$ 是亨泽尔的，$\mathbb{Z}_p$是一个一维非离散赋值整环。我们用 v_p 表示 p-进赋值在 $\mathbb{Q}_p$上的唯一扩张。环 $\mathbb{Z}_p$ 是 v_p 的赋值整环（即$\mathbb{Z}_p = \{x \in \mathbb{Q}_p \mid v_p(x) \geq 0\}$）。令 $\mathbb{C}_p$ 为 $\mathbb{Q}_p$ 关于赋值 v_p 诱导的拓扑的完备化，并令 $\mathbb{O}_p$ 为 $\mathbb{Z}_p$的完备化。众所周知，$\mathbb{C}_p$ 是代数闭的（[17, 命题 5.7.8]）。显然，每个元素 $\alpha \in \mathbb{C}_p \backslash \mathbb{Q}_p$ 在$\mathbb{Q}_p$上都是超越的，因此，特别地，这样的 α 在 $\mathbb{Q}$上也是超越的；相反，元素 $\alpha \in \mathbb{Q}_p$ 在 $\mathbb{Q}$上可以是代数的，也可以是超越的。我们用 $\mathbb{C}_p^{\mathrm{br}}$表示满足下述条件的那些 $\alpha \in \mathbb{C}_p$ 所成的子集：扩张 $\mathbb{Q}_p(\alpha)/\mathbb{Q}_p$ 的分歧指数有限。若扩张 $\mathbb{Q}_p(\alpha)/\mathbb{Q}_p$的分歧指数为 1，则称元素 $\alpha \in \mathbb{C}_p^{\mathrm{br}}$ 在 $\mathbb{Q}_p$ 上非分歧（需强调的是，这样的元素未必在 $\mathbb{Q}_p$上是代数的）。注意 $\mathbb{Q}_p \subset \mathbb{C}_p^{\mathrm{br}} \subset \mathbb{C}_p$。我们还定义 $\mathbb{O}_p^{\mathrm{br}} = \mathbb{O}_p \cap \mathbb{C}_p^{\mathrm{br}}$。

3.1.1 剩余代数扩张

下面的定理刻画了 $\mathbb{Q}(X)$ 中那些对某个 $p \in \mathbb{P}$ 而言是 $\mathbb{Z}_{(p)}$ 的剩余代数扩张的离散赋值环（参见 [28, 推论 2.28]）。

定理 3.1. 设 W 是 $\mathbb{Q}(X)$ 的一个离散赋值环，且对某个 $p \in \mathbb{P}$ 而言是 $\mathbb{Z}_{(p)}$ 的剩余代数扩张。那么存在一个 $\alpha \in \mathbb{C}_p^{br}$，它在 $\mathbb{Q}$ 上超越，使得

$$W = \mathbb{Z}_{(p),\alpha} = \{\phi \in \mathbb{Q}(X) \mid \phi(\alpha) \in \mathbb{O}_p\}. \tag{3.2}$$

特别地，$\mathcal{W}_{p,ra} = \{\mathbb{Z}_{(p),\alpha} \mid \alpha \in \mathbb{C}_p^{br},\ \alpha$ 在 $\mathbb{Q}\}$ 上超越。此外，当且仅当剩余域的扩张 $W/M \supseteq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ 是有限扩张时，$\alpha \in \mathbb{Q}_p$ 。

注 3.3. 我们指出，如果 $\alpha \in \mathbb{Q}_p$，则一般可以像上面那样定义以下赋值整环：

$$\mathbb{Z}_{(p),\alpha} = \{\phi \in \mathbb{Q}(X) \mid \phi(\alpha) \in \overline{\mathbb{Z}_p}\}$$

根据 [25, 命题 2.2], $\mathbb{Z}_{(p),\alpha}$ 是离散赋值环，当且仅当 α 在 $\mathbb{Q}$ 上超越；否则其秩为 2。在后一种情况下，若 $q \in \mathbb{Q}[X]$ 是 α 的最小多项式，则有 $\mathbb{Z}_{(p),\alpha} \subset \mathbb{Q}[X]_{(q)}$。

3.1.2 剩余超越扩张

设 W 是 $\mathbb{Q}(X)$ 的一个离散赋值环，它对某个 $p \in \mathbb{P}$ 在 $\mathbb{Z}_{(p)}$ 上剩余超越。接下来的重要定理给出了这些赋值的一种不同于定理 1.6 的刻画；具体而言，我们将证明，可以用 $\mathbb{Q}_p \times \mathbb{Q}$ 的数对而非 $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ 的数对来参数化它们。

定理 3.4. 设 $p \in \mathbb{P}$，且 W 是 $\mathbb{Z}_{(p)}$ 到 $\mathbb{Q}(X)$的一个剩余超越扩张。那么，W 是一个离散赋值环，满足 $W = \mathbb{Z}_{p,\ \alpha,\ \delta} \cap \mathbb{Q}(X)$，其中某个$(\alpha, \delta) \in \mathbb{Q}_p \times \mathbb{Q}$。

证明。我们已在注 1.3 中指出，W 是一个离散赋值环。由推论 2.11，W 等于$\widetilde{\ }$在 $\mathbb{Q}(X)$ 上的限制，其中 W 是 $\mathbb{Z}_p$ 到 $\mathbb{Q}_p(X)$ 的（唯一）剩余超越扩张。由$\widetilde{\ }$定理 1.6，$W = \mathbb{Z}_{p,\ \alpha,\ \delta}$，其中某个 $(\alpha,\ \delta) \in \mathbb{Q}_p \times \mathbb{Q}$。因此，$W = \mathbb{Z}_{p,\ \alpha,\ \delta} \cap \mathbb{Q}(X)$。 □

在 p-进赋值 v_p 下对 $\mathbb{Q}$ 进行完备化后开展研究，其优势在于，由于 $\mathbb{Q}_p$ 是亨泽尔的，v_p 到 $\mathbb{Q}_p$ 存在唯一扩张。因此，我们不必预先考虑将 v_p 扩张到 $\mathbb{Q}_p$（如定理 1.6 中所做的那样）。

3.1.3 有理数域 $\mathbb{Q}(X)$ 的单位离散赋值环

为了统一上述两种情形，即 $\mathbb{Z}_{(p)}$ 到 $\mathbb{Q}(X)$ 的剩余代数扩张和超越扩张，我们考虑数对 $(\alpha,\ \delta) \in \mathbb{C}_p \times (\mathbb{Q} \cup \{\infty\})$。下文中，我们始终假设这样的数对满足以下条件：

- 如果 $\delta = \infty$，那么 α 在 $\mathbb{Q}$ 上是超越的。-
如果 $\delta \in \mathbb{Q}$，那么 $\alpha \in \mathbb{Q}_{p^\circ}$。

第一个假设源于定理 3.1。第二个假设源于以下事实：对于第 1.3.1 节中介绍的单项式赋值 $v_{p,\ \alpha,\ \delta}$，即使在 $\alpha \in \mathbb{C}_p \setminus \mathbb{Q}_p$ 时也可以定义该赋值；但根据稠密性论证，我们可以取 $\alpha' \in \mathbb{Q}_p$，使得 $v_{p,\ \alpha,\ \delta} = v_{p,\ \alpha',\ \delta}$（见下文注 3.18（2））。因此，给定满足 $\alpha \in \mathbb{C}_p \setminus \mathbb{Q}_p$ 的数对 $(\alpha,\ \delta) \in \mathbb{C}_p \times (\mathbb{Q} \cup \{\infty\})$，便自动有 $\delta = \infty$。反之则不成立：我们可以考虑数对 $(\alpha,\ \infty)$，其中 α 或属于 $\mathbb{Q}_p$，或属于 $\mathbb{C}_p \setminus \overline{\mathbb{Q}_{p^\circ}}$

注 3.5. 设 $(\alpha, \delta) \in \mathbb{C}_p \times (\mathbb{Q} \cup \{\infty\})$ 满足上述假设。回顾一下，$\mathbb{Z}_{(p),\alpha,\delta}$ 的值群在 $\mathbb{Z}_{(p)}$ 的值群中的指数有限（若 $\delta \neq \infty$，由注 1.3 (1) 可得；若 $\delta = \infty$，则由 [25, 命题 2.2] 可得）。特别地，若 $\delta \in \mathbb{Q}$，则$\mathbb{Z}_{(p),\alpha,\delta}$ 是一个离散赋值环。此外，若 $\delta = \infty$，由 [28, 命题 2.14、注 2.18、推论 2.28] 可知，$\mathbb{Z}_{(p),\alpha,\delta}$ 是一个离散赋值环，当且仅当$\alpha \in \mathbb{C}_p^{\mathrm{br}}$（我们假设 α 在 $\mathbb{Q}$上是超越的）。若 $\alpha \in \mathbb{C}_p \setminus \mathbb{C}_p^{\mathrm{br}}$，则$\mathbb{Z}_{(p),\alpha,\infty}$ 是一维非离散赋值整环（由相同的参考文献可得）。

给定 $(\alpha, \delta) \in \mathbb{C}_p \times (\mathbb{Q} \cup \{\infty\})$，我们用 $\mathbb{Z}_{(p),\alpha,\delta}$ 表示赋值整环 $\mathbb{Z}_{p,\alpha,\delta} \cap \mathbb{Q}(X)$。特别地，由注1.2可知，$\mathbb{Z}_{(p),\alpha} = \mathbb{Z}_{(p),\alpha,\infty}$。下一个定理总结了迄今讨论的结果，并完整描述了 $\mathbb{Q}(X)$ 的单位离散赋值环。

定理 3.6. 设 W 为 $\mathbb{Q}(X)$ 的一个离散赋值环，位于 $\mathbb{Z}_{(p)}$ 之上，对某个 $p \in \mathbb{P}$。则下列陈述成立。

(1) $W = \mathbb{Z}_{(p),\alpha,\delta}$ 对某个 $(\alpha,\delta) \in \mathbb{C}_p^{br} \times (\mathbb{Q} \cup \{\infty\})$。在此情形下， $X \in W$ 当且仅当 $(\alpha,\delta) \in \mathbb{O}_p^{br} \times (\mathbb{Q}_{\geq 0} \cup \{\infty\})$。

(2) W 在 $\mathbb{Z}_{(p)}$ 上是剩余超越（分别为剩余代数）的，当且仅当 $\delta < \infty$ （ α 在 $\mathbb{Q}$ 上超越，且 $\delta = \infty$，分别）。

特别地，我们有：

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_{p,ra} &= \{\mathbb{Z}_{(p),\alpha} \mid \alpha \in \mathbb{C}_p^{br} \text{ and } \alpha \text{ is transcendental over } \mathbb{Q}\} \\ \mathcal{W}_{p,rt} &= \{\mathbb{Z}_{(p),\alpha,\delta} \mid (\alpha,\delta) \in \overline{\mathbb{Q}_p} \times \mathbb{Q}\} \end{aligned}$$

证明。若 W 在 $\mathbb{Z}_{(p)}$ 上是剩余超越的，则存在 $(\alpha, \delta) \in \mathbb{Q}_p \times \mathbb{Q}$，使得 $W = \mathbb{Z}_{(p),\alpha,\delta}$（定理 3.4）。接下来，若 W 在 $\mathbb{Z}_{(p)}$ 上是剩余代数的，则存在 $\alpha \in \mathbb{C}_p^{\mathrm{br}}$，使得 α 在 $\mathbb{Q}$ 上超越，且 $W = \mathbb{Z}_{(p),\alpha}$（定理 3.1）。

第 (1) 项的第二部分由引理 1.7 得出。最后的结论立即得出 . □

3.2 $\mathbb{C}_p$ 中么赋值整环的多项式序与超度量球

对于 $p \in \mathbb{P}$，我们设

$$\mathcal{S}_p = \{\mathbb{Z}_{(p),\alpha,\delta} \mid (\alpha,\delta) \in \mathbb{C}_p \times (\mathbb{Q} \cup \{\infty\})\}.$$

在本小节中，我们研究在什么条件下，对于 (α,δ)、$(\alpha',\delta') \in \mathbb{C}_p \times (\mathbb{Q} \cup \{\infty\})$，有 $\mathbb{Z}_{(p),\alpha',\delta'} \cap \mathbb{Q}[X] \subseteq \mathbb{Z}_{(p),\alpha,\delta}$；并证明 $\mathcal{S}_p$ 是一个偏序集。

Let

$$\mathcal{S} = (\bigcup_{p\in\mathbb{P}} \mathcal{S}_p) \cup \{\mathbb{Q}[X]_{(q)} \mid q \in \mathbb{Q}[X] \text{ is irreducible }\}.$$

值得注意的是，如果 W 是 $\mathbb{Z}[X]$ 的一个二维赋值扩环，且 $W \subset \mathbb{Z}_{(p),0,0}$，那么对于所有的 $(\alpha, \delta) \in \mathbb{C}_p \times (\mathbb{Q} \cup \{\infty\})$，都有 $W \neq \mathbb{Z}_{(p),\alpha,\delta}$。因此， $\mathcal{S}$ 并非 $\mathbb{Q}(X)$ 的所有赋值环构成的集合；而根据定理 3.6， $\mathcal{S}$ 包含 $\mathbb{Q}(X)$ 的所有离散赋值环。

现在，为了说明 $\mathcal{S}_p$ 的赋值整环与 $\mathbb{C}_p$ 中的超度量球之间的对应关系，我们需要考虑半径可能为无穷的超度量球（因此是单点集）。设 $(\alpha, \delta) \in \mathbb{C}_p \times (\mathbb{Q} \cup \{\infty\})$。 $\mathbb{C}_p$ 中中心为 α、半径为 δ 的球为 $B_p(\alpha, \delta) = \{x \in \mathbb{C}_p \mid v_p(x-\alpha) \geq \delta\}$。注意，当且仅当 $\delta = -\infty$ 时， $B_p(\alpha,-\delta) = \{\alpha\}$。若 $\delta \in \mathbb{Q}$，则 $B_p(\alpha, \delta)$ 与 $\mathbb{Q}_p$ 有非空交，因为 $\mathbb{Q}_p$ 在 $\mathbb{C}_p$ 中稠密，因此我们可以在中找到一个元素 $B_p(\alpha, \delta) \cap \mathbb{Q}_p$，并将其视为该球的中心。

我们将证明，在伽罗瓦群 G_p 的作用下， $\mathcal{S}_p$ 上的序关系反映了 $\mathbb{C}_p$ 中超度量球之间的包含关系（命题 3.16 和注 3.18）。我们首先需要几个引理。第一个引理使用了 [9],中引入的伪平稳序列概念，另见 [26]。

引理 3.7. 设 $(\alpha,\delta) \in \mathbb{C}_p \times (\mathbb{Q} \cup \{\infty\})$，并假设 $B_p(\alpha,\delta) \subseteq \bigcup_{j=1,\ldots,n} B_j$，其中 B_j's 是 $\mathbb{C}_p$ 的多项式闭子集。那么，对于某个 $i \in \{1,\ldots,n\}$，有 $B_p(\alpha,\delta) \subseteq B_i$。

证明。若 $\delta=\infty$，则 $B_p(\alpha,\delta)=\{\alpha\}$，且结论显然成立。

假设 $\delta\in\mathbb{Q}$。设 $E=\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset B_p(\alpha,\ \delta)$ 是一个伪平稳序列，其伪极限集合为 $\mathcal{L}_E=B_p(\alpha,\ \delta)$。根据鸽巢原理，$E$ 的一个子序列（记为 $E'=\{s_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$）包含在某个 $i\in\{1,\dots,n\}$ 的 B_i 中；注意，E' 仍是伪平稳序列，且 $\mathcal{L}_{E'}=B_p(\alpha,\ \delta)$。根据 [9, 命题 4.8]，$B_p(\alpha,\ \delta)\subseteq B_i$，如所述。 □

备注 3.8。更一般地，引理 3.7 对任意具有无限剩余域的赋值整环 V 都成立；我们不需要多项式闭包是拓扑闭包，而这对于任意秩的赋值整环通常并不成立（[30]）。

我们用 G_p 表示 $\mathbb{Q}_p/\mathbb{Q}_p$ 的伽罗瓦群。我们回顾一下，G_p 被等同于 $\mathbb{C}_p$ 的所有连续 $\mathbb{Q}_p$-自同构组成的群（见 [5, §3, 1.]），因此 G_p 作用于 $\mathbb{C}_p$。此外，对于每个 $\sigma\in G_p$，都有 $v_p\circ\sigma=v_p$，因为 $\mathbb{Q}_p$ 是亨泽尔的。

下面的备注包含了关于元素 $\alpha\in\mathbb{C}_p\setminus\mathbb{Q}_p$ 在群 G_p 的作用下的共轭元集合的重要信息。

备注 3.9。设 $\alpha\in\mathbb{C}_p$。根据 [5, 备注 3.2]，$G_p(\{\alpha\})=\{\sigma(\alpha)$ 当且仅当 $\alpha\notin\mathbb{Q}_p$ 时是 $\mathbb{C}_p$ 的无限子集。在此情况下，根据 [5, 定理 3.5]，$G_p(\{\alpha\})$ 是全不连通的、闭的且紧致的（注意，当 $G_p(\{\alpha\})$ 是有限集时，这一点同样成立）。特别地，根据 [9,命题 2.4]，$G_p(\{\alpha\})$ 是多项式闭的。

引理 3.10. 设 $(\alpha_i,\delta_i)\in\mathbb{C}_p\times(\mathbb{Q}\cup\{\infty\})$，其中 $i=1,\dots,n$。则，$G_p(\bigcup B_p(\alpha_i,\delta_i))$ 是多项式闭的。

证明。我们注意到

$$G_p(\bigcup_{i=1}^{n}\bar{B}_p(\alpha_i,\delta_i))=\bigcup_{i=1}^{n}G_p(\bar{B}_p(\alpha_i,\delta_i))=\bigcup_{i=1}^{n}\bigcup_{\sigma\in G_p}\bar{B}_p(\sigma(\alpha_i),\delta_i). \tag{3.11}$$

若 $\alpha_i\in\mathbb{Q}_p$，则 $G_p(B_p(\alpha_i,\delta_i))$ 等于有限个球 $B_p(\sigma(\alpha_i),\delta_i)$ 的有限并，其中 $\sigma\in G_p$（它们不一定互不相交）；因此，根据 [9, 命题 3.4]，$G_p(B_p(\alpha_i,\delta_i))$ 是多项式闭的。若 $\alpha_i\in\mathbb{C}_p\setminus\mathbb{Q}_p$（因此，按照我们的约定，$\delta_i$ 必然等于 ∞），则根据注 3.9，$G_p(B_p(\alpha_i,\delta_i))=_n G_p(\{\alpha_i\})$ 是多项式闭的。因此，$G_p(\bigcup B_p(\alpha_i,\delta_i))$ 是多项式闭的，因为它是多项式闭集的有限并。 □

我们现在准备证明本小节的主要结果，由此可以证明 $\mathcal{S}_p$ 是一个偏序集。我们首先需要下面的备注，它给出了与整值多项式环的联系。

注 3.12. 设 $(\alpha,\delta)\in\mathbb{C}_p\times(\mathbb{Q}\cup\{\infty\})$。若 $\delta\neq\infty$，给定 $c\in\mathbb{Q}_p$ 使得 $v_p(c)=\delta$，则有以下等式：

$$\mathbb{O}_{p,\alpha,\delta}\cap\mathbb{C}_p[X]=\mathbb{O}_p\left[\frac{X-\alpha}{c}\right]=\mathrm{Int}(\bar{B}_p(\alpha,\delta),\mathbb{O}_p).$$

第一个等式由 [26, 注 3.4] 得出，第二个等式则由 [26, 引理 4.1]，得出，因为 $\mathbb{O}_p$ 是一个剩余域无限的秩一非离散赋值环。更一般地，显然等式

$$\mathbb{O}_{p,\alpha,\delta} \cap \mathbb{C}_p[X] = \mathrm{Int}(\bar{B}_p(\alpha,\delta), \mathbb{O}_p) \tag{3.13}$$

当 $\delta = \infty$时也成立。特别地，将前一个等式向下收缩到 $\mathbb{Q}_p[X]$ （对 $\mathbb{Q}[X]$也同样处理），我们得到

$$\mathbb{Z}_{p,\alpha,\delta} \cap \mathbb{Q}_p[X] = \mathrm{Int}_{\mathbb{Q}_p}(\bar{B}_p(\alpha,\delta), \mathbb{O}_p) \tag{3.14}$$

显然，我们有

$$\mathrm{Int}(\bar{B}_p(\alpha,\delta), \mathbb{O}_p) = \bigcap_{\alpha' \in \bar{B}_p(\alpha,\delta)} \mathbb{O}_{p,\alpha'} \cap \mathbb{C}_p[X] \tag{3.15}$$

命题 3.16。 设 $p \in \mathbb{P}$和$(\alpha, \delta),(\alpha_i, \delta_i) \in \mathbb{C}_p \times (\mathbb{Q} \cup \{\infty\})$，其中 $i = 1, \ldots, n$。那么以下条件等价：

(1) $\mathbb{Z}_{(p),\alpha_i,\delta_i} \cap \mathbb{Q}[X] \subset \mathbb{Z}_{(p),\alpha,\delta}$对某个 $i \in \{1, \ldots, n\}$成立。(2) $\bigcap_{i=1}^{n} \mathbb{Z}_{(p),\alpha_i,\delta_i} \cap \mathbb{Q}[X] \subset \mathbb{Z}_{(p),\alpha,\delta}$。

(3) $\delta \geq \delta_i$和 $v_p(\alpha - \sigma(\alpha_i))$ 对某些 $\geq \delta_i$和 $\sigma \in G_p$成立。

证明。 (1) ⇒(2) 显然。

(2) ⇒ (3) 根据引理 2.5，(2) 等价于 $\mathbb{Q}_p(X)$ 中的类似包含关系：

$$\bigcap_{i=1}^{n} (\mathbb{Z}_{p,\alpha_i,\delta_i} \cap \mathbb{Q}_p[X]) \subset \mathbb{Z}_{p,\alpha,\delta}. \tag{3.17}$$

由 (3.14)，(3.17) 的左边等于

$$\bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{Int}_{\mathbb{Q}_p}(\bar{B}_p(\alpha_i,\delta_i), \mathbb{O}_p) = \mathrm{Int}_{\mathbb{Q}_p}(B, \mathbb{O}_p),$$

其中 $B = \bigcup_{i=1}^{n} \bar{B}_p(\alpha_i, \delta_i)$。[27, 引理 2.20] 的直接推广表明，$\mathrm{Int}_{\mathbb{Q}_p}(B, \mathbb{O}_p)$ 在 $\mathbb{Q}_p(X)$ 中的整闭包等于 $\mathrm{Int}_{\mathbb{Q}_p}(G_p(B), \mathbb{O}_p)$。因此，(3.17) 实际上等价于

$$\mathrm{Int}_{\overline{\mathbb{Q}_p}}(G_p(B), \mathbb{O}_p) \subset (\overline{\mathbb{Z}_p})_{\alpha,\delta}.$$

再次应用引理 2.5，我们可以将前述包含关系转移到 over $\mathbb{C}_p$ 上：

$$\mathrm{Int}(G_p(B), \mathbb{O}_p) \subset \mathbb{O}_{p,\alpha,\delta} \cap \mathbb{C}_p[X] = \mathrm{Int}(\bar{B}_p(\alpha,\delta), \mathbb{O}_p)$$

也就是说，$B_p(\alpha, \delta)$ 包含于 $G_p(B)$ 的多项式闭包中。根据引理 3.10，$G_p(B)$ 是多项式闭的，因此 $B_p(\alpha, \delta) \subseteq G_p(B)$。再次根据引理 3.10，对每个 $i \in \{1, \ldots, n\}$，$G_p(B_p(\alpha_i, \delta_i))$ 都是多项式闭的，因此由引理 3.7，$B_p(\alpha, \delta) \subseteq G_p(B_p(\alpha_i, \delta_i))$，对于

某个 $i \in \{1, \ldots, n\}$。若 $\delta_i = \infty$，则必有 $\delta = \infty$ 且对某个 $\sigma \in G_p$，$\alpha = \sigma(\alpha_i)$，否则，类似于引理 3.7 的证明可知，$G_p(\{\alpha_i\})$ 将包含一个伪平稳序列，这与紧致性矛盾。若 $\delta_i < \infty$，则引理 3.7 再次推出，对某个 $\sigma \in G_p$，$B_p(\alpha, \delta)$ 包含于 $\sigma(B_p(\alpha_i, \delta_i)) = B_p(\sigma(\alpha_i)\ \delta_i)$，也就是说，$\delta \geq \delta_i$ 且 $v_p(\alpha - \sigma(\alpha_i)) \geq \delta_i$，这正是条件（3）。

(3) $\Rightarrow$ (1) 注意，由定理 1.9，对每个 $\sigma \in G_p$ 有 $\mathbb{Z}_{(p),\alpha_i,\delta_i} = \mathbb{Z}_{(p),\sigma(\alpha_i)\ \delta_i}$。还要注意，由 (1.5) 得到的不等式 $v_p(\alpha - \sigma(\alpha_i)) \geq \delta_i$ 等价于 $\mathbb{Z}_{(p),\sigma(\alpha_i)\ \delta_i} = \mathbb{Z}_{(p),\alpha,\delta_i}$。因此，

$$\mathbb{Z}_{(p),\alpha_i,\delta_i} \cap \mathbb{Q}[X] = \mathbb{Z}_{(p),\alpha,\delta_i} \cap \mathbb{Q}[X] \subset \mathbb{Z}_{(p),\alpha,\delta}$$

其中最后一个包含关系由不等式 $\delta \geq \delta_i$ 得出。 □

注 3.18. (1) 设对 $i = 1, 2$，有 $(\alpha_i, \delta_i) \in \mathbb{C}_p \times (\mathbb{Q} \cup \{\infty\})$。由命题 3.16，我们有如下等价关系：

$$\mathbb{Z}_{(p),\alpha_1,\delta_1} \cap \mathbb{Q}[X] \subset \mathbb{Z}_{(p),\alpha_2,\delta_2} \Leftrightarrow \delta_2 \geq \delta_1 \text{ and } v_p(\alpha_2 - \sigma(\alpha_1)) \geq \delta_1 \text{ for some } \sigma \in G_p.$$

这最后一个条件等价于说

$$\bar{B}_p(\alpha_2, \delta_2) \subseteq \sigma(\bar{B}_p(\alpha_1, \delta_1)) = \bar{B}_p(\sigma(\alpha_1), \delta_1).$$

特别地，$\mathcal{S}_p$ 的剩余代数离散赋值环 $\mathbb{Z}_{(p),\alpha} = \mathbb{Z}_{(p),\alpha,\infty}$ 恰好是 $\mathcal{S}_p$ 在此序下的极大元（推论2.2 (2)），并且每个剩余超越的 $\mathbb{Z}_{(p),\alpha,\delta} \in \mathcal{S}_p$（其中 $\delta \in \mathbb{Q}$）都严格小于 $\mathcal{S}_p$ 的一个极大元，即对 $\alpha' \in B_p(\alpha, \delta)$ 而言的 $\mathbb{Z}_{(p),\alpha',\infty}$。

(2) 设对 $i = 1,2$ 有 $(\alpha_i, \delta_i) \in \mathbb{C}_p \times (\mathbb{Q} \cup \{\infty\})$，使得 $\mathbb{Z}_{(p),\alpha_1,\delta_1} \cap \mathbb{Q}[X] = \mathbb{Z}_{(p),\alpha_2,\delta_2} \cap \mathbb{Q}[X]$。由命题 3.16，对某些 $\sigma_1, \sigma_2 \in G_p$，我们有 $\delta_1 = \delta_2$, $v_p(\alpha_2 - \sigma_1(\alpha_1)) \geq \delta_1$，以及 $v_p(\alpha_1 - \sigma_2(\alpha_2)) \geq \delta_2$。若 $\delta_1 = \infty$，则对某个 $\sigma \in G_p$ 有 $\alpha_1 = \sigma(\alpha_2)$（即 α_1, α_2 在 $\mathbb{Q}_p$ 上共轭），因此特别地有 $\mathbb{Z}_{(p),\alpha_1,\delta_1} = \mathbb{Z}_{(p),\alpha_2,\delta_2}$。若改为对 $i = 1, 2$ 有 $\delta_i < \infty$，则由定理 1.9 得 $\mathbb{Z}_{(p),\alpha_1,\delta_1} = \mathbb{Z}_{(p),\sigma(\alpha_1)\ \delta_1}$，并由 (1.5) 得 $\mathbb{Z}_{(p),\sigma_1(\alpha_1)\ \delta_1} = \mathbb{Z}_{(p),\alpha_2,\delta_1}$，从而再次得到 $\mathbb{Z}_{(p),\alpha_1,\delta_1} = \mathbb{Z}_{(p),\alpha_2,\delta_2}$。因此，$\mathcal{S}_p$ 在 $\mathbb{Z}_{(p),\alpha_1,\delta_1} \cap \mathbb{Q}[X] \subseteq \mathbb{Z}_{(p),\alpha_2,\delta_2} \cap \mathbb{Q}[X]$（对 $\mathbb{Z}_{(p),\alpha_i,\delta_i} \in \mathcal{S}_p$）下是一个偏序集。

令 $\mathcal{B}_p$ 为 $\mathbb{C}_p$ 中中心位于 $\mathbb{C}_p^{\mathrm{br}}$ 且半径可能为无穷的超度量球集合，即：

$$\mathcal{B}_p = \{\bar{B}_p(\alpha, \delta) \mid (\alpha, \delta) \in \mathbb{C}_p^{\mathrm{br}} \times (\mathbb{Q} \cup \{\infty\})\}$$

约定

- 若 $\delta = \infty$，则 α 在 $\mathbb{Q}$ 上是超越的。- 若 $\delta < \infty$，则 $\alpha \in \mathbb{Q}_p$。—

注意，伽罗瓦群 $G_p = \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_p/\mathbb{Q}_p)$ 作用于 $\mathcal{B}_p$（引理 1.8 和定理 1.9），我们将 $\mathcal{B}_p/G_p$ 表示为在此作用下 $\mathcal{B}_p$ 的等价类集合。注意，根据注 3.9，球 $B_p(\alpha, \delta)$ 的等价类在 G_p 的作用下具有无限基数，当且仅当 $\delta = \infty$ 和 $\alpha \notin \mathbb{Q}_p$。

定理 3.19。映射

$$\begin{aligned}\Theta_p:\quad \mathcal{B}_p/G_p &\to \quad \mathcal{W}_p\\ [\bar{B}_p(\alpha,\delta)] &\mapsto \quad \mathbb{Z}_{(p),\alpha,\delta}\end{aligned}$$

是一个双射。

证明。我们首先证明 Θ_p 是良定义的。若 $[B_p(\alpha,\delta)]=[B_p(\alpha',\delta')]$，则存在 $\sigma\in G_p$，使得 $B_p(\alpha,\delta)=\sigma(B_p(\alpha',\delta'))=B_p(\sigma(\alpha')\ \delta')$，因此特别地可得 $\delta=\delta'$，且 $v_p(\alpha-\sigma(\alpha'))\geq\delta$。于是，由命题 3.16，得到 $\mathbb{Z}_{(p),\alpha,\delta}\cap\mathbb{Q}[X]=\mathbb{Z}_{(p),\alpha',\delta'}\cap\mathbb{Q}[X]$，进而由注 3.18 (2) 可得 $\mathbb{Z}_{(p),\alpha,\delta}=\mathbb{Z}_{(p),\alpha',\delta'}$。

对于 Θ_p的单射性，若等式 $\mathbb{Z}_{(p),\ \alpha,\ \delta}=\mathbb{Z}_{(p),\ \alpha',\ \delta'}$ 成立，则特别地有 $\mathbb{Z}_{(p),\ \alpha,\ \delta}\cap\mathbb{Q}[X]=\mathbb{Z}_{(p),\ \alpha',\ \delta'}\cap\mathbb{Q}[X]$，并且利用与上文相同的论证可得 $[B_p(\alpha,\ \delta)]=[B_p(\alpha',\ \delta')]$。

Θ_p 的满射性由定理 3.6 得出。 □

4 多项式克鲁尔整环

我们关注多项式克鲁尔整环的刻画，即满足$\mathbb{Z}[X]\subseteq R\subseteq\mathbb{Q}[X]$的克鲁尔整环 R。注意，由于 $\mathbb{Z}[X]$ 是一个二维诺特整环，根据 [18, 定理9]，这样的克鲁尔整环 R 是一个克鲁尔维数至多为 2 的整闭诺特整环。反过来，众所周知，每个整闭诺特整环都是克鲁尔整环（例如，参见 [32, 第 VI 章 §13 (b)，第 82] 页）。因此，我们描述的是介于 $\mathbb{Z}[X]$ 和 $\mathbb{Q}[X]$之间的整闭诺特整环族。给定上述整环R 的一个素理想 Q，若对于某个 $p\in\mathbb{P}$ 有 $Q\cap\mathbb{Z}=p\mathbb{Z}$，则称 Q 是幺的；若$Q\cap\mathbb{Z}=(0)$，则称 Q 是非幺的。

4.1 多项式克鲁尔整环的表示

回顾一下 我们有主理想整环 $\mathbb{Q}[X]$ 作为离散赋值环之交的如下表示 ：

$$\mathbb{Q}[X]=\bigcap_{q\in\mathcal{P}^{\mathrm{irr}}}\mathbb{Q}[X]_{(q)}$$

其中，$\mathcal{P}^{\mathrm{irr}}$ 是 $\mathbb{Q}[X]$ 的不可约多项式集合，而 $\mathbb{Q}[X]_{(q)}$ 是 $\mathbb{Q}[X]$ 在由 q（X）生成的素理想处的局部化。

一般而言，设 R 是一个多项式克鲁尔整环，$\Lambda=\{p\in\mathbb{P}\mid pR\subset R\}$、$X^1$（$R$）是 R 的高度为一的素理想集合，并且对每个 $p\in\Lambda$，X_p^1（R）$=\{Q\in X^1$（R）$\mid p\in Q\}$。那么 X_p^1（R）是有限的，对所有 $Q\in X_p^1$（R），R_Q 都是一个离散赋值环，并且

$$R=\bigcap_{p\in\Lambda}(\bigcap_{Q\in X_p^1(R)}R_Q)\cap\mathbb{Q}[X].$$

因此，对于每个 $p\in\Lambda$，都存在一个商域为 $\mathbb{Q}(X)$ 的有限个离散赋值环 $\{W_{p,1},\ldots,W_{p,m_p}\}$，使得 $W_{p,\ j}\cap\mathbb{Q}=\mathbb{Z}_{(p)}$ 对于 $j=1,\ \ldots,m_p$，并且

$$R=\bigcap_{p\in\Lambda}(\bigcap_{j=1}^{m_p}W_{p,j})\cap\mathbb{Q}[X]=\bigcap_{p\in\Lambda}(\bigcap_{j=1}^{m_p}(W_{p,j}\cap\mathbb{Q}[X])).\tag{4.1}$$

对于每个 $p \in \Lambda$，令

$$R_p = \bigcap_{j=1}^{m_p} (W_{p,j} \cap \mathbb{Q}[X]) \tag{4.2}$$

显然， R_p 是介于 $\mathbb{Z}_{(p)}[X]$ 和 $\mathbb{Q}[X]$ 之间的克鲁尔整环，且 $R = \bigcap_{p\in\Lambda} R_p$。

引理 4.3. 设 $p \in \mathbb{P}$ 和 R 是介于 $\mathbb{Z}[X]$ 和 $\mathbb{Q}[X]$ 之间的环，使得 $R = \bigcap_{Q\in X^1(R)} R_Q$ 和对于所有 $Q \in X^1(R)$、 $X^1_p(R) = \{Q \in X^1(R) \mid p \in Q\}$ 以及 $R_p = (\bigcap_{Q\in X^1_p(R)} R_Q) \cap \mathbb{Q}[X]$都是离散赋值环。则以下结论成立。

(1) $R = \bigcap_{p\in\mathbb{P}} R_p$。(2) 如果 $R_{(p)} = (\mathbb{Z} \setminus p\mathbb{Z})^{-1}R$，则 $R_{(p)} = R_p$。(3) $R_{(p)} \cap \mathbb{Q} = \mathbb{Z}_{(p)}$。

证明。 (1) 若 Q 是 R的素理想，则要么 $Q \cap \mathbb{Z} = (0)$，要么对某个 $p \in \mathbb{P}$有 $Q \cap \mathbb{Z} = p\mathbb{Z}$。此外，若 $Q \cap \mathbb{Z} = (0)$，则 $\mathbb{Q}[X] \subseteq R_Q$。因此，$R = R \cap \mathbb{Q}[X] = \bigcap_{p\in\mathbb{P}} ((\bigcap_{Q\in X^1_p(R)} R_Q) \cap \mathbb{Q}[X]) = \bigcap_{p\in\mathbb{P}} R_p$.

(2) ($\subseteq$) 设 $\frac{f}{n} \in R_{(p)}$，其中 $f \in R$，且 $n \in \mathbb{Z}$ 不能被 p整除。那么显然，对于每个 $Q \in X^1_p(R)$，都有 $\frac{f}{n} \in R_Q$，因为 n 的相应赋值的值均为零，且 $R \subseteq R_p$。因此， $R_{(p)} \subseteq R_p$。 ($\supseteq$) 反过来，设 $h \in R_p$。那么我们可以写成 $h = \frac{g}{mp^k}$，其中某些 $g \in \mathbb{Z}[X]$、$m \in \mathbb{Z}$ p $k \geq 0$ R $q \in \mathbb{P}$ $q \neq p$ 不能被 和 整除。那么 $mh = \frac{g}{p^k}$ 显然属于 （因为对于每个，，p^k都是 R_Q 的单位，对所有 $Q \in X^1_q(R)$ 均成立）。因此，我们也有 $R_{(p)} \supseteq R_p$。

(3) 结论由以下两个观察得出：(i) 对所有 $Q \in X^1_p(R)$， $R_Q \cap \mathbb{Q} = \mathbb{Z}_{(p)}$；(ii) 根据 (2)， $R_{(p)} = R_p$。 □

设 R 如引理 4.3 中所述，且对所有 $p \in \mathbb{P}$，均有 $R'_p = \bigcap_{Q\in X^1_p(R)} R_Q$。那么， R 是克鲁尔整环，当且仅当对所有 $p \in \mathbb{P}$， R_p 是克鲁尔整环，并且对于任意 $0 \neq f \in \mathbb{Z}[X]$，除有限多个 p 属于 $\mathbb{P}$ 外，均有 $fR'_p = R'_p$。因此，在本文余下部分中，我们将首先研究 R_p 何时是克鲁尔整环，然后通过考察如下性质来研究克鲁尔整环 R： 若 $f \in \mathbb{Z}[X]$ 非零，则除有限多个 p 属于 $\mathbb{P}$ 外，均有 $fR'_p = R'_p$。第一种情形称为“局部情形”，第二种情形称为“整体情形”。

4.2 局部情形

设 $p \in \mathbb{P}$ 固定。本节考虑一个介于 $\mathbb{Z}_{(p)}[X]$ 和 $\mathbb{Q}[X]$之间的克鲁尔整环 R；我们将证明， R 可以表示为 $\mathbb{C}_p$中有限个超度量球上的整数值多项式环。显然，对于每个这样的 R，我们有

$$R = \bigcap_{j=1}^{m} W_j \cap \mathbb{Q}[X] \tag{4.4}$$

其中 $\{W_i \mid j = 1,\ldots,m\}$ 是 $\mathbb{Q}(X)$中位于 $\mathbb{Z}_{(p)}$之上的离散赋值环的有限族（可能为空） .

4.2.1 不可约表示

我们首先研究如（4.4）所示的 $\mathbb{Z}_{(p)}[X]$ 与 $\mathbb{Q}[X]$ 之间的克鲁尔整环表示何时是不可约冗余的。设 D 为商域为 K 的整环，并假设 $D = \bigcap V_i$、$i\in I$

其中 $\{V_i\}_{i\in I}$ 是 K 的赋值整环族（根据 Krull定理，这等价于说 D 在 K 中是整闭的）。如在 [15], 中所述，如果该族中的元素 $V = V_{i_0}$ 满足 $D = \bigcap V_i$，则称其为冗余；如果该表示 $D = \bigcap V_i$ 中没有任何族元素 $i\in I,\ i\neq i_0$ $i\in I V_i$ $\{V_i\}_{i\in I}$ 是冗余的，则称该表示为不可约表示。

下面的结果是经典结论，参见例如第 296] 页的 [23, 备注，或 [14, 推论 43.9]。

定理 4.5. 设 D 是一个克鲁尔整环。那么 $\{D_P \mid P \in X^1(D)\}$ 是 D 的唯一的定义族；也就是说，如果 $\{V_\alpha\}$ 是 D 的一个定义族，那么 $\{D_P \mid P \in X^1(D)\} \subseteq \{V_\alpha\}$。

设 D 是克鲁尔整环。定理 4.5 还指出，若 Λ 是 $X^1(D)$ 的子集，则 $D \subsetneq \bigcap D_{P P\in\Lambda}$ 当且仅当 $\Lambda \subsetneq X^1(D)$。特别地，对于每个 $P \in X^1(D)$，D_P 对定义族 $\{D_P \mid P \in X^1(D)\}$ 都不是冗余的，因此该定义族给出了 D 的唯一不可约表示。

推论 4.6. 设 D 是克鲁尔整环，$\{V_\alpha\}$ 是 D 和 $V \in \{V_\alpha\}$ 的定义族，且 M 是极大理想。

(1) V 在 $D = \bigcap V_\alpha$ 中是冗余的，当且仅当 $ht(M \cap D) \geq 2$。α

(2) 交 $D = \bigcap V_\alpha$ 不可约，当且仅当对于所有 α，$ht(M_\alpha \cap D) = 1$ 。α

证明。 (1) 假设 V在 $D = \bigcap V_\alpha$ 中不是冗余的，并令 $R = \bigcap V_\alpha$。那么 $D = R \cap V$ α $V_\alpha\neq V$且 $R \nsubseteq V$。因此，由引理 1.3], , 并且由于 V是离散赋值环，ht$(M \cap D)$ =ht$((M \cap D)D_{M\cap D}) = 1$。反过来，假设 ht$(M \cap D) < 2$。那么 ht$(M \cap D) = 1$，因此 $D_{M\cap D}$是离散赋值环。注意 $D_{M\cap D} \subseteq V$，所以 $D_{M\cap D} = V$。因此 V在 $D = \bigcap V_\alpha$中不是冗余的。α

(2) 这直接由 (1) 得出。 □

推论 4.7。 设 R如（4.4）中所述，并令 $W = W_j$，其中 $j \in \{1, \ldots, m\}$。若 W'是扩张 $\mathbb{Z}_{(p)}$的离散赋值环，且 $w < w'$，则 $R \subset W'$，并且 W'在 R上的中心高度为二。

此外，如果 W'' 是另一个扩张 $\mathbb{Z}_{(p)}$ 的离散赋值环，且 $w < w' \leq w''$，那么 $M\cap R \subset M'\cap R = M'' \cap R$。

证明。 根据假设 $w < w'$，我们有 $R \subseteq W \cap \mathbb{Q}[X] \subseteq W' \cap \mathbb{Q}[X]$。因此， W' 在 $R \cap W'$ 中是冗余的；又由于 $W \neq W'$，由推论 4.6 可得 ht$(M' \cap R) \geq 2$。注意，dim$(R) \leq 2$。因此，ht$(M' \cap R) = 2$。

对于最后一个结论，我们有 $R \subset W' \cap \mathbb{Q}[X] \subseteq W'' \cap \mathbb{Q}[X]$, 因此 $M' \cap R \subseteq M'' \cap R$。由于 dim$(R) \leq 2$, 前述包含关系中等号成立。 □

推论 4.8. 设 R 如 (4.4) 中所述。则对于每个 $q \in \mathbb{Q}[X]$ 不可约， $\mathbb{Q}[X]_{(q)}$ 在 R 的该表示中都不是冗余的。

证明。设 Q 是 $\mathbb{Q}[X]_{(q)}$ 在 R 上的中心。则 $Q\cap\mathbb{Z}=(0)$，因此若 $S=\mathbb{Z}\setminus\{0\}$，则$_nR_S=\bigcap_{i=1}^{n}(W_i)_S\cap\mathbb{Q}[X]=\mathbb{Q}[X]$ [14, 命题 43.5] 且 $QR_S\subsetneq R_S$。于是 $\mathrm{ht}Q=\mathrm{ht}(QR_S)=0$，所以根据推论 4.6，2.，$\mathbb{Q}[X]_{(q)}$ 不是冗余的。

□

注 4.9. (1) 根据命题 3.16，从几何角度看，(4.4) 中的表示 R 是不可约冗余的，当且仅当球 $\bar{B}_p(\alpha_i,\delta_i)$、$(\alpha_i,\delta_i)\in\mathbb{O}_p^{\mathrm{br}}\times(\mathbb{Q}_{\geq 0}\cup\{\infty\})$（其中 $i=1,\ldots,n$）在伽罗瓦群 G_p 的 $^-$ $^-$ 作用下彼此不相交，具体来说：对于每一对球 $B_p(\alpha_{i_1},\delta_{i_1})$ $B_p(\alpha_{i_2},\delta_{i_2})$，$^-$ $^-$不存在 $\sigma\in G_p$ 使得 $B_p(\alpha_{i_1},\delta_{i_1})$ 包含于 $\sigma(B_p(\alpha_{i_2},\delta_{i_2}))$（见注 3.18）。等价地，球 $B_p(\sigma(\alpha_i)\ \delta_i)$（其中 $i=1,\ldots,n$ 以及 $\sigma\in G_p$）彼此不相交。需要强调的是，这类球的数量有限，当且仅当不存在 $j\in\{1,\ldots,n\}$ 使得 $\alpha_j\in\mathbb{O}_p^{\mathrm{br}}\setminus\mathbb{Z}_p$（见注 3.9）。

(2) 根据推论 4.6 和推论 4.8，当且仅当 $M_j\cap R$对 $j=1,\ldots,m$具有高度一时，(4.4) 中 R 的表示才是不可约冗余的，其中 M_j是 W_j的极大理想。

$_m$现在我们研究 $R=\bigcap W_j\cap\mathbb{Q}[X]$的一些基本环论性质，这些性质对研究多项式克鲁尔整环非常有用$_{j=1}$。特别地，我们刻画 R 的素幺理想何时为极大理想。若 W 是 $\mathbb{Q}(X)$ 的离散赋值环，且它扩张了某个 $p\in\mathbb{P}$的 $\mathbb{Z}_{(p)}$，则记扩张 $W\supset\mathbb{Z}_{(p)}$的分歧指数为 $e(W\mid\mathbb{Z}_{(p)})$。若 $\alpha\in\mathbb{C}_p^{\mathrm{br}}$，则记扩张 $\mathbb{Q}_p(\alpha)\supseteq\mathbb{Q}_p$ 的分歧指数为$e(\mathbb{Q}_p(\alpha)\mid\mathbb{Q}_p)$（我们强调，当且仅当 $\alpha\in\mathbb{Q}_p$时，该扩张是代数扩张）。

—

定理 4.10. 设 $p\in\mathbb{P}$。假设 $W_j=\mathbb{Z}_{(p),\alpha_j,\delta_j}$，对某个 $(\alpha_j,\delta_j)\in\mathbb{C}_p^{br}\times(\mathbb{Q}\cup\{\infty\})$，是 $\mathbb{Q}(X)$ 的一个离散赋值环，它扩张了 $\mathbb{Z}_{(p)}$，并且 $X\in W_j$ 对 $j=1,\ldots,m$。现在，令 $M_j=M_{(p),\alpha_j,\delta_j}$ 对每个 $j=1,\ldots,m$，并且

$$R=\bigcap_{j=1}^{m}W_j\cap\mathbb{Q}[X]. \tag{4.11}$$

若 R 在 (4.11) 中的表示是不可约冗余的（即 $ht(M_j\cap R)=1$ 对 $j=1,\ldots,m$），则下列陈述成立：

(1) R 是一个克鲁尔整环，使得 $\mathbb{Z}_{(p)}[X]\subseteq R\subseteq\mathbb{Q}[X]$。

(2) $X^1(R)=\{M_j\cap R\mid j=1,\ldots,m\}\cup\{f\mathbb{Q}[X]\cap R\mid f\in\mathbb{Q}[X]\text{ 是不可约的}\}$。

(3) $M_j\cap R$ 是 R 的极大理想，当且仅当 W_j 在 $\mathbb{Z}_{(p)}$上是剩余代数的 .

(4) 设当 $\delta_j\in\mathbb{Q}$时，$(\alpha_j、\ \delta_j)$ 是一个极小对。则有

$$e(W_j|\mathbb{Z}_{(p)})=\begin{cases}e(\mathbb{Q}_p(\alpha_j)|\mathbb{Q}_p), & if\ \delta_j=\infty\\ e(\mathbb{Q}_p(\alpha_j)|\mathbb{Q}_p)e(\gamma_j|\mathbb{Q}_p(\alpha_j)), & if\ \delta_j<\infty\end{cases}$$

其中，$\gamma_j=w_j(f_{\alpha_j})$，$f_{\alpha_j}$ 是 α_j 在 $\mathbb{Q}_p$ 上的最小多项式，而 $e(\gamma_j|\mathbb{Q}_p(\alpha_j))$ 是满足 $n\gamma_j$ 属于 $\mathbb{Q}_p(\alpha_j)$的值群的最小自然数。

(5) 如果对于 $j=1$、...、m 以及 $d=gcd(e_1$、...、$e_m)$有 $e_j=e(W_j|\mathbb{Z}_{(p)})$，则 $Cl(R)=\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}^{m-1}$。

(6) R是 戴德金当且仅当 $\delta_j=\infty$和 α_i对每个 $j=1$而言都是在 $\mathbb{Q}$上的超越的，...，m .

证明。 (1) 显然，因为 R 是商域相同的克鲁尔整环的有限交（[7,第七章，第1节，3. 例子，3）]）。

(2) 包含关系 ($\supseteq$) 由 [10, 推论 2.3(3)] 以及假设 $M_j \cap R \in X^1(R)$ 对所有 $j \in \{1, \ldots, m\}$ 成立可得。另一包含关系由定理 4.5 易得。

(3) 如果 W_j 在 $\mathbb{Z}_{(p)}$ 上剩余超越，即 $\delta_j \in \mathbb{Q}$ （定理 3.6），则结论由推论 4.7 得出。反之，假设 W_j 在 $\mathbb{Z}_{(p)}$ 上剩余代数，即 $\delta = \infty$（定理 3.6）。我们有以下包含关系： $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \subseteq R/(M_j \cap R) \subseteq W_j/M_j$; 由于 W_j/M_j 在 $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ 上代数，故 $M_j \cap R$ 是 R 的极大理想。

(4) 如果 $\delta_j < \infty$，见 [2, 定理 2.1, c)], ; 而如果 $\delta_j = \infty$，见 [25, 命题 2.2]。

(5) 设 G 是由生成元 $g_1, \ldots\ldots, g_m$ 生成的秩为 m 的自由阿贝尔群，且 H 是由 $r = \sum e_i g_i$ 生成的 mG 的子群。则 $\mathrm{Cl}(R) = G/H$ [10, 定理 2.4], 并且由于 $d = gcd(e_1, \ldots\ldots, e_m)$, $\mathrm{Cl}(R) = \mathbb{Z}/d\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}^{m-1}$ [10, 备注 1.6]。

(6) 一个克鲁尔整环是戴德金的，当且仅当它的（克鲁尔）维数为 1（[32, 定理 28，第 VI 章，§13]）。证明随后由条目 (2)、(3) 以及定理 3.6 得出。 □

定义 4.12. $\mathbb{Q}(X)$ 的离散赋值环的无限族 $\{W_i\}_{i \in I}$ 称为多项式有限$_n$，如果存在 $\mathbb{Q}(X)$ 的离散赋值环的有限集 $\{V_1, \ldots, V_n\}$，使得 $\bigcap_{i \in I} W_i \cap \mathbb{Q}[X] = \bigcap_{j=1} V_j \cap \mathbb{Q}[X]$。

例如，将 (3.13) 与 (3.15) 合并可得

$$\bigcap_{\alpha' \in \bar{B}_p(\alpha, \delta)} \mathbb{O}_{p,\alpha',\infty} \cap \mathbb{C}_p[X] = \mathbb{O}_{p,\alpha,\delta} \cap \mathbb{C}_p[X].$$

注意，族 $\{\mathbb{O}_{p,\alpha',\infty} \mid \alpha' \in B_p(\alpha, \delta)\}$ 中的一个元素是离散赋值环，当且仅当 α' 在 $\mathbb{Q}$ ([25, 命题 2.2])上是超越的，因此特别地，上述赋值上环 $\mathbb{O}_{p, \alpha_p, \infty}$并非每一个都是离散赋值环。

下一个定理给出了何时一个由 $\{W_i\}_{i \in I}$ 的离散赋值环组成的无限族 $\mathbb{Q}(X)$（其扩张 $\mathbb{Z}_{(p)}$）是多项式有限的。

定理 4.13。 设 $p \in \mathbb{P}$。假设对于某个 $(\alpha_i, \delta_i) \in \mathbb{C}_p^{br} \times (\mathbb{Q} \cup \{\infty\})$, $\mathbb{Z}_{(p), \alpha_i, \delta_i}$ 是 $\mathbb{Q}(X)$ 的离散赋值环无限族，其扩张为 $\mathbb{Z}_{(p)}$，且对于 $i \in I$，令 $R = \bigcap_{i \in I} \mathbb{Z}_{(p), \alpha_i, \delta_i} \cap \mathbb{Q}[X]$。则以下陈述等价:

(1) R 是克鲁尔整环。*(2)* 集合$\{\mathbb{Z}_{(p),\alpha_i,\delta_i} \mid i \in I\}$ 是多项式有限的。*(3)* $R = \bigcap_{j=1}^{n} \mathbb{Z}_{(p), \alpha_j, \delta_j} \cap \mathbb{Q}[X]$ 对某个 $\{(\alpha_j, \delta_j) \mid j = 1, \ldots\ldots, n\} \subseteq \mathbb{C}_p^{br} \times (\mathbb{Q} \cup \{\infty\})$。*(4)* 存在 $\mathbb{C}_p^{br} \times (\mathbb{Q} \cup \{\infty\})$ 的一个有限子集 $\{(\alpha_j, \delta_j) \mid j = 1, \ldots\ldots, n\}$，使得 $R \subseteq_n \bigcap_{j=1}^{n} \mathbb{Z}_{(p), \alpha_j, \delta_j}$，并且对每个 $i \in I$，存在 $j \in \{1, \ldots, n\}$ 使得 $\delta_i \geq \delta_j$ 且 $v(\alpha_i - \sigma(\alpha_j)) \geq \delta_j$，对某个 $\sigma \in G_p$。

证明。 (1) $\Rightarrow$ (2) 设 $\mathcal{A} = X_p^1(R)$。则 $\mathcal{A}$ 是有限的，$R = \bigcap_{Q\in\mathcal{A}} R_Q \cap \mathbb{Q}[X]$，$R_Q$ 是 $\mathbb{Q}(X)$ 的离散赋值环，且扩张 $\mathbb{Z}_{(p)}$。因此 $\{\mathbb{Z}_{(p),\alpha_i,\delta_i} \mid i \in I\}$ 是多项式有限的。

(2) $\Rightarrow$ (3) 这是由以下事实得出的：根据定理 3.6，$\mathbb{Q}(X)$ 中每个扩张 $\mathbb{Z}_{(p)}$ 的离散赋值环都具有 $\mathbb{Z}_{(p),\alpha,\delta}$ 的形式，其中 $(\alpha,\delta) \in \mathbb{C}_p^{\mathrm{br}} \times (\mathbb{Q}\cup\{\infty\})$。

(3) $\Rightarrow$(1) 显然，因为 R 是具有相同商域的克鲁尔整环的有限交（[7,第七章，§1，3. 例子，3]）。

(3) $\Rightarrow$ (4) 每个 $\mathbb{Z}_{(p),\alpha_i,\delta_i}$ 都是 $\bigcap_{j=1}^{m} \mathbb{Z}_{(p),\alpha_j,\delta_j} \cap \mathbb{Q}[X]$ 的上环，因此根据命题 3.16，$\delta_i \geq \delta_j$ 和 $v(\alpha_i - \sigma(\alpha_j)) \geq \delta_j$，其中 $j \in \{1,\ldots,m\}$ 和 $\sigma \in G_p$。

(4) $\Rightarrow$ (3) 假设对每个 $i \in I$，都存在 $j \in \{1,\ldots,n\}$，使得 $\delta_i \geq \delta_j$ 且 $v(\alpha_i - \sigma(\alpha_j)) \geq \delta_j$，其中某个 $\sigma \in G_p$。那么根据命题 3.16，$\mathbb{Z}_{(p),\alpha_i,\delta_i}$ 是 $\bigcap_{j=1}^{m} \mathbb{Z}_{(p),\alpha_j,\delta_j} \cap \mathbb{Q}[X]$ 的上环，因此包含关系 ($\supseteq$) 成立；等式则由 $R \subseteq \bigcap_{j=1}^{m} \mathbb{Z}_{(p),\alpha_j,\delta_j}$ 得出。 □

备注 4.14。从几何上看，定理 4.13 的条件 4 意味着，在 $\mathbb{Q}_p$ 中，球 $B_p(\alpha_i,\delta_i)$ 的并集（其中 $i \in I$ 中的每个球都对应一个赋值整环 $\mathbb{Z}_{(p),\alpha_i,\delta_i}$）在伽罗瓦群 G_p 的作用下包含于有限多个这样的球中，即：

$$\bigcup_{i\in I} \bar{B}_p(\alpha_i,\delta_i) \subseteq \bigcup_{j=1,\ldots,m} \bigcup_{\sigma\in G_p} \bar{B}_p(\sigma(\alpha_j),\delta_j).$$

现在我们可以刻画 R 与 $\mathbb{Z}_{(p)}[X]$ 之间的克鲁尔整环 $\mathbb{Q}[X]$。根据定理 3.6，我们只需考虑 R 的离散赋值环定义族中那些由数对 $(\alpha,\delta) \in \mathbb{O}_p^{\mathrm{br}} \times (\mathbb{Q}_{\geq 0}\cup\{\infty\})$ 定义、且扩张了 $\mathbb{Z}_{(p)}$ 的离散赋值环。我们回顾一下，$\mathbb{Z}_{(p)}[X]$ 是一个克鲁尔整环（例如参见 [13，命题 1.6]）。如果 $\mathbb{Z}_{(p),0,0}$ 是平凡高斯扩张的赋值整环，那么 $\mathbb{Z}_{(p)}[X] = \mathbb{Z}_{(p),0,0} \cap \mathbb{Q}[X] = \mathrm{Int}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{O}_p)$。

定理 4.15。设 $p \in \mathbb{P}$ 和 R 是介于 $\mathbb{Z}_{(p)}[X]$ 与 $\mathbb{Q}[X]$ 之间的克鲁尔整环。那么存在有限多个数对 $(\alpha_i,\delta_i) \in \mathbb{O}_p^{br} \times (\mathbb{Q}_{\geq 0}\cup\{\infty\})$、$i = 1$、……、$n$，其中若 $\delta_i = \infty$，则 α_i 在 $\mathbb{Q}$ 上超越，使得

$$R = \bigcap_{i=1}^{n} \mathbb{Z}_{(p),\alpha_i,\delta_i} \cap \mathbb{Q}[X] = \mathrm{Int}_{\mathbb{Q}}(E_p,\mathbb{O}_p), \tag{4.16}$$

其中 $E_p = \bigcup B_p(\alpha_i,\delta_i)$。此外，若 (4.16) 中的表示是不可约冗余的（见备注 4.9），则 R 是戴德金整环，当且仅当 $n = 0$（此时 $R = \mathbb{Q}[X]$），或者 $n \geq 1$ 且对每个 $i = 1$，……，n，$\delta_i = \infty$；因此，在这两种情况下，R 是戴德金整环，当且仅当 E_p 含有有限多个元素。

证明。我们在本节开头的 (4.4) 中指出，$R = \bigcap W_i \cap \mathbb{Q}[X]$，其中 W_i 是包含 $\mathbb{Z}_{(p)}[X]$ 的 $\mathbb{Q}(X)$ 的离散赋值环，对每个 $i = 1,\ldots,n$。由定理 3.6，存在 $(\alpha_i,\delta_i) \in \mathbb{O}_p^{\mathrm{br}} \times (\mathbb{Q}_{\geq 0}\cup\{\infty\})$，使得 $W_i = \mathbb{Z}_{(p),\alpha_i,\delta_i}$，对每个 $i = 1,\ldots,n$。注意，若 $\delta_i = \infty$，则 α 必然在 $\mathbb{Q}$ 上是超越的（§3.1.3）。R 作为整数值多项式环的表示由 (3.14) 得出。

显然， $R \cap \mathbb{Q}$ 等于 $\mathbb{Q}$ 或 $\mathbb{Z}_{(p)}$，取决于离散赋值环族 W_i是否为空。在前一种情形中，$R = \mathbb{Q}[X]$ 是一个主理想整环（因而既是戴德金整环，也是唯一分解整环）。在后一种情形中，由 [26, 定理 3.14], ，克鲁尔整环 R 是戴德金的，当且仅当不存在在 $\mathbb{Z}_{(p)}$上剩余超越的W_i 。这相当于说，对每个$i = 1,\ldots,n$，都有 $\delta_i = \infty$ ，由定理 3.6。

□

4.2.2 非单位素理想

设 R 是介于 $\mathbb{Z}_{(p)}[X]$ 与 $\mathbb{Q}[X]$ 之间的多项式克鲁尔整环，如 (4.4) 中所述。设 $q \in \mathbb{Q}[X]$ 不可约，并设 $Q = q(X)\mathbb{Q}[X]_{(q)} \cap R$。由定理 4.10 (2)， Q 是 R的高度为 1 的素理想，且 $R_Q = \mathbb{Q}[X]_{(q)}$。本节刻画 Q 何时为 R的极大理想。

一般地，我们指出，若 W 是有理函数域 $K(X)$在域 K 上的赋值整环，且 W 的维数至少为 2，则 $W \cap K = V$是 K 的赋值整环，而并非 K 本身。事实上， $W \cap K = K \Leftrightarrow K \subset W$，且在此情形下 W 将是一个离散赋值环（[11, 第 3]页）。

命题 4.17. 设 W 是 $K(X)$ 的赋值整环，使得 $W \subset K[X]_{(q)}$ 对某个不可约元 $q \in K[X]$成立。设 $V = W \cap K$。则存在根 $\alpha \in K$，其为 $q(X)$ 的根，以及扩张U，它是 V到 $\overline{K}(\alpha)$ 的扩张，使得 $W = U_\alpha = \{\phi \in K(X) \mid \phi(\alpha) \in U\}$。

证明。令 $\pi\colon K[X]_{(q)} \to K[X]/(q) \cong K(\alpha)$ 为典范剩余映射，其中 α 是 X 的剩余类，可以视为 q 的一个根。注意，对于 $\phi \in K[X]_{(q)}$， $\pi(\phi) = \phi(\alpha)$，因为 π 是一个同态。

众所周知，每个严格包含于 $K[X]_{(q)}$ 中的赋值整环 W 都具有$\pi^{-1}(U)$的形式，其中 U是 $K(\alpha)$的赋值整环；此外， $U = \pi(W) = W/Q$，其中 Q是 $K[X]_{(q)}$的极大理想。因此，

$$U = W/Q = \{\phi(\alpha) \mid \phi \in W\} = \{\phi(\alpha) \in K(\alpha) \mid \phi(\alpha) \in U\}. \tag{4.18}$$

（实际上， $K(\alpha)$中的每个元素都具有 $g(\alpha)$的形式，其中 $g \in K[X]$为某个元素。此外， U的极大理想等于 M_W/Q，其中 M_W是 W的极大理想。特别地， $U \cap K = V$。事实上，若 $\beta \in V = W \cap K$，则 $\pi(\beta) = \beta$，因为 $\pi_{|K}$ 是恒等映射。因此， $\beta = \pi(\beta) \in U = W/Q$。类似地，可以证明 $M_V \subseteq M_U = M_W/Q$，即 U的极大理想。因此，$V = U \cap K$。

最后，由 (4.18) 及上述讨论可得，

$$W = \pi^{-1}(U) = \{\phi \in K(X) \mid \phi(\alpha) \in U\} = U_\alpha.$$

□

我们注意到，如果考虑相对于赋值整环 U，$\widehat{}$ 的 $K(\alpha)$ 的完备化，那么可以将 α 视为 K 中的一个元素，它在 K 上代数，因此我们有等式：

$$W = \{\phi \in K(X) \mid \phi(\alpha) \in \widehat{U}\}$$

$\widehat{}$其中 U 是 U的完备化。

定理 4.19。设 $p \in \mathbb{P}$ 且 $R = \bigcap_{j=1}^{m} \mathbb{Z}_{(p),\alpha_j,\delta_j} \cap \mathbb{Q}[X]$ 是克鲁尔整环，其中 $(\alpha_j, \delta_j) \in \mathbb{C}_p \times (\mathbb{Q} \cup \{\infty\})$ 对 $j = 1, \ldots, m$ 成立。设 $Q = q(X)\mathbb{Q}[X] \cap R$ 是 R 的一个非幺素理想，其中 $q \in \mathbb{Q}[X]$ 是某个不可约元。那么，Q 是 R 的极大理想，当且仅当 q 在 $\bigcup_{j=1}^{m} B_p(\alpha_j, \delta_j)$ 中没有根。

证明。注意，当 R 是戴德金环时（即对于 $j = 1, \ldots, m$，$\delta_j = \infty$；由定理 4.10 的 (7) 可知），此时 Q 自动是极大理想。在这种情况下，每个球 $B_p(\alpha_j, \delta_j)$ 都是单点集 $\{\alpha_j\}$，它必然关于 $\mathbb{Q}$ 是超越的，否则 $\mathbb{Z}_{(p),\alpha_j,\infty}$ 就不是离散赋值环。

一般而言，假设对于某个 $\alpha' \in \bigcup_{j=1}^{m} \bar{B}_p(\alpha_j, \delta_j)$，有 $q(\alpha') = 0$。那么，我们有以下包含关系：

$$R \subset \mathbb{Z}_{(p),\alpha'} = \mathbb{Z}_{(p),\alpha',\infty} \subset \mathbb{Q}[X]_{(q)}$$

其中，第一个包含关系由命题 3.16 得出，第二个则由如下事实得出：$\mathbb{Q}[X]_{(q)} = \{\phi \in K(X) \mid \phi(\alpha') \in \mathbb{Q}_p\}$。特别地，$Q \subset M_{(p),\alpha'} \cap R$，因此 Q 不是极大理想。

反过来，假设对于某个高度为 2 的极大理想 M，有 $Q \subset M \subset R$，其中 M 属于 R，且它必然包含 p。根据 [14, 推论 19.7]，存在 R 的一个二维赋值上环 W，其非零素理想为 $Q' \subset M'$，满足 $Q' \cap R = Q$ 和 $M' \cap R = M$。注意，$W \cap \mathbb{Q} = \mathbb{Z}_{(p)}$ 且 $W_{Q'} = R_Q = \mathbb{Q}[X]_{(q)}$。根据命题 4.17，存在 $\mathbb{Z}_{(p)}$ 到 $\mathbb{Q}[X]/(q)$ 的一个扩张 U，以及 $q(X)$ 的一个根 α'，使得 $W = \{\phi \in \mathbb{Q}(X) \mid \phi(\alpha') \in U\}$。根据该命题之后的备注，我们可以假设 $\alpha' \in \mathbb{Q}_p$，它必然是 $\mathbb{Q}$ 上的代数元，因此 $W = \mathbb{Z}_{(p),\alpha'} = \mathbb{Z}_{(p),\alpha',\infty}$。由于 $R \subset \mathbb{Z}_{(p),\alpha'}$，由命题 3.16 可知，$\alpha'$（或其某个共轭元）属于 $\bigcup_{j=1}^{m} \bar{B}_p(\alpha_j, \delta_j)$，证毕。 □

推论 4.20。设 R 和 Q 如定理 *4.19* 中所述，并假设 Q 不是极大理想。那么，包含 Q 的 R 的极大理想是幺的，而且只有有限多个。

证明。若 $Q \subset M \subset R$ 中 M 是一个极大理想，则定理 4.19 的上述证明表明，$M = M_{(p),\alpha'} \cap R$，其中 α' 是 $q(X)$ 的根。因此，这类 M 只有有限多个。 □

4.2.3 唯一分解整环

本节将完整描述 $\mathbb{Z}_{(p)}[X]$ 与 $\mathbb{Q}[X]$ 之间的唯一分解整环，其中 $p \in \mathbb{Z}$ 是一个固定的素数。众所周知，整环是唯一分解整环，当且仅当它是具有平凡除子类群 [13, 的克鲁尔整环（命题 6.1]）。

以下引理可由 [29, 命题 3.2 和命题 3.7], 推出，但为方便读者，我们给出一个自包含的证明。

引理4.21。假设 $\alpha \in \mathbb{Q}_p$ 在 $\overline{\mathbb{Q}_p}$ 上非分歧，且令 $q_\alpha \in \mathbb{Q}_p[X]$ 为其最小多项式。那么，$v_{p,\alpha,\delta}(q_\alpha) = k\delta + \gamma$，其中 $\gamma \in \mathbb{Z}$ 和 $k = \#(\Omega_\alpha \cap B_p(\alpha, \delta))$ 为某些元素，且 Ω_α 是 α 在 $\mathbb{Q}_p$ 上的共轭元集合。

证明。注意，$\Omega_\alpha \subset \mathbb{Q}_p(\alpha)$，因为 $\mathbb{Q}_p(\alpha)/\mathbb{Q}_p$ 是伽罗瓦扩张。还需注意，$q_\alpha(X) = \prod_{\alpha' \in \Omega_\alpha} (X - \alpha')$ 是在 $\mathbb{Q}_p(\alpha)$ 上的扩张。对于每个 $\alpha' \in \Omega_\alpha$，我们有

$$v_{p,\alpha,\delta}(X - \alpha') = \min\{\delta, v_p(\alpha - \alpha')\}$$

因此

$$v_{p,\alpha,\delta}(q_\alpha) = \sum_{\alpha'\in\Omega_\alpha\cap\bar{B}_p(\alpha,\delta)} \delta + \sum_{\alpha'\in\Omega_\alpha\setminus\bar{B}_p(\alpha,\delta)} v_p(\alpha-\alpha') = k\delta+\gamma$$

其中 $\gamma = \sum_{\alpha'\in\Omega_\alpha\setminus\bar{B}_p(\alpha,\ \delta)} v_p(\alpha-\alpha')$。设 $O_{\mathbb{Q}_p(\alpha)}$ 是 $\mathbb{Q}_p(\alpha)$ 的整数环，因此 $O_{\mathbb{Q}_p(\alpha)}$ 是一个赋值整环。于是，由于 α 是非分歧的，$O_{\mathbb{Q}_p(\alpha)}$ 与 $\mathbb{Z}_p$ 具有相同的值群，因此我们有 $\gamma\in\mathbb{Z}$。更精确地说，$\gamma = v_p(h(\alpha))$，其中 $h(X) = \prod_{\alpha'\in\Omega_\alpha\setminus\bar{B}_p(\alpha,\ \delta)} (X-\alpha')$。 □

接下来，我们证明，在 $B_p(\alpha,\ \delta)$ 中，α 在 $\mathbb{Q}_p$ 上的共轭元集合的基数，即数量 $\#(\Omega_\alpha\cap B_p(\alpha,\ \delta))$，当 α 在 $\mathbb{Q}_p$ 上非分歧且 $(\alpha,\ \delta)$ 是一个极小对时为 1。

命题4.22。设 $(\alpha,\delta)\in\mathbb{Q}_p\times\mathbb{Q}$ 是一个极小对，且 α 在 $\mathbb{Q}_p$ 上非分歧。则 $\#(\Omega_\alpha\cap B_p(\alpha,\delta)) = 1$。特别地，$\gamma = v_{p,\ \alpha,\ \delta}(q_\alpha) = \delta+\lambda$，对于某个 $\lambda\in\mathbb{Z}$，因此我们有：

$$e(\gamma\mid\mathbb{Q}_p(\alpha)) = e(\delta\mid\mathbb{Q}_p)$$

证明。首先假设 $\alpha\in\mathbb{Q}_p$，于是 $q_\alpha(X) = X-\alpha$ 且 $\Omega_\alpha = \{\alpha\}$。那么 $v_{p,\ \alpha,\ \delta}(q_\alpha) = \delta$，在这种情况下该陈述成立。

现在假设 $\alpha\notin\mathbb{Q}_p$。我们考虑以下常数：

$$\begin{aligned}\delta_{\mathbb{Q}_p}(\alpha) &= \sup\{v_p(\alpha-c)\mid c\in\overline{\mathbb{Q}_p},\ [\mathbb{Q}_p(c):\mathbb{Q}_p] < [\mathbb{Q}_p(\alpha):\mathbb{Q}_p]\}\\ \omega_{\mathbb{Q}_p}(\alpha) &= \sup\{v_p(\alpha-\alpha')\mid\alpha'\in\Omega_\alpha\setminus\{\alpha\}\}\end{aligned}$$

由于 $\alpha\notin\mathbb{Q}_p$，这两个常数都有良好定义。已知 $\delta_{\mathbb{Q}_p}(\alpha)$ 是一个最大值（例如参见 [28, 引理 1.2]），因此一般而言有不等式 $\delta_{\mathbb{Q}_p}(\alpha)\le\omega_{\mathbb{Q}_p}(\alpha)$（这可由经典的 Krasner 引理推出）。由于 $\mathbb{Q}_p(\alpha)/\mathbb{Q}_p$ 是非分歧的，根据 [22, 定理 1.3]，我们有等式 $\delta_{\mathbb{Q}_p}(\alpha) = \omega_{\mathbb{Q}_p}(\alpha)$。此外，根据定义可知，$(\alpha,\ \delta)$ 是极小对，当且仅当 $\delta > \delta_{\mathbb{Q}_p(\alpha)}$。现在，如果 $\beta\in B_p(\alpha,\ \delta)$，则有

$$v_p(\alpha-\beta)\ge\delta > \delta_{\mathbb{Q}_p(\alpha)} = \omega_{\mathbb{Q}_p}(\alpha)$$

因此，α 在 $B_p(\alpha,\delta)$中的唯一共轭是 α 本身，也就是说，$\#(\Omega_\alpha\cap B_p(\alpha,\delta)) = 1$。

最后一个断言现在由引理4.21得出，而所示等式显然成立，因为 $\lambda\in\mathbb{Z}$。

□

下一个定理刻画了 $\mathbb{Q}(X)$的离散赋值环 $\mathbb{Z}_{(p)}$ 何时在 $\mathbb{Z}_{(p)}$上非分歧。

定理 4.23。设 W 是 $\mathbb{Q}(X)$ 的一个离散赋值环，且扩张 $\mathbb{Z}_{(p)}$ 并包含 X。那么，W 在 $\mathbb{Z}_{(p)}$ 上非分歧，当且仅当存在一个极小对$(\alpha,\delta)\in\mathbb{O}_p^{br}\times(\mathbb{Z}_{\ge0}\cup\{\infty\})$，使得$W = \mathbb{Z}_{(p),\alpha,\delta}$且 $\mathbb{Q}_p(\alpha)/\mathbb{Q}_p$ 非分歧。

证明。由定理 3.6，存在$(\alpha,\delta)\in\mathbb{C}_p^{\mathrm{br}}\times(\mathbb{Q}\cup\{\infty\})$，使得$W = \mathbb{Z}_{(p),\alpha,\delta}$。

首先假设 W 在 $\mathbb{Z}_{(p)}$上是剩余代数的，因此，根据同一定理 $\delta=\infty$，α 在 $\mathbb{Q}$上是超越的。在这种情况下，若 $\alpha\in\mathbb{Q}_p$，则由 [25, 命题 2.2] 可得 $e(W\mid\mathbb{Z}_{(p)}) = e(\mathbb{Q}_p(\alpha)\mid\mathbb{Q}_p)$。反之，若 $\alpha\in\mathbb{C}_p\setminus\mathbb{Q}_p$，则 $e(W\mid\mathbb{Z}_{(p)}) = e(\mathbb{Z}_{p,\ \alpha,\ \delta}\mid\mathbb{Z}_p) = e(\mathbb{Q}_p(\alpha)\mid\mathbb{Q}_p)$，其中第一个等式由 [28, 命题 2.24] 得出，第二个等式由 [28, 命题 2.14]得出。无论哪种情况，结论均成立。

现在假设 W 在 $\mathbb{Z}_{(p)}$上是剩余超越的，因此特别地，根据上述定理有 $\delta \in \mathbb{Q}$ ，且不妨设 $\alpha \in \mathbb{Q}_p$。由 [2, 定理 2.1]， $e(W \mid \mathbb{Z}_{(p)}) = 1$当且仅当满足以下条件：

存在一个关于 W 的极小定义对（α, δ） $\in \mathbb{Q}_p \times \mathbb{Q}$ ，使得 $\mathbb{Q}_p(\alpha)/\mathbb{Q}_p$ 是非分歧的，并且 $w(q_\alpha)$ $\in \Gamma_{\mathbb{Q}_p(\alpha)}$ ，其中 q_α 是 α 在 $\mathbb{Q}_p$上的最小多项式。

由引理4.21可得 $w(q_\alpha) = v_{p,\alpha,\delta}(q_\alpha) = k\delta + \lambda$，其中 $k = \#(\Omega_\alpha \cap B_p(\alpha, \delta))$，且 $\lambda \in \Gamma_{\mathbb{Q}_p(\alpha)} = \Gamma_{\mathbb{Q}_p} = \mathbb{Z}$；特别地，我们有 $w(q_\alpha) \in \Gamma_{\mathbb{Q}_p(\alpha)} \Leftrightarrow k\delta \in \mathbb{Z}$。

若 $\alpha \in \mathbb{Q}_p$，则 $q_\alpha(X) = X - \alpha$，因此$v_{p,\alpha,\delta}(q_\alpha) = \delta$，它因此是一个整数。假设$\alpha \notin \mathbb{Q}_p$。由于（$\alpha$， δ）是一个极小对，故 $\delta > 0$。由命题4.22可得 $k = 1$，因此上面显示的条件等价于定理主要陈述中的条件。

□

定理4.24. 设 R 是介于 $\mathbb{Z}_{(p)}[X]$ 与 $\mathbb{Q}[X]$之间的环。那么， R 是唯一分解整环，当且仅当$R = \mathbb{Q}[X]$ ，或 $R = W \cap \mathbb{Q}[X]$ ，其中 W 是 $\mathbb{Q}(X)$ 的离散赋值环，且 $\mathbb{Z}_{(p)}$ 在其上非分歧。更准确地说，后一条件成立，当且仅当存在$(\alpha, \delta) \in \mathbb{O}_p^{br} \times (\mathbb{Z}_{\geq 0} \cup \{\infty\})$ 使得满足： α 在 $\mathbb{Q}_p$ 上非分歧；此时 $R = \mathrm{Int}_{\mathbb{Q}}(B_p(\alpha, \delta)\ \mathbb{O}_p)$。

证明. 根据命题6.1]，唯一分解整环就是具有平凡除子类群的克鲁尔整环 [13, 。因此，$_m$若 R 是唯一分解整环，则由定理 4.15 可知$R = \bigcap \mathbb{Z}_{(p),\alpha_i,\delta_i} \cap \mathbb{Q}[X]$，其中某个$(\alpha_i, \delta_i) \in_{i=1} \mathbb{O}_p^{\mathrm{br}} \times ($ $\mathbb{Q}_{\geq 0} \cup \{\infty\})$，且 $i = 1, \ldots, n$。由定理 4.10 的第(4)和第(5)项可知，要么 $R = \mathbb{Q}[X]$，要么 $R = \mathbb{Z}_{(p),\alpha,\delta} \cap \mathbb{Q}[X]$ ，并且$\mathbb{Z}_{(p),\alpha,\delta}$ 在$\mathbb{Z}_{(p),\alpha,\delta}$上非分歧。反过来，若 R 具有所述形式，则由定理 4.10 可知， R 是具有平凡类群的克鲁尔整环，因此是克鲁尔整环。

最后一个断言的证明由定理 4.23 得出。 □

例 4.25. 设 R 是介于 $\mathbb{Z}_{(p)}[X]$ 与 $\mathbb{Q}[X]$之间的唯一分解整环。我们注意到， R 等于 $\mathbb{Q}[X]$当且仅当 p 是 R的单位；否则，存在 $\mathbb{Q}(X)$的某个离散赋值环 W，它扩张 $\mathbb{Z}_{(p)}$，使得 W 在 $\mathbb{Z}_{(p)}$上非分歧。注意， $R = \mathbb{Z}_{(p)}[X]$ 当且仅当$W = \mathbb{Z}_{(p),0,0}$。

4.3 全局情形

在本节中，我们将第 4.2 节的结果推广到全局情形。具体而言，我们考虑子集 $\Lambda \subseteq \mathbb{P}$, $W_{p,j}$ a^{m_p} 的 $\mathbb{Q}(X)$上的离散赋值环，其中$X \in W_{p,j}$ 且$W_{p,j} \cap \mathbb{Q} = \mathbb{Z}_{(p)}$，以及 $R = \bigcap_{p \in \Lambda} (\bigcap_{j=1} (W_{p,j} \cap \mathbb{Q}[X]))$。

4.3.1 当多项式克鲁尔整环是戴德金整环时

设 R 是一个多项式克鲁尔整环。下一个命题表明，如果 R 的定义族中的所有幺正离散赋值环都是 $\mathbb{Z}_{(p)}$ 的剩余代数扩张，那么对于 $p \in \mathbb{P}$， R 就是一个戴德金整环。我们先回顾 [27, 28] 中给出的以下定义。

定义 4.26。设 $E = \prod_{p \in \mathbb{P}} E_p \subseteq \mathbb{O} = \prod_{p \in \mathbb{P}} \mathbb{O}_p$ 为一个子集。若对于每个 $g \in \mathbb{Z}[X]$ 和 $\alpha = (\alpha_p) \in E$，都存在 n， $d \in \mathbb{Z}$、 n， $d \geq 1$，使得 $^{g(\alpha)\ n}$ 是 $\widehat{\mathbb{Z}}$ 的单位元，即对于所有 $p \in \mathbb{P}$， v_p $(^{g(\alpha_p)\ n}_{d}) = 0$，则称 E 是多项式可分解的。^{d}

如果对于每个 $p\in\mathbb{P}$， $\alpha_p\in E_p$ 都是在 $\mathbb{Q}$ 上超越的，则 [27, 引理 2.12] 表明，上述定义中_ 的集合 E 是多项式可分解的，当且仅当对于每个 $g\in\mathbb{Z}[X]$，下面的集合是有限的:

$$\mathbb{P}_{g,\underline{E}}=\{p\in\mathbb{P}\mid\exists\alpha_p\in E_p \text{ such that } v_p(g(\alpha_p))>0\}.$$

显然，我们有

$$\mathbb{P}_{g,\underline{E}}=\{p\in\mathbb{P}\mid\exists\alpha_p\in E_p \text{ such that } g\in\mathbb{Z}[X]\cap M_{(p),\alpha_p}\},$$

其中 $M_{(p),\ \alpha_p}=M_{(p),\ \alpha_p,\ \infty}$ 是 $\mathbb{Z}_{(p),\ \alpha_p}=\mathbb{Z}_{(p),\ \alpha_p,\ \infty}$ 的极大理想。

命题 4.27. 设 R 是介于 $\mathbb{Z}[X]$ 和 $\mathbb{Q}[X]$ 之间的克鲁尔整环。则以下命题等价。

(1) R 是戴德金整环。

(2) R 的定义族中的每个幺正离散赋值环 W 都是 $W\cap\mathbb{Q}$ 的剩余代数扩张。

(3) $R=\mathrm{Int}_{\mathbb{Q}}(E,\mathbb{O})$，其中存在某个子集 $E=\prod\limits_{p\in\mathbb{P}}E_p\subset\mathbb{O}=\prod\limits_{p\in\mathbb{P}}\mathbb{O}_p$，使得对每个 $p\in\mathbb{P}$，$E_p\subset\mathbb{O}_p^{br}$ 都是由 $\mathbb{Q}$ 上的超越元素组成的有限集。

在这种情况下， E 是多项式可分解的。

证明。 (1) $\Rightarrow$(2) 这是定理 4.10 (3) 的直接推论。

(2) $\Rightarrow$ (3) 令 $\{W_i\}_{i\in I}$ 为 R 的定义离散赋值环族中由某个 $p\in\mathbb{P}$的扩张 $\mathbb{Z}_{(p)}$ 构成的真子集。根据定理 3.1，若 W_i 是 $\mathbb{Z}_{(p)}$的剩余代数扩张，则存在一个在 $\mathbb{Q}$上超越的 $\alpha_p\in\mathbb{O}_p^{\mathrm{br}}$，使得$W_i=\mathbb{Z}_{(p),\ \alpha_p}=\mathbb{Z}_{(p),\ \alpha_p,\ \infty}$。对每个$p\in\mathbb{P}$，我们将由这些 $\alpha_p\in\mathbb{O}_p^{\mathrm{br}}$构成的子集记为 E_p。那么，R 的定义离散赋值环族等于:

$$\{\mathbb{Z}_{(p),\alpha_p}\mid p\in\mathbb{P},\alpha_p\in E_p\}\cup\{\mathbb{Q}[X]_{(g)}\mid g\in\mathbb{Q}[X],\ \text{irreducible}\}$$

特别地，我们有

$$R=\bigcap_{i\in I}W_i\cap\mathbb{Q}[X]=\bigcap_{p\in\mathbb{P}}\bigcap_{\alpha_p\in E_p}\mathbb{Z}_{(p),\alpha_p}\cap\mathbb{Q}[X]=\bigcap_{p\in\mathbb{P}}\mathrm{Int}_{\mathbb{Q}}(E_p,\mathbb{O}_p)$$

最后一个等式由注 3.12 得出。注意，我们还有

$$\bigcap_{p\in\mathbb{P}}\mathrm{Int}_{\mathbb{Q}}(E_p,\mathbb{O}_p)=\mathrm{Int}_{\mathbb{Q}}(\underline{E},\mathbb{O})=\{f\in\mathbb{Q}[X]\mid f(\alpha)\in\mathbb{O},\forall\alpha\in\underline{E}\}$$

其中，若 $\alpha=(\alpha_p)_p\in E$，则$E=\prod E_p$、 $\mathbb{O}=\prod\mathbb{O}_p$和 $f(\alpha)=(f(\alpha_p))_p$。最后，令 $p\in\mathbb{P}$。于是，由于p — $pp\in R$， p 包含于 R的定义离散赋值环族的有限个中心中。这意味着 E_p 是有限的。

(3) $\Rightarrow$ (1) 设 M 是 R的一个极大理想。若 $M\cap\mathbb{Z}=(0)$，则 $\mathrm{ht}M=1$，因此不妨设 $M\cap\mathbb{Z}=p\mathbb{Z}$对某个 $p\in\mathbb{P}$成立。注意， $R=\mathrm{Int}_{\mathbb{Q}}(E,\ \mathbb{O})=\bigcap\limits_{p\in\mathbb{P}}\bigcap\limits_{\alpha_p\in E_p}\mathbb{Z}_{(p),\ \alpha_p}\cap\mathbb{Q}[X]$，所以若 $S=\mathbb{Z}\setminus p\mathbb{Z}$，则根据引理 4.3，$R_S=\bigcap\limits_{\alpha_p\in E_p}\mathbb{Z}_{(p),\ \alpha_p}\cap\mathbb{Q}[X]$，且由 $\alpha_p\in E_p$定理 4.15 可知$\bigcap\limits_{\alpha_p\in E_p}\mathbb{Z}_{(p),\ \alpha_p}\cap\mathbb{Q}[X]$ 是一个戴德金整环。因此，$\mathrm{ht}M=\mathrm{ht}(MR_S)=1$。于是， R 是一个一维克鲁尔整环，因此R 是一个戴德金整环。

现在证明“在这种情况下”的结论。设 $f \in \mathbb{Z}[X] \subset R$。由于 R 是一个克鲁尔整环，f 只包含于定义族中赋值整环的有限多个中心内 R （显然，f 只包含于非单位赋值整环 $\mathbb{Q}[X]_{(g)}$的有限多个中心内，而这些中心就是 R的非幺素理想）。这恰好意味着集合 $\mathbb{P}_{g,\ E} = \{p \in \mathbb{P} \mid \exists \alpha_p \in E_p, v_p(f(\alpha_p)) > 0\}$ 是有限集。因此，根据引理 2.12]，E 是多项式可分解的。 □

特别地，非戴德金的多项式克鲁尔整环必定有一个本质赋值上环，它是某个 $p \in \mathbb{P}$ 的 $\mathbb{Z}_{(p)}$ 的剩余超越扩张。

命题 4.28。设 R 是一个多项式克鲁尔整环。那么 $R = R_1 \cap R_2$，其中 R_1 是一个戴德金整环，且 $\mathbb{Z}[X] \subset R_1 \subseteq \mathbb{Q}[X]$，而 R_2 要么是一个非 *Pr ¨ufer* 克鲁尔整环，满足 $\mathbb{Z}[X] \subseteq R_2 \subset \mathbb{Q}[X]$，并且对于所有满足 $Q \in X^1(R_2)$ 且 $Q \cap \mathbb{Z} \neq (0)$ 的情形，Q 都不是极大的；要么是 $R_2 = \mathbb{Q}[X]$。

证明。令 $\mathcal{W}(R) = \{W_i\}_{i \in I}$ 为 R 的定义族中属于单位赋值整环的子集。注意，$\mathcal{W}(R) = \emptyset$ 等价于说 $R = \mathbb{Q}[X]$；在这种情况下，我们有 $R_1 = R_2 = \mathbb{Q}[X]$。现在假设 $\mathcal{W}(R) \neq \emptyset$。我们将 $\mathcal{W}(R)$ 划分为子集 $\mathcal{W}_{\mathrm{ra}}(R)$（它是某个 $p \in \mathbb{P}$ 的剩余代数扩张）和子集 $\mathcal{W}_{\mathrm{rt}}(R)$（它是某个 $p \in \mathbb{P}$ 的剩余超越扩张）。

我们设：

$$R_1 = \bigcap_{W_i \in \mathcal{W}_{\mathrm{ra}}(R)} W_i \cap \mathbb{Q}[X] \quad \text{and} \quad R_2 = \bigcap_{W_i \in \mathcal{W}_{\mathrm{rt}}(R)} W_i \cap \mathbb{Q}[X].$$

于是 $R = R_1 \cap R_2$。显然，当且仅当 $\mathcal{W}_{\mathrm{ra}}(R) = \emptyset$ 时，$R_1 = \mathbb{Q}[X]$；类似地，当且仅当 $\mathcal{W}_{\mathrm{rt}}(R) = \emptyset$ 时，$R_2 = \mathbb{Q}[X]$。注意，由于 R_1 和 R_2 都是克鲁尔整环 R 的子交，因此它们都是克鲁尔整环。此外，根据命题 4.27，R_1 是戴德金整环；而如果 $\mathcal{W}_{\mathrm{rt}}(R) \neq \emptyset$，那么 R_2 不是普吕弗整环，因为每个 $W_i \in \mathcal{W}_{\mathrm{rt}}(R)$ 都是关于 $W_i \cap \mathbb{Q}$ 的剩余超越扩张（见定理 3.14]）。

现在，假设 $R_2 \subset \mathbb{Q}[X]$。设 $Q \in X^1(R_2)$ 满足 $Q \cap \mathbb{Z} \neq (0)$，于是对于某个 $p \in \mathbb{P}$，有 $Q \cap \mathbb{Q} = p\mathbb{Z}_{(p)}$。那么根据推论 2.3(i)]，对于某个 $W_k \in \mathcal{W}_{\mathrm{rt}}(R)$，有 $(R_2)_Q = W_k$。显然，若 S 是由 $\mathbb{P} - \{p\}$ 生成的 $\mathbb{Z}$ 的乘法子集，则 $(R_2)_S$ 是介于 $\mathbb{Z}_{(p)}[X]$ 与 $\mathbb{Q}[X]$ 之间的克鲁尔整环。注意，$(R_2)_S = \bigcap_{W_i \in \mathcal{W}_{\mathrm{rt}}(R)} (W_i)_S \cap \mathbb{Q}[X]$ 且 $(W_k)_S = W_k$，因此根据定理 4.10 (3)，Q_S 不是 $(R_2)_S$ 的极大理想。因此，Q 不是 R_2 的极大理想。 □

在命题 4.28 中，$R_1 = \mathbb{Q}[X]$ 若对于所有 $p \in \mathbb{P}$，R 都没有以 $\mathbb{Z}_{(p)}$ 的剩余代数扩张为剩余域的赋值上环；而且，$R_2 = \mathbb{Q}[X]$ 若 R 是戴德金整环（或者等价地，对于所有 $p \in \mathbb{P}$，R 都没有以 $\mathbb{Z}_{(p)}$ 的剩余超越扩张为剩余域的赋值上环）。因此，现在的目标是刻画：对于给定的一族 $\mathbb{Z}_{(p)}$ 的剩余超越扩张 $\{W_i\}_{i \in I}$，何时 $p \in \mathbb{P}$ 环 $\bigcap_{i \in I} W_i \cap \mathbb{Q}[X]$ 具有有限特征，从而是克鲁尔整环。

4.3.2 $\mathbb{Z}[X]$上的单项式赋值的中心

固定 $p \in \mathbb{P}$。给定 $(\alpha,\ \delta) \in \mathbb{C}_p \times (\mathbb{Q} \cup \{\infty\})$，我们将 $\mathbb{Z}_{(p),\ \alpha,\ \delta}$ 的极大理想记为 $M_{(p),\ \alpha,\ \delta}$。根据定理 3.6，$\mathbb{Z}_{(p),\ \alpha,\ \delta}$ 是 $\mathbb{Z}_{(p)}[X]$ 的上环，当且仅当 $(\alpha,\ \delta) \in \mathbb{O}_p \times (\mathbb{Q}_{\geq 0} \cup \{\infty\})$。在本节中，我们限定于这一情形，并描述 $\mathbb{Z}_{(p),\ \alpha,\ \delta}$ 在 $\mathbb{Z}_{(p)}[X]$ 上的中心，即 $M_{(p),\ \alpha,\ \delta} \cap (\mathbb{Z}_{(p)}[X])$。

令 $\mathbb{M}_p$ 为 $\mathbb{O}_p$ 的极大理想。我们令 $\mathrm{Int}(B_p(\alpha,\delta),\mathbb{M}_p)=\{f\in\mathbb{C}_p[X]\mid f(B(\alpha,\delta))\subseteq\mathbb{M}_p\}$。容易看出，$\mathrm{Int}(B_p(\alpha,\delta),\mathbb{M}_p)$ 是 $\mathrm{Int}(B_p(\alpha,\delta),\mathbb{O}_p)$ 的理想。下面的引理表明，该理想正是 $\mathbb{O}_{p,\alpha,\delta}$ 在 $\mathbb{O}_{p,\alpha,\delta}\cap\mathbb{C}_p[X]=\mathrm{Int}(B_p(\alpha,\delta),\mathbb{O}_p)$ 上的中心（见（3.13））。

引理 4.29. 设 $p\in\mathbb{P}$、$(\alpha,\delta)\in\mathbb{C}_p\times(\mathbb{Q}\cup\{\infty\})$ 以及 $\mathbb{M}_{p,\alpha,\delta}$ 是 $\mathbb{O}_{p,\alpha,\delta}$ 的极大理想。那么，我们有

$$\mathbb{M}_{p,\alpha,\delta}\cap(\mathbb{O}_{p,\alpha,\delta}\cap\mathbb{C}_p[X])=\mathrm{Int}(\bar{B}_p(\alpha,\delta),\mathbb{M}_p).$$

证明. </style}若 $\delta=\infty$，结论显然成立。于是设 $\delta<\infty$。

($\subseteq$) 设 $f\in\mathbb{M}_{p,\alpha,\delta}\cap(\mathbb{O}_{p,\alpha,\delta}\cap\mathbb{C}_p[X])$。那么，若 $f(X)=\sum a_k(X-\alpha)^k$，则对每个 k，有 $v_p(a_k)+k\delta>0$。特别地，若 $\alpha'\in\mathbb{C}_p$ 满足 $v_p(\alpha-\alpha')\geq\delta$，则有 $f(\alpha')=\sum a_k(\alpha'-\alpha)^k$，因此有 $v_p(f(\alpha'))\geq\min_k\{v_p(a_k)+k\delta\}>0$。于是，$f(B(\alpha,\delta))\subseteq\mathbb{M}_p$。

($\supseteq$) 令 $f\in\mathrm{Int}(B_p(\alpha,\delta),\mathbb{M}_p)\subset\mathrm{Int}(B_p(\alpha,\delta),\mathbb{O}_p)$。设 $E=\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset B_p(\alpha,\delta)$ 是一个伪平稳序列，使得 $\delta_E=\delta$，并令 $v_{p,E}$ 为其关联赋值（见 [29]）。由 [29, 命题 3.7], $v_{p,\alpha,\delta}=v_{p,E}$ 以及 [29, 定理 3.4], $f(X)$ 属于 $\mathbb{O}_{p,E}=\mathbb{O}_{p,\alpha,\delta}$ 的极大理想，因为根据假设，对每个 $n\in\mathbb{N}$ 都有 $v_p(f(\alpha_n))>0$；因此，$f\in\mathbb{M}_{p,\alpha,\delta}$。 □

对每个 $p\in\mathbb{P}$，令 $\mathbb{F}_p$ 为含有 p 个元素的有限域，即 $\mathbb{F}_p=\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$，并令 f 为 $f\in\overline{\mathbb{Z}}[X]$ 在 $\mathbb{F}_p[X]$ 中的像。令 $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[X])$（分别地，$\mathrm{Max}(\mathbb{Z}[X])$）表示 $\mathbb{Z}[X]$ 的素理想（分别地，极大理想）集合。注意，$\dim(\mathbb{Z}[X])=2$，且 $\mathbb{Z}[X]$ 的每个极大理想的高度均为二，因此

$$\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[X])=\{0\}\cup X^1(\mathbb{Z}[X])\cup\mathrm{Max}(\mathbb{Z}[X])\text{ and }X^1(\mathbb{Z}[X])\cap\mathrm{Max}(\mathbb{Z}[X])=\emptyset.$$

众所周知，且容易看出

(a) $X^1(\mathbb{Z}[X])=\{p\mathbb{Z}[X]\mid p\in\mathbb{P}\}\cup\{f\mathbb{Z}[X]\mid f\in\mathbb{Z}[X]\text{ and }f\text{ is irreducible in }\mathbb{Z}[X]\}$

(b) $\mathrm{Max}(\mathbb{Z}[X])=\{(p,f)\mid p\in\mathbb{P},\ f\in\mathbb{Z}[X]$ 且 $\overline{f}\mathbb{F}_p[X]$ 是一个素理想$\}$。

特别地，对于每个 $p\in\mathbb{P}$,

$$\begin{aligned}\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}_{(p)}[X]) &= \{0\}\cup\{p\mathbb{Z}_{(p)}[X]\}\\ &\cup\ \{f\mathbb{Z}_{(p)}[X]\mid f\in\mathbb{Z}_{(p)}[X]\text{ and }f\text{ is irrducible in }\mathbb{Z}_{(p)}[X]\}\\ &\cup\ \{(p,f)\mid\overline{f}\mathbb{F}_p[X]\text{ is a prime ideal }\}.\end{aligned}$$

回忆一下，若 $\alpha\in\mathbb{O}_p$，则 $\overline{\alpha}$ 是 α 模 $\mathbb{M}_p$ 的像，而 $g_\alpha(X)\in\mathbb{Z}_{(p)}[X]$ 表示一个首一多项式，使得 $g_\alpha(X)$ 是 α 在 $\mathbb{F}_p$ 上的最小多项式。

命题 4.30。令 $p\in\mathbb{P}$ 和 $(\alpha,\delta)\in\mathbb{O}_p\times(\mathbb{Q}_{\geq0}\cup\{\infty\})$。那么

$$\mathbb{Z}_{(p)}[X]\cap M_{(p),\alpha,\delta}=\begin{cases}(p), & \text{if }\delta=0\\ (p,g_\alpha(X)), & \text{if }\delta>0\end{cases}$$

证明。首先假设 $\delta=0$。那么 $\mathbb{Z}_{(p),\,\alpha,\,0}=\mathbb{Z}_{(p),\,0,\,0}=\mathbb{Z}_{(p)}[X]_{p\mathbb{Z}_{(p)}[X]}$（即平凡高斯扩张）。特别地，$\mathbb{Z}_{(p)}[X]=\mathbb{Z}_{(p),\,0,\,0}\cap\mathbb{Q}[X]$，因此，$M_{(p)}$ 的中心$_{,\,\alpha,\,0}=M_{(p),\,0,\,0}$ 在 $\mathbb{Z}_{(p)}[X]$ 上等于 $p\mathbb{Z}_{(p)}[X]$。

现在假设 $\delta=\infty$。由于 $(p,\ g_\alpha(X))$ 是 $\mathbb{Z}_{(p)}[X]$ 的极大理想，且 $g_\alpha\in M_{(p),\ \alpha,\ \infty}$，$(p,\ g_\alpha(X))$ 是 $\mathbb{Z}_{(p)}$ 在 $\mathbb{Z}_{(p)}[X]$ 上的中心，$_{\alpha,\ \infty}$。

最后，假设 $0<\delta<\infty$。由引理 4.29，

$$M_{(p),\alpha,\delta}\cap(\mathbb{Z}_{(p),\alpha,\delta}\cap\mathbb{Q}[X])=\mathrm{Int}_{\mathbb{Q}}(\bar{B}_p(\alpha,\delta),\mathbb{M}_p),$$

因此 $\mathbb{Z}_{(p)}[X]\cap M_{(p),\ \alpha,\ \delta}=\{f\in\mathbb{Z}_{(p)}[X]\mid f(B_p(\alpha,\ \delta))\subseteq\mathbb{M}_p\}$。因此，为了证明这个最后的交等于 $(p,\ g_\alpha(X))$，只需证明 g_α 将 $B_p(\alpha,\ \delta)$ 映入 $\mathbb{M}_p$。若 $\alpha'\in\mathbb{C}_p$ 满足 $v(\alpha'-\alpha)\geq\delta>0$，则 $g_\alpha(\alpha')\equiv g_\alpha(\alpha)\equiv 0$ (模 $\mathbb{M}_p$)，这正是我们想要证明的。

□

注 4.31。显然，若 $B_p(\alpha,\ \delta)\subset\mathbb{O}_p$ 且 $\delta>0$，则对所有 $\alpha'\in B_p(\alpha,\ \delta)$，都有 $\alpha=\alpha'$，因此 $g_\alpha=g_{\alpha'}$。于是，对于 $\delta>0$，$\mathbb{Z}_{(p),\ \alpha,\ \delta}$ 在 $\mathbb{Z}_{(p)}[X]$ 上的中心不依赖于球 $B(\alpha,\ \delta)$ 的具体中心。最重要的是，由引理 4.30，给定 $\alpha\in\mathbb{O}_p$，$\mathbb{Z}_{(p),\ \alpha,\ \delta}$ 在 $\mathbb{Z}_{(p)}[X]$ 上的中心对所有 $\delta\in\mathbb{Q}_{>0}\cup\{\infty\}$ 都是同一个极大理想。

综合这两条备注，对于每个 $\delta\in\mathbb{Q}$，$\delta>0$，我们有

$$M_{(p),\alpha,\delta}\cap\mathbb{Z}[X]=M_{(p),\alpha',\infty}\cap\mathbb{Z}[X],\ \ \forall\alpha'\in\bar{B}_p(\alpha,\delta).$$

特别地，对于 $\delta>0$ 和 $g\in\mathbb{Z}[X]$，我们有 $g\in M_{(p),\ \alpha,\ \delta}$ 当且仅当 $g\in M_{(p),\ \alpha',\ \infty}$ 对于某个（因而对于所有） $\alpha'\in B_p(\alpha,\ \delta)$。

推论 4.32. 令 $p\in\mathbb{P}$ 和 $(\alpha_i,\ \delta_i)\in\mathbb{O}_p\times(\mathbb{Q}_{\geq 0}\cup\{\infty\})$，其中 $i=1,\ 2$。
那么 $\mathbb{Z}_{(p)}[X]\cap M_{(p),\ \alpha_1,\ \delta_1}=\mathbb{Z}_{(p)}[X]\cap M_{(p),\ \alpha_2,\ \delta_2}$ 当且仅当以下条件之一成立 *s:*

(a) $\delta_1=\delta_2=0$;

(b) $\delta_i\neq 0$，对于 $i=1,\ 2$，以及 α_1、α_2，在 $\mathbb{F}_p$ 上共轭。等价地，对于某个 $\sigma\in G_p=Gal(\mathbb{Q}_p/\mathbb{Q}_p)$，$v_p(\sigma(\alpha_1)-\alpha_2)>0$。

证明。($\Rightarrow$) 首先假设 $\mathbb{Z}_{(p)}$、$_{\alpha_1}$、$_{\delta_1}$、$\mathbb{Z}_{(p)}$、$_{\alpha_1}$、$_{\delta_1}$ 在 $\mathbb{Z}_{(p)}[X]$ 上具有相同的中心。根据命题 4.30，对于 $i=1,\ 2$，我们有 $\delta_1=\delta_2=0$ 或 $\delta_i\neq 0$。在后一种情况下，对于 $i=1,\ 2$，我们有 $\mathbb{Z}_{(p)}[X]\cap M_{(p)}$、$_{\alpha_i}$、$_{\delta_i}$ $=(p$、$g_{\alpha_i}(X))$，其中 $g_{\alpha_i}\in\mathbb{Z}_{(p)}[X]$ 是一个首一多项式，使得 g_{α_i} 是 α_i 在 $\mathbb{F}_p$ 上的最小多项式。于是，当且仅当 $g_{\alpha_1}=g_{\alpha_2}$ 时，这些素理想相同，也就是说，α_1、α_2 在 $\mathbb{F}_p$ 上共轭。注意，最后这个条件等价于存在某个 $\sigma\in$Gal$(\mathbb{F}_p/\mathbb{F}_p)$，使得 $\sigma(\alpha_1)=\alpha_2$。由于对于某个 $\sigma\in G_p$ [7, Chapt. V, §2.2, Proposition 6(ii)], $\sigma(\alpha_1)=\sigma(\alpha_1)$，因此可得 $v_p(\sigma(\alpha_1)-\alpha_2)>0$，如所断言。

($\Leftarrow$) 若 $\delta_1=\delta_2=0$，则对于 $i=1,\ 2$，有 $\mathbb{Z}_{(p)}[X]\cap M_{(p),\ \alpha_i,\ \delta_i}=(p)$。若改为 $\delta_i\neq 0$ 对于 $i=1,\ 2$ 成立，且 $\alpha_1,\ \alpha_2$ 在 $\mathbb{F}_p$上共轭，则由上述论证可得 $\mathbb{Z}_{(p)}[X]\cap M_{(p),\ \alpha_1,\ \delta_1}=\mathbb{Z}_{(p)}[X]\cap M_{(p),\ \alpha_2,\ \delta_2}$。

□

在推论 4.32 中，如果 $\delta_i\neq 0$ for $i=1,2$，则有以下三种可能性：(i) α_1,α_2 在 G_p 和 $\delta_1=\delta_2$ 的作用下共轭，因此 $\mathbb{Z}_{(p),\alpha_1,\delta_1}=\mathbb{Z}_{(p),\alpha_2,\delta_2}$（所以特别是它们在 $\mathbb{Z}_{(p)}[X]$上有相同的中心）；(ii) α_1,α_2 在 $\mathbb{Q}_p$ 上不共轭；或 (iii) $\delta_1\neq\delta_2$，使得$\mathbb{Z}_{(p),\alpha_1,\delta_1}\neq\mathbb{Z}_{(p),\alpha_2,\delta_2}$，但 α_1,α_2 在 $\mathbb{F}_p$ 上共轭，因此相应的赋值整环在 $\mathbb{Z}_{(p)}[X]$上有相同的中心。例如，若 $\alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{O}_p$ 满足 $v_p(\alpha_1-\alpha_2)>0$（即它们属于 $\mathbb{O}_p$ 中半径严格为正的同一个球），则 $\alpha_1=\alpha_2$。 — —

4.3.3 有限特征

m_p多项式克鲁尔整环 R 必为如下形式： $R = \bigcap (\bigcap (W_{p,j} \cap \mathbb{Q}[X])$，其中 $\Lambda \subseteq \mathbb{P}_{p\in\Lambda}$ $_{j=1}$且 $W_{p,\ j}$ 均为离散赋值环，对每个 $p \in \Lambda$ 和 $j \in \{1, \ldots, m_p\}$ 都成立。但一般而言，这种形式的环未必是多项式克鲁尔整环（例如，参见 [10, 定理 3.5]或例 4.33）。

例 4.33. 对每个素数 $p \in \mathbb{P}$，令 $\delta_p \in \mathbb{Q}$、 $\delta_p > 0$，并令

$$R = \bigcap_{p\in\mathbb{P}} \mathbb{Z}_{(p),0,\delta_p} \cap \mathbb{Q}[X].$$

于是 R 不是克鲁尔整环，因为对 $p \in \mathbb{P}$， X 包含在 $\mathbb{Z}_{(p)}$ 的剩余超越扩张 $\mathbb{Z}_{(p),0,\delta_p}$ 的每个中心中。

在本节中，我们确定这样的交何时为克鲁尔整环。

我们考虑 $\mathbb{O}$ 的子集 $E = \prod E_p$ 的情形，使得对每个 $p \in \mathbb{P}$， E_p 是 $\mathbb{O}_p^{\mathrm{br}}$中球的有限并$_{p\in\mathbb{P}}$:

$$E_p = \bigcup_{j=1}^{m_p} \bar{B}_p(\alpha_{p,j}, \delta_{p,j}),\ \ (\alpha_{p,j}, \delta_{p,j}) \in \mathbb{O}_p^{\mathrm{br}} \times (\mathbb{Q}_{\geq 0} \cup \{\infty\})\ \text{ for } j = 1, \ldots, m_p,$$

并假定 $\alpha_{p,j}$ 对每个 $p \in \mathbb{P}$ 和 $j \in \{1, \ldots, m_p\}$ 都在 $\mathbb{Q}$ 上是超越的。若$\delta_{p,j} \neq \infty$，则这一点总可借助稠密性论证加以假定；而若 $\delta_{p,j} = \infty$，则必须施加该条件。对每个 $p \in \mathbb{P}$，我们考虑 E_p 中由 $C(E_p)$ $= \{\alpha_{p,1}, \ldots, \alpha_{p,m_p} \mid \delta_{p,j} > 0, \forall j = 1, \ldots, m_p\}$ 给出的、半径严格为正的球的中心集，并令

$$C(\underline{E}) = \prod_{p\in\mathbb{P}} C(E_p)$$

请注意，对于每个 $p \in \mathbb{P}$， $\{\mathbb{Z}_{(p),\alpha_{p,j},\delta_{p,j}} \mid j = 1, \ldots, m_p\}$ 在 $\mathbb{Z}[X]$ 上的中心集合，即

$$\{\mathbb{Z}[X] \cap M_{(p),\alpha_{p,j},\delta_{p,j}} \mid j = 1, \ldots, m_p\}$$

是有限的（根据推论 4.32，其基数可能严格小于 m_p）。

¯我们指出，超度量球 B_p（α， δ）$\subset \mathbb{O}_p$ 的中心可以完全任意选取（球中的每个元素都是球自身的一个中心）。不过，对于我们的研究范围，根据注 4.31，改变中心的选择不会影响后面的定理 4.34，**前提是**每个球的中心都超越于 $\mathbb{Q}$ （因为在这种情况下，可以在定理 4.34 的证明中应用引理 2.12] ）。如果 $\delta_{p,\ j} \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$，则始终可以假设这一性质；而当 $\delta_{p,\ j} = \infty$ 时，则必须加以要求。

m_p **定理 4.34.** 设 $\Lambda \subseteq \mathbb{P}$ 为一个子集， $E = \prod E_p \subset \mathbb{O}$ 其中对每个 $p \in \Lambda$, $E_p = \bigcup B_p(\alpha_{p,j},$ $\delta_{p,j})_{p\in\Lambda}$ $_{j=1}$满足 $(\alpha_{p,j}, \delta_{p,j}) \in \mathbb{O}_p^{br} \times (\mathbb{Q}_{\geq 0} \cup \{\infty\})$，$\alpha_{p,j}$ 在 $\mathbb{Q}$上超越，对每个 $j \in \{1, \ldots, m_p\}$ 并令

$R=$ 积分$_{\mathbb{Q}}(E,\mathbb{O})$，其中 $E=\prod_{p\in\Lambda} E_p$，即：

$$R=\bigcap_{p\in\Lambda}\bigcap_{j=1}^{m_p}\mathbb{Z}_{(p),\alpha_{p,j},\delta_{p,j}}\cap\mathbb{Q}[X].$$

假设上述 R 的表示是不可约冗余的，则下列条件等价：

(1) R 是克鲁尔整环。

(2) 对每个（非常值且不可约的） $g\in\mathbb{Z}[X]$， g 包含于 R的有限多个高度为一的幺素理想中。

(3) 对每个 $g\in\mathbb{Z}[X]$，下列集合是有限的：

$$\mathbb{D}_{g,\underline{E}}=\{p\in\Lambda\mid\exists j\in\{1,\dots,m_p\}\ \textit{such that}\ g\in\mathbb{Z}[X]\cap\ M_{(p),\alpha_{p,j},\delta_{p,j}}\}.$$

(4) $C(\underline{E})=\prod_{p\in\Lambda}\{\alpha_{p,1},\dots,\alpha_{p,m_p}\mid\forall j=1,\dots,m_p,\delta_{p,j}>0\}$ *is polynomially factorizable.*

我们指出，若对某个 $p\in\Lambda$ 有$\delta_{p,\alpha_j}=0$（对 $j=1,\dots,m_p$），则由上述 R 的表示是不可约冗余的这一假设可得 $m_p=1$。对这样的素数 p，我们有

$$R_{(p)}=\mathbb{Z}_{(p),\alpha_p,0}\cap\mathbb{Q}[X]=\mathrm{Int}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{O}_p)=\mathbb{Z}_{(p)}[X]$$

（例如参见(3.14)）。

证明。(1) ⇔(2) 注意到， R 是克鲁尔整环，当且仅当对于每个 $f\in R$， $f\neq 0$都包含在 R 的定义族中有限多个离散赋值环上环的中心内，即 $\mathbb{Z}_{(p),\ \alpha_{p,\ j},\ \delta_{p,\ j}}$，其中 $p\in\Lambda$ 和 $j=1,\ \dots\dots m_p$，且 $\mathbb{Q}[X]_{(q)}$，其中 $q\in\mathbb{Q}[X]$ 不可约。

由于每个 $f\in R$ 都可以写成 $\frac{g}{d}$，其中某些 $g\in\mathbb{Z}[X]$ 和 $d\in\mathbb{Z}$， $d\neq 0$，显然，f 包含在 R 的定义族中有限多个离散赋值环上环的中心内，当且仅当对 g也成立；这是因为整数 d 只被有限多个 $p\in\Lambda$ 整除，并且对于每个 $p\in\Lambda$，只有有限多个扩张了 $\mathbb{Z}_{(p)}$的 R 的离散赋值环上环。此外， g 显然包含在 R 的有限多个非幺素理想中（用类似于推论 4.8 中的论证可知，它们的高度为一），因此， R 是克鲁尔整环，当且仅当条件 (2) 成立（根据假设和推论 4.6，离散赋值环 $\mathbb{Z}_{(p),\ \alpha_{p,\ j},\ \delta_{p,\ j}}$ 在 R 上的中心高度为一）。

(2) ⇔ (3) 由于对每个 $p\in\Lambda$，延拓 $\mathbb{Z}_{(p)}$ 的 R 的幺正离散赋值环上环只有有限多个（即 $\mathbb{Z}_{(p),\ \alpha_{p,\ j},\ \delta_{p,\ j}}$，其中 $j=1,\ \dots\dots,\ m_p$），并且由推论 4.6，它们在 R 上的中心高度为一，因此 (2) 等价于 (3)。

(3) ⇔(4) 令 $\mathbb{P}_0$表示 Λ中满足存在 $j\in\{1,\dots,m_p\}$使得$\delta_{p,j}=0$的素数集合。若 $p\in\mathbb{P}_0$，则根据注 3.18 以及上述 R 表示是不可约冗余的这一假设，有 $m_p=1$，并且根据命题 4.30，有 $M_{(p),\alpha_p,1,\delta_{p,1}}\cap\mathbb{Z}_{(p)}[X]=(p)$。因此，对于每个非零的$g\in\mathbb{Z}[X]$， $\mathbb{D}_{g,E}\cap\mathbb{P}_0$ 是有限集。根据上述同一命题，若 $p\in\Lambda\setminus\mathbb{P}_0$，则有$M_{(p),\alpha_p,j,\delta_{p,j}}\cap\mathbb{Z}_{(p)}[X]=M_{(p),\alpha_p,j,\infty}\cap\mathbb{Z}_{(p)}[X]$，从而 $\mathbb{D}_{g,E}\setminus\mathbb{P}_0=\mathbb{P}_{g,C(E)}$。因此，$\mathbb{D}_{g,E}$ 是有限的，当且仅当$\mathbb{P}_{g,C(E)}$ 是有限的。由于根据假设，每个 $\alpha_{p,j}$ 在 $\overline{\mathbb{Q}}$ 上都是超越的， [27, 引理 2.12] 表明， $C(E)$是多项式可分解的，当且仅当对于每个 $g\in\mathbb{Z}[X]$， $\mathbb{P}_{g,C(E)}$ 是有限的。因此，(3)和(4)等价。 □

令 Λ 和 R 如定理 4.34 中所述。注意到，$\Lambda=\emptyset$ 当且仅当 $R=\mathbb{Q}[X]$；此外，如果 Λ 是有限的，则 R 总是一个克鲁尔整环。下面的定理是定理 4.15 的整体版本，描述了多项式克鲁尔整环这一类。根据 Heinzer 的一个结果，这恰好是介于 $\mathbb{Z}[X]$ 和 $\mathbb{Q}[X]$ 之间的整闭诺特整环这一类（见 [18]）。

定理 4.35. 设 R 是一个多项式克鲁尔整环。则

$$R=\bigcap_{p\in\Lambda}\bigcap_{j=1}^{m_p}\mathbb{Z}_{(p),\alpha_{p,j},\delta_{p,j}}\cap\mathbb{Q}[X]=\mathrm{Int}_{\mathbb{Q}}(\underline{E},\mathbb{O}) \tag{4.36}$$

对于某个子集 $\Lambda\subseteq\mathbb{P}$，其中 $(\alpha_{p,j},\delta_{p,j})\in\mathbb{O}_p^{br}\times(\mathbb{Q}_{\geq 0}\cup\{\infty\})$ 满足 $\alpha_{p,j}$ 在 $\mathbb{Q}^{m_p}$ 上超越，如果 $\delta_{p,j}=\infty$ 对每个 $p\in\Lambda$ 和 $j=1,\ldots,m_p$ 都成立；$\underline{E}=\prod_{p\in\Lambda}E_p$ 满足 $(\alpha_{p,j},\delta_{p,j})$；并且 $C(E)=\prod_{p\in\Lambda}\{\alpha_{p,1},\ldots,\alpha_{p,m_p}\mid\forall j=1,\ldots,m_p,\delta_{p,j}>0\}$ 是多项式可分解的。

此外，若对所有 $p\in\Lambda$ 和 $j=1,\ldots,m_p$，都有 $ht(M_{(p),\alpha_{p,j},\delta_{p,j}}\cap R)=1$，则

$$Cl(R)=\bigoplus_{p\in\Lambda}(\mathbb{Z}/d_p\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}^{m_p-1}),$$

其中 $e_{p\,j}=e(\mathbb{Z}_{(p),\alpha_{p,j},\delta_{p,j}}|\mathbb{Z}_{(p)})$ 对于 $j=1,\ldots\ldots,m_p$ 以及 $d_p=gcd(e_{p,1},\ldots\ldots,e_{p,m_p})$ 对所有 $p\in\Lambda$.

证明。正如我们在 (4.1) 中所指出的，我们有

$$R=\bigcap_{p\in\Lambda}(\bigcap_{j=1}^{m_p}W_{p,j})\cap\mathbb{Q}[X],$$

对某个子集 $\Lambda\subseteq\mathbb{P}$，其中 $W_{p,j}$ 是位于 $\mathbb{Z}_{(p)}$ 之上的 $\mathbb{Q}(X)$ 的离散赋值环，对每个 $j=1,\ldots,m_p$ 以及 $p\in\mathbb{P}$。

由定理 3.6，对每个 $p\in\Lambda$，存在 $(\alpha_{p,j},\delta_{p,j})\in\mathbb{O}_p^{\mathrm{br}}\times(\mathbb{Q}_{\geq 0}\cup\{\infty\})$，使得 $W_{p,j}=\mathbb{Z}_{(p),\alpha_{p,j},\delta_{p,j}}$，对每个 $j=1,\ldots,m_p$。特别地，R 具有所述形式。

最后，$C(\underline{E})=\prod_{p\in\Lambda}\{\alpha_{p,1},\ldots,\alpha_{p,m_p}\mid\forall j=1,\ldots,m_p,\delta_{p,j}>0\}$ 依定理 4.34 是多项式可分解的，且 $\mathrm{Cl}(R)=\bigoplus_{p\in\Lambda}(\mathbb{Z}/d_p\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}^{m_p-1})$ 依 [10, 定理 2.4(4)] 的证明。□

在下一个推论中，我们将完整描述 $\mathbb{Z}[X]$ 和 $\mathbb{Q}[X]$ 之间的唯一分解整环。

推论4.37。设 R 是 $\mathbb{Z}[X]$ 和 $\mathbb{Q}[X]$ 之间的一个唯一分解整环。那么存在一个子集 $\Lambda\subseteq\mathbb{P}$ 和数对 $(\alpha_p,\delta_p)\in\mathbb{O}_p^{br}\times(\mathbb{Z}_{\geq 0}\cup\{\infty\})$，使得

$$R=\bigcap_{p\in\Lambda}\mathbb{Z}_{(p),\alpha_p,\delta_p}\cap\mathbb{Q}[X]=\bigcap_{p\in\Lambda}\mathrm{Int}_{\mathbb{Q}}(\bar{B}_p(\alpha_p,\delta_p),\mathbb{O}_p) \tag{4.38}$$

其中，对于每个 $p\in\Lambda$，α_p 在 $\mathbb{Q}_p$ 上是非分歧的，并且当 $\delta_p=\infty$ 时在 $\mathbb{Q}$ 上是超越的，而集合 $C(E)=\prod_{p\in\Lambda}\{\alpha_p\mid\delta_p>0\}$ 是多项式可分解的。

证明。 众所周知，唯一分解整环是类群平凡的克鲁尔整环（例如参见 [13,命题 6.1]）。根据定理 4.35， R 如（4.36）所示（因此，特别地，根据 [18]，它是诺特整环）。根据上述定理对 R 的类群的刻画，以及定理4.24， R 如推论所述。注意，（4.38）的第二个等式由注 3.12 得出。

□

推论 4.39。 设 $\Lambda \subseteq \mathbb{P}$ 为一个子集，且 $(\alpha_{p,j},\delta_{p,j})$、$(\alpha_{p,j},\delta'_{p,j}) \in \mathbb{O}_p^{br} \times (\mathbb{Q}_{\geq 0} \cup \{\infty\})$ 满足$\delta_{p,j} \leq \delta'_{p,j}$，并且 $\alpha_{p,j}$ 在 $\mathbb{Q}$ 上是超越的，当且仅当对于每个 $p \in \Lambda$ 和 $j = 1, \ldots\ldots, m_p$，均有 $\delta_{p,j} = \infty$。设

$$R = \bigcap_{p\in\Lambda} \bigcap_{j=1}^{m_p} \mathbb{Z}_{(p),\alpha_{p,j},\delta_{p,j}} \cap \mathbb{Q}[X] \text{ and } R' = \bigcap_{p\in\Lambda} \bigcap_{j=1}^{m_p} \mathbb{Z}_{(p),\alpha_{p,j},\delta'_{p,j}} \cap \mathbb{Q}[X].$$

设 $\Delta = \{p \in \Lambda \mid 0 = \delta_{p,j} < \delta'_{p,j}$ 对于某些 $j = 1, \ldots\ldots, m_p\}$ 成立，并假设 Δ 是一个有限集。则以下陈述成立。

(1) R 是克鲁尔整环，当且仅当 R' 是克鲁尔整环。(2) 设 R 为克鲁尔整环。则 $Cl(R')$ 是 $Cl(R)$ 的商群。此外，如果对于所有 $\delta_{p,j}$ （其中 $\delta_{p,j} < \infty$）都有 $\delta'_{p,j} < \infty$ ，则 $Cl(R') = Cl(R)$。(3) 如果 R 是唯一分解整环，则 R' 也是唯一分解整环。

证明。 (1) 对每个 $g \in \mathbb{Z}[X]$，令

$$\begin{aligned} \mathbb{D}_{g,\underline{E}}(R) &= \{p \in \Lambda \mid \exists j \in \{1, \ldots, m_p\} \text{ such that } g \in \mathbb{Z}[X] \cap M_{(p),\alpha_{p,j},\delta_{p,j}}\} \\ \mathbb{D}_{g,\underline{E}}(R') &= \{p \in \Lambda \mid \exists j \in \{1, \ldots, m_p\} \text{ such that } g \in \mathbb{Z}[X] \cap M_{(p),\alpha_{p,j},\delta'_{p,j}}\}. \end{aligned}$$

于是，由 定理 4.34，只需证明 $\mathbb{D}_{g,E}(R)$ 有限当且仅当 $\mathbb{D}_{g,E}(R')$ 有限。

显然，$\mathbb{Z}[X] \cap M_{(p),\alpha_{p,j},\delta_{p,j}} \subseteq \mathbb{Z}[X] \cap M_{(p),\alpha_{p,j},\delta'_{p,j}}$ 对每个 $p \in \Lambda$ 以及 $j = 1, \ldots, m_p$。因此，$\mathbb{D}_{g,E}(R) \subseteq \mathbb{D}_{g,E}(R')$。此外，若 $\delta_{p,j} \neq 0$ 对 $j = 1, \ldots, m_p$，则 $\mathbb{Z}[X] \cap M_{(p),\alpha_{p,j},\delta_{p,j}} = \mathbb{Z}[X] \cap M_{(p),\alpha_{p,j},\delta'_{p,j}}$ 由命题 4.30。因此，$\mathbb{D}_{g,E}(R') \setminus \mathbb{D}_{g,E}(R) \subseteq \Delta$，又由于 Δ 有限，故 $\mathbb{D}_{g,E}(R') \setminus \mathbb{D}_{g,E}(R)$ 有限。从而 $\mathbb{D}_{g,E}(R)$ 有限当且仅当 $\mathbb{D}_{g,E}(R')$ 也有限。

(2) 记号与定理 4.10 和 4.35 中相同。我们可以假设上述 R 的表示是不可约冗余的。因此，根据命题 3.16，上述 R' 的表示也不可约冗余。注意，如果 $\delta_{p,j} \in \mathbb{Q}$，那么 $(\alpha_{p,j}, \delta_{p,j})$ 是一个极小对；因此，如果 $\delta'_{p,j} < \infty$，那么 $(\alpha_{p,j}, \delta'_{p,j})$ 是一个极小对，因为 $\bar{B}_p(\alpha_{p,j}, \delta'_{p,j}) \subseteq \bar{B}_p(\alpha_{p,j}, \delta_{p,j})$。由此，根据定理 4.10，存在某个正整数 d'_p，使得对于每个 $p \in \Lambda$，都有 $\mathrm{Cl}(R') = \bigoplus_{p\in\Lambda} (\mathbb{Z}/d'_p\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}^{m_p-1})$，其中 $d'_p | d_p$。因此， $\mathbb{Z}/d'_p\mathbb{Z} \cong (\mathbb{Z}/d_p\mathbb{Z})/(d'_p\mathbb{Z}/d_p\mathbb{Z})$；于是，若令 $H = \bigoplus_{p\in\Lambda} (d'_p\mathbb{Z}/d_p\mathbb{Z} \oplus \{0\}^{m_p-1})$，则 H 是 $\mathrm{Cl}(D)$ 的一个子群，并且 $\mathrm{Cl}(R)/H = \mathrm{Cl}(R')$。特别地，若对所有满足 $\delta_{p,j} < \infty$ 的 $\delta_{p,j}$ ，都有 $\delta'_{p,j} < \infty$ ，则再次由定理 4.10 得 $d_p = d'_p$ 。因此 $\mathrm{Cl}(R) = \mathrm{Cl}(R')$。

(3) 这由上面的 (2) 得出，因为唯一分解整环是类群平凡的克鲁尔整环。 □

例 4.40。 令 $R = \bigcap_{p\in\mathbb{P}} \mathbb{Z}_{(p),0,0} \cap \mathbb{Q}[X]$。则 $R = \mathbb{Z}[X]$，因此 R 是克鲁尔整环（事实上，是唯一分解整环）。然而，若 $R' = \bigcap_{p\in\mathbb{P}} \mathbb{Z}_{(p),0,p} \cap \mathbb{Q}[X]$，则 R 不是克鲁尔整环，因为 $X \in X\mathbb{Z}_{(p),0,p} = p\mathbb{Z}_{(p),0,p}$ 对所有 $p \in \mathbb{P}$ 均成立。因此， Δ 为有限这一条件是推论 4.39 的必要条件。

4.3.4 具有指定类群的克鲁尔整环的构造

为方便起见，若多项式克鲁尔整环 R 满足：对于所有满足 $Q \cap \mathbb{Z} \neq (0)$ 的 $Q \in X^1(R)$， Q 都不是极大理想，则称其为纯 克鲁尔整环。根据命题 4.28，若 R 是一个非戴德金的多项式克鲁尔整环，则 R 可以表示为戴德金整环R_1 与纯克鲁尔整环 R_2的交，即 $R = R_1 \cap R_2$。根据定理 4.35，多项式克鲁尔整环的除子类群是可数族有限生成阿贝尔群的直和。反过来，若 G 是可数族有限生成阿贝尔群的直和，则在 $\mathbb{Z}[X]$ 与 $\mathbb{Q}[X]$ 之间存在一个戴德金整环，其理想类群为 G [27, 定理 3.1]。

接下来，我们构造一个具有指定除子类群的纯克鲁尔整环。

命题 4.41. 设 G 是一个有限生成阿贝尔群。则存在一个介于 $\mathbb{Z}[X]$ 与 $\mathbb{Q}[X]$ 之间的纯克鲁尔整环 R，使得$Cl(R) = G$。

证明。 设对某些整数 $e_1, \ldots, e_n \in \mathbb{N}$与 $m \geq 0$，有 $G = \mathbb{Z}/e_1\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}/e_n\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}^m$。设$p_1, \ldots, p_n \in \mathbb{P}$互不相同。

我们在$\mathbb{Z}_{p_n}$中选取 $m+1$ 个互不相同的元素$\alpha_{p_n,1}, \ldots, \alpha_{p_n,m+1}$，它们在 $\mathbb{Q}$上是超越的。令 $N = \max\{v_{p_n}(\alpha_{p_n,i} - \alpha_{p_n,j}) \mid i \neq j \in \{1, \ldots, m+1\}\}$。对$j \in \{1, \ldots, m+1\}$，令$W_{p_n,j} = \mathbb{Z}_{(p_n)}[\alpha_{p_n,j}, N+1/e_n]$。注意这些$W_{p_n,j}$互不相同（因为对每个 $i \neq j$，有$v_{p_n}(\alpha_{p_n,i} - \alpha_{p_n,j}) < N + 1/e_n$），并且对每个 $j \in \{1, \ldots, m+1\}$，$(\alpha_{p_n,j}, N + 1/e_n)$是一个极小对。于是由定理 4.10的(4)与命题4.22，我们有

$$e_{p_n,j} = e(W_{p_n,j} \mid \mathbb{Z}_{(p_n)}) = e(N + 1/e_n \mid \mathbb{Q}_p) = e_n.$$

通过同样的论证，我们还可以选择 α_{p_i} in $\mathbb{Z}_{p_i}$，使其在 $\mathbb{Q}$ 上是超越的，从而 $(\alpha_{p_i}, 1/e_i)$ 是 $i = 1$、.....、$n-1$ 的极小对。令 $W_{p_i} = \mathbb{Z}_{(p_i)}[\alpha_{p_i}, 1/e_i]$ for $i = 1$、.....、$n-1$，使得如果我们设 $R = (\bigcap_{i=1} W_{p_i}) \cap (\bigcap_{j=1} W_{p_n,j} \cap \mathbb{Q}[X])$，则根据定理 4.35， R 是一个克鲁尔整环，且 $\mathrm{Cl}(R) = G$；根据定理 4.10(3)，对于所有满足 $Q \cap \mathbb{Z} \neq (0)$ 的 $Q \in X^1(R)$， Q 都不是极大的。

□

定理 4.42。 设 G 是一个可数族 $\{G_i \mid i \in I\}$ 有限生成阿贝尔群的直和（这些群不一定各不相同）。则存在一个纯克鲁尔整环 R，其介于 $\mathbb{Z}[X]$和 $\mathbb{Q}[X]$ 之间，且 $Cl(R) = G$。此外，对于每个 $i \in I$，存在 $\mathbb{Z}$ 的一个乘法子集 S_i，使得 R_{S_i} 是一个纯克鲁尔整环，且 $Cl(R_{S_i}) = G_i$。

证明。 对于每个 $i \in I$，令 $G_i = \mathbb{Z}/e_{i1}\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}/e_{in_i}\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}^{m_i}$，其中某个 e_{i1}，....., $e_{in_i} \geq 1$、$n_i \geq 1$和$m_i \geq 0$。不失一般性，我们可以假设将 $\mathbb{P}$ 划分为一个由有限子集组成的族，该族以 I 为指标集；也就是说， $\{\mathbb{P}_i\}_{i \in I}$ 是 $\mathbb{P}$ 的一个划分，且对每个$i \in I$都有 $|\mathbb{P}_i| = n_i$。根据命题 4.41，存在一个纯克鲁尔整环 R_i、 $\mathbb{Z}[X] \subseteq R_i \subset \mathbb{Q}[X]$，使得 $\mathrm{Cl}(R_i) = G_i$。

现在令 $R = \bigcap R_i$。注意，若对每个 $i \in I$ 都有 $S_i = \mathbb{Z} \setminus \bigcup p\mathbb{Z}$，则根据引理 4.3，$R_{S_i} = R_i$；因此 R_{S_i} 是一个纯克鲁尔整环，且 $\mathrm{Cl}(R_{S_i}) = G_i$。然而， R 可能不是克鲁尔整环，也就是说，它不具有有限特征性质。

设 $i \in I$ 满足 G_i 非平凡，并设 p 是有限集 $\mathbb{P}_i$ 中固定的一个素数。假设在构造 R_i 时，我们在 $\mathbb{Z}_p$ $k_p \geq 1$ 中选取了若干个互不相同的元素，例如 $E_p =$

$\{\alpha_{p,1},\dots,\alpha_{p,k_p}\}$；另设 $\delta_{p,\ j}$ 为中心为 $\alpha_{p,\ j}$ 的超度量球的半径，其中 $j=1$、.....、k_p。随后，我们将 E_p 中的元素替换为 $\mathbb{Z}_p$ 中可能不同的 k_p 个互不相同的 α_p，使它们属于同一个剩余类 $\lfloor \log(p)\rfloor + p\mathbb{Z}_p$，且这些 α_p 在 $\mathbb{Q}$ 上超越。我们还相应地修改对应的 $\delta_{p,\ j}$，以便关于对应环 R_i 的先前事实仍然成立。若 G_i 平凡，则我们只需选取一个元素 $\alpha_p\in\mathbb{Z}_p$。我们断言集合

$$C(\underline{E})=\prod_{p\in\mathbb{P}}\{\alpha_{p,1},\dots,\alpha_{p,k_p}\in\mathbb{Z}_p\mid \delta_{p,j}>0\}$$

是多项式可分解的，因此根据定理 4.34 和 4.10(3)，R 是纯克鲁尔整环。令$g\in\mathbb{Z}[X]$，并令 $\alpha=(\alpha_p)\in C(E)$。于是我们有

$$g(\alpha_p)\equiv g(\lfloor\log(p)\rfloor)\pmod p$$

由于当 p充分大时，$g(\lfloor\log(p)\rfloor)$ 不被 p 整除，因此我们得到 $\mathbb{P}_{g,\ C(E)}$ 是有限的。 □

4.3.5 几乎戴德金整环及其推广

令 $R=\bigcap_{p\in\Lambda}\bigcap_{j=1}^{m_p}\mathbb{Z}_{(p),\ \alpha_{p,\ j},\ \delta_{p,\ j}}\cap\mathbb{Q}[X]$ 如定理 4.34 所述。我们知道，R 不一定是克鲁尔整环（见例 4.33）。现在，即使 R 不是克鲁尔整环，我们也来考察它的一些环论性质。

推论 *4.43.* 令 Λ 为 $\mathbb{P}$的非空子集。对每个 $p\in\Lambda$，假设 $\mathbb{Z}_{(p),\alpha_{p,j},\delta_{p,j}}$，对于某个 $(\alpha_{p,j},\delta_{p,j})\in\mathbb{O}_p^{br}\times(\mathbb{Q}_{\geq 0}\cup\{\infty\})$，是 $\mathbb{Q}(X)$的一个离散赋值环族，且扩张 $\mathbb{Z}_{(p)}$，并且 $M_{p,j}=M_{(p),\alpha_{p,j},\delta_{p,j}}$，其中 $j=1,\dots,m_p$。现在，令

$$R=\bigcap_{p\in\Lambda}(\bigcap_{j=1}^{m_p}\mathbb{Z}_{(p),\alpha_{p,j},\delta_{p,j}}\cap\mathbb{Q}[X]). \tag{4.44}$$

那么，对于所有 $P\in X^1(R)$，R_P 都是离散赋值环；对于所有满足$P\in X^1(R)$的 R 中的理想 I，$R=\bigcap R_P$ 和 $I_t=R$ 对所有 $P\in X^1(R)$均成立。此外，若(4.44) 中的表示是不可约冗余的，则有如下结论。

(1) $X^1(R)=(\bigcup_{p\in\Lambda}\{M_{p,j}\cap R\mid j=1,\dots,m_p\})\cup\{f\mathbb{Q}[X]\cap R\mid f\in\mathbb{Q}[X]\ \textit{is irreducible over}\ \mathbb{Q}\}$.

(2) $R=\mathrm{Int}_{\mathbb{Q}}(E,\mathbb{O})$，其中某个子集 $E=\prod_{p\in\Lambda}E_p\subset\mathbb{O}=\prod_{p\in\Lambda}\mathbb{O}_p$ 满足 $E_p=\bigcup_{j=1}^{m_p}B_p(\alpha_{p,j},\delta_{p,j})\subset\mathbb{O}_p^{br}$，其中若 $\delta_{p,j}=\infty$，则 $\alpha_{p,j}$ 在 $\mathbb{Q}$ 上是超越的。

证明。 第一部分由 [10, 命题 2.2(3)] 直接得出，而（1）来自 [10, 推论 2.3]。对于（2），注意到根据定理 4.15，$R=\bigcap\mathrm{Int}_{\mathbb{Q}}(E_p,\ \mathbb{O}_p)$，其中 E_p 是有限个$p\in\Lambda$球 $\bar{B}_p(\alpha_{p,\ j},\ \delta_{p,\ j})$的有限并 $\subset\mathbb{O}_p^{\mathrm{br}}$，其中 $j=1,\dots,m_p$，且$\alpha_{p,\ j}$在 $\mathbb{Q}$上超越，如果$\delta_{p,\ j}=\infty$。因此，$R=\mathrm{Int}_{\mathbb{Q}}(E,\ \mathbb{O})$，其中 $E=\prod\underline{E_p}_{,p\in\Lambda}$ □

回顾一下，整环 D 是几乎戴德金整环，当且仅当对于 D的每个极大理想 M， D_M 都是离散赋值环。下面的推论刻画了 $\mathbb{Q}[X]$的离散赋值环的交何时为几乎戴德金整环。

推论 4.45. 设 Λ 是 $\mathbb{P}$ 的一个非空子集。对每个 $p \in \Lambda$ 以及 $j = 1, \ldots\ldots, m_p$，假设$\mathbb{Z}_{(p),\ \alpha_{p,\ j},\ \delta_{p,\ j}}$，对某个 $(\alpha_{p,\ j},\ \delta_{p,\ j}) \in \mathbb{O}_p^{br} \times (\mathbb{Q}_{\geq 0} \cup \{\infty\})$，是 $\mathbb{Q}(X)$的一个离散赋值环族，且扩张$\mathbb{Z}_{(p)}$。设

$$R = \bigcap_{p\in\Lambda} (\bigcap_{j=1}^{m_p} \mathbb{Z}_{(p),\alpha_{p,j},\delta_{p,j}} \cap \mathbb{Q}[X]). \tag{4.46}$$

则下列陈述等价:

（1） R 是一个几乎戴德金整环。（2）$\mathbb{Z}_{(p),\ \alpha_{p,\ j},\ \delta_{p,\ j}}$对所有 $p \in \Lambda$ 以及 $j = 1, \ldots\ldots, m_p$在 $\mathbb{Z}_{(p)}$上是剩余代数的。（3） R 的每个非幺素理想都是极大理想。

^{m_p}证明。（1）$\Rightarrow$（2）对固定的 $p \in \Lambda$，设 $S = \mathbb{Z}\backslash p\mathbb{Z}$。则 $R_S = \bigcap\ \mathbb{Z}_{(p),\ \alpha_{p},\ _j,\ \delta_{p},\ _j} \cap \mathbb{Q}[X]$ 由引理 4.3$_{j=1}$，且 R_S 是一个几乎戴德金整环，同时也是克鲁尔整环，因此 R_S 是戴德金整环，^{m_p}从而交 $R_S = \bigcap\ \mathbb{Z}_{(p),\ \alpha_{p},\ _j,\ \delta_{p},\ _j} \cap \mathbb{Q}[X]$ 是不可约冗余的。因此，由定理 4.10（3），$_{j=1}\mathbb{Z}_{(p),\ \alpha_{p},\ _j,\ \delta_{p},\ _j}$对所有 $p \in \Lambda$ 以及 $j = 1, \ldots\ldots, m_p$在 $\mathbb{Z}_{(p)}$上是剩余代数的。

(2) $\Rightarrow$(3) 根据 [10, 推论 2.6(1)]， R 是一个几乎戴德金整环。因此， R 的每个非零素理想都是极大的。于是， R 的每个非幺素理想也是极大的。

(3) $\Rightarrow$ (1) 反设 R 不是几乎戴德金整环。则对于某个 $p \in \Lambda$， $R_{\mathbb{Z}\backslash p\mathbb{Z}}$ 不是^{m_p}几乎戴德金整环。令 $S = \mathbb{Z}\setminus p\mathbb{Z}$。由引理 4.3，$R_S = \bigcap_{j=1}\ \mathbb{Z}_{(p),\ \alpha_{p,\ j},\ \delta_{p,\ j}} \cap \mathbb{Q}[X]$，因此 R_S 是克鲁尔整环但不是戴德金整环。于是，$\dim R_S = 2$，从而存在 R的一个高度二的素理想 M，使得 $MR_S \cap \mathbb{Q} = p\mathbb{Z}_{(p)}$。注意，$\mathrm{ht}(MR_S) = \mathrm{ht}M = 2$，所以根据素理想避让定理[14, 推论 4.9] 或 [20, 命题 2.1]，MR_S 是 R_S 的无穷多个高度为一的素理想的并集。注意，包含p 的 R_S 的高度为一的素理想只有有限多个，因此 MR_S 包含 R 中满足 $p \notin Q$的无穷多个素理想 Q；特别地，这些素理想 Q 都不是极大的。显然，这样的素理想 Q 必为 $Q \cap \mathbb{Z} = (0)$。

□

设 V 是一个值群为 $G \subsetneq \mathbb{R}$的秩一非离散赋值整环。那么 V 是完全整闭的，$\mathrm{Pic}(V) = \{0\}$ 且 $\mathrm{Cl}(V) = \mathbb{R}/G$ [6, 定理 2.7]。因此，对于完全整闭整环 D，一般而言，$\mathrm{Pic}(D) \neq \mathrm{Cl}(D)$。几乎戴德金整环 D 是完全整闭的，因此 $\mathrm{Cl}(D)$定义良好，且 $\mathrm{Pic}(D)$是 $\mathrm{Cl}(D)$的一个子群。在下一个推论中，我们计算几乎戴德金整环的皮卡群，但我们不知道如何计算它的除子类群。

推论 4.47。沿用推论 *4.45* 中的记号。若 R 是一个几乎戴德金整环，则满足以下结论。

(1) $R = \mathrm{Int}_{\mathbb{Q}}(E, \mathbb{O})$，对于某个子集 $E = \prod_{p\in\Lambda} E_p \subset \mathbb{O} = \prod_{\overline{p}\in\Lambda\subseteq} \mathbb{O}_p$，使得 $E_p = \{\alpha_{p,1}, \ldots, \alpha_{p,m_p}\} \subseteq \mathbb{O}_p^{br}$, $\alpha_{p,j}$ 在 $\mathbb{Q}$ 上是超越的，并且 $\delta_{p,j} = \infty$ 对于 $j = 1, \ldots, m_p$。

(2) $\mathbf{Pic}(R) = \bigoplus_{p\in\Lambda}(\mathbb{Z}/d_p\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}^{m_p-1})$，其中 $e_{p,j} = e(\mathbb{Z}_{(p),\alpha_{p,j},\delta_{p,j}}|\mathbb{Z}_{(p)})$ 对于 $j = 1,\ldots,m_p$，以及 $d_p = gcd(e_{p,1},\ldots,e_{p,m_p})$ 对于所有 $p\in\Lambda$。

m_p _证明。（1）根据推论 4.43，$R = \mathrm{Int}_{\mathbb{Q}}(E,\mathbb{O})$，其中 $E = \prod_{p\in\Lambda} E_p$ 和 $E_p = \bigcup_{j=1} B_p(\alpha_{p,j},\delta_{p,j}) \subset \mathbb{O}_p^{\mathrm{br}}$。此外，根据推论 4.45，$\mathbb{Z}_{(p)}$，— _ $\alpha_{p\ j}\ \delta_{p\ j}$ $\mathbb{Z}_{(p)}$ $p\in\Lambda$，，，对所有和 $j = 1$，.....，m_p而言，在上是剩余代数的。因此，$\delta_{p,j} = \infty$，$B_p(\alpha_{p,j},\delta_{p,j}) = \{\alpha_{p,j}\}$，$\alpha_{p,j}$对 $j = 1$，.....，m_p和 $E_p = \{\alpha_{p,1},\ldots,\alpha_{p,m_p}\}$而言，在 $\mathbb{Q}$上是超越的。

（2）这直接由 [10, 定理 2.4(4)]的证明得到。 □

一般而言，式（4.46）中的几乎戴德金整环不一定是戴德金整环（具体示例参见 [10,定理 3.1 和 3.5] ）。

致谢

这项研究是在第一作者于 2026年1月访问帕多瓦大学期间完成的。他感谢数学系的热情接待。第一作者的研究得到了韩国国家研究基金会（NRF）通过教育部资助的基础科学研究计划（2017R1D1A1B06029867）的支持。第二作者是意大利数学研究所（INdAM）代数与几何结构及其应用国家研究组（GNSAGA）的成员。

参考文献

[1] V. Alexandru, N. Popescu，关于一个域上赋值的延拓类 `a *K(X)* K，Rev. Roumaine Math. Pures Appl. 33 (1988), no. 5, 393-400.[2] V. Alexandru, N. Popescu, A. Zaharescu，赋值剩余超越扩张的一个刻画定理。《京都大学数学杂志》28 (1988), no. 4, 579-592.[3] V. Alexandru, N. Popescu, A. Zaharescu，赋值剩余超越扩张的最小定义对。《京都大学数学杂志》30 (1990), no. 2, 207-225.[4] V. Alexandru, N. Popescu, A. Zaharescu，关于 $K(X)$ 上的所有赋值。《京都大学数学杂志》，30 (1990), no. 2, 281–296.[5] V. Alexandru, N.Popescu, A.Zaharescu，关于 $\mathbb{C}_p$ 的闭子域。《数论杂志》68 (1998), no. 2, 131-150.[6] D.F. Anderson, M. Fontana 和 M. Zafrullah，关于 *Pr ¨ufer* $*$-乘法整环和类群的一些备注，《代数学杂志》319 (2008), 272-295.[7] N. Bourbaki，代数 `几何，Hermann，巴黎，1961.[8] P.-J. Cahen 和 J.-L. Chabert，整值多项式，《美国数学会数学调查与专著》，第48卷，普罗维登斯，1997。

[9] J.-L. Chabert，赋值域中的多项式闭包，《数论杂志》130 (2010), 458-468.[10] G. W. Chang，整数环的多项式上环的理想类群，《韩国数学会杂志》59 (2022), No. 3, pp. 571-594. [11] C. Chevalley，《单变量代数函数理论导论》。数学调查丛书，第 VI 号。美国数学会，纽约，N. Y.，1951.[12] A. J. Engler, A. Prestel，赋值域。施普林格出版社，柏林，2005.[13] R. M. Fossum，克鲁尔整环的除子类群。数学及其边界领域成果，第74卷。施普林格出版社，纽约—海德堡，1973.[14] R. Gilmer，乘法理想理论，1972年版的修订重印本，女王大学，金斯顿，ON，1992.[15] R. Gilmer 和 W. Heinzer，赋值环的不可冗余交，《数学杂志》103 (1968), 306-317. [16] R. Gilmer, W. Heinzer, D. Lantz 和 W. Smith，戴德金整环的整值多项式环，《美国数学会会刊》108 (1990), 673-681.[17] F.Q. Gouvˆea，p进数：导论，第2版，纽约，施普林格出版社，1997.[18] W. Heinzer，关于诺特整环的克鲁尔上环。《美国数学会会刊》22 (1969), 217-222. [19] W. Heinzer, J. Ohm，整环的诺特交。《美国数学会汇刊》167 (1972), 291-308.[20] R. C. Heitmann，具有指定剩余域的主理想整环。《杜克数学杂志》41 (1974), 565-582.[21] B.G. Kang，关于克鲁尔整环一个众所周知事实的逆命题，《代数学杂志》124 (1989), 284-299.[22] S. K. Khanduja 和 J. Saha，广义基本原理，《Mathematika》46:1 (1999), 83-92.[23] M. Nagata，关于诺特整环的导出正规环，《京都大学理学院纪要 A 辑：数学》29 (1955), 293-303.[24] E. Nart, J. Novacoski，单变量多项式环上赋值的几何参数化。《数学杂志》304 (2023), no.4, 59. [25] G. Peruginelli，秩一赋值整环的超越扩张，《美国数学会会刊》145 (2017), no. 10, 4211-4226.[26] G. Peruginelli，$Pr\ddot{u}$有理函数域赋值整环的*ufer* 交，《代数学杂志》509 (2018), 240-262。

[27] G. Peruginelli，具有素特征有限剩余域的多项式戴德金整环，《太平洋数学杂志》324（2023），第 2 期，333–351。[28] G. Peruginelli，堆叠伪收敛序列与多项式戴德金整环，《代数与数论》19（2025），第 10 期，1947-1972。[29] G. Peruginelli，D. Spirito，利用伪单调序列将赋值扩展到有理函数域，《代数学杂志》586（2021），756-786。[30] G. Peruginelli，D. Spirito，多项式闭包不是拓扑的。《纯粹与应用代数》226（2022），第 12 期，第 107133 号。[31] M. Zafrullah，几乎唯一分解性的一般理论，《数学手稿》51（1985），29-62。[32] O. Zariski，P. Samuel，交换代数，第二卷，施普林格出版社，纽约—海德堡—柏林，1975。