arXiv:2601.22435v1 [math.LO] 30 Jan 2026

¨ ´关于共尾弗雷谢极限的可计算性

NATHANAEL ACKERMAN、CAMERON FREER 和 MOSTAFA MIRABI

Abstract. 对于任何在同构下封闭的有限结构集合（即一个 *age*），只要它满足遗传性质（HP）、联合嵌入性质（JEP）和余终 amalgamation 性质（CAP），就存在唯一一个（在同构意义下）年龄为该集合的可数结构 *cofinallyultrahomogeneous* 。这样的结构称为该年龄的 *cofinal Fraïssé limit* 。

本文考察构造可计算年龄的共尾弗雷谢极限所需的计算强度。我们证明，这种构造总能借助预言机 $\mathbf{0}'''$ 完成，而且存在一些年龄需要 $\mathbf{0}''$。

相反，我们证明，若假设 (CAP) 的一种强化形式，即融合性质（AP），那么由此得到的极限（称为弗雷谢极限）可以从年龄出发，借助 $\mathbf{0}'$ 构造。因此，我们的结果表明，一般情形下的共尾弗雷谢极限比弗雷谢极限需要更强的计算能力。

Contents

1. 引言 1.1. 相关工作 2. 主要结果概述 3. 基本模型论与记号 4. 可计算表示 5. 可计算年龄 5.1. 可计算年龄的基本定义 5.2. 可计算年龄的性质 6. 上界 6.1. 超齐性结构 6.2. 余终超齐次结构 7. 下界 7.1. 有限关系语言 7.2. 任意可数语言 参考文献 1 2 3 4 5 6 6 9 13 13 15 21 21 24 28

1. Introduction

给定一个有限结构的集合，一个重要问题是确定何时可以将它们粘合在一起，以得到一个“典范无限极限”。在典范极限是一个包含所有有限结构且具有“最大对称性”（即超齐性）的结构的情形下，这一问题由 Fra¨ıss´e 给出了回答。具体而言，Fra¨ıss´e 证明，这样一个极限（称为 Fra¨ıss´e 极限）存在，当且仅当该结构集合具有遗传性质、联合嵌入性质和融合性质。

Fra¨ıss´e 极限在计算机科学和数学中发挥了基础性作用，包括在数据库理论、自动机理论、模型论和遍历理论中。此外，常常存在一种

2020 *Mathematics Subject Classification.* 03C57，03D45。

Fra¨ıss´e 极限的性质（例如具有平凡可定义闭包、$\aleph_0$-范畴性，或具有顺从自同构群）与用于构造它的有限结构集合的相应性质（分别是具有强融合性质、每种大小在同构意义下仅有有限多个元素，或具有 Ramsey 性质）之间的紧密联系。

鉴于一类有限结构与其 Fra¨ıss´e 极限之间的重要联系，研究如何以可计算的方式从结构集合构造 Fra¨ıss´e 极限是值得的。Csima、Harizanov、Miller 和 Montalb´an 首先研究了这一可计算性问题，他们在 [CHMM11] 中展示了如何从一个可计算的有限结构集合，以及遗传性质、联合嵌入性质和融合性质的可计算见证，构造 Fra¨ıss´e 极限。

在从有限结构集合构造 Fra¨ıss´e 极限所需的这三种性质中，融合性质与极限的对称性关系最为密切。然而，融合性质往往限制过多，因此我们通常只能采用这种性质较弱的版本，称为共尾融合性质。以下示例展示了共尾融合性质不如融合性质限制严格的一种情形（见定义5.24和5.29）。

例 1.1。 设 $\mathcal{L}_f = \{f\}$ 为仅含一个一元函数符号的语言，且设 $\mathcal{K}_f$ 为满足以下条件的有限 $\mathcal{L}_f$-结构的集合 $\mathcal{M}$：

$$\mathcal{M} \models (\forall x)\left(f(x) \neq x\right) \qquad \text{and} \qquad \mathcal{M} \models (\forall x)\left(\left(f(f(x)) = x\right) \vee \left(f(f(f(x))) = x\right)\right).$$

注意， $\mathcal{K}_f$ 是一个 Fra¨ıss´e 类。

设 $\mathcal{L}_R = \{R\}$ 为仅含一个二元关系符号的语言，且设 $\mathcal{K}_R$ 为这样的 $\mathcal{L}_R$-结构的集合 $\mathcal{M}$：其中 $R^{\mathcal{M}}$ 是函数 r 的图，并且满足 $\mathcal{M} \models (\forall x)\left(r(x) \neq x\right)$ 以及$\mathcal{M} \models (\forall x)\left(\left(r(r(x)) = x\right) \vee \left(r(r(r(x))) = x\right)\right)$。注意， $\mathcal{K}_R$ 不具有合并性质。为说明这一点，设 $\mathcal{M}_2$ 是 $\mathcal{K}_R$ 中底集为 $\{x, y\}$ 的唯一元素，且 $\mathcal{M}_3$ 是 $\mathcal{K}_R$中底集为 $\{x, y, z\}$ 的唯一元素，并且 $r^{\mathcal{M}_3}(x) = y$ 以及 $r^{\mathcal{M}_3}(y) = z$。如果 $\mathcal{N}$ 是将 $\mathcal{M}_2$ 与 $\mathcal{M}_3$ 在 $\{x\}$ 上合并所得的结构，那么我们将有 $r^{\mathcal{N}}(r^{\mathcal{N}}(x)) = x$以及 $r^{\mathcal{N}}(r^{\mathcal{N}}(r^{\mathcal{N}}(x))) = x$，从而推出 $r^{\mathcal{N}}(x) = x$。然而， $\mathcal{K}_R$ 确实具有共尾融合性质，因为它在所有对 r 闭合的子集上都具有合并性。

研究带函数的结构时，人们通常不在意函数是通过函数符号表示，还是通过编码函数图的关系符号表示。正如这个例子所示，与融合性质不同，共尾融合性质并不取决于结构中函数的具体表示方式。

具有共尾融合性质的结构类也存在极限对象（称为共尾 *Fra¨ıss´e* 极限），但这类极限对象只满足较弱的余终超齐性概念。本文研究如何从满足遗传性质、联合嵌入性质和共尾融合性质的有限结构集合中，构造共尾 Fra¨ıss´e 极限所需的计算难度。

1.1. **相关工作**。 Fra¨ıss´e 极限 [Fra54], 融合性质（AP）和超齐性是经典模型论中的关键概念 [Hod93，第 7], 它们描述了某些可数结构如何作为适当有限结构集合的泛极限而构造出来的一种重要方式 [Cam91]。近年来，人们还发现 Fra¨ıss´e 极限与遍历理论之间存在深刻联系 [AKL14、KPT05]。

Fra¨ıss´e极限及其可计算性已在数据库系统验证的背景下得到考虑 [BST13], ，研究人员已探究哪些Fra¨ıss´e极限可由自动机描述 [KNRS04]。在计算机科学中，Fra¨ıss´e极限也已在程序语言的指称语义背景下得到研究 [DG90，DG93], 模糊逻辑 [BN18],

以及人工智能中约束满足问题的复杂性 [CH04] 以及系统发育学和计算语言学 [BJVP17]。

本文主要研究 Fra¨ıss´e 极限的较弱概念：余终融合性质（CAP）和余终超齐性。余终超齐性由 Calais [Cal67、Cal68] （称为“伪齐性”）引入，同时还引入了相应的合并性质和极限对象；随后 Truss [Tru92] 在泛型自同构的背景下重新发现了这一概念。关于这些概念的历史及其与其他极限、合并和超齐性概念之间关系的更多内容，参见 [KK21] 和 [KKKP22]。这些其他概念还包括更弱的 Fra¨ıss´e 极限、弱 amalgamation 性质（WAP）和弱超齐性。它们确实推广了余终概念，但目前尚未涵盖许多其他已知例子。关于弱 Fra¨ıss´e 极限、（WAP）与弱超齐性之间联系的可计算性研究，参见 [AFM], ，该文推广了本文的结果（通常需要复杂得多的证明）。

关于共尾融合性质的更多内容（包括若干例子），请参见 [Kru15] 和[Kru16，第 3 节。1]；关于其范畴论表述，请参见 [Kub22]。共尾融合性质已用于拓扑动力学的研究 [KR07] 以及 Ramsey 性质的研究[BBBK21、DB22], ，此外也在 [Mal22], [PT22], 和 [DIM23]中得到了研究。

Fra¨ıss´e 构造的可计算性最早由 [CHMM11], 研究，我们在他们若干结果的基础上展开工作。可计算的 Fra¨ıss´e 极限之间的同构也曾在 [Fou13]和 [FHT19], 中进行研究，而一种相关的可计算性概念则见于 [AC17、CAN24]。关于某些特定 Fra¨ıss´e 极限的可计算性的更多内容，请参见 [Ste12]。

2. Summary of Main Results

给定一个年龄，即一个在同构下封闭的有限结构集合，[1] 人们通常会关注一种可数结构，它可以被视为该年龄的极限；也就是说，该可数结构的年龄就是给定的年龄，并且该可数结构在某种意义上是泛型的。

本文关注从一个年龄到其对应极限这一过程的可计算内容。我们的结果表明，对这些构造的可计算内容进行刻画，主要要借助该年龄的嵌入信息。可计算年龄 $\mathbb{K}$的嵌入信息（记作 $\mathcal{EJ}(\mathbb{K})$）描述了从 $\mathbb{K}$ 的一个元素到另一个元素的映射何时可以扩展为嵌入。引理5.5 指出， $\mathcal{EJ}(\mathbb{K})$总能由 $\mathbb{K}$ 的图灵跳跃计算得到；当 $\mathbb{K}$ 的语言有限且为关系语言时，$\mathbb{K}$则是可计算的。

年龄具有极限这一现象最常见的例子是弗雷歇¨极限´。给定一个年龄（其同构类可数），且满足遗传性质（HP）、联合嵌入性质（JEP）和融合性质（AP），则存在唯一的结构，称为弗雷歇¨极限´，其年龄就是给定的年龄，并且具有超齐性。在 [CHMM11]中，作者说明了如何根据满足（HP）、（JEP）和（AP）的可计算见证构造弗雷歇¨极限´。引理5.17、命题5.20和命题5.25表明，这类见证总能由嵌入信息计算得到。综合以上结果，我们得到如下结论。

推论 (推论6.5)。 设 $\mathbb{K}$ 是一个满足 (遗传性质)、(JEP)和(合并性质)的可计算年龄。那么 $\mathbb{K}$有一个 $\mathcal{EJ}(\mathbb{K})$-可计算 *Fra¨ıss´e* 极限。

虽然 Fra¨ıss´e 极限是年龄最常见的极限类型，但我们经常会遇到满足 (HP) 和 (JEP)、却不满足 (AP) 的年龄，而它们只满足较弱的共尾融合性质（CAP）。在这种情况下，该年龄仍有一种极限，称为

[1]请注意，一些模型论文献只提到 *age of a structure*，在这种情况下，年龄总是具有遗传性质和联合嵌入性质。本文采用更一般的概念，部分原因是这样一来， *computable age* 的定义在计算上是可判定的。

余终 Fra¨ıss´e 极限，但极限对象不再需要是超齐的，只需满足较弱的余终超齐性。

与 Fra¨ıss´e 极限的情形一样，我们证明，给出 (HP)、(JEP) 和 (CAP) 的可计算见证后，就能构造出余终 Fra¨ıss´e 极限。我们从相应性质的（相对化）可计算版本来表述这一结果。（例如，($\mathfrak{s}$-cHP) 表示 (HP) 的 $\mathfrak{s}$-可计算版本。）

定理（定理6.19）。设 $\mathfrak{s}$ 是一个图灵度。假设
(a) $\mathbb{K}$是一个 $\mathfrak{s}$-可计算年龄，(b) $\mathcal{EI}(\mathbb{K}) \leq_{\mathrm{T}} \mathfrak{s}$，
并且(c) $\mathbb{K}$具有 ($\mathfrak{s}$-cHP)、($\mathfrak{s}$-cJEP) 和 ($\mathfrak{s}$-cCAP)。

那么，存在一个 $\mathfrak{s}$-可计算的 $\mathbb{K}$ 的余终 *Fra¨ıss´e* 极限。

有了这一结果，我们便将从一个年龄计算余终 Fra¨ıss´e 极限的问题，归结为从一个年龄计算 (CAP) 见证的问题（因为我们已经证明，(HP) 和 (JEP) 的见证可根据嵌入信息计算得到）。我们得出了 (CAP) 以及余终 Fra¨ıss´e 极限可计算性的以下上界。

定理 (定理 em 5.36(b))。 若 $\mathbb{K}$ 是具有 (CAP) 的可计算年龄，则它具有 ($\mathcal{EI}(\mathbb{K})''$-cCAP) .

推论 (推论6.22)。 设 $\mathbb{K}$ 是具有 (HP)、(JEP) 和 (CAP) 的可计算年龄。那么$\mathbb{K}$ 具有一个 $\mathcal{EI}(\mathbb{K})''$-可计算的余终 *Fra¨ıss´e* 极限。

接下来，我们将关注 (CAP) 可计算性的下界问题。我们考虑两种情形：一种是语言有限且为关系语言（因此嵌入信息是可计算的），另一种是允许语言无限且含有函数符号。对于有限关系语言，我们得到以下关于 (CAP) 可计算性的下界。

定理 (定理7.1)。 存在一个可计算年龄 $\mathbb{K}$，它是某个有限关系语言中结构的典范可计算龄，并且 $\mathbb{K}$ 具有(CAP)，但若它对某个图灵度 $\mathfrak{s}$-cCAP) $\mathfrak{s}$具有 $\mathbf{0}' \leq_{\mathrm{T}} \mathfrak{s}$。

我们还得到了有限关系语言中余终 Fra¨ıss´e 极限可计算性的相应下界。

推论 (推论7.4)。 存在一个可计算年龄 $\mathbb{K}$，它是某个有限关系语言中结构的典范可计算龄；若 $\mathfrak{s}$ 是一个图灵度，且 $\mathcal{M}$ 是一个 $\mathfrak{s}$- 可计算结构，并且是 $\mathfrak{s}$- 可计算的余终超齐次结构，同时还是 *¨ıss´e* 极限 $\mathbb{K}$，那么 $\mathbf{0}' \leq_{\mathrm{T}} \mathfrak{s}$。

最后，在一般情形下，我们得到了 (CAP) 的可计算性下界以及余终 Fra¨ıss´e 极限的下界。

定理 (定理7.5)。 存在一个可计算年龄 $\mathbb{K}$，它是某个结构的典范可计算龄，且 $\mathbb{K}$ 具有 (CAP)；但如果它具有 ($\mathfrak{s}$-cCAP)，其中某个图灵度为 $\mathfrak{s}$，则$\mathbf{0}'' \leq_{\mathrm{T}} \mathfrak{s}$。

推论 (推论7.9)。 存在一个可计算年龄 $\mathbb{K}$，它是某个结构的典范可计算年龄，并且如果 $\mathfrak{s}$ 是一个图灵度，且 $\mathcal{M}$ 是一个 $\mathfrak{s}$-可计算结构，且它是$\mathfrak{s}$-可计算的余终超齐次结构，也是 *¨ıss´e* 极限 $\mathbb{K}$，那么 $\mathbf{0}'' \leq_{\mathrm{T}} \mathfrak{s}$。

3. Basic Model Theory and Notation

本文中，$\mathcal{L}$ 均表示一种语言（不一定是关系语言）。所有关系符号的元数均为正，但我们允许函数符号的元数为 0（并将零元

函数符号视为常量符号）。如果 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 是 $\mathcal{L}$-结构，我们用 $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ 表示 $\mathcal{A}$ 是 $\mathcal{B}$ 的子结构。对于有限序列 $\mathbf{a}$ 和集合 A，我们用 $\mathbf{a} \subseteq A$ 表示 $\mathbf{a}$ 中的每个元素都属于 A。当 A 是结构 $\mathcal{A}$ 的底集时，我们将采用标准的模型论记法，用 $\mathbf{a} \in \mathcal{A}$ 表示 $\mathbf{a} \subseteq A$。我们按标准的模型论含义使用“子结构”一词，即指保持每个关系是否成立的诱导子结构。

我们用一个 **$\mathcal{L}$-元组** 表示一对 $(\mathbf{a}\ \mathcal{A})$，其中 $\mathcal{A}$ 是一个 $\mathcal{L}$-结构，且 $\mathbf{a} \in \mathcal{A}$。我们通常会滥用记法：当背景结构 $\mathcal{A}$ 明确时，用 $\mathbf{a}$ 表示一个 $\mathcal{L}$-元组 $(\mathbf{a}\ \mathcal{A})$。若 P 是关于序列的性质，我们就说当该性质对 $\mathbf{a}$成立时，它也对一个 $\mathcal{L}$-元组 $(\mathbf{a}\ \mathcal{A})$成立。（例如，$(\mathbf{a}\ \mathcal{A})$ 的长度就是 $\mathbf{a}$的长度。）

若 $\mathcal{M}$ 是一个结构，且 A 是 $\mathcal{M}$的有限子集，我们将 $\mathrm{cl}_{\mathcal{M}}(A)$ 定义为包含 A 的 $\mathcal{M}$ 的最小子结构（即在所有 $\mathcal{L}$-项下对 A 取闭包）。假设 $(\mathbf{a}\ \mathcal{M})$ 和 $(\mathbf{b}\ \mathcal{N})$ 是长度相同的$\mathcal{L}$-元组；若对于空语言中的每个原子公式 ψ，$\mathcal{M} \models \psi(\mathbf{a})$ 当且仅当 $\mathcal{N} \models \psi(\mathbf{b})$，我们就称 $(\mathbf{a}\ \mathcal{M}) \sim (\mathbf{b}\ \mathcal{N})$。这等价于说，只要 $\mathbf{a}$ 的两个坐标相等（或不相等），$\mathbf{b}$ 中对应的坐标也相等（或不相等）。

我们称（$\mathbf{a}\ \mathcal{M}$）$\simeq$（$\mathbf{b}\ \mathcal{N}$），如果对于每个原子公式 φ，都有 $\mathcal{M} \models \varphi(\mathbf{a})$ 当且仅当 $\mathcal{N} \models \varphi(\mathbf{b})$。注意，这等价于如下陈述：将元组 $\mathbf{a}$映射到$\mathbf{b}$ 的映射可以扩展为 $\mathrm{cl}_{\mathcal{M}}(\mathbf{a})$ 与 $\mathrm{cl}_{\mathcal{N}}(\mathbf{b})$ 之间的同构。在此语境下，我们用$\mathrm{t}_{\mathrm{cl}}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$表示这个同构。

注意，若 $\mathbf{a} \in \mathcal{M}_0$ 且 $\mathcal{M}_0$ 是 $\mathcal{M}$ 的子结构，并且 $\mathbf{b} \in \mathcal{N}_0$ 且 $\mathcal{N}_0$ 是 $\mathcal{N}$的子结构，那么（$\mathbf{a}\ \mathcal{M}_0$）$\simeq$（$\mathbf{b}\ \mathcal{N}_0$）当且仅当（$\mathbf{a}\ \mathcal{M}$）$\simeq$（$\mathbf{b}\ \mathcal{N}$）。因此，我们通常将这种关系简单地记作 $\mathbf{a} \simeq \mathbf{b}$（$\mathbf{a} \sim \mathbf{b}$ 的情形也类似）。

我们称一个 $\mathcal{L}$-结构的集合 $\mathcal{K}$ 为**一致有限**，如果 $\mathcal{L}$ 是有限语言，并且存在一个可计算函数 $f\colon \omega \to \omega$，使得对于所有 $\mathcal{M} \in \mathcal{K}$ 以及 $\mathbf{a} \in \mathcal{M}$，都有 $|\mathrm{cl}_{\mathcal{M}}(\mathbf{a})| \leq f(|\mathbf{a}|)$。我们称 $\mathcal{M}$ 为**一致有限**，如果 $\{\mathcal{M}\}$ 是一致有限的。

我们用 $\mathbf{0}'$ 表示最小图灵度 $\mathbf{0}$ 的图灵跳跃。我们用 $\mathfrak{a} \leq_{\mathrm{T}} \mathfrak{b}$ 表示图灵度 $\mathfrak{a}$ 图灵可约于图灵度 $\mathfrak{b}$。固定一个图灵机的标准枚举，并令 $\{e\}(n)$ 表示在输入 $n \in \omega$ 上运行第 e 台图灵机的结果。当这次计算停机时，我们记作 $\{e\}(n)\downarrow$；当它不停机时，记作 $\{e\}(n)\uparrow$。

若 σ 是一个序列，a 是一个元素，我们用 $\sigma^\frown a$ 表示将 a 追加到 σ 末尾后得到的序列。若 σ 和 τ 是序列，则映射 $f\colon \sigma \to \tau$ 是一个函数，它以一对 $(a,\ i)$ 作为输入，其中 $a = \sigma(i)$，并输出一对 $(b,\ j)$，其中 $b = \tau(j)$。

若 f 是一个输出 k-元组的函数，我们记作 $f(x) = (f_0(x) \ldots,\ f_{k-1}(x))$，因此每个 f_i 都是一个函数，它对给定输入输出元组的第 i 个元素。对于任意函数 $f\colon X \to Y$ 和子集 $X_0 \subseteq X$，我们令 $f\text{“}(X_0)$ 表示 X_0 在 f 下的像，即 $\{f(x)\colon x \in X_0\}$。我们常常会处理由元组构成的序列，例如，记 $(a_i,\ b_i)_{i\in\omega}$ 表示由数对 $\big((a_i,\ b_i)\big)_{i\in\omega}$ 构成的序列。

4. Computable Representations

本文中，我们对结构的可计算表示采用可计算模型论中的标准记法。

我们回顾语言的可计算表示和结构的可计算表示的定义。

定义 4.1. 设 $\mathcal{L}$ 是一种可数语言。$\mathcal{L}$ 的**可计算表示** 是由两个映射 $(\mathrm{Rel}_{\mathcal{L}}, \mathrm{Funct}_{\mathcal{L}})$ 组成的有序对，其中

- $\mathrm{Rel}_{\mathcal{L}}$ 是从 ω 的一个可计算子集 R 到 $\mathcal{L}$ 中关系符号集合的双射，
- $\mathrm{Funct}_{\mathcal{L}}$ 是从 ω 的一个可计算子集 F 到 $\mathcal{L}$ 中函数符号集合的双射，
- R 和 F 不相交，并且

- 将 $R \cup F$ 中的元素映射到其关系符号或函数符号元数的映射 $\mathrm{ar}_{\mathcal{L}}$ 是可计算的。

定义 4.2。设 $\mathcal{L}$ 是带有可计算表示（$\mathrm{Rel}_{\mathcal{L}}$, $\mathrm{Funct}_{\mathcal{L}}$）的可数语言，并设 $\mathcal{M}$ 是一个 $\mathcal{L}$-结构。$\mathcal{M}$ 的一个**可计算表示**是一个双射 $\iota_{\mathcal{A}}$，它从 ω 的一个可计算可枚举子集M 映射到底集 $\mathcal{M}$，并且以下三个集合都是可计算可枚举的：

$$\{(n, \mathbf{a}) : n \in \mathrm{dom}(\mathrm{Rel}_{\mathcal{L}}),\ \mathbf{a} \in M,\ \text{and } \mathcal{M} \models \mathrm{Rel}_{\mathcal{L}}(n)(\iota_{\mathcal{M}}(\mathbf{a}))\}$$

$$\{(n, \mathbf{a}) : n \in \mathrm{dom}(\mathrm{Rel}_{\mathcal{L}}),\ \mathbf{a} \in M,\ \text{and } \mathcal{M} \models \neg\, \mathrm{Rel}_{\mathcal{L}}(n)(\iota_{\mathcal{M}}(\mathbf{a}))\}$$

$$\{(f, \mathbf{a}, b) : f \in \mathrm{dom}(\mathrm{Funct}_{\mathcal{L}}),\ \mathbf{a} \in M,\ \text{and } \mathcal{M} \models \mathrm{Funct}_{\mathcal{L}}(f)(\iota_{\mathcal{M}}(\mathbf{a})) = \iota_{\mathcal{M}}(b)\}$$

如果一个 $\mathcal{L}$-结构 $\mathcal{M}$ 的底集是 ω 的可计算可枚举子集，并且该集合上的恒等映射是 $\mathcal{M}$ 的一个可计算表示，我们就称它为**可计算可枚举的**（c.e.）。如果 $\mathcal{M}$ 的底集是 ω 的可计算子集，我们就称 $\mathcal{M}$ 是**可计算的**。

以下是可计算模型论中的一个标准结果，它表明可计算的 $\mathcal{L}$-结构与可计算可枚举的 $\mathcal{L}$-结构之间差别不大。

引理 4.3。给定一个结构 $\mathcal{M}$ 的可计算表示的指标，可以一致地计算出 $\mathcal{M}$ 的一个可计算表示，其底集是 ω 的一个余无限可计算子集；同时还能得到新表示的底集（作为 ω 的可计算子集）的一个指标。

5. Computable Ages

5.1. 可计算龄的基本定义。

现在我们引入可计算年龄的概念。

定义 5.1。对于 $\mathcal{L}$，**年龄**是一个在同构下封闭的有限生成结构集合。

如果 $\mathcal{L}$ 是具有可计算表示的语言，那么年龄$\mathcal{K}$ 的**可计算表示**是一个可计算可枚举集 $\mathbb{K}$，由形如 $(\mathbf{a}\ \mathcal{A}, i)$ 的对象组成，其中

对于每个 $i \in \omega$，都存在唯一一个形如 $(\mathbf{a}\ \mathcal{A}, i) \in \mathbb{K}$ 的元素，

对于每个 $(\mathbf{a}\ \mathcal{A}, i) \in \mathbb{K}$，都有：(I) $i \in \omega$；(II) $(\mathbf{a}\ \mathcal{A})$ 是一个 $\mathcal{L}$-元组，满足 $\mathcal{A} = \mathrm{cl}_{\mathcal{A}}(\mathbf{a})$；(III) $\mathcal{A}$ 是一个可计算的 $\mathcal{L}$-结构（相对于 $\mathcal{L}$的可计算表示）；以及 (IV) $\mathcal{A} \in \mathcal{K}$；并且

- 对于每个 $\mathcal{B} \in \mathcal{K}$，都存在一个（$\mathbf{a}\ \mathcal{A}$，$i$）$\in \mathbb{K}$，使得 $\mathcal{B} \cong \mathcal{A}$。

我们将年龄的一种可计算表示称为**可计算年龄**。当上下文清楚时，我们将省略对 $\mathcal{K}$ 的提及。

若 $\mathbb{K}$ 是一个可计算年龄且 $i \in \omega$，我们用（$\mathbf{a}_{\mathbb{K}:i}$，$\mathcal{A}_{\mathbb{K}:i}$）表示唯一的 $\mathcal{L}$-元组，使得（$\mathbf{a}_{\mathbb{K}:i}$，$\mathcal{A}_{\mathbb{K}:i}$，$i$）$\in \mathbb{K}$，并定义 $\mathbb{I}_{\mathbb{K}}(i) =$（$\mathbf{a}_{\mathbb{K}:i}$，$\mathcal{A}_{\mathbb{K}:i}$，$i$）。当上下文清楚时，我们将省略 $\mathbb{I}_{\mathbb{K}}$ 中的下标 $\mathbb{K}$。我们将滥用记号：若存在某个 $i \in \omega$ 使得 $\mathcal{A} = \mathcal{A}_{\mathbb{K}:i}$，则记作 $\mathcal{A} \in \mathbb{K}$。类似地，若对某个 $i \in \omega$，（$\mathbf{a}\ \mathcal{A}$）=（$\mathbf{a}_{\mathbb{K}:i}$，$\mathcal{A}_{\mathbb{K}:i}$），则记作（$\mathbf{a}\ \mathcal{A}$）$\in \mathbb{K}$。

定义 5.2. $\mathbb{K}$ 中的潜在嵌入是形如 $(\mathbb{I}(i)\ \mathbb{I}(j), \mathbf{c})$ 的三元组，其中 $i, j \in \omega$ 且 $\mathbf{c} \in \mathcal{A}_{\mathbb{K}:j}$。我们记作 $E_{\mathbb{I}(i):\mathbf{c}:\mathbb{I}(j)} = (\mathbb{I}(i)\ \mathbb{I}(j), \mathbf{c})$。定义 $E_{\mathbb{I}(i):\mathbf{c}:\mathbb{I}(j)}$ 的定义域为 $\mathrm{dom}(E_{\mathbb{I}(i):\mathbf{c}:\mathbb{I}(j)}) = \mathbb{I}(i)$，陪域为 $\mathrm{codom}(E_{\mathbb{I}(i):\mathbf{c}:\mathbb{I}(j)}) = \mathbb{I}(j)$，值域为 $\mathrm{range}(E_{\mathbb{I}(i):\mathbf{c}:\mathbb{I}(j)}) = \mathbf{c}$。在图表中，我们将写作 $\mathcal{A} \xrightarrow{\mathbf{c}}_{\mathbb{K}} \mathcal{B}$，表示 $(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathbf{c})$ 是 $\mathbb{K}$ 中的一个潜在嵌入。

若潜在嵌入 $(\mathbb{I}(i)\ \mathbb{I}(j), \mathbf{c})$ 属于 $\mathbb{K}$，且 $\mathbf{a}_{\mathbb{K}:i} \simeq \mathbf{c}$，则它是一个嵌入。我们用 $\mathcal{A} \xrightarrow{\mathbf{c}}_{\mathbb{K}} \mathcal{B}$ 表示 $(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathbf{c})$ 是 $\mathbb{K}$ 中的一个嵌入。

注意，潜在嵌入的集合是可计算集。然而，嵌入的集合通常只是余半可判定的。因此，从年龄构造余终超齐次结构时，使用潜在嵌入将十分重要。

定义 5.3. 设 F 和 G 是 $\mathbb{K}$ 中的潜在嵌入，并假设 $\mathrm{codom}(F) = \mathrm{dom}(G)$。当 G 不是嵌入时，我们定义 $G \circ F = (\mathrm{dom}(F),\ \mathrm{codom}(G),\ \mathrm{range}(G))$。当 G 是嵌入时，我们定义 $G \circ F = \big(\mathrm{dom}(F),\ \mathrm{codom}(G)\ \mathfrak{t}_{\mathrm{cl}}(\mathbf{a}j,\ \mathrm{range}(G))(\mathrm{range}(F))\big)$，其中 $j \in \omega$ 满足 $\mathbb{I}(j) = \mathrm{dom}(G)$。我们用 $\mathrm{id}^{\mathbb{I}(i)}$ 表示三元组 $(\mathbb{I}(i)\ \mathbb{I}(i),\ \mathbf{a}_i)$。

可以验证，这种记号定义了一个范畴 $\mathfrak{Cat}(\mathbb{K})$，其对象是 $\mathbb{K}$ 的元素，而 $\mathcal{A}$ 与 $\mathcal{B}$ 之间的态射是那些满足 $\mathrm{dom}(F) = \mathcal{A}$ 且 $\mathrm{codom}(F) = \mathcal{B}$ 的潜在嵌入 F。

下面定义一个与任意一对可计算年龄相关的重要集合，它将使我们能够判断年龄中两个子结构之间的潜在嵌入是否实际上是一个嵌入。

定义 5.4。设 $\mathbb{K}$ 是一个可计算年龄。定义与 $\mathbb{K}$ 相关的**嵌入信息**，记作 $\mathcal{EI}(\mathbb{K})$，为由满足以下条件的元组组成的集合：$(\mathbb{I}_{\mathbb{K}}(k_0), \mathbf{b}_0, \mathbb{I}_{\mathbb{K}}(k_1), \mathbf{b}_1)$，其中 $\mathbf{b}_0 \in \mathcal{A}_{\mathbb{K}:k_0}$ 且 $\mathbf{b}_1 \in \mathcal{A}_{\mathbb{K}:k_1}$，并且 $\mathbf{b}_0 \simeq \mathbf{b}_1$。

我们将看到，给定两个同构的可计算余终超齐结构，总可以将任意部分同构（在年龄中的适当元素之间）扩展为同构。然而，为了构造这样的可计算 同构，我们需要能够可计算地扩展各种部分同构；我们将利用嵌入信息来实现这一点。

引理 5.5。若 $\mathbb{K}$ 是可计算年龄，则 $\mathcal{EI}(\mathbb{K}) \leq_{\mathrm{T}} \mathbf{0}'$。此外，若 $\mathbb{K}$ 是一致有限可计算年龄，则 $\mathcal{EI}(\mathbb{K})$ 是可计算的。

证明。元组闭包的原子图是可计算枚举的，因此可以通过可计算枚举确定映射何时无法扩展为部分嵌入，从而证明第一个结论。第二个结论由定义立即可得。□

定义 5.6。设 $\mathbb{K}_0$ 和 $\mathbb{K}_1$ 是可计算年龄，$\mathfrak{s}$ 是一个图灵度。定义从 $\mathbb{K}_0$ 到 $\mathbb{K}_1$ 的**同构** 为一对映射 $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_0, \alpha_1)$，满足

- $\alpha_0 \colon \mathbb{K}_0 \to \mathbb{K}_1$ 和 $\alpha_1 \colon \mathbb{K}_1 \to \mathbb{K}_0$，
- 对于所有满足以下条件的 $(\mathbf{a}\ \mathcal{A}, i) \in \mathbb{K}_0$：$\alpha_0(\mathbf{a}\ \mathcal{A}, i) = (\mathbf{b}\ \mathcal{B}, j)$，我们都有 $\mathbf{a} \simeq \mathbf{b}$，并且
- 对于所有 $(\mathbf{b}\ \mathcal{B},\ j) \in \mathbb{K}_1$，若 $\alpha_1(\mathbf{b}\ \mathcal{B},\ j) = (\mathbf{a}\ \mathcal{A},\ i)$，则有 $\mathbf{a} \simeq \mathbf{b}$。

该对 偶 $\boldsymbol{\alpha}$ 是 $\mathfrak{s}$-**可计算的**，当满足以下条件的映射 $\alpha_0^* \colon\ \omega \to \omega$ 和 $\alpha_1^* \colon\ \omega \to \omega$

- $\alpha_0(\mathbb{I}_{\mathbb{K}_0}(i)) = \mathbb{I}_{\mathbb{K}_1}(\alpha_0^*(i))$ 对于 $i \in \omega$ 以及
- $\alpha_1(\mathbb{I}_{\mathbb{K}_1}(i)) = \mathbb{I}_{\mathbb{K}_0}(\alpha_1^*(i))$ 对于 $i \in \omega$

是 $\mathfrak{s}$-可计算的。

当存在某个 $\mathfrak{s}$-可计算同构将 $\mathbb{K}_0$ 与 $\mathbb{K}_1$ 联系起来时，我们称 $\mathbb{K}_0$ 和 $\mathbb{K}_1$ 是 $\mathfrak{s}$-**可计算同构**的。当 $\mathfrak{s} = \mathbf{0}$ 时，我们称它们是**可计算同构**的。

定义 $\boldsymbol{\alpha}^{-1} = (\alpha_1,\ \alpha_0)$。注意，$\boldsymbol{\alpha}^{-1}$ 是从 $\mathbb{K}_1$ 到 $\mathbb{K}_0$的同构。

注意，两个可计算年龄 $\mathbb{K}_0$ 和 $\mathbb{K}_1$ 同构，当且仅当它们都是同一个年龄的可计算表示；而这又当且仅当存在某个图灵度 $\mathfrak{s}$，使得它们是$\mathfrak{s}$-同构的。

注 5.7。当 i 和 j 的含义可由上下文明确时，我们将滥用记号，用 $\alpha_0(\mathcal{A})$ 或$\alpha_0(\mathrm{a}\ \mathcal{A})$ 表示 $\alpha_0(\mathrm{a}\ \mathcal{A}, i)$，并用 $\alpha_1(\mathcal{B})$ 或 $\alpha_1(\mathrm{b}\ \mathcal{B})$ 表示 $\alpha_1(\mathrm{b}\ \mathcal{B}, j)$。同样地，对于 $\mathrm{d} \in \mathcal{A}$ 和 $(\mathrm{a}\ \mathcal{A}, i) \in \mathbb{K}_0$，我们将写作 $\alpha_0(\mathrm{d}, \mathrm{a})$，表示有序对 $\big(\mathfrak{t}_{\mathrm{cl}}(\mathrm{a}\ \alpha_0(\mathrm{a}))(\mathrm{d})\ \alpha_0(\mathrm{a})\big)$；对于 $\mathrm{d} \in \mathcal{B}$ 和 $(\mathrm{b}\ \mathcal{B}, j) \in \mathbb{K}_1$，我们将写作 $\alpha_1(\mathrm{d}, \mathrm{b})$，表示 $\big(\mathfrak{t}_{\mathrm{cl}}(\mathrm{b}\ \alpha_1(\mathrm{b}))(\mathrm{d})\ \alpha_1(\mathrm{b})\big)$。

现在我们来定义如何将同构应用于潜在嵌入。

定义 5.8. 设 $\mathbb{K}_0$ 和 $\mathbb{K}_1$ 是可计算年龄，$\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_0, \alpha_1)$ 是从 $\mathbb{K}_0$ 到 $\mathbb{K}_1$的一个同构。假设 $E_{\mathbb{I}(i):\mathbf{c}:\mathbb{I}(j)}$ 是到 $\mathbb{K}_0$中的潜在嵌入。定义 $\boldsymbol{\alpha}$ 作用于$E_{\mathbb{I}(i):\mathbf{c}:\mathbb{I}(j)}$ 的结果为 $\boldsymbol{\alpha}(E_{\mathbb{I}(i):\mathbf{c}:\mathbb{I}(j)}) = \big(\alpha_0(\mathbb{I}(i))\ \alpha_0(\mathbb{I}(j))\ \mathfrak{t}_{\mathrm{cl}}(\mathbf{a}j, \alpha_0(\mathbf{a}j))(\mathbf{c})\big)$。

引理 5.9. 设 $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_0, \alpha_1)$ 是可计算年龄 $\mathbb{K}_0$ 和 $\mathbb{K}_1$之间的一个同构。那么$\boldsymbol{\alpha}$ 可扩张为 $\mathfrak{Cat}(\mathbb{K}_0)$与 $\mathfrak{Cat}(\mathbb{K}_1)$之间的范畴等价，其逆等价为$\boldsymbol{\alpha}^{-1}$。

证明。如果 $E_{\mathbb{I}(i):\mathbf{c}:\mathbb{I}(j)}$ 是一个潜在嵌入，那么 $\boldsymbol{\alpha}(E_{\mathbb{I}(i):\mathbf{c}:\mathbb{I}(j)})$ 也是一个潜在嵌入。此外，$E_{\mathbb{I}(i):\mathbf{c}:\mathbb{I}(j)}$ 是一个嵌入，当且仅当 $\boldsymbol{\alpha}(E_{\mathbb{I}(i):\mathbf{c}:\mathbb{I}(j)})$ 是嵌入。□

给定一个可计算结构，将其有限生成子结构的集合适当地枚举后，就构成一个可计算年龄。

定义 5.10。 设 $\mathcal{M}$ 是一个 $\mathcal{L}$-结构。 $\mathcal{M}$ 的**年龄**是所有与 $\mathcal{M}$的有限生成子结构同构的 $\mathcal{L}$-结构的集合。

假设 $\mathcal{M}$ 是可计算的，并设 $(\mathbf{a}_i)_{i\in\omega}$ 是$\mathcal{M}$ 中所有有限元组的某个可计算枚举，其中每个元组都出现无限多次。我们称序列 $(\mathbf{a}_i, \mathrm{cl}_{\mathcal{M}}(\mathbf{a}_i)\ i)_{i\in\omega}$ 为 $\mathcal{M}$的**典范可计算龄**。令 $\mathbb{K}[\mathcal{M}]$ 为这样一个典范可计算龄。如果一个可计算年龄 $\mathbb{K}$ 与 $\mathbb{K}[\mathcal{M}]$可计算同构，则称**它在可计算意义下是** $\mathcal{M}$ 的年龄。

以下基本事实可由定义直接得出。

引理 5.11. 设 $\mathcal{M}$ 是一个可计算的 $\mathcal{L}$-结构。

- $\mathcal{M}$ 的任意两个典范可计算龄彼此可计算同构。
- $\mathcal{M}$ 的典范可计算龄是 $\mathcal{M}$ 的年龄的可计算表示。
- 若 $\mathcal{K}$ 是 $\mathcal{M}$ 的年龄，且 $\mathbb{K}$ 是 $\mathcal{M}$ 的年龄的可计算表示，则 $\mathbb{K}$ 是 $\mathcal{K}$ 的一个可计算表示。

请注意，论文 [CHMM11] 将 $\mathcal{M}$ 的典范可计算龄称为“ $\mathcal{M}$的年龄的典范表示”，而“ $\mathcal{M}$的年龄的一个典范表示”则指任何与该典范表示可计算同构的可计算表示。

引理 5.12. 对于每个 $i \in \{0, 1\}$，设 $\mathcal{M}_i$ 是一个可计算结构，并假设 $\mathbb{K}_i$ 是 $\mathcal{M}_i$ 的可计算年龄。如果 $\mathcal{M}_0$ 和 $\mathcal{M}_1$ 是 $\mathfrak{s}$-可计算同构的，那么 $\mathbb{K}_0$ 和 $\mathbb{K}_1$ 也是 $\mathfrak{s}$-可计算同构的。

证明。设 $f\colon \mathcal{M}_0 \to \mathcal{M}_1$ 是 $\mathcal{M}_0$ 与 $\mathcal{M}_1$ 之间的一个 $\mathfrak{s}$-可计算同构。只需证明 $\mathbb{K}[\mathcal{M}_0]$ 与 $\mathbb{K}[\mathcal{M}_1]$ 是 $\mathfrak{s}$-可计算同构的。令 $\alpha_0\colon \mathbb{K}[\mathcal{M}_0] \to \mathbb{K}[\mathcal{M}_1]$ 为如下映射：$\alpha_0(\mathsf{a}\ \mathcal{A}, i) = (f(\mathsf{a}), \mathrm{cl}^{\mathcal{M}_1}(f(\mathsf{a}))\ j)$，其中 j 是满足 $(f(\mathsf{a}), \mathrm{cl}^{\mathcal{M}_1}(f(\mathsf{a}))\ j) \in \mathbb{K}[\mathcal{M}_1]$ 的最小指标。类似地，令 $\alpha_1\colon \mathbb{K}[\mathcal{M}_1] \to \mathbb{K}[\mathcal{M}_0]$ 为如下映射： $\alpha_1(\mathsf{a}\ \mathcal{A}, i) = (f^{-1}(\mathsf{a}), \mathrm{cl}^{\mathcal{M}_0}(f^{-1}(\mathsf{a}))\ j)$，其中 j 是满足 $(f^{-1}(\mathsf{a}), \mathrm{cl}^{\mathcal{M}_0}(f^{-1}(\mathsf{a}))\ j) \in \mathbb{K}[\mathcal{M}_0]$ 的最小指标。显然，(α_0, α_1) 是所需的可计算年龄同构。□

接下来的 定义对于在给定一个 a 的情况下构造无穷结构至关重要 ge.

定义 5.13。 如果 $\mathcal{M}$ 是一个可计算结构，我们将 $\mathcal{EI}(\mathcal{M})$记作 $\mathcal{EI}(\mathbb{K}[\mathcal{M}])$。

下面的结果将使我们能够把可计算的相容嵌入序列转换为一个结构。其证明可由众所周知的结果直接得出（例如，参见 [CHMM11，引理 2。9]），但为完整起见，我们仍给出证明。

命题 5.14。 设 $\mathbb{K}$ 是一个可计算年龄，并假设$(F_i)_{i\in\omega}$ 是一个可计算嵌入序列，其中对每个 $i \in \omega$，都存在一个 $k_i \in \omega$，使得定义域$(F_i) = \mathbb{I}_{\mathbb{K}}(k_i)$，且陪域$(F_i) = \mathbb{I}_{\mathbb{K}}(k_{i+1})$。

于是存在一个可计算年龄 $\mathbb{K}^*$，它与 $\mathbb{K}$可计算同构；并且存在一个可计算序列 $(\mathbb{I}_{\mathbb{K}}(\ell_i))_{i\in\omega}$，使得对于 $i \in \omega$，我们有 $\mathbf{a}^{\mathbb{K}^*:\ell_i} \simeq \mathbf{a}^{\mathbb{K}:k_i}$，并且 $\mathcal{A}_{\mathbb{K}^*:\ell_i} \subseteq \mathcal{A}_{\mathbb{K}^*:\ell_{i+1}}$，且

$$\mathbf{t}_{\mathrm{cl}}(\mathbf{a}_{\mathbb{K}:k_{i+1}}, \mathbf{a}_{\mathbb{K}^*:\ell_{i+1}}) \circ \mathbf{t}_{\mathrm{cl}}(\mathbf{a}_{\mathbb{K}:k_i}, \mathrm{range}(F_i)) = \mathbf{t}_{\mathrm{cl}}(\mathbf{a}_{\mathbb{K}:k_i}, \mathbf{a}_{\mathbb{K}^*:\ell_i}).$$

证明。首先，对于 $i<j\in\omega$，设 $F_{i,j}=F_j\circ F_{j-1}\circ\cdots\circ F_{i+1}\circ F_i$。我们构造一个结构序列 $(\mathbf{d}_i,\mathcal{D}_i)_{i\in\omega}$，使得对于所有 $i\in\omega$，都有 $\mathbf{d}_i\in\mathcal{D}_i\subseteq\mathcal{D}_{i+1}$，且 $\mathbf{d}_i\simeq\mathbf{a}^{\mathbb{K}:k_i}$，并且还有 $\mathfrak{t}_{\mathrm{cl}}(\mathbf{a}^{\mathbb{K}:k_{i+1}},\mathbf{d}_{i+1})\circ\mathfrak{t}_{\mathrm{cl}}(\mathbf{a}^{k_i},\mathbf{c}_i)=\mathfrak{t}_{\mathrm{cl}}(\mathbf{a}^{k_i},\mathbf{d}_i)$。我们通过同时枚举所有元素 $\mathcal{A}_{\mathbb{K}:k_m}$ 来实现这一点，其中$m\in\omega$。当某个新元素 x 出现在一个 $\mathcal{A}_{\mathbb{K}:k_m}$ 中时，我们首先检查是否存在某个 $i<m$，使得 x 是某个已枚举元素在 $F_{i,m}$ 下的像。如果是，则不做任何处理。如果不是，则检查是否存在某个 $j>m$，使得x 在 $F_{m,j}$ 下的像是某个已经枚举过的元素 y。若是，则将 y 加入 $\mathcal{D}_m$，而不处理 x。若这两种情况都不成立，则将 x加入 $\mathcal{D}_m$。

给定某个 $\mathcal{D}_m$ 中的元组 $\boldsymbol{x}$，必定存在某个 j，使得 $\boldsymbol{x}$ 的每个元素都属于 $\{\mathcal{A}_{\mathbb{K}:k_0}\}_{s\in[j]}$ 之一。然后我们可以利用这一事实以及针对 $s,t\in[j]$ 的态射 $F_{s,t}$，来确定 $\boldsymbol{x}$ 满足哪些文字。

于是显然，对所有 $m\in\omega$ 都有 $\mathbf{d}_m\simeq\mathcal{A}_{\mathbb{K}:k_m}$。因此我们可以找到一个可计算年龄 $\mathbb{K}^*$，它包含 $\mathbb{K}$ 以及 $(\mathbf{d}_i,\mathcal{D}_i)_{i\in\omega}$，并且以某种方式进一步包含这些集合，从而确保 $\mathbb{K}$ 与 $\mathbb{K}^*$ 可计算同构。□

推论 5.15。设 $\mathbb{K}$ 为一个可计算年龄，并假设 $(F_i)_{i\in\omega}$ 如命题*5.14*所述。则存在一个结构 $\mathcal{D}_\omega$ 以及嵌入 G_i: $\mathcal{A}_{\mathbb{K}:k_i}\to\mathcal{D}_\omega$（对于 $i\in\omega$），使得对任意 $i<j$，我们有 $G_i=G_j\circ F_{j-1}\circ F_{j-2}\circ\cdots\circ F_i$。此外，$\mathcal{D}_\omega$与 $(G_n)_{n\in\omega}$ 都是可计算的。

证明。应用命题 5.14，并令 $\mathcal{D}_\omega=\bigcup_{n\in\omega}\mathcal{A}_{\mathbb{K}^*:\ell_n}$。则下图交换，其中 G_i 是 $\mathfrak{t}_{\mathrm{cl}}(\mathbf{a}^{k_i},\mathbf{a}^{\mathbb{K}^*:\ell_i})$，对于 $i\in\omega$。

$$\begin{array}{ccccc}\mathcal{A}_{\mathbb{K}:k_0} & \xrightarrow{F_0} & \mathcal{A}_{\mathbb{K}:k_1} & \xrightarrow{F_1} & \cdots\\ \downarrow{\scriptstyle G_0} & & \downarrow{\scriptstyle G_1} & & \\ \mathcal{A}_{\mathbb{K}^*:\ell_0} & \xrightarrow{\subseteq} & \mathcal{A}_{\mathbb{K}^*:\ell_1} & \xrightarrow{\subseteq} & \cdots\end{array}$$

注意，$\mathcal{D}_\omega$ 是 可计算结构的一个可计算序列的并集，因此是可计算的 .

□

5.2. **可计算年龄的性质**。现在我们定义年龄的各种性质的可计算类比。

定义 5.16。年龄 $\mathcal{K}$ 具有**遗传性质**，记作 (HP)，若对所有 $\mathcal{B}\in\mathcal{K}$，都有 $\mathcal{A}\subseteq\mathcal{B}$ 蕴含 $\mathcal{A}\in\mathcal{K}$。

设 $\mathfrak{s}$ 是一个图灵度。我们称可计算年龄 $\mathbb{K}$ 具有 **$\mathfrak{s}$-可计算遗传性质**，记作 ($\mathfrak{s}$-cHP)，若存在一个 $\mathfrak{s}$-可计算函数，它将一对 $(\mathbb{I}(i),\mathbf{b})$（其中$\mathbf{b}\in\mathcal{A}_i$）映射为某个 $\mathbb{I}(j)$，使得 $\mathbf{a}_j\simeq\mathbf{b}$。当 $\mathfrak{s}$ 为**0**时，我们称之为**可计算遗传性质**，并记作 (cHP)。

我们有如下界。

Lem引理 5.17. 设 $\mathbb{K}$ 是具有(遗传性质)的可计算年龄。那么 $\mathbb{K}$ 具有$(\mathcal{EJ}(\mathbb{K})$-可计算遗传性质).

证明。给定 $(\mathbb{I}(i),\mathbf{b})$，其中$\mathbf{b}\in(\mathcal{A}_i,\mathbf{a}_i)$，使用 $\mathcal{EJ}(\mathbb{K})$ 搜索满足 $\mathbf{a}_j\simeq\mathbf{b}$ 的 $\mathbb{I}(j)$. □

并非每个具有（遗传性质）的可计算年龄都具有（可计算遗传性质），但每个具有（遗传性质）的可计算年龄都同构于一个具有（可计算遗传性质）的年龄，正如 [CHMM11]所示；为完整起见，我们给出证明。

命题 5.18 ([CHMM11，定理 2。8])。假设 $\mathbb{K}$ 是具有 (遗传性质)的可计算年龄。那么存在一个具有 $\mathbb{K}^*$ 的可计算年龄 (cHP)，它与 $\mathbb{K}$同构。

证明。我们通过枚举 $\mathbb{K}$ 中结构里由有限元组生成的所有结构，从 $\mathbb{K}$ 得到 $\mathbb{K}^*$。由于 $\mathbb{K}$ 具有（遗传性质），显然 $\mathbb{K}$ 和 $\mathbb{K}^*$ 表示同一个年龄，因此彼此同构。

□

定义 5.19。 年龄 $\mathcal{K}$ 具有**联合嵌入性质**，记作 **(JEP)**，如果对所有 $\mathcal{A}$，$\mathcal{B} \in \mathcal{K}$都存在一个 $\mathcal{C} \in \mathcal{K}$，使得存在嵌入 $\alpha_{\mathcal{A}}\colon \mathcal{A} \to \mathcal{C}$ 和 $\alpha_{\mathcal{B}}\colon \mathcal{B} \to \mathcal{C}$。

假设 $\mathfrak{s}$ 是一个图灵度。我们称可计算年龄 $\mathbb{K}$ 具有**-可计算联合嵌入性质**，记作 **(**$\mathfrak{s}$**-cJEP)**，如果存在一个 $\mathfrak{s}$-可计算函数 f，其定义域为$\mathbb{K} \times \mathbb{K}$，使得对所有 $\mathbb{I}(\ell_0)$ $\mathbb{I}(\ell_1) \in \mathbb{K}$，都有 $f(\mathbb{I}(\ell_0)$ $\mathbb{I}(\ell_1)) = (F_0, F_1)$，其中 (i) F_0和 F_1是嵌入；(ii) $\mathrm{dom}(F_0) = \mathbb{I}(\ell_0)$ 且 $\mathrm{dom}(F_1) = \mathbb{I}(\ell_1)$；以及 (iii) $\mathrm{codom}(F_0) = \mathrm{codom}(F_1)$。当 $\mathfrak{s}$为**0**时，我们称之为**可计算联合嵌入性质**，记作 **(cJEP)**。

命题 5.20。 假设 $\mathbb{K}$ 是一个具有 (JEP) 的可计算年龄。那么 $\mathbb{K}$也具有 $(\mathcal{EI}(\mathbb{K})$-cJEP)。

证明。给定 $\mathbb{I}(i)$ 和 $\mathbb{I}(j)$，搜索结构 $\mathcal{A}_k \in \mathbb{K}$ 以及 $\mathcal{A}_k$ 中的有限元组，直到找到一个 ℓ 和元组 $\mathbf{b}_i$,$\mathbf{b}_j \in \mathcal{A}_\ell$，使得 $\mathbf{b}_i \simeq \mathbf{a}_i$ 且 $\mathbf{b}_j \simeq \mathbf{a}j$。□

以下两个结果归功于 [CHMM11]。

命题 5.21 ([CHMM11，引理 2。6])。 如果 $\mathcal{M}$ 是一个可计算结构，那么 $\mathbb{K}[\mathcal{M}]$ 具有 (cHP)和 (cJEP)。

命题 5.22 ([CHMM11，定理 2。10])。 如果 $\mathbb{K}$ 是一个具有 (cHP) 和 (cJEP) 的可计算年龄，那么它在规范意义下是某个可计算结构的年龄。

接下来，我们介绍一些与合并性质相关的技术概念。其中一个关键概念是跨度，它充当合并图的“基底”。

定义 5.23。 可计算年龄 $\mathbb{K}$ 中的一个**潜在跨度** 是一个由潜在嵌入组成的有序对 (F_0, F_1)，其中 $\mathrm{dom}(F_0) = \mathrm{dom}(F_1)$。我们称潜在跨度 (F_0, F_1) 是**定义域为** $\mathrm{dom}(F_0)$的。若此外，F_0 和 F_1 均为嵌入，则该潜在跨度是一个**跨度** 。

关于潜在跨度 (F_0, F_1) 的**合并图** 是一个元组 (G_0, G_1)，满足

- G_0 是一个嵌入，且 G_1 是一个潜在嵌入，
- $\mathrm{dom}(G_i) = \mathrm{codom}(F_i)$，对于 $i \in \{0, 1\}$，
- $\mathrm{codom}(G_0) = \mathrm{codom}(G_1)$，并且
- 若 (F_0, F_1) 是一个跨度，则 G_1 是一个嵌入，且 $G_0 \circ F_0 = G_1 \circ F_1$。

当（F_0，F_1）是一个跨度时，以下图表必须交换。

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{I}(i_1) & \xrightarrow{G_0} & \mathbb{I}(k) \\ {\scriptstyle F_1}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle G_1} \\ \mathbb{I}(j) & \xrightarrow{F_0} & \mathbb{I}(i_0) \end{array}$$

请注意，判断一个元组是否为潜在跨度是可计算的，但判断一个元组是否为跨度则不一定是可计算的。同样，判断一个元组是否为关于某个潜在跨度的合并图，也不一定是可计算的。

定义 5.24。 年龄 $\mathcal{K}$具有**合并性质**，记作（AP），如果对于任意 $\mathcal{A}$，$\mathcal{B}$，$\mathcal{C} \in \mathcal{K}$，并且每当 $f_{\mathcal{B}}\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$和 $f_{\mathcal{C}}\colon \mathcal{A} \to \mathcal{C}$是嵌入时，都存在一个 $\mathcal{D} \in \mathcal{K}$，使得存在嵌入 $\alpha_{\mathcal{B}}\colon \mathcal{B} \to \mathcal{D}$和 $\alpha_{\mathcal{C}}\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$，其中 $\alpha_{\mathcal{B}} \circ f_{\mathcal{B}} = \alpha_{\mathcal{C}} \circ f_{\mathcal{C}}$。

设 $\mathfrak{s}$ 是一个图灵度。若存在一个 $\mathfrak{s}$-可计算函数，将每个潜在跨度映射为关于该跨度的合并图，则称可计算年龄 $\mathbb{K}$ 具有 **$\mathfrak{s}$-可计算融合性质**，记作（$\mathfrak{s}$-cAP）。

命题 n 5.25. 设 $\mathbb{K}$ 是具有（合并性质）的可计算年龄。则 $\mathbb{K}$ 具有（$\mathcal{EJ}$（$\mathbb{K}$）-cAP ）.

证明。我们描述一个算法，它使用 $\mathcal{EJ}(\mathbb{K})$将潜在跨度（F_0， F_1）映射为其上的合并图表。

步骤1:
使用 $\mathcal{EJ}(\mathbb{K})$检查 F_0 与 F_1 是否均为嵌入。

步骤2，情形a： F_0 或 F_1 中至少有一个不是嵌入
设 i 使得 $\mathbb{I}(i)$ =陪域(F_0)。令 $I = (\mathbb{I}(i)\ \mathbb{I}(i), \mathbf{a}_i)$ 为 $\mathbb{I}(i)$ 上的恒等映射。令G =(陪域(F_1) $\mathbb{I}(i)$,$\mathbf{a}_i$)。输出这对 (G, I)，它是关于 (F_0, F_1) 的合并图。

步骤 2，情形 b： F_0 和 F_1 都是嵌入
使用 $\mathcal{EJ}(\mathbb{K})$ 搜索一对 (G_0, G_1)，使其成为关于 (F_0, F_1) 的合并图。由于 $\mathbb{K}$ 满足（合并性质），我们总能找到这样的合并图。输出这对 (G_0, G_1)。□

本文关注的是合并性质的一种弱化形式，称为共尾融合性质；我们将看到，在计算方面，它比合并性质更复杂。

定义 5.26。 设 $\mathbb{K}$ 是一个可计算年龄。特选扩张的集合，记作 $\mathrm{DE}_{\mathbb{K}}$，是一个嵌入集合，满足

- 对于 $F \in \mathrm{DE}_{\mathbb{K}}$，我们有 $\mathrm{dom}(F), \mathrm{codom}(F) \in \mathbb{K}$,
- 对于 $F \in \mathrm{DE}_{\mathbb{K}}$ 以及陪域为 $= \mathrm{dom}(F)$ 的同构 G，并且 $\mathrm{dom}(G) \in \mathbb{K}$，我们有$F \circ G \in \mathrm{DE}_{\mathbb{K}}$,
- 对于 $F \in \mathrm{DE}_{\mathbb{K}}$ 以及定义域为 $= \mathrm{codom}(F)$ 的同构 H，并且 $\mathrm{codom}(H) \in \mathbb{K}$，我们有$H \circ F \in \mathrm{DE}_{\mathbb{K}}$,
- 对于所有 $\mathbb{I}(i) \in \mathbb{K}$，存在一个 $F \in \mathrm{DE}_{\mathbb{K}}$，使得 $\mathrm{dom}(F) = \mathbb{I}(i)$。

Su如果集合 $\mathrm{DE}_{\mathbb{K}}$ 是 $\mathfrak{s}$-可计算的，也就是说它作为集合是 $\mathfrak{s}$-可计算的 .

定义 5.27. 假设 $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_0, \alpha_1)\colon \mathbb{K}_0 \to \mathbb{K}_1$ 是一个可计算同构，并且 $\mathrm{DE}^{\mathbb{K}_0}$ 是 $\mathbb{K}_0$中的特选扩张集合。令 $\boldsymbol{\alpha}(\mathrm{DE}^{\mathbb{K}_0})$ 表示满足 $\boldsymbol{\alpha}^{-1}(F) \in \mathrm{DE}^{\mathbb{K}_0}$ 的 $\mathfrak{Cat}(\mathbb{K}_1)$ 中嵌入 F 的集合。

引理 5.28. 假设 $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_0, \alpha_1)\colon \mathbb{K}_0 \to \mathbb{K}_1$ 是一个可计算同构，且 $\mathrm{DE}^{\mathbb{K}_0}$ 是 $\mathbb{K}_0$ 中一个可计算的特选扩张集合。那么 $\boldsymbol{\alpha}(\mathrm{DE}^{\mathbb{K}_0})$ 是 $\mathbb{K}_1$ 中一个可计算的特选扩张集合。

证明。这是因为 $\mathrm{DE}^{\mathbb{K}_0}$ 在同构的前后复合下封闭。 □

定义 5.29. 若一个年龄 $\mathcal{K}$ 具有**共尾融合性质**，记作 (CAP)，则对每个$\mathcal{A} \in \mathcal{K}$，都存在一个 $\mathcal{A}' \in \mathcal{K}$，称为一个**amalgamation 基**，使得

- 存在一个嵌入 $\beta\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$，并且
- 每当 $\mathcal{B}, \mathcal{C} \in \mathcal{K}$ 以及 $f_{\mathcal{B}}\colon \mathcal{A}' \to \mathcal{B}$ 和 $f_{\mathcal{C}}\colon \mathcal{A}' \to \mathcal{C}$ 是嵌入时，就存在一个 $\mathcal{D} \in \mathcal{K}$，并且存在嵌入 $\alpha_{\mathcal{B}}\colon \mathcal{B} \to \mathcal{D}$ 和 $\alpha_{\mathcal{C}}\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$，其中 $\alpha_{\mathcal{B}} \circ f_{\mathcal{B}} = \alpha_{\mathcal{C}} \circ f_{\mathcal{C}}$。

定义 5.30。 假设 $\mathbb{K}$ 是一个可计算年龄。我们将一对满足以下条件的 $(\mathrm{AB}_{\mathbb{K}}, f_{\mathrm{AB}_{\mathbb{K}}})$ 称为 (CAP) 的**见证**。

(a) $\mathrm{AB}_{\mathbb{K}}$ 是一个特选扩张的集合，若 $F \in \mathrm{AB}_{\mathbb{K}}$，则 $\mathrm{codom}(F)$ 是一个合并基，并且

(b) $f_{\mathrm{AB}_{\mathbb{K}}}$ 接受满足以下条件的元组 $(F,\ G_0,\ G_1)$ 作为输入：(i) $F \in \mathrm{AB}_{\mathbb{K}}$，(ii) $(G_0,\ G_1)$ 是一个潜在跨度，且 (iii) $\mathrm{dom}(G_0) = \mathrm{dom}(G_1) = \mathrm{codom}(F)$，并输出关于 $(G_0,\ G_1)$ 的合并图。

这样的见证称为 $\mathfrak{s}$-**可计算**的，如果 $\mathrm{AB}_{\mathbb{K}}$ 是 $\mathfrak{s}$-可计算枚举的，且 $f_{\mathrm{AB}_{\mathbb{K}}}$ 是一个 $\mathfrak{s}$-可计算部分函数。若 $\mathbb{K}$ 有一个关于 (CAP) 的 $\mathfrak{s}$-可计算见证，则称 $\mathbb{K}$ 具有 ($\mathfrak{s}$-cCAP)。

定义5.31。设 $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_0, \alpha_1)\colon\ \mathbb{K}_0 \to \mathbb{K}_1$，并假设 $(\mathrm{AB}^{\mathbb{K}_0}, f_{\mathrm{AB}_{\mathbb{K}_0}})$ 是 $\mathbb{K}_0$的 (CAP) 见证。令 $\boldsymbol{\alpha}(f_{\mathrm{AB}_{\mathbb{K}_0}})$为如下映射：其输入为满足以下条件的元组 (F, G_0, G_1)：(i)$F \in \boldsymbol{\alpha}(\mathrm{AB}^{\mathbb{K}_0})$，(ii) (G_0, G_1) 是 $\mathbb{K}_1$中的潜在跨度，且 (iii) $\mathrm{dom}(G_0) = \mathrm{dom}(G_1) = \mathrm{codom}(F)$；其输出为 $(\boldsymbol{\alpha}(H_0)\ \boldsymbol{\alpha}(H_1))$，其中 $(H_0, H_1) = f_{\mathrm{AB}_{\mathbb{K}_0}}\big(\boldsymbol{\alpha}^{-1}(F)\ \boldsymbol{\alpha}^{-1}(G_0)\ \boldsymbol{\alpha}^{-1}(G_1)\big)$.

引理5.32。设 $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_0, \alpha_1)\colon\ \mathbb{K}_0 \to \mathbb{K}_1$ 是一个可计算同构，并且假设$(\mathrm{AB}^{\mathbb{K}_0}, f_{\mathrm{AB}_{\mathbb{K}_0}})$ 是 $\mathbb{K}_0$ 的 (CAP) 见证，且该见证是可计算的。那么 $(\boldsymbol{\alpha}(\mathrm{AB}^{\mathbb{K}_0})\ \boldsymbol{\alpha}(f_{\mathrm{AB}_{\mathbb{K}_0}}))$ 是 $\mathbb{K}_1$ 的 (CAP)见证，且该见证是可计算的。

证明。由引理 5.28可知，集合 $\boldsymbol{\alpha}(\mathrm{AB}^{\mathbb{K}_0})$ 是一个特选扩张集合。定义5.30 (a) 成立，因为作为一个 amalgamation 基这一性质在可计算年龄的同构下保持不变。定义 5.30(b) 成立，因为作为潜在跨度的合并这一性质在可计算年龄的同构下保持不变。最后，$(\boldsymbol{\alpha}(\mathrm{AB}^{\mathbb{K}_0})\ \boldsymbol{\alpha}(f_{\mathrm{AB}_{\mathbb{K}_0}}))$ 是可计算的，因为它可以由 $(\mathrm{AB}^{\mathbb{K}_0}, f_{\mathrm{AB}_{\mathbb{K}_0}})$ 和 $\boldsymbol{\alpha}$计算得到，而这两者都是可计算的。□

下面的推论可直接得出。

推论5.33。设 $\mathfrak{s}$ 是一个图灵度，并且假设 $\mathbb{K}_0$ 具有 $(\mathfrak{s}\text{-cCAP})$，且 $\mathbb{K}_1$ 与 $\mathbb{K}_0$可计算同构。那么 $\mathbb{K}_1$ 具有 $(\mathfrak{s}\text{-cCAP})$。

命题5.34。对于可计算年龄 $\mathbb{K}$，以下条件等价。

- $\mathbb{K}$具有 (CAP)。
- $\mathbb{K}$ 对于某个图灵度 $\mathfrak{s}$具有 $(\mathfrak{s}\text{-cCAP})$。

证明。注意，(CAP) 的任意见证都可以用一个实数编码。当且仅当存在 $\mathbb{K}$的一个 (CAP) 见证时，可计算年龄 $\mathbb{K}$ 才具有 (CAP)；此时它具有 ($\mathfrak{s}$-cCAP)，其中 $\mathfrak{s}$是编码该见证的实数的图灵度。□

引理 5.35. 如果一个年龄具有(AP)，那么它也具有(CAP)。如果一个可计算年龄具有(cAP)，那么它也具有(cCAP)。

证明.这是因为在具有 (AP) 的年龄中，每个元素都是一个 amalgamation 基。□

前面我们已经看到，如何为 (HP)、(JEP) 和 (AP) 各自的有效版本所需的计算能力给出上界。现在我们对 (CAP) 也作类似处理，但所得上界更高。接下来的结果虽具技术性，却十分重要。

定理 5.36. 设 $\mathbb{K}$ 是一个可计算年龄，并令AB 为 $\mathbb{K}$ 中定义域属于 $\mathbb{K}$ 某个 *amalgamation* 基的所有元素间嵌入所组成的集合。那么 *(a)* $\mathrm{AB} \leq_{\mathrm{T}} \mathcal{EJ}(\mathbb{K})''$，且 *(b)* 当 $\mathbb{K}$ 具有(CAP)时，它具有$(\mathcal{EJ}(\mathbb{K})''\text{-cCAP})$。

证明.我们先定义 $\mathcal{EJ}(\mathbb{K})''$-可计算函数 h_1、h_2 和 h_3。令 h_1 为一个函数，其输入为元组 (F, G_0, G_1, H_0, H_1)，其中

- F，G_0，G_1，H_0，H_1 是潜在嵌入，
- 陪域(F) = 定义域(G_0) = 定义域(G_1)，
- 陪域(H_0) =陪域(H_1)，且

• 定义域(H_i) = 陪域(G_i)，对于 $i \in \{0,1\}$,

并且在两者都满足以下条件时输出 1

• F 是一个嵌入

• (H_0, H_1) 是关于 (G_0, G_1) 的一个合并图,

否则输出 0。

注意， h_1 是 $\mathcal{EI}(\mathbb{K})$-可计算的，因为我们可以根据 $\mathcal{EI}(\mathbb{K})$ 判断潜在嵌入是否为嵌入，因此也可以根据 $\mathcal{EI}(\mathbb{K})$ 判断 (H_0, H_1) 是否为关于 (G_0, G_1) 的合并图。

令 h_2 为一个函数，其输入是一个潜在嵌入三元组 (F, G_0, G_1)，其中 dom(F) = dom(G_0) = dom(G_1)；若存在 (H_0, H_1) 使得h_1(F, G_0, G_1, H_0, H_1) = 1，则返回 1，否则返回 0。

注意，对于特定的潜在跨度 (G_0, G_1) 和潜在嵌入 F, h_2 成立，当且仅当存在关于 (G_0, G_1) 的合并图，使得 F 是到 dom(G_0) 中的嵌入。注意， h_2 是 h_1'-可计算的，因此是 $\mathcal{EI}(\mathbb{K})'$-可计算的。

最后，令 h_3 为一个函数，其输入是一个潜在嵌入 F；如果以下两项都成立，则返回 1

• F 是一个嵌入，并且

对于任意潜在跨度 (G_0, G_1)，只要 dom(G_0) =dom(G_1) =codom(F), • h_2(F, G_0, G_1) = 1

否则返回 0。

注意， h_3 成立当且仅当 F 的陪域是一个 amalgamation 基。注意， h_3 是 h_2'-可计算的，因此也是 $\mathcal{EI}(\mathbb{K})''$-可计算的。

我们先证明 (b)。注意，对于任意 $\mathcal{M} \in \mathbb{K}$，恒等映射$_{\mathcal{M}}$ ∈AB（即， $\mathcal{M}$ 是一个 amalgamation 基）成立，当且仅当 h_3(id$_{\mathcal{M}}$) = 1 成立。因此， $\mathcal{M}$ 可由 h_3计算得出，从而 AB $\leq_{\mathrm{T}} \mathcal{EI}(\mathbb{K})''$。

为证明 (a)，令 f_{AB}为如下函数：它将元组 (F, G_0, G_1) 作为输入，其中 $F \in$ AB，且 (G_0, G_1) 是一个潜在跨度，满足 dom(G_0) = dom(G_1) = codom(F)；该函数使用 h_1 搜索关于 (G_0, G_1) 的合并图，并输出找到的第一个合并图。由于 AB 由陪域为 amalgamation 基的映射组成，这样的合并图总是存在，因此该函数总会收敛。现在假设 $\mathbb{K}$ 具有 (CAP)。那么 AB 是特选扩张的集合，因此 (AB f_{AB}) 是 (CAP) 的一个见证。然而，(AB f_{AB}) 是h_3-可计算的，因此也是 $\mathcal{EI}(\mathbb{K})''$-可计算的。因此， $\mathbb{K}$具有 ($\mathcal{EI}(\mathbb{K})''$-cCAP)。□

6. Upper Bounds

6.1. **超齐次结构**。

定义 6.1. 结构 $\mathcal{M}$ 是**超齐性**的，如果对每一个有限生成结构$\mathcal{A} \subseteq \mathcal{M}$ 以及每一个同构 $f\colon\ \mathcal{A} \to \mathcal{A}^*$，在满足 $\mathcal{A}^* \subseteq \mathcal{M}$ 时，都存在自同构 $g\colon\ \mathcal{M} \to \mathcal{M}$，使得 $g\restriction_{\mathcal{A}} = f$。

该结 构 $\mathcal{M}$ 是**Fra¨ıss´e极限（关于** $\mathcal{K}$），如果 $\mathcal{M}$的年龄是 $\mathcal{K}$ 且 $\mathcal{M}$是超齐 s.

定义 6.2. 可计算结构 $\mathcal{M}$ 是**可计算超齐次**的，如果存在函数 g，它接受来自 $\mathcal{M}$ 的等长有限元组对（$\mathbf{a}$,$\mathbf{b}$），并返回 $\mathcal{M}$ 的底集到自身某个双射的编码，使得若 t_{cl}（$\mathbf{a}$,$\mathbf{b}$）是从$\mathbf{cl}_{\mathcal{M}}$（$\mathbf{a}$）到$\mathbf{cl}_{\mathcal{M}}$（$\mathbf{b}$）的同构，则 g（$\mathbf{a}$,$\mathbf{b}$）是 $\mathcal{M}$的自同构，且延拓 t_{cl}（$\mathbf{a}$,$\mathbf{b}$）。我们称这样的映射 g为 $\mathcal{M}$的可计算超齐性的**见证**。

结构 $\mathcal{M}$ 是**可计算 Fra¨ıss´e 极限，其中** $\mathbb{K}$ 当且仅当 $\mathcal{M}$ 是可计算超齐性的，且 $\mathbb{K}$ 是 $\mathcal{M}$的年龄的可计算表示。

请注意，论文 [CHMM11] 定义了“可计算齐性”的概念：它不是输入两个 $\simeq$-等价元组并返回一个自同构，而是输入两个 $\simeq$-等价元组 $\mathbf{a}$、$\mathbf{b}$ 以及一个额外的点 x，并返回一个新点 y，使得 $\mathbf{a}y \simeq \mathbf{b}x$。请注意，通过依据单点扩张公理从一个自同构进行标准的来回构造，他们对可计算齐性的定义与我们对可计算超齐性的定义是等价的。

我们的下一个结果加强了以下结果的一个方向：[CHMM11，定理 3。9]。

命题 6.3. 设 $\mathcal{M}$ 是任意可数结构，其定义域为 $\mathfrak{s}$-可计算，且该结构是 $\mathfrak{s}$-可计算超齐次的。则 $\mathbb{K}[\mathcal{M}]$ 具有($\mathfrak{s}$-cAP)。

证明。设 g 是 $\mathcal{M}$ 的 $\mathfrak{s}$-可计算超齐性的一个见证。假设 $(F_0,\ F_1)$ 是关于 $\mathbb{I}(i)$ 的潜在跨度，并假设 $h_0 = g(\mathbf{a}_i,\ \text{值域}\ (F_0))$ 与 $h_1 = g(\mathbf{a}_i,\ \text{值域}\ (F_1))$。设 G_0 是从陪域 (F_0) 到陪域 $(F_0) \cup h_0 h_1^{-1}($ 陪域 $(F_1))$ 的包含映射，并设 G_1 是映射 $h_0 h_1^{-1}$与到陪域(G_0) 中的包含映射复合所得的映射。

易见 G_0 是一个嵌入。此外，若 F_1 是嵌入，则 G_1 也是嵌入。因此 $(G_0,\ G_1)$ 是关于 $(F_0,\ F_1)$ 的合并图。态射 G_0 与 G_1 均可由两个态射 h_0 与 h_1计算得到，而这两个态射本身又均可由 $(F_0,\ F_1)$ 与 g计算得到。因此 $\mathbb{K}[\mathcal{M}]$ 具有 ($\mathfrak{s}$-cAP)。□

另一 个方向的 [CHMM11，定理 39]等价于以下结果。

命题 6.4 ([CHMM11，定理 39])。 设 $\mathbb{K}$ 是一个具有 (cHP)、(cJEP)和(cAP)的可计算年龄。那么 $\mathbb{K}$ 有一个可计算的弗雷歇¨极限´。

We h有以下引理的推论 5.17以及命题5.20、5.25和6.4。

推论 6.5。 设 $\mathbb{K}$ 是一个具有 (遗传性质)、(JEP)和(合并性质)的可计算年龄。那么 $\mathbb{K}$ 有一个$\mathcal{EI}(\mathbb{K})$-可计算的弗雷歇¨极限´。

下一个结果使用标准的来回构造来构造适当的自同构。

命题 6.6。 设 $\mathcal{M}$ 是一个可计算结构，并且假设 $\mathcal{M}$ 是超齐的。那么 $\mathcal{M}$ 是 $\mathcal{EI}(\mathcal{M})$-可计算超齐的。

证明。令 $(x_i)_{i\in\omega}$ 为 $\mathcal{M}$ 的一个枚举（可能含有重复项）。设 $\mathbf{a}$、$\mathbf{b} \in \mathcal{M}$ 为元组，且$\mathbf{a} \sim \mathbf{b}$。

首先，以 $\mathcal{EI}(\mathcal{M})$-可计算的方式检验$\mathbf{a} \simeq \mathbf{b}$ 是否成立。

平凡情形：
若$\mathbf{a} \not\sim \mathbf{b}$，则令 $g_{\mathbf{a},\ \mathbf{b}}$ 为任意一个双射，它将$\mathbf{a}$ 的底集映到$\mathbf{b}$ 的底集，并满足 $g_{\mathbf{a},\ \mathbf{b}}(\mathbf{a}) = \mathbf{b}$。注意，由于$\mathbf{a} \sim \mathbf{b}$，我们总能找到这样的映射。

非平凡情形：
如果 $\mathbf{a} \simeq \mathbf{b}$，我们分阶段定义同构 $g_{\mathbf{a},\mathbf{b}}$：$\mathcal{M} \to \mathcal{M}$。

Stage 0:
Let $g^0_{\mathbf{a},\mathbf{b}} = \mathrm{t}_{\mathrm{cl}}(\mathbf{a},\mathbf{b}) \restriction_{\mathbf{a}}$.

阶段 $2k+1$。
如果 $x_k \in \mathrm{range}(g^{2k}_{\mathbf{a},\mathbf{b}})$，那么令 $g^{2k+1}{}_{\mathbf{a},\mathbf{b}} = g^{2k}_{\mathbf{a},\mathbf{b}}$。否则，令 $\mathbf{c}_{2k}$ 为 $\mathrm{dom}(g^{2k}_{\mathbf{a},\mathbf{b}})$ 的一个枚举，并令 $\mathbf{d}_{2k}$ 为 $\mathrm{range}(g^{2k}_{\mathbf{a},\mathbf{b}})$ 的一个枚举。寻找一个 $\beta_{2k} \in \omega$，使得 $\mathbf{c}_{2k}{}^\frown x_{\beta_{2k}} \simeq \mathbf{d}_{2k}{}^\frown x_{2k}$。我们知道这样的 β_{2k} 存在，因此可以通过 $\mathcal{EI}(\mathcal{M})$-可计算的方法找到这样一个值。令

$g^{2k+1}_{\mathbf{a},\mathbf{b}} = \mathfrak{t}_{\mathrm{cl}}(\mathbf{c}_n{}^\frown x_{\beta_{2k}}, \mathbf{d}_{2k}{}^\frown x_{2k})$.

阶段 $2k+2$。
如果 $x_k \in$定义域($g^{2k+1}{}_{\mathbf{a},\mathbf{b}}$)，则令 $g^{2k+2}{}_{\mathbf{a},\mathbf{b}} = g^{2k+1}{}_{\mathbf{a},\mathbf{b}}$。否则，令$\mathbf{c}_{2k+1}$为定义域($g^{2k+1}{}_{\mathbf{a},\mathbf{b}}$)的一个枚举，并令$\mathbf{d}_{2k+1}$为值域($g^{2k+1}{}_{\mathbf{a},\mathbf{b}}$)的一个枚举。搜索一个 $\alpha_{2k+1} \in \omega$，使得$\mathbf{c}_{2k+1}{}^\frown x_k \simeq \mathbf{d}_{2k+1}{}^\frown x_{\alpha_{2k+1}}$。我们知道这样的 α_{2k+1} 存在，因为 $\mathcal{M}$ 是超齐性的。因此我们可以 $\mathcal{EI}(\mathcal{M})$-可计算地找到这样一个值。

令 $g^{2k+2}{}_{\mathbf{a},\mathbf{b}} = \mathfrak{t}_{\mathrm{cl}}(\mathbf{c}_{2k+1}{}^\frown x_{2k+1}, \mathbf{d}_{2k+1}{}^\frown x_{\alpha_{2k+1}})$。
令$g_{\mathbf{a},\mathbf{b}} = \bigcup_{n\in\omega} g^n_{\mathbf{a},\mathbf{b}}$。显然，$g_{\mathbf{a},\mathbf{b}}$ 相对于$\mathbf{a},\mathbf{b}$ 是一致地 $\mathcal{EI}(\mathcal{M})$-可计算的，并见证了 $\mathcal{M}$的$\mathcal{EI}(\mathcal{M})$-超齐性。□

6.2. **余终超齐结构**。

定义 6.7。 设 $\mathcal{M}$ 为一个结构。若集合 E 满足以下条件，则称其为（在 $\mathcal{M}$中的）**余终集合** 。

- E 是 $\mathcal{M}$中有限元组的集合。
- 对于 $\mathcal{M}$ 中的每个有限元组$\mathbf{a}$，都存在某个$\mathbf{b} \in E$，使得$\mathbf{a} \subseteq \mathrm{cl}_{\mathcal{M}}(\mathbf{b})$。
- 若$\mathbf{b} \in E$，且$\mathbf{a} \subseteq \mathrm{cl}_{\mathcal{M}}(\mathbf{b})$是一个有限元组，则$\mathbf{ab} \in E$。
- 对于 $\mathcal{M}$中的所有有限元组$\mathbf{a}$ 和$\mathbf{b}$，若$\mathbf{a} \in E$ 且$\mathbf{a} \simeq \mathbf{b}$，则$\mathbf{b} \in E$。

定义 6.8。 结构 $\mathcal{M}$ 若满足以下条件，则称为**余终超齐次**：对每个有限集 $A \subseteq \mathcal{M}$，都存在一个有限生成的 $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{M}$，使得 $A \subseteq \mathcal{B}$；并且只要 $f\colon \mathcal{B} \to \mathcal{B}^*$ 是一个同构，且 $\mathcal{B}^* \subseteq \mathcal{M}$，就存在一个自同构 f^*，使得 $\mathcal{M} \to \mathcal{M}$。给定 $\mathcal{M}$中的一个余终集合 E，若 E 中的任意两个元素之间的同构都能扩展为 $\mathcal{M}$的一个自同构，则称 $\mathcal{M}$ 对于 E 是**余终超齐次的**。

（特别地，对于每个余终超齐次结构 $\mathcal{M}$，在 $\mathcal{M}$ 中都存在某个余终集合 E，使得 $\mathcal{M}$ 对于 $\mathcal{M}$是余终超齐次的。）

以下是一个来自 [dR21] 的例子：它是一个余终超齐次结构，但并非超齐次结构。关于这个例子作为余终合并实例的更多细节，请参见[Kru16，例 3.1。9]。

例 6.9. 设 $Z = (G, E)$ 为（在同构意义下）唯一的无限无向无自反图，它具有单个连通分支，且每个元素的度为2，即 Z 由单个 $\mathbb{Z}$-链构成。对于互异的 $a, b, c \in Z$，若存在 $c_0, \ldots, c_{n-1}$，使得 (a, c_0)、$(c_0, c_1) \ldots, (c_{n-1}, b) \in E$且 $c \in \{c_i\}_{i\in[n-1]}$，则称 c**介于** a与 b之间。我们还称，若介于 a 与 b之间的元素集合的大小为 n，则 a与 b相距距离$n+1$。

注意， Z 不是超齐性的，因为只要 $a_0, a_1, b_0, b_1 \in Z$ 使得点对 (a_0, a_1) 与 (b_0, b_1) 都不含边，则这些点对具有相同的无量词类型，即使 a_0 与 a_1 之间的距离不同于 b_0 与 b_1之间的距离。

若对任意不同的 $a, b \in A$，只要 c 位于 a 与 b 之间，就有$c \in A$，则称子集 A 是 Z **闭的**。注意，任意两个大小相同的有限闭集之间，都存在一个将其中一个映射到另一个的 Z 自同构。还要注意，每个有限元素集都包含于某个有限闭集中。因此， Z 是余终超齐次的。

定义 6.10。 设 $\mathcal{M}$ 是一个可计算结构，并假设 E 是 $\mathcal{M}$中的一个 $\mathfrak{s}$-可计算余终集合。若存在一个 $\mathfrak{s}$-可计算的 g，使得.....，则称 $\mathcal{M}$ 是 $\mathfrak{s}$**-可计算余终超齐次的**（相对于E）。

- dom(g) 是 $\mathcal{M}$ 中元组对（$\mathbf{a}$，$\mathbf{b}$）的集合，其中 $\mathbf{a} \in E$ 且 $\mathbf{a} \sim \mathbf{b}$ ，

- 若（$\mathbf{a}$， $\mathbf{b}$）∈属于 dom(g)，则 g（$\mathbf{a}$， $\mathbf{b}$）是一个 $\mathfrak{s}$-可计算双射 $g_{\mathbf{a},\,\mathbf{b}}$ 的索引：$\mathcal{M} \to \mathcal{M}$，其中 (i) $g_{\mathbf{a},\,\mathbf{b}}(\mathbf{a}) = \mathbf{b}$；且 (ii) 若 $\mathbf{a} \simeq \mathbf{b}$，则 $g_{\mathbf{a},\,\mathbf{b}}$ 是 $\mathcal{M}$ 的自同构。

Pr命题 6.11. 设 $\mathcal{M}$ 是一个可计算结构。以下各项等价 $t.$

(a) $\mathcal{M}$是余终超齐次的。(b)存在某个图灵度 $\mathfrak{s}$，使得 $\mathcal{M}$ 是 $\mathfrak{s}$-可计算余终超齐次的。

证明。从 (b) 到 (a) 的蕴含是显然的。

假设 (a) 成立。令 E 为满足以下条件的元组集合：对其中的任意元组 $\mathbf{a}$，只要 $f\colon \mathrm{cl}_{\mathcal{M}}(\mathbf{a}) \to \mathcal{A}^*$是一个同构，就存在一个 $\mathcal{M}$ 的自同构延拓 f。

现在，对于 $\mathcal{M}$ 中满足 $\mathbf{a} \in E$ 且 $\mathbf{a} \sim \mathbf{b}$的所有 $\mathbf{a}$、$\mathbf{b}$，我们定义 $g_{\mathbf{a},\mathbf{b}}$。令 $t_{\mathbf{a},\mathbf{b}}$ 为从$\mathbf{a}$ 的底集到 $\mathbf{b}$ 的底集的唯一双射，使得 $t_{\mathbf{a},\mathbf{b}}(\mathbf{a}) = \mathbf{b}$；这样的 $t_{\mathbf{a},\mathbf{b}}$ 必定存在，因为$\mathbf{a} \sim \mathbf{b}$。

- 若 $\mathbf{a} \simeq \mathbf{b}$，则令 $g_{\mathbf{a},\mathbf{b}}$ 为 $\mathcal{M}$ 的任意一个扩张了 $t_{\mathbf{a},\mathbf{b}}$的自同构。
- 若 $\mathbf{a} \not\simeq \mathbf{b}$，则令 $g_{\mathbf{a},\mathbf{b}}$ 为从 $\mathcal{M}$ 的底集到其自身的任意一个扩张了 $t_{\mathbf{a},\mathbf{b}}$的双射。

令 $\mathfrak{s}$ 为 E 的图灵度与 $\{g_{\mathbf{a},\mathbf{b}}$ 的图灵度的并：$\mathbf{a} \in E$ 和 $\mathbf{b} \sim \mathbf{a}\}$。于是 $\mathcal{M}$ 是 $\mathfrak{s}$-可计算的余终超齐次结构，且 (b) 成立。□

命题 6.12. </style}令 为某个余终集合 中的余终超齐次结构。若 $\mathbf{a} \in E$， 则 $\mathrm{cl}_{\mathcal{M}}(\mathbf{a})$ *</style}*是 $\mathbb{K}[\mathcal{M}]$中的一个 *amalgamation* 基。

证明。令 $\mathbf{a} \in E$ 并假设 (G_0, G_1) 是一个跨度，满足 dom(G_0) = $\mathrm{cl}_{\mathcal{M}}(\mathbf{a})$。我们必须证明，存在关于 (G_0, G_1) 的某个合并图。注意，有嵌入$J_0\colon \mathrm{codom}(G_0) \to \mathcal{M}$和 $J_1\colon \mathrm{codom}(G_1) \to \mathcal{M}$。令 $K_i = J_i \circ G_i$对 $i \in \{0,1\}$。于是 K_0和 K_1分别是从 $\mathrm{cl}_{\mathcal{M}}(\mathbf{a})$ 到 $\mathcal{M}$的嵌入。因此 $K_1 \circ K_0^{-1}$是从 range(K_0) 到 range(K_1) 的同构。

由于 $\mathbf{a} \in E$，存在 $\mathcal{M}$ 的一个自同构 α，使得$\alpha \restriction_{\mathrm{range}(K_0)} = K_1 \circ K_0^{-1}$。令$\mathcal{C} = \mathrm{cl}_{\mathcal{M}}(\mathrm{range}(J_1) \cup \alpha\text{“}(\mathrm{range}(J_0)))$。令 $I\colon \mathrm{range}(J_1) \to \mathcal{C}$为包含映射。于是 $(\alpha \circ J_0, I \circ J_1)$ 是关于 (G_0, G_1) 的合并图，因此 $\mathrm{cl}_{\mathcal{M}}(\mathbf{a})$ 是一个合并基。□

命题 6.13。设 $\mathcal{M}$ 是一个余终超齐次结构。设 $\mathcal{A}_0$、$\mathcal{A}_1 \subseteq \mathcal{M}$ 是 $\mathcal{M}$ 的年龄中的合并基，并假设 $k\colon \mathcal{A}_0 \to \mathcal{A}_1$ 是一个同构。那么存在一个自同构 $g\colon \mathcal{M} \to \mathcal{M}$，使得 $g \restriction_{\mathcal{A}_0} = k$。

证明。对于每个 $j \in \{0,1\}$，令 $\mathcal{B}_j \supseteq \mathcal{A}_j$ 满足：从 $\mathcal{B}_j$ 到 $\mathcal{M}$ 的任意嵌入都可以扩展为 $\mathcal{M}$ 的某个自同构。由于 $\mathcal{A}_0$ 是一个合并基，必定存在一个有限生成的$\mathcal{C} \subseteq \mathcal{M}$，以及嵌入 $\alpha_0\colon \mathcal{B}_0 \to \mathcal{C}$ 和 $\alpha_1\colon \mathcal{B}_1 \to \mathcal{C}$，使得 $\alpha_0 \restriction_{\mathcal{A}_0} = \alpha_1 \circ k$。

那么，对于每个 $j \in \{0,1\}$，根据 $\mathcal{B}_j$ 的定义可知，存在一个自同构 β_j，它将 α_j扩展为 $\mathcal{M}$ 的一个自同构。因此，$\beta_1^{-1} \circ \beta_0$ 是 $\mathcal{M}$ 的一个自同构，并将 k扩展为自身。□

命题 6.14. 设 $\mathfrak{s}$ 是一个图灵度，$\mathcal{M}$ 是一个 $\mathfrak{s}$-可计算结构，且是$\mathfrak{s}$-可计算的余终超齐次结构。如果 $\mathcal{EI}(\mathcal{M}) \leq_{\mathrm{T}} \mathfrak{s}$，那么 $\mathbb{K}[\mathcal{M}]$ 具有($\mathfrak{s}$-cCAP)。

证明。假设 $\mathcal{EI}(\mathcal{M}) \leq_{\mathrm{T}} \mathfrak{s}$。我们需要构造一个 $\mathfrak{s}$-可计算的 (CAP) 见证。设 E是一个 $\mathfrak{s}$-可计算的余终集合，它见证了 $\mathcal{M}$ 的 $\mathfrak{s}$-可计算余终超齐性。令 $\mathbf{AB}^{\mathbb{K}[\mathcal{M}]}$ 为 $\mathbb{K}[\mathcal{M}]$ 中陪域同构于 E 的某个元素的嵌入所构成的集合。注意，$\mathbf{AB}^{\mathbb{K}[\mathcal{M}]}$ 可由 $\mathcal{EI}(\mathcal{M})$ 和 E计算得到，而它们各自都是 $\mathfrak{s}$-可计算的。

现在设 $(G_0,\ G_1)$ 是 $\mathbb{K}[\mathcal{M}]$ 中的一个潜在跨度，并假设 $F \in \mathrm{AB}^{\mathbb{K}[\mathcal{M}]}$ 且 $\mathrm{codom}(F) = \mathrm{dom}(G_0)$。我们将以 $\mathfrak{s}$-可计算的方式找到一个合并图 $(H_0,\ H_1)$。分两种情况。

如果 (G_0, G_1) 不是一个跨度，那么令 (H_0, H_1) 为一对态射，使得 $\mathrm{dom}(H_0) = \mathrm{codom}(G_0)$ 且 $\mathrm{dom}(H_1) = \mathrm{codom}(G_1)$，并且 $\mathrm{codom}(H_0) = \mathrm{codom}(H_1)$。注意，这样的一对态射总是存在，因为 $\mathbb{K}[\mathcal{M}]$ 具有 (JEP)。因此，我们可以通过使用 $\mathcal{EI}(\mathcal{M})$ 搜索，以 $\mathfrak{s}$-可计算的方式找到这样一对态射。

如果 (G_0, G_1) 是一个跨度，那么令 $I_0 \colon \mathrm{codom}(G_0) \to \mathcal{M}$ 和 $I_1 \colon \mathrm{codom}(G_1) \to \mathcal{M}$ 为嵌入。注意，这样的嵌入总是存在，因为 G_0 和 G_1 是 $\mathbb{K}(\mathcal{M})$ 中的嵌入。对于 $i \in \{0,1\}$，令 $J_i = I_i \circ G_i$。由于 (G_0, G_1) 是一个跨度，且 $\mathrm{dom}(G_0) = \mathrm{dom}(G_1) \in E$，因此必定存在一个 $\mathcal{M}$ 的自同构 α，使其扩张 $J_1^{-1} \circ J_0$。此外，由于 $\mathcal{M}$ 是 $\mathfrak{s}$-可计算的余终超齐次结构，我们可以以一致于 (F, G_0, G_1) 的方式，以 $\mathfrak{s}$-可计算的方式找到这样一个自同构 α。但此时 $(\alpha \circ I_0, I_1)$ 是关于 (G_0, G_1) 的合并图。令 $(H_0, H_1) = (\alpha \circ I_0, I_1)$。

设 $f_{\mathrm{AB}_{\mathbb{K}[\mathcal{M}]}}$ 为将 (F, G_0, G_1) 映到 (H_0, H_1) 的映射。注意，$f_{\mathrm{AB}_{\mathbb{K}[\mathcal{M}]}}$ 是 $\mathfrak{s}$-可计算的，因为 $\mathcal{EI}(\mathcal{M})$ 可用于判定 (G_0, G_1) 是否为跨度，并且这两种情形均可 $\mathfrak{s}$- 可计算地找到 (H_0, H_1)。因此 $(\mathrm{AB}^{\mathbb{K}[\mathcal{M}]}, f_{\mathrm{AB}_{\mathbb{K}[\mathcal{M}]}})$ 是 $\mathbb{K}[\mathcal{M}]$ 具有 ($\mathfrak{s}$-cCAP) 的见证，从而完成证明。□

我们已经知道，根据命题5.21，对任意 $\mathfrak{s}$-可计算 $\mathfrak{s}$-余终超齐次结构 $\mathcal{M}$，其典范 $\mathfrak{s}$-可计算年龄 $\mathbb{K}[\mathcal{M}]$具有（$\mathfrak{s}$-cHP）和（$\mathfrak{s}$-cJEP）。命题6.14表明它也具有（$\mathfrak{s}$-cCAP），如果 $\mathcal{EI}(\mathcal{M}) \leq_{\mathrm{T}} \mathfrak{s}$。

定义 6.15. 设 $\mathfrak{s}$ 为一个图灵度，并假设 E 是一个余终集合。一个 $\mathfrak{s}$-可计算结构 $\mathcal{M}$ 具有 $\mathfrak{s}$-可计算余终扩张性质（相对于 E），如果存在一个 $\mathfrak{s}$-可计算部分函数 p，它接受满足 (i) a, b, c $\in \mathcal{M}$, (ii) a, c $\in E$, (iii) a $\subseteq \mathrm{cl}_{\mathcal{M}}$(c)，以及 (iv) a $\sim$ b 的元组 (a, b, c)，并返回一个元组 d，使得 ac $\sim$ bd，并且每当 a $\simeq$ b 时，则 (I) d $\simeq$ c，(II) b $\in \mathrm{cl}_{\mathcal{M}}$(d)，以及 (III) $\mathrm{t}_{\mathrm{cl}}(\mathrm{d}, \mathrm{c})\restriction_{\mathbf{b}} = \mathrm{t}_{\mathrm{cl}}(\mathrm{b}, \mathrm{a})$。

下一个结果描述了前两个定义之间的重要关系。证明利用余终扩张性质构造一个自同构，使其扩张 E 中元素间的任意同构，从而推广了如下证明：一个结构是超齐次的，当且仅当其年龄具有单点扩张性质。

命题 6.16. 设 $\mathfrak{s}$ 是一个图灵度，且 $\mathcal{M}$ 是一个 $\mathfrak{s}$-可计算结构。假设 $\mathcal{EI}(\mathcal{M}) \leq_{\mathrm{T}} \mathfrak{s}$，并设 E 是一个 $\mathfrak{s}$-可计算的余终对集合。那么，$\mathcal{M}$ 相对于 E 是 $\mathfrak{s}$-可计算的余终超齐次结构，当且仅当 $\mathcal{M}$ 相对于 E具有 $\mathfrak{s}$-可计算的余终扩张性质。

证明。假设 $\mathcal{M}$ 相对于 E是 $\mathfrak{s}$-可计算的余终超齐次结构，并设 h 是见证这一性质的函数。记 $h_{\mathbf{a},\mathbf{b}}$ 为由 h(a, b) 编码的函数。设 a, b, c $\in \mathcal{M}$，且 a, c $\in E$。若 a $\simeq$ b，则 $h_{\mathbf{a},\mathbf{b}}$ 是一个将 a 映到 b 的 $\mathcal{M}$ 自同构。令 p(a, b, c) = $h_{\mathbf{a},\mathbf{b}}$(c)。那么，$E$ 和 p 见证了 $\mathcal{M}$ 相对于 E具有 $\mathfrak{s}$-可计算的余终扩张性质。此外，由于 E 和 h是 $\mathfrak{s}$-可计算的，p 也是 $\mathfrak{s}$-可计算的。

反过来，现在假设 $\mathcal{M}$ 对于 $\mathcal{M}$ 相对于 E 具有 $\mathfrak{s}$-可计算余终扩张性质，并令 p 为见证此性质的函数。令 $(x_i)_{i\in\omega}$ 为 $\mathcal{M}$ 的定义域的 $\mathfrak{s}$-可计算枚举。假设 $\mathbf{a},\mathbf{b} \in \mathcal{M}$，其中 $\mathbf{a} \in E$。我们将通过归纳法定义函数序列 $(h^n_{\mathbf{a},\mathbf{b}})_{n\in\omega}$ 以及元组序列 $(\mathbf{a}_n)_{n\in\omega}$ 和 $(\mathbf{b}_n)_{n\in\omega}$。定义这些序列时，使得对每个 $n \in \omega$，以下归纳假设均成立。

- h^na<style 恒等映射 ='2'>,b $\subseteq h^{n+1}_{\mathbf{a},\mathbf{b}}$.
- $\mathbf{a}_n$ 是 $h^n{}_{\mathbf{a},\mathbf{b}}$ 的定义域的枚举。
- $\mathbf{b}_n = h^n{}_{\mathbf{a},\ \mathbf{b}}(\mathbf{a}^n)$
- $\mathbf{a}_n,\ \mathbf{b}_n \in E$ 当 $\mathbf{a} \simeq \mathbf{b}$。

基例：$n = 0$我们令 $h^0_{\mathbf{a},\,\mathbf{b}}$ 为从 $\mathbf{a}$ 到 $\mathbf{b}$的唯一双射。它必定存在，因为 $\mathbf{a} \sim \mathbf{b}$。令 $\mathbf{a}_0 = \mathbf{a}$ 且$\mathbf{b}_0 = \mathbf{b}$。注意，根据假设，$\mathbf{a}_0 \in E$，并且当 $\mathbf{a} \simeq \mathbf{b}$时，$\mathbf{b}_0 \in E$。

平凡情形：$n > 0$ 和 $\mathbf{a} \not\simeq \mathbf{b}$
令 $\mathbf{a}_n = \mathbf{a}^\frown\langle x_i\rangle_{i<n}$。令 $h^n_{\mathbf{a},\mathbf{b}}$ 为任意一个定义域为 $\mathbf{a}_n$ 且陪域包含于 $\mathcal{M}$ 的双射，并且它扩展了 $h^{n-1}_{\mathbf{a},\mathbf{b}}$。令 $\mathbf{b}_n = h^n_{\mathbf{a},\mathbf{b}}(\mathbf{a}_n)$。

归纳情形：$n = 2k+1$ 对于某个 $k \geq 0$（而非平凡情形）：
若 $x_k \in \mathrm{dom}(h^n_{\mathbf{a},\mathbf{b}})$，则令 h^{n+1} a,b $= h^n_{\mathbf{a},\mathbf{b}}$，并令 $\mathbf{a}_{n+1} = \mathbf{a}_n$ 和 $\mathbf{b}_{n+1} = \mathbf{b}_n$。现在假设$x_k \notin \mathrm{dom}(h^n_{\mathbf{a},\mathbf{b}})$。令 $\mathbf{a}^*_{n+1} \in E$ 为相对于 $\mathfrak{s}$-可计算枚举 E而言满足 $\mathbf{a}_n{}^\frown x_k \in \mathrm{cl}(\mathbf{a}^*_{n+1})$ 的第一个元组。令 $\mathbf{a}_{n+1} = \mathbf{a}_n{}^\frown x_k{}^\frown \mathbf{a}^*_{n+1}$，并注意 $\mathbf{a}_{n+1} \in E$ 也成立。令 $\mathbf{b}_{n+1} = p(\mathbf{a}_n, \mathbf{b}_n, \mathbf{a}_{n+1})$。注意，根据归纳假设，$\mathbf{a}_n \simeq \mathbf{b}_n$，这意味着 $\mathbf{a}_{n+1} \simeq \mathbf{b}_{n+1}$，因此 $\mathbf{b}_{n+1} \in E$。令 h^{n+1} a,b 为将 $\mathbf{a}_{n+1}$ 映射到 $\mathbf{b}_{n+1}$的双射。注意$h^n_{\mathbf{a},\mathbf{b}} \subseteq h^{n+1}$ a,b，因为 $\mathbf{a}_n$ 是 $\mathbf{a}_{n+1}$的子元组。

归纳情形：$n = 2k+2$ 对于某个 $k \geq 0$（而非平凡情形）：
如果 $x_k \in \mathrm{range}(h^n_{\mathbf{a},\mathbf{b}})$，那么令 h^{n+1} a,b $= h^n_{\mathbf{a},\mathbf{b}}$，并令 $\mathbf{a}_{n+1} = \mathbf{a}_n$，$\mathbf{b}_{n+1} = \mathbf{b}_n$。现在假设 $x_k \notin \mathrm{range}(h^n_{\mathbf{a},\mathbf{b}})$。令 $\mathbf{b}^*_{n+1} \in E$ 为相对于 $\mathfrak{s}$-可计算枚举 E而言，满足 $\mathbf{b}_n{}^\frown x_k \in \mathrm{cl}(\mathbf{b}^*_{n+1})$ 的第一个元组。令 $\mathbf{b}_{n+1} = \mathbf{b}_n{}^\frown x_k{}^\frown \mathbf{b}^*_{n+1}$，并注意到 $\mathbf{b}_{n+1} \in E$ 也成立。令 $\mathbf{a}_{n+1} = p(\mathbf{b}_n, \mathbf{a}_n, \mathbf{b}_{n+1})$。注意，根据归纳假设，$\mathbf{a}_n \simeq \mathbf{b}_n$，这意味着 $\mathbf{a}_{n+1} \simeq \mathbf{b}_{n+1}$，因此 $\mathbf{a}_{n+1} \in E$。令 h^{n+1} a,b 为将 $\mathbf{a}_{n+1}$ 映射到 $\mathbf{b}_{n+1}$的双射。注意，$h^n_{\mathbf{a},\mathbf{b}} \subseteq h^{n+1}$ a,b，因为 $\mathbf{b}_n$ 是 $\mathbf{b}_{n+1}$的子元组。

令 $h_{\mathbf{a},\,\mathbf{b}} = \bigcup_{n\in\omega} h^n_{\mathbf{a},\,\mathbf{b}}$。注意，每当 $\mathbf{a} \simeq \mathbf{b}$ 时，根据归纳法，我们对所有 $n \in \omega$ 都有 $\mathbf{a}_n \simeq \mathbf{b}_n$，因此 $h_{\mathbf{a},\,\mathbf{b}}$ 是 $\mathcal{M}$ 的自同构。此外，$h_{\mathbf{a},\,\mathbf{b}}$ 一致地从 $(\mathbf{a},\,\mathbf{b})$ 得到 $\mathfrak{s}$-可计算，这是因为 p 是 $\mathfrak{s}$-可计算的，并且我们可以根据 $\mathcal{EJ}(\mathcal{M})$ 计算出每个 n 是否属于平凡情形。□

定义 6.17。设 $\mathcal{K}$ 是 $\mathcal{L}$ 中的一个年龄。可数的 $\mathcal{L}$-结构 $\mathcal{M}$ 称为 $\mathcal{K}$ 的 **余终 Fra¨ıss´e 极限**，如果 $\mathcal{M}$ 是余终超齐性的，并且 $\mathcal{M}$ 的年龄是 $\mathcal{K}$。
定义 6.18。设 $\mathbb{K}$ 是一个可计算年龄。如果 $\mathcal{M}$ 是 $\mathfrak{s}$-可计算地余终超齐性的，并且 $\mathbb{K}$ 是 $\mathcal{M}$ 的年龄的一个 $\mathfrak{s}$-可计算表示，则 $\mathcal{M}$ 这一 $\mathfrak{s}$-可计算结构称为 $\mathfrak{s}$-可计算的余终 Fra¨ıss´e 极限。

我们在一个温和的技术假设下证明下一个结果，该假设将在证明开头几段中说明。（将此推广为完整结果的证明很直接，但这需要借助命题5.14进行额外的簿记。）

定理 6.19。设 $\mathfrak{s}$ 为一个图灵度。假设 $\mathbb{K}$ 是一个 $\mathfrak{s}$可计算年龄，$\mathcal{EJ}(\mathbb{K}) \leq_{\mathrm{T}} \mathfrak{s}$，且$\mathbb{K}$ 具有 ($\mathfrak{s}$-cHP)、($\mathfrak{s}$-cJEP)和($\mathfrak{s}$-cCAP)。那么存在一个 $\mathfrak{s}$可计算的 $\mathbb{K}$的共终 *Fra¨ıss´e* 极限。
证明。（在一个温和的技术性假设下，现说明如下。）命题5.14 和推论5.15 将嵌入序列转化为结构的递增序列，其中对应元素彼此同构，使得该序列的并集构成一个无限可计算结构。在本证明中，我们运用这一技巧来构造一个共尾 Fra¨ıss´e 极限。构造过程中，我们要求对于序列中的每个元素 $\mathcal{B}_n$，都存在一个适当的子结构 $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}_n$ 以及一个从 $\mathcal{A}$ 到 $\mathcal{C}$ 的嵌入，使我们能够将包含映射与该嵌入合并。为此，我们需要枚举序列中每个 $\mathcal{B}_n$ 的所有有限子集。由于一般而言，我们的

合并只能给出嵌入，而无法给出包含映射，因此需要进行相当繁琐的簿记工作。虽然这项簿记工作令人厌烦，但并不困难。因此，在本证明中我们假设：当我们有一个合并图时，其中一个元素是包含映射，而不仅仅是嵌入。

由于 $\mathbb{K}$ 满足（$\mathfrak{s}$-cCAP），存在一个满足 (CAP) 的 $\mathfrak{s}$-可计算见证。令 (AB f_{AB}) 为其中之一。

现在我们将构造一个由 $\mathbb{K}$ 中元素组成的递增序列 $(\mathbf{b}_n, \mathcal{B}_n, \ell_n)_{n\in\omega}$，使得对所有 $n \in \omega$，$\mathcal{B}_n \subseteq \mathcal{B}_{n+1}$。我们还令 $\mathcal{B}_{n,k}$ 表示对 $\mathbf{b}_n$ 中的元素至多应用 k 个函数所得的结果。注意，$\mathcal{B}_n = \bigcup_{k\in\omega} \mathcal{B}_{n,k}$。

不失一般性，我们可以假设每个 $\mathcal{B}_n$ 的定义域都是 ω 的子集。我们还令 $(\mathbf{d}_n, F_n, G_n)_{n\in\omega}$ 为一个枚举，其中每个三元组都出现无限次，且满足

- $\mathbf{d}_n$ 是 ω 的有限子集，
- $F_n \in$AB，且
- G_n 是一个嵌入，其定义域为 G_n，陪域为 F_n。令 $\mathrm{dom}(G_n) = \mathbb{I}(j_n)$，其中 $j_n \in \omega$。

注意，我们可以找到一个 $\mathfrak{s}$-可计算的序列。现在我们将分阶段构造这个序列。

阶段 0：

由于 $\mathbb{K}$ 满足 (JEP)，因此由空元组生成的元素在同构意义下唯一。令 $\mathbf{c}$ 为该空元组，并令 $(\mathbf{c}\ \mathcal{C}, i) \in \mathbb{K}$ 为一个由 $\mathbf{c}$ 生成的元素。令 F_0 满足 $F_0 \in \mathbf{AB}_{\mathbb{K}}$ 且 $\mathrm{dom}(F_0) = (\mathbf{c}\ \mathcal{C}, i)$。我们知道这样的元素存在，因为 $\mathbf{AB}_{\mathbb{K}}$ 是特选扩张的集合。令 $\mathcal{B}_0$ 为 F_0的陪域中的结构。

阶段 $n+1$：情形 a：二者之一

- $\mathbf{d}_n \not\subseteq \bigcup_{i\in[n+1]} \mathcal{B}_{i,\ n}$，或
- $\mathbf{d}_n \subseteq \bigcup_{i\in[n+1]} \mathcal{B}_{i,\ n}$ 但是$\mathbf{d}_n \not\simeq \mathbb{I}(j_n)$。

我们令 $(\mathbf{b}_{n+1}, \mathcal{B}_{n+1}, \ell_{n+1}) = (\mathbf{b}_n, \mathcal{B}_n, \ell_n)$。

情形 b：否则。

令 $\mathcal{D}_n = \mathbf{cl}(\mathbf{d}_n)$，且令 $\mathfrak{t}_{\mathrm{cl}}(\mathbf{d}_n, \mathcal{A}_{j_n})$：$\mathcal{D}_n \to \mathcal{A}_{j_n}$ 是一个同构。令 $K_n = G_n \circ \mathfrak{t}_{\mathrm{cl}}(\mathbf{d}_n, \mathcal{A}_{j_n})$。令 I_n为从 $\mathcal{D}_n$到 $\mathcal{B}_n$的包含映射。于是，我们有 (I_n, K_n) 是一个跨度。令 $(H_0, H_1) = f_{\mathrm{AB}_{\mathrm{I_n,K_n}}}$。于是 (H_0^n, H_1^n) 是关于 (I_n, K_n) 的合并图。然后我们令 $(\mathbf{b}_{n+1}, \mathcal{B}_{n+1}, \ell_{n+1})$ =陪域(H_0^n)。

注意，我们假设（如证明开头所述）H_0^n 是一个包含映射，因此 $\mathcal{B}_n \subseteq \mathcal{B}_{n+1}$。

现在令 $\mathcal{B}_\omega = \bigcup_{n\in\omega} \mathcal{B}_n$。注意，由于我们可以从 $\mathfrak{s}$ 确定所处的情形，并计算出 f_{AB}，因此 $\mathcal{B}_\omega$ 是 $\mathfrak{s}$-可计算的。因此，只需证明以下两个命题。

命题 6.20。 $\mathbb{K}[\mathcal{B}_\omega]$ 与 $\mathbb{K}$是 $\mathfrak{s}$-可计算同构的。

证明。由于 $\mathbb{K}$ 满足（$\mathfrak{s}$-cHP），我们有 $\mathbb{K}[\mathcal{B}_\omega]$ 是 $\mathbb{K}$的一个 $\mathfrak{s}$-可计算子集。

现在假设 $\mathbb{I}_{\mathbb{K}}(i) \in \mathbb{K}$。由于 $\mathbb{K}$ 具有（$\mathfrak{s}$-cJEP），我们可以找到相对于 $\mathfrak{s}$可计算的嵌入$M_0 : (\mathbf{b}0, \mathcal{B}_0, \ell_0) \to \mathbb{I}_{\mathbb{K}}(k)$，以及 $M_1 : \mathbb{I}_{\mathbb{K}}(i) \to \mathbb{I}_{\mathbb{K}}(k)$，其中某个 $k \in \omega$。对于每个 $\ell \in \omega$，令 J_ℓ为从 $(\mathbf{b}0, \mathcal{B}_0, \ell_0)$ 到 $(\mathbf{b}_\ell, \mathcal{B}_\ell, \ell_\ell)$ 的包含映射。于是必定存在某个 n，使得 $(I_n, K_n) = (J_n, M_0)$。因此，由于 $\mathcal{B}_{n+1}$是 (J_n, M_0) 的一个合并，存在一个将 $\mathbb{I}_{\mathbb{K}}(i)$ 嵌入 $\mathcal{B}_{n+1}$的嵌入。由于 $\mathbb{K}[\mathcal{B}_\omega]$ 具有（$\mathfrak{s}$-cHP），这给出了一个从 $\mathbb{K}$ 到 $\mathbb{K}[\mathcal{B}_\omega]$的 $\mathfrak{s}$-可计算映射。

不难验证，这个映射与从 $\mathbb{K}[\mathcal{B}_\omega]$ 到 $\mathbb{K}$ 的包含映射一起，为我们提供了所需的 $\mathfrak{s}$-可计算同构。□

命题 6.21。 $\mathcal{B}_\omega$ 是 $\mathfrak{s}$-可计算的余终超齐性。

证明。令 E 为满足以下条件的元组集：$\mathbf{a} \in \mathcal{B}_\omega$，使得 $\mathbf{a} = \mathbf{a}_0\mathbf{a}_1$，其中$\mathbf{a}_0 \in \mathrm{cl}(\mathbf{a}_1)$；对于某个$n \in \omega$，我们有 $\mathbf{a}_1 \simeq \mathbf{b}_n$。注意，由于它可由 $(\mathcal{B}_n)_{n\in\omega}$ 和 $\mathcal{EI}(\mathbb{K})$ 计算得到，E 是 $\mathfrak{s}$-可计算的。此外，显然 E 是 $\mathcal{B}_\omega$中的余终集合。

根据命题 6.16 只需证明 $\mathcal{B}_\omega$ 相对于 E具有余终扩张性质。现在我们定义一个 $\mathfrak{s}$-可计算函数 p 来见证这一事实。假设 $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ 满足$\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathcal{B}_\omega, \mathbf{a}, \mathbf{c} \in E, \mathbf{a} \subseteq \mathrm{cl}[\mathcal{B}_\omega](\mathbf{c})$，且 $\mathbf{a} \sim \mathbf{b}$。现在分两种情形讨论。

情形 1：$\mathbf{a} \not\simeq \mathbf{c}$
令 $p(\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{d}) = \mathbf{e}$ 为任意一个满足 $\mathbf{ac} \sim \mathbf{de}$ 的元组。

情形 2：$\mathbf{a} \simeq \mathbf{c}$。
令 n_0 满足 $\mathrm{c} \simeq \mathrm{b}_{n_0}$，并令 n_1 满足 $\mathrm{c} \subseteq \mathrm{b}_{n_1}$。令 $I_{\mathbf{a},\mathbf{d}}$ 为从 cl(a) 到 cl(d) 的包含映射，并令 $J = I_{\mathbf{a},\mathbf{d}} \circ \mathfrak{t}_{\mathrm{cl}}(\mathrm{c}, \mathrm{a})$。根据 $(\mathcal{B}_n)_{n\in\omega}$ 的定义，必定存在某个 $n^* \geq n_1$，使得若 I_{n_1,n^*} 是从 $\mathcal{B}_{n_1}$ 到 $\mathcal{B}_{n^*}$ 的包含映射，则存在一个以 (I_{n_1,n^*}, J) 为底的合并图 (H_0, H_1)，其中陪域$(H_0) = (\mathrm{b}_{n^*+1}, \mathcal{B}_{n^*+1}, \ell_{n^*+1})$。然而，$H_1$ 是一个定义域为 cl(d) 的同构，且 $H_1 \circ J(\mathrm{c}) = \mathrm{c}$。因此，若 $\mathrm{e} = H_1(\mathrm{d})$，则有 $\mathrm{e} \simeq \mathrm{d}$，且 $\mathfrak{t}_{\mathrm{cl}}(\mathrm{d}, \mathrm{e})(\mathrm{a}) = \mathrm{c}$。因此，我们可以令 $p(\mathrm{a}, \mathrm{c}, \mathrm{d}) = \mathrm{e}$。注意，$p$ 因而是 $\mathfrak{s}$-可计算的，因为 $(\mathcal{B}_n)_{n\in\omega}$ 的构造是如此，且 $\mathcal{EI}(\mathbb{K}) \leq_{\mathrm{T}} \mathfrak{s}$。□

这就完成了定理 6.19的证明。□

下一个结果由引理5.17、命题5.20以及定理5.36 和6.19推出。

推论 6.22。假设 $\mathbb{K}$ 是一个具有(HP)、(JEP)和(CAP)的可计算年龄。那么 $\mathbb{K}$ 有一个$\mathcal{EI}(\mathbb{K})''$-可计算的余终 *Fra¨ıss´e* 极限。

综合这些要素，我们得到以下结果。

定理 6.23。假设 $\mathcal{M}$ 是一个余终超齐次结构。那么 $\mathcal{M}$ 是$\mathcal{EI}(\mathcal{M})''$-可计算的余终超齐次结构。

证明。令 E 为满足以下条件的元组集：$\mathbf{a}$ 使得 $\mathrm{cl}_{\mathcal{M}}(\mathbf{a})$ 是一个合并基。注意，E 根据$\mathcal{EI}(\mathcal{M})''$，由定理5.36 (b) 可计算。

由于 $\mathcal{M}$ <style id='4}>是余终超齐次的，因此存在某个余终集合 E_0，位于 $\mathcal{M}$ 中，使得 $\mathcal{M}$ 对于 E_0是余终超齐次的。根据命题 6.12，对于每个$\mathbf{a} \in E_0$，子结构 $\mathrm{cl}_{\mathcal{M}}(\mathbf{a})$ 都是一个 amalgamation 基。因此 $E_0 \subseteq E$，从而 E 是一个余终集合。

根据命题 6.13，任意 amalgamation 基之间的同构都可以扩展为 $\mathcal{M}$的某个自同构。设 $\mathcal{A}_0$ 和 $\mathcal{A}_1$ 是 amalgamation 基，并且通过映射 j 同构；再设 $\mathcal{A}_0 \subseteq \mathcal{B}_0$ 对于某个 amalgamation 基 $\mathcal{B}_0$成立。于是存在某个 $\mathcal{B}_1$，满足 $\mathcal{A}_1 \subseteq \mathcal{B}_1$，并且存在一个从 $\mathcal{B}_0$ 到 $\mathcal{B}_1$ 的同构，该同构扩展了同构 j。因此，存在某个函数 p，它可由 E 和 $\mathcal{EI}(\mathcal{M})$计算得到，并且见证了 $\mathcal{M}$ 具有 $\mathcal{EI}(\mathcal{M})''$-可计算的余终扩张性质。

我们还知道$\mathcal{M}$ 是相对于$\mathcal{EI}(\mathcal{M})$可计算的（因此特别地是$\mathcal{EI}(\mathcal{M})''$-可计算的）。因此由命题 6.16，$\mathcal{M}$ 是 $\mathcal{EI}(\mathcal{M})''$-可计算地共尾超齐次的。□

结合引理5.5与定理6.23，我们得到如下结论。

推论 6.24。假设 $\mathcal{M}$ 是一个可计算的余终超齐次结构。那么 $\mathcal{M}$ 是$\mathbf{0}'''$-可计算余终超齐次的。

7. 下界

作为本文的总结，我们给出两个主要的下界结果，定理 7.1 （针对有限关系语言）和定理 7.5 （针对可能是无限或包含函数符号的可数语言），并分别给出与命题 6.14结合时的一个相关推论。

7.1. **有限关系语言**。现在我们证明定理 7.1，该定理构造了一个具有 (CAP) 的可计算年龄，它是某个有限关系语言中的结构的典范可计算年龄；但若它对某个 $\mathfrak{s}$-cCAP) 具有 $\mathfrak{s}$，则 $\mathbf{0}' \leq_{\mathrm{T}} \mathfrak{s}$。

在证明之前，我们先概述一下我们的方法。首先，我们以可计算的方式将正在构造的无穷结构划分为 ω 个两两不相交的部分，使得不同部分中的元素之间不存在任何关系。这就为我们的典范年龄提供了 ω 个互不相同的子年龄，并且我们的年龄具有 (CAP) 当且仅当每个子年龄都具有 (CAP)。此外，由于所有步骤都是可计算地完成的，我们可以根据整个年龄中 (CAP) 的一个见证，计算出某个子年龄中 (CAP) 的一个见证。因此，我们的任务是构造一个年龄，使得从 (CAP) 的任意见证中，都能一致地根据 e 判定 $\{e\}(0)\downarrow$ 是否成立。

我们从基础语言 $\mathcal{L}_0 = \{C, E\}$ 出发，构造一个结构，使其可以划分为 ω 个两两不相交的部分。接着令 C 为一个有向图的边关系，该图由每种长度的无限多个环组成。然后令 E 为一个等价关系，使得每个等价类在每个环中至多包含一个元素。我们还规定，若一个元组包含来自不同长度环的元素，则没有任何关系适用于该元组。我们也规定，若一个元组包含来自不同等价类的元素，则没有任何关系适用于该元组；并且沿环将元组中的每个元素各移动一步时，所有关系都保持不变。这样一来，该结构完全由每个环中一个等价类上的结构决定。

现在，我们需要构造一个结构，使得从其年龄的任何 (cAP) 见证中，都能确定 $\{e\}(0)\downarrow$ 是否成立。为此，我们为 m 定义一个分支结构 $W_{m,n}$，使得 $m < n$ 或 $m = n = \omega$。直观地说，$W_{m,n}$ 有三个部分。首先，它有两个元素（q_+, q_-），充当该结构的根。然后，与 q_+ 相连的是一条长度为 m 的 B 链，以及一条长度为 n 的 Y 链。最后，与 q_- 相连的是一条长度为 n 的 B 链，以及一条长度为 m 的 Y 链。$W_{m,n}$ 的关键性质是：给定其子结构 A of$W_{m,n}$，该子结构包含 $\{q_+, q_-\}$，且其中最长的 B 链和最长的 Y 链的长度都至多为m，那么就可以用两种方式将 A 嵌入$W_{m,n}$：一种方式将 q_+ 映射到与长度为 n 的 B 链相连的元素，另一种方式则将 q_+ 映射到与长度为 n 的 Y 链相连的元素。由于这两种嵌入无法在 $W_{m,n}$ 中合并，因此这意味着 A 不是 amalgamation 基。因此，如果 $\{q_+, q_-\} \subseteq A \subseteq W_{m,n}$，并且 A 是 amalgamation 基，那么A 必须包含一条长度为 $> m$ 的 B 链或 Y 链，且该链连接到q_+ 或 q_-。

有了这个组成部分，如果 $\{e\}(0)\uparrow$，我们可以让年龄的第 e 个组成部分简单地为 $W_{2,\ 4}$ （再加上无限多个与它没有交互的元素）；如果 $\{e\}(0)\downarrow$，则可以让年龄的第 e 个组成部分为 $W_{30,\ 90}$ （再加上无限多个与它没有交互的元素）。因此，如果 A 是 $\{q_+, q_-\}$ 上的合并基，那么 A 包含与 q_+ 或 q_- 之一相连的长度为 > 4 的 B-链或 Y-链，当且仅当 $\{e\}(0)\downarrow$，如所需。

定理 7.1. 存在一个可计算年龄 $\mathbb{K}$，它是某个有限关系语言中结构的典范可计算龄，并且 $\mathbb{K}$ 具有 (CAP)；但如果它对某个 $\mathfrak{s}$ 具有 ($\mathfrak{s}$-cCAP)，那么$\mathbf{0}' \leq_{\mathrm{T}} \mathfrak{s}$。

证明。令 $\mathcal{L}_0 = \{C, E\}$，其中 C，E是二元的。令 $\mathcal{M}_0$为如下结构：　　re

- 底集为 $M_0 \subseteq \omega$,
- $(M,\ C^{\mathcal{M}_0})$ 是一个有向图,
- $\mathcal{M}_0 \models (\forall x)(\exists^{=1} y)\ C(x, y) \wedge (\exists^{=1} z)\, C(z, x)$,
- $\mathcal{M}_0$ 有无限多个每种有限长度的 C-环,

- $E^{\mathcal{M}_0}$ 是 M_0上的一个等价关系，
- 若 $\mathcal{M} \models E(a,b) \wedge C(a,a^*) \wedge C(b,b^*)$，则 $\mathcal{M} \models E(a^*,b^*)$，
- 若 A_0, A_1 都是长度为 n 的 C-环，则对于每个 $a_0 \in A_0$，都存在唯一的 $a_1 \in A_1$ 使得 $E(a_0,a_1)$ 成立，并且
- 若 A 是长度为 k 的 C-环，且 B 是长度为 n 的 C-环，并且 $n \neq k$，那么对于所有 $a \in A$ 和 $b \in B$，公式 $\neg E(a,b)$ 成立。

直观地说，$\mathcal{M}_0$ 由无穷多个互不相交的 C-环组成，且每个有限长度都有这样的环。于是，对于固定长度 k，我们有一个等价关系，恰有 k 个等价类包含 k-环中的元素，并且这些等价类都与该环相容。

以下定义将十分重要。假设 $A \subseteq \mathcal{M}_0$。我们将 A 的 E-**闭包** 定义为由与 A 中某个元素 E-等价的元素组成的集合，记作 A。令 $\iota_A \colon A \to A$ 为包含映射。

对于 $a \in \mathcal{M}_0$，若 a 位于一个 k-环中，则令 $\tau(a) = k$。令

$$\pi_k(A) = \{a \in A : a \text{ is in a } k\text{-cycle}\}.$$

对于 E-等价类 A，B，若 $\min A \leq \min B$（在 ω 上的序关系中），则令 $A \leq B$。对每个 $k \in \omega$，令 X_k 为包含 k- 环中元素的 $\leq$- 极小 E- 等价类。令 $\gamma_k(A) = A \cap X_k$，即与 A 相对应的 X_k 的集合。

注意，集合 X_k、映射 $A \mapsto A$ 以及映射 γ_k、τ 和 π_k 都是可计算的（在适用时关于 k 一致地）。

若 $f \colon A \to B$ 是一个嵌入，则对所有 $a \in A$，必有 $\tau(f(a)) = \tau(a)$。因此，任何这样的嵌入也是从 A 到 B 的嵌入。

进一步，如果 $f_k \colon \pi_k(A) \to B$ 是一个嵌入（针对 $k \in \omega$），那么存在唯一的嵌入 $\coprod_{i\in\omega} f_i \colon A \to B$，使得

$$(\coprod_{i\in\omega} f_i \colon A) \restriction_{\pi_k(A)} = f_k$$

对所有 $k \in \omega$ 均成立。

假设 $\mathcal{L}_1$ 是一个与 $\mathcal{L}_0$ 不相交的语言。令 $\mathcal{L}^* = \mathcal{L}_0 \cup \mathcal{L}_1$。如果一个 $\mathcal{L}^*$-结构 $\mathcal{M}$ 与 $\mathcal{M}_0$ **相容**，则称其**相容于** $\mathcal{M}_0$；若对所有 $R \in \mathcal{L}_1$ 和 $\mathcal{M} \models R(a_0, \dots, a_{k-1})$，都有

- $\mathcal{M} \models \bigwedge_{i\leq j\in[k]} E(a_i, a_j)$ 和
- 若 $\mathcal{M} \models \bigwedge_{i\in[k]} C(a_i, b_i)$，则 $\mathcal{M} \models R(b_0, \dots, b_{k-1})$。

因此，$\mathcal{M}$ 与 $\mathcal{M}_0$ 相容，当且仅当

- 我们可以将 $\mathcal{M}$ 拆分为子结构，每个子结构对应一个 E-等价类，不同等价类中的元组之间不存在任何关系，并且
- 如果两个等价类位于长度相同的环上，那么相应的结构在这两个等价类上相同（而这些环上的态射会导出这两个结构之间的同构）。

特别地，如果 $(\mathcal{N}_i)_{i\in\omega}$ 是由 ω个可数 $\mathcal{L}_1$结构组成的序列，且每个 $\mathcal{N}_i$ 的底集都是 X_i，那么存在唯一的 $\mathcal{L}^*$结构 $\coprod_{i\in\omega} \mathcal{N}_i$ 与 $\mathcal{M}_0$ 相容，使得

$$(\coprod_{i\in\omega} \mathcal{N}_i) \restriction_{X_k} = \mathcal{N}_k.$$

假设对每个 $i \in \omega$，$\mathcal{K}_i$ 都是 $\mathcal{N}_i$ 的年龄。令 $\mathcal{K}_\omega$ 为 $\coprod_{i\in\omega} \mathcal{N}_i$的年龄。于是以下结论显然成立。

- 如果序列 $(\mathcal{N}_i)_{i\in\omega}$ 一致可计算，那么 $\coprod_{i\in\omega} \mathcal{N}_i$ 可计算。
- $\mathcal{K}_i$ 对所有 $i \in \omega \cup \{\omega\}$ 都具有（遗传性质）和 (JEP)。

现在我们将证明两个重要的断言，从而把任务简化为对子年龄的构造。不过，首先需要给出一些定义。

断言 7.2. 假设对每个 $i \in \omega$，$\mathcal{K}_i$ 都具有 (CAP)。则 $\mathcal{K}_\omega$ 具有 (CAP)。

证明。若 $f_B\colon \overline{A} \to B$ 与 $f_C\colon \overline{A} \to C$ 使得对所有 $k \in \omega$ 都存在嵌入 $g_{B,k}\colon \pi_k(B) \to \pi_k(D)$ 以及 $g_{C,k}\colon \pi_k(B) \to \pi_k(D)$，且满足 $g_{B,k} \circ f_B \restriction_{\pi_k(A)} = g_{C,k} \circ f_C \restriction_{\pi_k(A)}$，则 $g_B\colon B \to D$ 与 $g_C\colon B \to D$，当 $g_B = \coprod_{k\in\omega} g_{B,k}$ 且 $g_C = \coprod_{k\in\omega} g_{C,k}$ 时有 $g_B \circ f_B = g_C \circ f_C$。I

n 部分icular, t h这意味着，如果 $\mathbb{K}_i$ 对所有 $i \in \omega$ 都具有 (CAP)，那么 $\mathbb{K}_\omega$ 也具有 (CAP)。 □

断言 7.3。 假设 $(\mathrm{AB}\ f_{\mathrm{AB}})$ 是 $\mathcal{K}_\omega$ 的 *(CAP)* 见证。那么，对于 $e \in \omega$，我们可以一致地计算出一个 $\mathcal{K}_e$ 的 *(CAP)* 见证。

证明。 注意，由于 $\mathcal{L}^*$ 是一种关系语言， $\mathcal{L}^*$-结构的每个子集都是子结构。进一步注意，由 (AB f_{AB}) 可找到一个 (CAP) 的见证，使得只要 $\mathbf{a}$ 和$\mathbf{a}^*$ 枚举的是同一个集合（允许重复），$\mathbf{a} \in$ AB 当且仅当 $\mathbf{a}^* \in$ AB。因此，只需确定那些存在某个 $\mathbf{a}$ 和 i，使得 $(\mathbf{a}\ \mathcal{A}, i) \in$ AB 的结构 $\mathcal{A}$。所以我们将滥用记号，在这种情况下称 $\mathcal{A} \in$ AB。

对于 $\mathcal{B} \in$ AB，令 $\mathcal{B}_k$ 为 $\mathbf{b}$ 中满足 $\tau(b) = k$ 的元素集合 b。当且仅当存在某个 $\mathcal{B} \in$ AB 使得 $\mathcal{A} = \mathcal{B}_e$ 时，令 $\mathcal{A} \in \mathrm{AB}^{\mathbb{K}_e}$。

设 (F_0, F_1) 是 $\mathbb{K}_e$ 中的一个潜在跨度，且 $\mathrm{dom}(F_0) \in$ AB。进一步设 $\mathcal{B} \in$ AB 满足 $\mathcal{B}_e = \mathrm{dom}(F_0)$。令 (F_0^*, F_1^*) 为满足以下条件的态射：

- 定义域$(F_0)^* =$定义域$(F_1)^* = \mathcal{B}_e$,
- 对于 $i \in \{0,1\}$，$\mathrm{codom}(F_i)^* = \mathrm{codom}(F_i) \cup (\mathcal{B} \setminus \mathcal{B}_e)$，并且
- 对于 $i \in \{0,1\}$，$F_i \restriction_{\mathrm{dom}(F_i)} = F_i$ 且 $F_i \restriction_{\mathcal{B}\setminus\mathcal{B}_e} =$ 恒等映射。

显然，(F_0^*, F_1^*) 是 $\mathcal{K}_\omega$ 中的一个潜在跨度。令 $f_{\mathrm{AB}_{F_0^*,F_1^*}} = (G_0, G_1)$。对于 $i \in \{0,1\}$，令 $G_i^- = G_i \restriction_{\mathrm{codom}(F_i)}$。于是，对于 $i \in \{0,1\}$，我们有 $\mathrm{range}(G_i^-) \subseteq \pi_e(\mathrm{range}(G_i))$。因此，$(G_0^-, G_1^-)$ 是关于 (F_0, F_1) 的合并图。于是我们可以令 $\mathrm{AB}^{\mathbb{K}_e}(F_0, F_1) = (G_0^-, G_1^-)$。□

注意，并非对所有 $i \in \omega$，若 $\mathcal{K}_i$ 具有（AP），则 $\mathcal{K}_\omega$ 也具有（AP）。这是因为 $\mathcal{M}_0$ 的年龄不具有（AP）。

由断言7.2 和7.3可知，因此只需构造一个年龄类序列 $(\mathcal{K}_e)_{e\in\omega}$，其中每个年龄类都具有（CAP），并且只要 $(\mathrm{AB}^{\mathbb{K}_e}, f_{\mathrm{AB}^{\mathbb{K}_e}})$ 是（CAP）的一个见证，我们就能（关于 e 和该见证一致地）判定 $\{e\}(n)\downarrow$是否成立。

令 $\mathcal{L}_1 = \{B, Y\}$，其中两者都是二元关系。令 $W_{m,n}$ 为如下结构：

- 底集由元素 $\{x_i\}_{i\in\omega} \cup \{b_i^+\}_{i<m} \cup \{b_i^-\}_{i<n} \cup \{y_i^+\}_{i<n} \cup \{y_i^-\}_{i<m} \cup \{q_+, q_-\}$组成；
- $B(a,c)$ 成立，当且仅当以下任一条件成立
  - $a = q_\square$ 且 $c = b_0^\square$对于 $\square \in \{+,-\}$，或者
  - $a = b_i^\square$且 $c = b_{i+1}^\square$对于某个 $i+1 < k_\square$，其中 $\square \in \{+,-\}$ 且 $k_+ = m$ 且 $k_- = n$；

  若满足以下任一条件，则$Y(a, c)$ 成立
  - $a = q_\square$ 且 $c = y_0^\square$对于 $\square \in \{+,-\}$，或者
  - $a = y_i^\square$且 $c = y_{i+1}^\square$对于某个 $i+1 < k_\square$，其中 $\square \in \{+,-\}$ 且 $k_+ = n$ 且 $k_- = m$；并且
- 不存在其他关系。

注意， $\{x_i\}_{i\in\omega}$ 只是为了确保该结构是无限的。

现在我们为 $i \in \omega$ 定义

$$\mathcal{N}_i = \begin{cases} W_{30,90} & \text{if } \{i\}(0)\downarrow, \\ W_{2,4} & \text{if } \{i\}(0)\uparrow. \end{cases}$$

注意，如果 $m_0 \le m_1$ 且 $n_0 \le n_1$，那么$W_{m_0,\,n_0} \subseteq W_{m_1,\,n_1}$，因此 $\{\mathcal{N}_i\}_{i\in\omega}$ 是一致可计算的。因此，$\coprod_{i\in\omega} \mathcal{N}_i$ 是一个可计算结构。

在 $\mathcal{K}_i$ 中，取某个 $i \in \omega$，设 $A \in \mathrm{AB}^{\mathbb{K}_i}$ 且 $\{q_+, q_-\} \subseteq A$。令 $B(A)$ $Y(A)$ 分别表示 A 中 B边和 Y边里的元素个数。令 $k(A) = \max\{|B(A)|,\ |Y(A)|\}$。

假设 $\{i\}(0)\downarrow$。为导出矛盾，再假设 $k(A) < 14$。令 A_0 为将 A 扩展而成的结构，使与 q_+ 相连的 B链至少包含31个元素。令 A_1 为将 A 扩展而成的结构，使与 q_+ 相连的 Y链至少包含31个元素。注意，由于无法区分 q_+，q_- 在 $\mathcal{N}_i$ 中，且 $\mathcal{K}_i$ 具有（遗传性质），因此 A_0，$A_1 \in \mathcal{K}_i$。然而，不可能将 A_0，A_1 在 $\{q_+, q_-\}$上合并。因此，任何包含 $\{q_+, q_-\}$ 的 AB 元素，在 B边中必须至少有14个元素，在 Y边中也必须至少有14个元素。

但是，如果 $\{i\}(0)\uparrow$，那么 B-边中只有 13 个元素，Y-边中也只有 13 个元素。因此，我们可以通过查看包含 $\{q_+, q_-\}$ 的 AB 中的第一个元素，以可计算的方式（一致地关于 i）确定 $\{i\}(0)$ 是否停机。因此，我们可以从 ($\mathfrak{s}$-cCAP) 的任意见证计算出 $\mathbf{0}'$。

最后，我们需要证明 $\mathbb{K}_i$ 具有 (CAP)。这是因为 $\mathcal{N}_i$ 的任何包含极大 $W_{m,\,n}$ 的子结构都是一个合并基。□

由此，我们得到定理7.1 和命题 6.14的以下推论。

推论 7.4。存在一个可计算年龄 $\mathbb{K}$，它是某个有限关系语言中结构的典范可计算年龄，使得若 $\mathfrak{s}$ 是一个图灵度，且 $\mathcal{M}$ 是一个 $\mathfrak{s}$-可计算结构，并且是 $\mathfrak{s}$-可计算的余终超齐性结构，也是 $\mathbb{K}$ 的余终 *Fra¨ıss´e* 极限，那么$\mathbf{0}' \leq_{\mathrm{T}} \mathfrak{s}$。

7.2. **任意可数语言**。现在我们转而关注定理 7.5，该定理构造了一个具有 (CAP) 的可计算年龄，它是某个结构的典范可计算年龄；但若它具有某个 $\mathfrak{s}$-cCAP)，其中 $\mathfrak{s}$，则 $\mathbf{0}'' \leq_{\mathrm{T}} \mathfrak{s}$。

在证明之前，我们先概述一下我们的方法。与定理 7.1的证明一样，我们首先将结构划分为 ω 个彼此互不作用的部分。不过，由于我们的语言是无限的，只要假设存在 ω 个一元关系将结构划分开来，并且任何其他关系都不适用于包含来自该划分中不同部分的元素的元组，就能轻松做到这一点。此外，不妨假设我们的年龄包含定理 7.1中构造的年龄。特别地，我们可以假设，能够根据我们年龄的余有限 amalgamation 的任意见证计算出 $\mathcal{EJ}(\mathbb{K})$。

在构造中，我们选取一个函数 $f\colon \omega \times \omega \to \{0,1\}$，使得对任意 $e \in \omega$, $\{e\}^{\mathbf{0}'}$，$\downarrow$当且仅当 $\Phi_e = \{n\colon f(e,\ n) = 0\}$ 是有限的。有了这个函数之后，我们希望（对 e 一致地）构造一个年龄，使得我们能够根据该年龄的余有限 amalgamation 的见证，判定 $\{n\colon f(e,\ n) = 0\}$ 是否有限。

为了做到这一点，我们需要定义给定的 W_σ 关于 $\sigma \in 2^{<\omega}$的分支结构。该分支将由一个结构组成，其在适当子语言上的约化结构为 $W_{|\Phi_e|,\ 1+|\Phi_e|}$，但它所使用的语言还包含 ω个一元关系符号 $\{U_i\}_{i\in\omega}$。然后我们将使用 σ 来确定对于每个 i，U_i 是否成立。具体而言，如果 $k \notin \Phi_e$，那么 $\neg U_i(x)$总是成立。然而，如果 $k \in \Phi_e$ 且 $\ell = |\{i < k\colon\ i \in \Phi_e\}|$，那么 $U_i(x)$是否成立将由 $\sigma(\ell)$的取值决定。

其结果是，如果 $\mathrm{len}(\sigma) > 1 + |\Phi_e|$，那么 $W_{\sigma^\frown 0}$ 与 $W_{\sigma^\frown 1}$ 同构。但如果 Φ_e是无限的，那么 $W_{\sigma^\frown 0}$ 与 $W_{\sigma^\frown 1}$ 永不同构。由于我们可以从余有限 amalgamation 的任何见证中计算出 $\mathcal{EJ}(\mathbb{K})$，因此这就将判定 Φ_e 是否无限的问题，归结为寻找一个 g_e，使得每当 Φ_e 有限时，$g_e \geq 1 + |\Phi_e|$成立。但如果 Φ_e 有限，且 $A \subseteq W_\sigma$ 是一个包含 $\{q_+, q_-\}$ 的 amalgamation 基，那么 A 必定包含一个 B-链或一个 Y-链，其长度必为 $1 + |\Phi_e|$。因此，当 Φ_e 有限时，我们可以从任何这样的 amalgamation 基中确定 $|\Phi_e|$，正如所需。

定理 7.5。存在一个可计算年龄 $\mathbb{K}$，它是某个结构的典范可计算龄，且 $\mathbb{K}$ 具有(CAP)；但如果它对某个 $\mathfrak{s}$具有($\mathfrak{s}$-cCAP)，那么 $\mathbf{0}'' \leq_{\mathrm{T}} \mathfrak{s}$。

证明。令 $(u_i)_{i\in\omega}$ 为一个有限集的非递减可计算枚举，使得 $\bigcup_{i\in\omega} u_i = \{e \in \omega\colon \{e\}(0)\downarrow\}$。令 $f\colon \omega \times \omega \to \omega$为可计算函数；要计算 $f(e,\ n)$，我们运行

以下算法并返回第 n 个输出。将其称为“程序 f”。

阶段 0:
创建一个取值于 ω 的变量，并将其视为已进行的“最大预言机调用”。我们用 oc 表示这个变量。我们将 oc 设为 0。

阶段 $n+1$: 我们将该阶段分为三种情形。情形 1: $u_{n+1}\restriction_{oc} = u_n\restriction_{oc}$，且模拟 $\{e\}^{u_n}(0)$ 的图灵机在运行 n 步后已停机。在这种情形下输出 1，即 $f(e,\ n) = 1$。

情形 2: $u_{n+1}\restriction_{oc} = u_n\restriction_{oc}$，且 $\{e\}^{u_{n+1}}(0)$ 在运行 n 步后尚未停机。
将 $\{e\}^{u_{n+1}}(0)$ 运行到第 $(n+1)$ 步。如果进行了大于 oc 的预言机调用，则将 oc 的值更新为该预言机调用的索引。输出 0，即 $f(e,\ n) = 0$。

情形 3: $u_{n+1}\restriction_{oc} \neq u_n\restriction_{oc}$。
运行 $\{e\}^{u_{n+1}}(0)$ 共 $n+1$ 步，并令 oc 为所进行的最大预言机调用。输出 0，即 $f(e,n) = 0$。

命题 7.6. 对于任意 $e \in \omega$，以下条件等价:
(a) $\{n:\ f(e,n) = 0\}$ 是有限的，(b) $\{e\}^{0'}(0)\downarrow$

证明。 假设 (b) 成立，即 $\{e\}^{0'}(0)\downarrow$。那么该程序只进行有限次预言机调用。令 ℓ 为其中最大的预言机调用。令 k 满足

- $\ell < k$，也就是说，计算 $\{e\}^{0'}(0)$ 中的每次预言机调用都小于 k，并且
- 对所有 $k^* \geq k$，我们有$u_{k^*} \cap [\ell] = u_k \cap [\ell]$。

注意，由于这些 U_i是非递减的，我们总能找到这样的 k。但这样一来，对所有 $k^* > k$，我们有$f(e,\ k^*) = 1$，因此 (a) 成立。

现在假设 (b) 不成立，即 $\{e\}^{0'}(0)\uparrow$。那么，要么 $\{e\}^{0'}(0)$会进行任意大的预言机调用，要么预言机调用的规模存在上界且程序永远运行。在前一种情形中，情形 3 会无限多次出现；在后一种情形中，情形 2 会无限多次出现。无论哪种情形，$\{n:\ f(e,\ n) = 0\}$ 都是无限的。□

我们将构造一个可计算年龄 $\mathbb{K}$，它具有 (CAP)，但对 (CAP) 的任意见证，我们都能计算 $\{n:\ f(e,\ n) = 0\}$ 对每个 e是否有限。根据断言7.6，这就足以证明我们的结果。为方便起见，我们令 $\Phi_e = \{n:\ f(e,\ n) = 0\}$。

设 $\mathcal{L}^- = \{P_i\}_{i\in\omega}$ 是一个仅由一元关系组成的可计算语言。设 $\mathcal{N}^-$ 是一个可计算的 $\mathcal{L}^-$ 结构，使得 $\{P_i^{\mathcal{N}^-}\}_{i\in\omega}$ 是 $\mathcal{N}^-$ 的一个划分，并且每个 $P_i^{\mathcal{N}^-}$ 都是无限的。

假设

- $(\mathcal{L}_i)_{i\in\omega}$ 是一个一致可计算序列，其中的关系语言两两不相交，且都与 $\mathcal{L}^-$ 不相交，
- $\mathcal{L} = \bigcup_{i\in\omega} \mathcal{L}_i \cup \mathcal{L}^-$，

对于 $i \in \omega$，
- $\mathcal{N}_i$ 是一个底集为 $P^{\mathcal{N}^-}$ 的 $\mathcal{L}_i$ 结构，并且
- $\mathcal{N}_\omega$ 是满足以下条件的 $\mathcal{L}$ 结构:
  - $\mathcal{N}_\omega\restriction_{\mathcal{L}^-} = \mathcal{N}^-$，
  - 若 $\mathcal{N}_\omega \models R(a_0,\ \ldots\ldots,\ a_{n-1})$，其中 R 是 $\mathcal{L}_k$中的一个原子公式，则 $\mathcal{N}_\omega \models \bigwedge_{i\in[n]} P_k(a_i)$，且
  - $(\mathcal{N}_\omega\restriction_{P_i^{\mathcal{N}_\omega}})\restriction_{\mathcal{L}_i} = \mathcal{N}_i$。

对于每个 $i \in \omega \cup \{\omega\}$，令 $\mathbb{K}_i$ 为 $\mathcal{N}_i$的典范可计算龄。

以下结论随即成立。

(a) 对所有 $i \in \omega \cup \{\omega\}$， $\mathbb{K}_i$ 具有 (HP)。(b) 对所有 $i \in \omega \cup \{\omega\}$， $\mathbb{K}_i$ 具有 (JEP)。(c) 若对所有 $i \in \omega$， $\mathbb{K}_i$ 具有 (CAP)，则 $\mathbb{K}_\omega$ 具有 (CAP)。(d) 根据 $\mathcal{K}_\omega$中 (CAP) 的任意一个 $\mathfrak{s}$-可计算见证，我们可以对所有 $n \in \omega$，一致地根据 n，计算出 $\mathcal{K}_n$ 中 (CAP) 的一个 $\mathfrak{s}$-可计算见证。

因此，只需对 n 一致地定义一个可计算结构 $\mathcal{N}_n$，使得 $\mathbb{K}_n$ 具有 (CAP)，并且使得我们能够对 n 一致地根据 $\mathbb{K}_n$ 中 (CAP) 的一个见证来判定 $\{n : f(e,n) = 0\}$ 是否为无穷。

我们现在对 e 一致地定义 $\mathbb{K}_e$。令 $\mathcal{L}_e = \{B^e, Y^e, R^e\} \cup \{Q^e\} \cup \{U_i^e\}_{i\in\omega}$，其中 B^e, Y^e, R^e 是二元关系符号， Q^e 是一元关系符号，并且对每个 $i \in \omega$， U_i^e 是一元关系符号。在下文中，为便于阅读，我们将省略上标，因为它们始终为 e。

若 Φ_e 有限，则令 $m_e = |\Phi_e|$，否则令 ω。对每个 $\sigma \in 2^{<\omega}$，我们如下定义结构 W_σ。

- 底集为
$$\{b_i^{+,\sigma}\}_{i<1+m_e} \cup \{b_i^{-,\sigma}\}_{i<m_e} \cup \{y_i^{+,\sigma}\}_{i<m_e} \cup \{y_i^{-,\sigma}\}_{i<1+m_e} \cup \{q_+^\sigma, q_-^\sigma\}.$$
- $Q(a,\ b)$ 当且仅当 $\{a,b\} = \{q_+^\sigma, q_-^\sigma\}$ 时成立。我们称 q_+^σ， q_-^σ 为 W_σ 的**根**。
- $B(a,\ c)$ 在以下任一情况下成立：
  - $a = q_\square^\sigma$ 且对于 $\square \in \{+,-\}$， $c = b^{\square,\ \sigma}_{\ 0}$；或者
  - $a = b^{\square,\ \sigma}_{\ i}$ 并且对于某个 $i+1 < k_\square$， $c = b^{\square,\ \sigma}_{\ i+1}$，其中 $\square \in \{+,-\}$ 且 $k_+ = 1 + m_e$ 且 $k_- = m_e$。
- $Y(a,\ c)$ 在以下任一情况下成立：
  - $a = q_\square^\sigma$ 和 $c = y^{\square,\ \sigma}_{\ 0}$ 对于 $\square \in \{+,-\}$，或者
  - $a = y^{\square,\ \sigma}_{\ i}$ 和 $c \in y^{\square,\ \sigma}_{\ i+1}$ 对于某个 $i < k_\square$，其中 $\square \in \{+,-\}$、 $k_+ = m_e$ 和 $k_- = 1 + m_e$。
- 对于 $i \in \omega$，如果 $f(e,\ i) = 1$，那么 $W_\sigma \models (\forall x)\ \neg U_i(x)$。
- 对于 $i \in \omega$，如果 $f(e,\ i) = 0$ 且 $k = |\{j < i :\ j \in \Phi_e\}|$ 那么
  - 如果 $k < \mathrm{len}(\sigma)$ 且 $\sigma(k) = 1$ 和 $x \notin \{q_+, q_-\}$，那么 $W_\sigma \models U_i(x)$，并且
  - 否则， $W_\sigma \models \neg U_i(x)$。

令 $\mathcal{N}_e$ 为结构 $\{W_\sigma :\ \sigma \in \{0,1\}^{<\omega}\}$ 的不交 amalgamation。注意，结构 W_σ 在 σ 中是一致可计算枚举的，因此 $\mathcal{N}_e$ 是可计算的。

可以将 W_σ 的 $\{B,Y\}$-结构看作由两个根 q_+^σ、 q_-^σ 组成，每个根上都附着一条 B-链和一条 Y-链；其中，附着于 q_+^σ 的 B-链比 Y-链长，而附着于根 q_-^σ 的链则恰好相反。在 $\{B,Y\}$ 结构的基础上，我们还添加一个 $\{U_i\}_{i\in\omega}$ 结构，其中每个这样的单目关系要么适用于所有非根元素，要么不适用于任何非根元素。

为了确定 U_i 是否成立，我们考察函数 $f(e,\ i)$。对于满足 $f(e,\ i) = 1$ 的 i，关系 U_i 对任何 σ 都不成立。然而，如果 $f(e,\ i) = 0$，那么我们就考察小于 i 且满足 $f(e,\ j) = 0$ 的 j 的数量，并将 σ 应用于该数量，以确定 U_i 是否成立。

对于 $\sigma_0, \sigma_1 \in 2^{<\omega}$，令 $\iota_{\sigma_0,\sigma_1} : W_{\sigma_0} \to W_{\sigma_1}$ 为如下映射：对于 $x^{\sigma_0} \in W_{\sigma_0}$，有 $\iota_{\sigma_0,\sigma_1}(x^{\sigma_0}) = x^{\sigma_1}$（其中 x 要么是 q_+，要么是 q_-，或者是 b_i^+、 b_i^-、 y_i^+，又或者是某个 i 的 y_i^-）。

其结果是，如果 Φ_e 是有限的，且 $\mathrm{len}(\sigma) \geq 1 + \max \Phi_e$，那么从$W_{\sigma^\frown 0}$ 到 $W_{\sigma^\frown 1}$ 的映射 $\iota_{\sigma^\frown 0,\sigma^\frown 1}$ 是一个同构。

但是，如果 Φ_e 是无限的，那么对于每个 $\sigma \in 2^{<\omega}$ 以及每个满足 $V \not\subseteq \{q_+^{\sigma^\frown 0}, q_-^{\sigma^\frown 0}\}$ 的 $V \subseteq W_{\sigma^\frown 0}$，从 V 到 $\iota_{\sigma^\frown 0,\sigma^\frown 1}$的映射$\iota_{\sigma^\frown 0,\sigma^\frown 1} \restriction V$“$[V] \subseteq W_{\sigma^\frown 1}$ 都不是嵌入。这是因为每当
$$|\{j < i :\ f(e,j) = 0\}| = \mathrm{len}(\sigma)$$
并且 $f(e,\ i) = 0$ 然后
$$W_{\sigma^\frown 0} \models (\forall x)\ \neg U_i(x)$$

and

$$W_{\sigma^\frown 1} \models (\forall x)\ \big(x \in \{q_+^{\sigma^\frown 1}, q_-^{\sigma^\frown 1}\} \vee U_i(x)\big).$$

因此，如果我们能找到一个 $\ell \in \omega$，保证以下两种情况之一成立：(i) ℓ 至少为 $1 + \max \Phi_e$，且 Φ_e 是有限的；或 (ii) Φ_e 是无限的，那么我们就能根据 $\mathcal{EJ}(\mathbb{K}_e)$ 确定 (i) 或 (ii) 中哪一种成立，从而判断 Φ_e 是否为有限的。

断言 7.7. 假设 (AB f_{AB}) 是 $\mathcal{N}_e$ 的 (CAP) 的一个见证。于是，对 (AB f_{AB}) 与 e 一致地，我们可以找到一个数 g_e，使得只要 Φ_e 是有限的，$g_e = 1 + |\Phi_e|$。

证明。设 i 使得 $\mathcal{A}_i$ 有两个元素 a，b 与 $\mathcal{A}_i \models Q(a, b)$。对 AB 一致地，我们可以找到一个 $F \in \mathbf{AB}$，其定义域$(F) = \mathbb{I}(i)$。设 $\mathcal{C}$ 为陪域(F) 的底层结构。设 $\sigma \in 2^{<\omega}$ 使得值域$(F) \subseteq W_\sigma$。

设 $\mathcal{D} = \mathcal{C} \setminus W_\sigma$，即 $\mathcal{C}$ 中不属于 W_σ 的元素的集合。设 $\mathcal{E} = \mathcal{C} \cap W_\sigma$。

设 ℓ_B^+、ℓ_B^- 分别为 $\mathcal{C}$ 中连接到 q_+^σ、q_-^σ 的 B-链的长度。设 ℓ_Y^+、ℓ_Y^- 分别为 $\mathcal{C}$ 中连接到 q_+^σ、q_-^σ 的 Y-链的长度。设 $g_e = \max\{\ell_B^+, \ell_B^-, \ell_Y^+, \ell_Y^-\}$。注意此时 g_e 至多为 $1 + |\Phi_e|$。

现在假设 Φ_e 是有限的。那么 $W_{\tau_0} \cong W_{\tau_1}$，前提是 $\tau_0 \restriction_{|\Phi_e|+1} = \tau_1 \restriction_{|\Phi_e|+1}$。

反设 $g_e < 1 + |\Phi_e|$。在这种情况下，存在唯一的嵌入β：$\mathcal{E} \to W_\sigma$，满足 $\beta(q_-^\sigma) = q_+^\sigma$ 且 $\beta(q_+^\sigma) = q_-^\sigma$。令 γ_0，γ_1：$\mathcal{C} \to \mathcal{C} \cup W_\sigma$，满足 $\gamma_0 =$恒等映射 $\restriction_{\mathcal{C}}$且$\gamma_1 = \beta \cup$恒等映射 $\restriction_{\mathcal{D}}$。由于 $F \in \mathbf{AB}$，必定存在 η_0，η_1：$\mathcal{C} \cup W_\sigma \to \mathcal{G}$，其中某个 $\mathcal{G}$ 满足 $\eta_0 \circ \gamma_0 = \eta_1 \circ \gamma_1$。

附属于 q_+^σ 的极大 B-链在 W_σ 中长度为 $1 + |\Phi_e|$，因而在 $\mathcal{C} \cup W_\sigma$中也如此。因此，$\mathcal{G}$ 中附属于 $\eta_0 \circ \gamma_0(q_+^\sigma)$ 的极大 B-链长度（至少）为 $1 + |\Phi_e|$。但是，$\mathcal{G}$ 中附属于 $\gamma_1(q_+^\sigma)$ 的极大 Y-链长度为 $1 + |\Phi_e|$，所以附属于 $\eta_1 \circ \gamma_1(q_+^\sigma)$ 的极大 Y-链长度（至少）为 $1 + |\Phi_e|$。然而，由于 $\eta_0 \circ \gamma_0(q_+^\sigma) = \eta_1 \circ \gamma_(q_+^\sigma)$，这意味着 $\mathcal{G}$ 中存在一个元素，它同时是 B-链和 Y-链的起点，且两条链的长度均（至少）为 $1 + |\Phi_e|$，这与 $\mathcal{N}_e$ 的构造方式矛盾。

因此，如果 Φ_e 是有限的，我们必须有 $g_e = 1 + |\Phi_e|$。 □

要完成这一结果，我们还需要一个要素。

断言 7.8。 $\mathbb{K}_e$ 具有(CAP)。

证明。假设 $\mathbb{I}(i) \in \mathbb{K}_e$。我们需要证明存在一个映射 F，其 dom$(F) = \mathbb{I}(i)$，且 codom(F) 是一个 amalgamation 基。我们分两种情形讨论，取决于 $|\Phi_e|$ 是否有限。

情形 1：Φ_e 是有限的。

由于 $\mathbb{I}(i) \in \mathbb{K}_e$，且 $\mathbb{K}_e$ 是 $\mathcal{N}_e$ 的典范可计算龄，因此必定存在有限多个 σ_0、.....、σ_{k-1}，使得 $\mathcal{A}_i \subseteq \bigcup_{i \in [k]} W_\sigma$。令 $\mathcal{B}$ 为这些对象的并集，F 为包含映射。

假设对于 $i \in \{0, 1\}$，α_i：$\mathcal{B} \to \mathcal{C}_i$ 是满足 $\mathcal{C}_i \in \mathbb{K}_e$ 的嵌入。那么，$\mathcal{C}_i \setminus \alpha_i$“[$\mathcal{B}$] 中的任意元素与 α_i“[$\mathcal{B}$] 中的任意元素之间都不存在关系。此外，由于 $W_{\tau_0} \cong W_{\tau_1}$ whenever $\tau_0 \restriction_{1+|\Phi_e|} = \tau_1 \restriction_{1+|\Phi_e|}$，我们可以找到从 $\mathcal{C}_i \setminus \alpha_i$“[$\mathcal{B}$] 到 $\mathcal{N}_e$ 的嵌入，使它们的像彼此不相交，且均与 $\mathcal{B}$ 的像不相交。

因此，我们可以找到 α_0 和 α_1 的一个合并，所以 $\mathcal{B}$ 是一个 amalgamation 基。由于 $\mathbb{I}(i)$ 是任意的，这意味着 $\mathbb{K}_e$ 具有 (CAP)。

情形 2：Φ_e 是无限的。

假设 $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{N}_e$。我们称 $c \in \mathcal{C}$ 在 $\mathcal{C}$ 中是 **闭的**，如果对于任意与 $\mathcal{N}_e$ 中某个根相连的 B-链或 Y-链中的 c，c 都属于与 $\mathcal{C}$ 中某个根相连的 B-链或 Y-链。我们称 $\mathcal{C}$ 是 **闭的**，如果

对于每个 $c \in \mathcal{C}$，• c 在 $\mathcal{C}$ 中是闭的；也就是说，每个非根元素都与某个根相连，

• 每个根都通过某条 B-边或 Y-边与某个非根元素相连，并且

如果• $q \in \mathcal{C}$ 且 $\mathcal{N}_e \models Q(q, q')$，那么 $q' \in \mathcal{C}$，也就是说，如果有一个根，我们也有它的配对。

如果 $a \in \mathcal{N}_e$ 是非根，那么由于 Φ_e 是无限的，我们可以从 $\{U_i\}_{i\in\omega}$的结构中看出a 属于哪个 W_σ 。类似地，如果 $\mathcal{C}$ 是闭的，我们可以从每个根看出它来自哪个 W_σ 。因此，如果 $\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1$ 是闭的，那么从 $\mathcal{C}_0$ 到 $\mathcal{C}_1$ 至多存在一个嵌入。

此外， $\mathcal{N}_e$ 的每一个有限子集都包含在 $\mathcal{N}_e$的某个有限闭子集中。

设 $\mathcal{B}$ 是闭的，且对 $i \in \{0,1\}$而言，每个 $\alpha_i\colon\ \mathcal{B} \to \mathcal{C}_i$都是满足 $\mathcal{C}_i \in \mathbb{K}_e$的嵌入。令 $\mathcal{C}_i^+$为 $\mathcal{N}_e$ 的一个包含 $\mathcal{C}_i$的有限闭子集。于是存在唯一映射$\alpha_i^+\colon\ \mathcal{B} \to \mathcal{C}_i^+$。此外，由于存在从 $\mathcal{B}$ 到 $\mathcal{N}_e$ 的唯一嵌入以及从 $\mathcal{C}_i^+$到 $\mathcal{N}_e$的唯一嵌入，我们可以不失一般性地假设 α_i^+是一个包含映射。但这样一来，我们可以令 $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{N}_e$ 为任意包含 $\mathcal{C}_0^+$和 $\mathcal{C}_1^+$的闭子集。于是对每个 $i \in \{0,1\}$，存在从 $\mathcal{C}_i^+$到 $\mathcal{D}$的唯一映射。因此 $\mathcal{D}$ 是 α_0 与 α_1的合并。

特别地，这表明 $\mathcal{B}$ 是一个 amalgamation 基。因此我们可以令陪域(F)为 $\mathbb{K}_e$ 中底层结构为 $\mathcal{B}$的任意元素。因此 $\mathbb{K}_e$ 具有(CAP)。□

令 $\mathcal{N}$ 为 $\mathcal{N}_\omega$ 与定理 7.1 中结构的不交合并。令 $\mathbb{K}$ 为 $\mathcal{N}$ 的年龄。于是由定理 7.1 和断言 7.8，年龄 $\mathbb{K}$ 具有 (CAP)。现在假设 $\mathbb{K}$ 对某个图灵度 $\mathfrak{s}$ 具有 ($\mathfrak{s}$-cCAP)。由定理 7.1，我们可以从 $\mathfrak{s}$ 计算出 $\mathbf{0}'$，因此由引理 5.5，我们也可以从 $\mathfrak{s}$ 计算出 $\mathcal{EI}(\mathbb{K})$。但由断言 7.7，我们可以一致地对 e，根据 $\mathfrak{s}$ 判定 Φ_e 是否有限。因此 $\mathbf{0}'' \leq_{\mathrm{T}} \mathfrak{s}$。□

我们还 得到定理7.5 和命题6.14的以下直接推论 .

推论 7.9。存在一个可计算年龄 $\mathbb{K}$，它是某个结构的典范可计算龄，使得如果 $\mathfrak{s}$ 是一个图灵度，且 $\mathcal{M}$ 是一个 $\mathfrak{s}$-可计算结构，并且是 $\mathfrak{s}$-可计算的余终超齐次结构，也是 $\mathbb{K}$ 的余终 *Fra¨ıss´e* 极限，那么 $\mathbf{0}'' \leq_{\mathrm{T}} \mathfrak{s}$。

References

[AC17] F. Adams 和 D. Cenzer， *Computability and categoricity of weakly ultrahomogeneous structures*，《可计算性》6（2017），第4期，365–389页。[AFM] N. Ackerman、C. Freer 和 M. Mirabi， *Computable weak Fraïssé limits*，准备中。[AKL14] O. Angel、A. S. Kechris 和 R. Lyons，
Random orderings and unique ergodicity of automorphism groups，《欧洲数学会杂志》（JEMS）16（2014），第10期，2059–2095页。[BBBK21] A. Barto˘s、T. Bice、K. D. Barbosa 和 W. Kubi´s，
The weak Ramsey property and extreme amenability，2021年。[BJVP17] M. Bodirsky、P. Jonsson 和 T. Van Pham， *The complexity of phylogeny constraint satisfaction problems*，《ACM计算逻辑汇刊》18（2017），第3期，文章23，共42页。[BN18] G. Badia 和 C. Noguera， *Fraïssé classes of graded relational structures*，《理论计算机科学》737（2018），81–90页。[BST13] M. Boja´nczyk、L. Segoufin 和 S. Toru´nczyk，
Verification of database-driven systems via amalgamation，《第32届ACM SIGMOD-SIGACT-SIGART数据库系统原理研讨会论文集》（PODS 2013），美国纽约州纽约市，2013年6月22日至27日（R. Hull 和 W. Fan 编），ACM，2013年，第63–74页。[Cal67] J. Calais， *Relation et multirelation pseudo-homogènes*，《巴黎科学院报告》S´er. A-B 265（1967），A2–A4页。[Cal68] J. Calais， *Relations pseudo-homogènes， application à la théorie des arbres*，《巴黎科学院报告》S´er. A-B 266（1968），A324–A326页。[Cam91] P. J. Cameron， *The age of a relational structure*，《离散数学》95（1991），第1–3期，49–67页。[CAN24] D. Cenzer、F. Adams 和 K. M. Ng， *Computability and categoricity of weakly homogeneous Boolean algebras and p-groups*，载于《计算与自动机理论及其应用》（N. Greenberg、S. Jain、K. M. Ng、S. Schewe、F. Stephan 和 Y. Yang 编），新加坡国立大学数学科学研究所讲义系列，World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.，美国新泽西州哈肯萨克，2024年，第141–158页。[CH04] M. Cristani 和 R. Hirsch，
The complexity of constraint satisfaction problems for small relation algebras，《人工智能》156（2004），第2期，177–196页。[CHMM11] B. F. Csima、V. S. Harizanov、R. Miller 和 A. Montalb´an， *Computability of Fraïssé limits*，《符号逻辑杂志》76（2011），第1期，66–93页。[DB22] K. Dasilva Barbosa，
Ramsey Degree Theory of Ordered and Directed Sets，博士论文，多伦多大学，2022年，第103页。

[DG90] M. Droste 和 R. G¨obel, *Universal domains in the theory of denotational semantics of programming languages*, 《第五届计算机科学逻辑年度研讨会论文集》（LICS '90），美国宾夕法尼亚州费城，1990年6月4日至7日，IEEE计算机学会，1990年，第19–34页。[DG93] M. Droste 和 R. G¨obel, *Universal domains and the amalgamation property*, 《数学结构与计算机科学》3（1993），第2期，137–159页。[DIM23] M. Drzewiecka、A. Ivanov 和 B. Mokry, *Generics in invariant subsets of some highly homogeneous permutation groups* 2023 ，。[dR21] N. de Rancourt, *Weak Fraïssé classes and $\aleph_0$-categoricity*, 泛结构研讨会，2021年。[FHT19] E. Fokina、V. Harizanov 和 D. Turetsky, *Computability-theoretic categoricity and Scott families*, 《纯粹与应用逻辑年刊》170（2019），第6期，699–717页。[Fou13] W. L. Fouch´e, *Martin-Löf randomness, invariant measures and countable homogeneous structures*, 《理论计算机系统》52（2013），第1期，65–79页。[Fra54] R. Fra¨ıss´e, *Sur l'extension aux relations de quelques propriétés des ordres*, 《高等师范学校科学年刊》（第3辑）71（1954），363–388页。[Hod93] W. Hodges, *Model theory*, 《数学及其应用百科全书》第42卷，剑桥大学出版社，剑桥，1993年。[KK21] A. Krawczyk 和 W. Kubi´s, *Games with finitely generated structures*, 《纯粹与应用逻辑年刊》172（2021），第10期，103016，共13页。[KKKP22] A. Krawczyk、A. Kruckman、W. Kubi´s 和 A. Panagiotopoulos, *Examples of weak amalgamation classes*, 《数学逻辑季刊》68（2022），第2期，178–188页。[KNRS04] B. Khoussainov、A. Nies、S. Rubin 和 F. Stephan, *Automatic structures: Richness and limitations*, 《第19届IEEE计算机科学逻辑研讨会论文集》（LICS 2004），2004年7月14日至17日，芬兰图尔库，IEEE计算机学会，2004年，第44–53页。[KPT05] A. S. Kechris、V. G. Pestov 和 S. Todorcevic, *Fraïssé limits Ramsey theory and topological dynamics of automorphism groups* **15** 2005 1, 106 189 ，，，《几何与泛函分析》（），第–期。[KR07] A. S. Kechris 和 C. Rosendal, *Turbulence amalgamation and generic automorphisms of homogeneous structures* 3 **94** 2007 2, 302 350 ，，，《伦敦数学会会刊》（）（），第–期。[Kru15] A. Kruckman, *Notes on generalized Fraïssé theory*, 2015年。[Kru16] A. Kruckman, *Infinitary Limits of Finite Structures*, 博士论文，加利福尼亚大学伯克利分校，2016年，第157页。[Kub22] W. Kubi´s, *Weak Fraïssé categories*, 《范畴论及其应用》38（2022），第2篇，第27–63页。[Mal22] M. Malicki, *Remarks on weak amalgamation and large conjugacy classes in non-archimedean groups*, 《数学逻辑档案》61（2022），第5–6期，685–704页。[PT22] A. Panagiotopoulos 和 K. Tent, *Universality vs genericity and C_4-free graphs*, 《欧洲组合数学杂志》106（2022），103590，共12页。[Ste12] R. M. Steiner, *Reducibility, Degree Spectra, and Lowness in Algebraic Structures*, 博士论文，纽约市立大学，2012年，第118页。[Tru92] J. K. Truss, *Generic automorphisms of homogeneous structures*, 《伦敦数学会会刊》（第3辑）65（1992），第1期，121–141页。

Harvard University, USA
Email address: nate@aleph0.net

Massachusetts Institute of Technology, USA
Email address: freer@mit.edu

Wesleyan University and The Taft School, USA
Email address: mmirabi@wesleyan.edu