arXiv:2601.22473v1 [math.MG] 30 Jan 2026

Lipschitz 和 Sobolev 映像的切空间

MATTHEW BADGER、JARED KRANDEL 和 VYRON VELLIS

Abstract. 我们在两个范畴中发展了 Rademacher 型和 Calderon 型可微性定理的几何版本。我们的结果的一个特例是：对于任意从 $[0,1]^n$ 到欧几里得空间的 Lipschitz 或连续 $W^{1\text{映射}p}$ 索伯列夫映射 f，若 $p > n$，则对 n 维豪斯多夫测度而言，像 $f([0,1]^n)$ 在几乎每一点都有唯一切集（Attouch-Wets 收敛）。在类似情形下，若 f 是从 $[0,1]^n$ 到度量空间的连续$_{N^{1\text{映射}p}}$，我们证明像 $f([0,1]^n)$ 几乎处处都有唯一度量切空间（Gromov-Hausdorff 收敛）。这些结果与 Federer 关于 $\mathbb{R}^d$ 中 n-可整流集的近似切空间的存在性和唯一性定理相辅相成，但又有所不同。我们证明，通过首先证明索伯列夫像的 n-*packing content* 有限，再证明无法提升的情形若发生在正测度集上就意味着无限装填容度，便可将索伯列夫像的近似切对象提升为 Attouch-Wets 切锥或 Gromov-Hausdorff 切锥。

1. Introduction

Rademacher 定理是几何测度论中的一项重要结果，它指出：若 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是开集，且 $f : \Omega \to \mathbb{R}^d$ 是利普希茨映射，则 f 在 Ω 中几乎处处可微。Rademacher 定理的应用和推广涉及分析学的多个方面。首先，Stepanov 定理指出：若映射$f : \Omega \to \mathbb{R}^d$ 定义在开集 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 上，并且在 Ω 中满足 $\limsup_{x\to a} |f(x) - f(a)|/|x - a| < \infty$ 的几乎所有点 $a \in$ 处可微；参见 [Fed69, Theorem 3.1.9]。其次，Aleksandrov 定理指出，凸函数 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 几乎处处二阶可微 [NP06, Theorem 3.11.2]。第三，Pansu 定理 [Pan89]建立了一种 Rademacher 型定理，其中利普希茨映射的定义域是 Carnot 群的一个开集。第四，Kirchheim [Kir94] 证明了一种 Rademacher 型定理，其中 f 的陪域是度量空间 X；参见定理 7.3。最后，Rademacher 定理的应用可见于度量空间上的分析（Heisenberg 群不可双利普希茨嵌入 [Sem96]）、偏微分方程分析（某些一维空间非线性波动方程的解会衰减至零 [LT12]），以及几何测度论（平面上的 Besicovitch 投影定理和可整流性的一般理论 [Bes39]）。Cheeger [Che99]将 Rademacher 定理大幅推广至度量测度空间。

Date：2026年1月29日。2020 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类号 28A75；次要分类号 46E36、53C23。可整流集、切线、索伯列夫映射、利普希茨映射。M.B. 的研究部分得到了美国国家科学基金会资助项目 2154047 的支持。J.K. 的研究部分得到了美国国家科学基金会资助项目 1763973 和 1928930 的支持（后者资助期间，J.K. 常驻于西蒙斯·劳弗数学科学研究所，时间为2024年秋季）。V.V. 的研究部分得到了美国国家科学基金会资助项目 2154918 的支持。

Calderon [Cal51], 利用索博列夫嵌入定理推广了 Rademacher 定理，证明若 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是开集，则当 $p \in (n, \infty]$ 时，索博列夫类 $W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^d)$ 中的每个连续函数几乎处处可微。回忆一下，对于某个 $p \geq 1$，函数 $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^d$ 属于 $W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^d)$，当且仅当 $f \in L^p(\Omega)$ 且 f 在 $L^p(\Omega)$ 中具有分布偏导数。回忆一下，连续函数 $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^d$ 是利普希茨函数，当且仅当 $f \in W^{1,\infty}(\Omega, \mathbb{R}^d)$ [Hei01, Theorem 6.12]。

本文旨在建立 Rademacher 定理和 Calderon 定理的几何版本，用映射的像取代函数，用切空间取代导数，以描述映射像的无穷小结构。首先定义切锥的概念。沿用 [BL15], , 给定一个闭集 $X \subset \mathbb{R}^n$ 和一点 $x \in X$，若存在一个趋于零的正尺度序列 r_j，使得放大集 $r_j^{-1}(X - x)$ 在 Attouch-Wets 拓扑下收敛到集合 T，则称闭集 T 为 X 在 x 处的**切锥**。我们用 $\operatorname{Tan}_{\mathrm{AW}}(X, x)$ 表示 X 在 x 处所有切锥的集合。空间 $\operatorname{Tan}_{\mathrm{AW}}(X, x)$ 非空；如果 T 属于 $\operatorname{Tan}_{\mathrm{AW}}(X, x)$，那么对于每个 $\lambda > 0$，λT 都属于 $\operatorname{Tan}_{\mathrm{AW}}(X, x)$。精确定义及进一步讨论见 §3.2。

第三位署名作者与 Shaw 证明了：如果 $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}^n$ 是利普希茨的，那么对于 $\mathcal{H}^1$-几乎处处的点 $x \in f([0,1])$，切空间 $\operatorname{Tan}_{\mathrm{AW}}(f([0,1]), x)$ 恰好包含一个元素，而该元素是一条直线 [SV25, 定理 1.1]。本文的第一个定理将这一结果推广到所有维数，并推广到索伯列夫映射。

定理 1.1。设 $n \geq 1$ 和 $p \in (n, \infty]$。对于每个连续映射 $f \in W^{1,p}(\mathbb{B}^n, \mathbb{R}^d)$，像 $f(\mathbb{B}^n)$ 具有有限的 $\mathcal{H}^n$ 测度，并且在 $\mathcal{H}^n$-几乎处处的 $x \in f(\mathbb{B}^n)$ 处，存在一个 n-平面 $V_x \subset \mathbb{R}^d$，使得 $\operatorname{Tan}_{\mathrm{AW}}(f(\mathbb{B}^n), x) = \{V_x\}$。

在我们的第二个结果中，我们针对度量目标空间建立了定理 1.1 的一个版本。为陈述该结果，我们首先需要定义度量空间中的切线和索伯列夫映射。

将经典Sobolev空间推广到度量测度空间已有若干途径，包括但不限于Haj-lasz [Haj96], Cheeger[Che99], 以及Shanmugalingam [Sha00]。这里我们关注后一种概念。给定 $p \in [1, \infty]$、区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 以及度量空间 X，我们称 $f\colon \Omega \to X$ 属于*Newton-Sobolev*类 $N^{1,p}(\Omega, X)$，如果 $f \in L^p(\Omega, X)$，并且存在Borel函数 $\rho \in L^p(\Omega)$，使得 $\rho \geq 0$，且对 p-几乎每一条可求长曲线 $\gamma\colon [0,1] \to \Omega$，

$$d_X(f(\gamma(1)), f(\gamma(0))) \leq \int_\gamma \rho \, ds.$$

精确表述见定义4.1。

切线可以在任意完备带基点度量空间(X, d_X, x)中定义；主要区别在于带基点度量空间$(X, r_j^{-1} d_X, x)$的收敛是在Gromov-Hausdorff意义下进行的（见定义3.2）。相应的切空间记为$\operatorname{Tan}_{\mathrm{GH}}(X, x)$。假设 $E \subset \mathbb{R}^n$ 与 $x \in E$，空间$\operatorname{Tan}_{\mathrm{GH}}(E, x)$与$\operatorname{Tan}_{\mathrm{AW}}(E, x)$之间的一个关键区别在于：在后者中，两个等距等价的元素不可区分，而在前者中则不然。例如，若

$$\mathcal{S} = \{\mathbf{0}\} \cup \{te^{i \log t} : t > 0\} \subset \mathbb{R}^2$$

是对数螺线，则 $\operatorname{Tan}_{\mathrm{AW}}(\mathcal{S}, \mathbf{0}) = \{e^{i\theta}\mathcal{S}\colon \theta \in [0, 2\pi)\}$ 而 $\operatorname{Tan}_{\mathrm{GH}}(\mathcal{S}, \mathbf{0})$ 仅包含一个元素（即 $\mathcal{S}$的等距类）。另见 [BET24，引理 3.1]，其中给出了更多例子。另一方面，$\operatorname{Tan}_{\mathrm{GH}}(E, x)$ 是

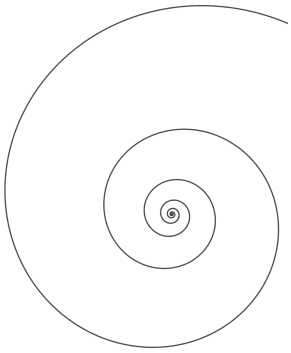

FIGURE 1. 对数螺线 $\mathcal{S}$。

$\mathrm{Tan}_{\mathrm{AW}}(E,\ x)$ 中元素的等距类集合，其含义是，$\mathrm{Tan}_{\mathrm{AW}}(E,\ x)$ 中的每个元素都与 $\mathrm{Tan}_{\mathrm{GH}}(E,\ x)$ 中恰好一个元素等距，而 $\mathrm{Tan}_{\mathrm{GH}}(E,\ x)$ 中的每个元素都与 $\mathrm{Tan}_{\mathrm{AW}}(E,\ x)$ 中某个元素等距（精确表述见定理 3.16）。

下一个结果是定理 1.1 的度量版本。

定理 1.2。设 $n \geq 1$，并设 $p \in (n, \infty]$。对于每个度量空间 X 和连续映射 $f \in N^{1,p}(\mathbb{B}^n, X)$，其像 $f(\mathbb{B}^n)$ 具有有限的 $\mathcal{H}^n$ 测度，并且在几乎每个 $\mathcal{H}^n$ $x \in f(\mathbb{B}^n)$ 处，切空间 $\mathrm{Tan}_{\mathrm{GH}}(f(\mathbb{B}^n)\ x)$ 都是某个 n 维带基点巴拿赫空间 $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_x \mathbf{0})$ 的带基点等距类。

在定理 1.1 和定理 1.2 中，我们都可以将 $\mathcal{H}^n$ 替换为装填 n 测度 $\mathcal{P}^n$。此外，定理 1.1 和定理 1.2 都是更一般结果——定理 7.5 和定理 7.8——的特例。一组密切相关的结果表明，具有有限豪斯多夫 n测度的 n 可整流欧几里得集合几乎处处有唯一的近似切空间 n平面；其中一个版本的证明见引理 7.2，其他版本见 [Sim83, 定理 11.6, 注记 11.7] 和 [Mat95, 定理 15.19] 。粗略地说，若存在包含 x 的 $E \subset E$，使得 $E \setminus \tilde{E}$ 在 x 处的豪斯多夫 n 密度为零，且 P 是 E 在 x 处的 Attouch-Wets 切对象，则一个 n 平面 P 是 E 的 $\tilde{}$ 在 x 处的近似切对象。Kirchheim [Kir94] 给出了这一结果的度量类比。请注意，近似切 n平面存在的判据比“真实”切平面的判据更弱。若要将这些结果加强为真实切对象的存在性，还需要一些额外的控制；我们用更强的条件—— n装填容度有限——替代豪斯多夫 n 测度有限这一条件。近似切对象与真实切对象的比较见例 8.1。

这两种切锥概念之间的区别此前已在不同背景下得到研究。我们借用了[FTV 25] 中的“真实切对象”这一术语，其中作者证明，某个平方函数界可以使我们（用本文术语来说）在两个区域公共边界上的一点处，将近似切对象提升为真实切对象。在 [HV22] 和[Vil20]中，相关结果也在不同情形下利用不同的几何平方函数，对一点处真实切对象的存在性给出了刻画。

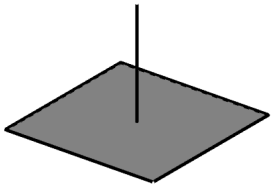

FIGURE 2. 若 $E = [0,1]^2 \times \{0\} \cup \{(0,\ 0)\} \times [0,1]$，则 E 在原点处有一个近似切平面，但没有“真正的”切平面˜。这里 $E = \{(0,\ 0)\} \times [0,1]$。

尽管 Rademacher 定理——及其几何版本——可以从 Lipschitz 函数推广到 p-索博列夫函数，其中 $p > n$，但任何进一步推广的尝试都将毫无希望。假设 $p > n$ 是尖锐的：在例8.4中，我们对每个 $n \geq 2$ 构造一个函数 $f \in W^{1,\ n}(\mathbb{B}^n,\ \mathbb{R}^{n+1})$，使得在一组具有正 $\mathcal{H}^n$ 测度的点 $x \in f(\mathbb{B}^n)$ 上，$\mathrm{Tan}_{\mathrm{AW}}(f(\mathbb{B}^n),\ x)$ 中存在一个切锥，但它不是 n-平面。对于正则性更低的映射，情况则更加复杂。在 [SV25], 中，Shaw 和第三位署名作者对每个 $s > 1$ 构造了一个（$1/s$）-H¨older 映射 $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}^n$，使得 $\mathcal{H}^s(f([0,1])) > 0$，并且对于图像中 $\mathcal{H}^s$-几乎处处的 x，空间 $\mathrm{Tan}_{\mathrm{AW}}(f([0,1]),\ x)$ 包含无穷多个拓扑上不同的元素。

最后，我们指出，文献中还存在一种较弱版本的切线（称为伪切线）。若存在点的序列 (x_j)（位于 X 中）以及正数序列 (r_j)，使得 $x_j \to x$、$r_j \to 0$，且空间 $r_j^{-1}(X - x_j)$（相应地，带基点的空间 $(r_j^{-1}X,\ x_j)$）在 Attouch-Wets（相应地，Gromov-Hausdorff）拓扑下收敛到 T，则度量空间 T 在 Attouch-Wets（相应地，Gromov-Hausdorff）意义下是 $X \subset \mathbb{R}^n$ 在点 $x \in X$ 处的伪切锥。事实证明，我们的两个主要结果都不能推广到伪切锥；参见例8.2。

2. PRELIMINARIES

本文此处及后文中，写作 $x \lesssim y$ 时，表示存在常数 $C > 0$ 使得 $x \leq Cy$。若常数 C 依赖于参数 $c_1, \ldots, c_n$，则记作 $x \lesssim_{c_1,\ldots,c_n} y$。

给定度量空间 X 和 $r \in (0,\infty)$，我们用 rX 表示将 X 上的度量缩放 r 后得到的度量空间；也就是说，X 和 rX 指的是同一个点集，但对所有 $x, y \in X$，$d_{rX}(x,y) = rd_X(x,y)$。带基点度量空间 (X,x) 是一个具有指定点 $x \in X$ 的度量空间 X。若 f 是一个定义域为 X、陪域为 Z 的函数，且 $f(x) = z$，则记作 $f\colon (X,x) \to (Z,z)$。

设 X 为度量空间，$E \subset X$ 为非空集合。若 E 的子空间拓扑下的每个闭球都是紧集，则称 E 是适当的。此外，我们用 d_X 表示 X 的度量，并用 $B_X(x,r) := \{y \in X\colon d_X(x,y) \leq r\}$ 表示以 $x \in X$ 为中心、半径为 $r > 0$ 的闭球。我们也记 $B_X(E,r) := \bigcup_{x \in E} B_X(x,r)$。最后，若 $B = B_X(x,r)$ 是一个球，则记作 $r(B) = r$。若 $X = \mathbb{R}^n$，则我们分别用 $B^n(x,r)$ 和 $B^n(E,r)$ 表示球和闭邻域。本文余下部分中，我们用 $\mathbf{0}$ 表示 $\mathbb{R}^n$（或巴拿赫空间）的原点，并记

$$\mathbb{B}^n := B^n(\mathbf{0},1) \subset \mathbb{R}^n.$$

若 X 是度量空间且 $s>0$，则在 X 的博雷尔 σ-代数上定义豪斯多夫 s-测度如下:

$$\mathcal{H}^s(A)=\lim_{\delta\to 0}\mathcal{H}^s_\delta(A)=\lim_{\delta\to 0}\inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty}(\operatorname{diam}U_i)^s:\bigcup_{i=1}^{\infty}U_i\supset A,\ \operatorname{diam}U_i\le\delta\right\}.$$

我们类似地定义豪斯多夫 s-容度:

$$\mathcal{H}^s_\infty(A)=\inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty}(\operatorname{diam}U_i)^s:\bigcup_{i=1}^{\infty}U_i\supset A\right\}.$$

定义 2.1（可整流性）. 若存在可数个利普希茨映射 $f_i\colon E_i\subset[0,1]^n\to X$，使得 $\mathcal{H}^n(X\setminus\bigcup_i f_i(E_i))=0$，则度量空间 X 是 n- 可整流的 。

定义 2.2（有限装填容度）. 给定 $s>0$，若存在 $M\in(0,+\infty)$，使得对于满足 $r(B_i)\le\operatorname{diam}X$ 的两两不相交球 $B_1,B_2,\cdots\subset X$，则称度量空间 X具有有限 s-装填容度 。

$$\sum_i r(B_i)^s<M. \tag{2.1}$$

定义 2.2 中的动机和术语基于装填测度这一概念。

定义 2.3（装填测度）. 设 X 为度量空间，且令 $s>0$。对于任意 $\delta<\operatorname{diam}(X)$，令 $\mathscr{B}_\delta$ 表示由所有以下可数集组成的族：其中的球两两不相交，中心位于 X，且半径小于或等于 δ。定义

$$P^s_\delta(X)=\sup_{\mathcal{B}\in\mathscr{B}_\delta}\sum_{B\in\mathcal{B}}(2r(B))^s.$$

s— X 的打包预测度定义为

$$P^s(X)=\lim_{\delta\to 0}P^s_\delta(X).$$

通过定义，我们得到 s—打包测度

$$\mathcal{P}^s(X)=\inf\left\{\sum_{j\in J}P^s(X_j):X\subset\bigcup_{j\in J}X_j,\quad J\text{ countable}\right\}.$$

打包容度在某些方面是豪斯多夫容度的对应概念，但我们必须限制打包容度定义中球的半径，以防止其平凡地变为无穷大。

定义 2.4（打包容度）。设 X 是一个可分度量空间，且$s>0$。定义 s—打包容度为 X $P^s_{\operatorname{diam}(X)}(X)$。为了保持与豪斯多夫 s-容度 $\mathcal{H}^s_\infty$的类比，我们将记号$P^s_\infty(X)=P^s{}_{\operatorname{diam}(X)}(X)$用于表示它。

注 2.5。如果 X 是一个可分度量空间且 $s>0$，那么

$$\mathcal{H}^s_\infty(X)\le\mathcal{H}^s(X)\le\mathcal{P}^s(X)\le P^s(X)\le P^s_\infty(X).$$

此外， X 具有有限的 s-装填容度，当且仅当 $P^s_\infty(X)<\infty$。

注记 2.6. 若 X 支撑一个有限且下 s-正则测度 μ （即一个满足以下条件的测度μ：对于每个满足 $r <$直径 X的球，均有 $\mu(B_X(x,\ r)) \gtrsim r^s$），则 X具有有限的 s-装填容度。事实上，若 $B_1,\ B_2,\ \cdots \subset X$是半径不超过 diam X的两两不相交的球，则

$$\sum_i r(B_i)^s \lesssim_s \sum_i \mu(B_i) \leq \mu(X) < \infty,$$

这意味着 $P^s_\infty(X) \lesssim \mu(X)$。这可以看作是质量分布原理的一种对偶表述；参见 [Hei01，第 8.7] 节。

3. Tangent Sets and Metric Tangents

本节讨论欧几里得空间和度量空间中的切线。

3.1. 度量空间中的切线。 设 X为一个度量空间。设 $A, B, C \subset X$为非空集合。我们将 A 相对于 B 的超额 定义为

$$\mathrm{ex}(A,B) := \sup_{a\in A} \inf_{b\in B} d_X(a,b) \in [0,\infty].$$

按照约定，令 $\mathrm{ex}(\emptyset, B) := 0$，但不定义 $\mathrm{ex}(A,\emptyset)$。对于任意 $x \in X$和 $r > 0$，我们将 $B_X(x,r)$ 中的相对 ***Walkup-Wets*** 距离 定义为如下量

$$\mathrm{D}^{x,r}[A,B] := r^{-1}\max\{\mathrm{ex}(A\cap B_X(x,r), B), \mathrm{ex}(B\cap B_X(x,r), A)\} \in [0,\infty). \tag{3.1}$$

现在我们记录来自 [BL15, 引理 2.2]的相对 Walkup-Wets 距离的两个性质：单调性 和弱拟三角不等式。

(1) 单调性：若 $B_X(x,r) \subset B_X(y,s)$，则

$$\text{If } B_X(x,r) \subset B_X(y,s), \text{ then } \mathrm{D}^{x,r}[A,B] \leq (s/r)\mathrm{D}^{y,s}[A,B]. \tag{3.2}$$

(2) 弱拟三角不等式：若 $x \in B$，则

$$\mathrm{D}^{x,r}[A,C] \leq 2\mathrm{D}^{x,2r}[A,\overline{B}] + 2\mathrm{D}^{x,2r}[\overline{B},C]. \tag{3.3}$$

我们将***Gromov*** 指向距离定义为

$$H^x[A,B] := \inf\{\epsilon \in (0,1] : \mathrm{D}^{x,1/\epsilon}[A,B] \leq \epsilon^2\},$$

若可容许的 ϵ 集合为空，我们约定 $H^x[A,B] = 1$ 。这等价于 [Gro81, 第 6]节中的定义。与相对 Walkup-Wets 距离不同，格罗莫夫有基点距离是真正的距离。

下一个引理给出了 Walkup-Wets 距离与格罗莫夫有基点距离之间的一个有用关系。

引理 3.1. 给定 A、$B \subset X$、$x \in X$ 和 $\epsilon \in (0,1)$，当且仅当 $\mathrm{D}^{x,1/\delta}[A,B] \leq \delta^2$ 对所有 $\delta \in (\epsilon,1)$成立时，有 $H^x[A,B] \leq \epsilon$。

证明. 固定 $A, B \subset X$、$x \in X$ 和 $\epsilon \in (0,1)$。

首先假设 $H^x[A,B] \leq \epsilon$。那么由 (3.2)，对任意 $\theta \in (0, 1-\epsilon)$，存在$t \in [\epsilon, \epsilon+\theta)$ 使得

$$\mathrm{D}^{x,1/t}[A,B] \leq \frac{1/\epsilon}{1/t}\mathrm{D}^{x,1/\epsilon}[A,B] \leq \frac{1/\epsilon}{1/t}\epsilon^2 = \epsilon t < t^2.$$

如果 δ 满足 $0 < \delta^{-1} \leq (\epsilon+\theta)^{-1}$，则 $\delta^{-1} \leq t^{-1}$ 且(3.2)给出

$$\mathrm{D}^{x,1/\delta}[A,B] \leq \frac{1/t}{1/\delta}\mathrm{D}^{x,1/t}[A,B] \leq t\delta \leq \delta^2.$$

令 $\theta \to 0$，我们得出对所有 $\delta \in (\epsilon, 1)$，$\mathrm{D}^{x,1/\delta}[A,B] \le \delta^2$ 成立。

现在假设，对于所有 $\delta \in (\epsilon, 1)$，都有 $\mathrm{D}^{x,1/\delta}[A,B] \le \delta^2$。那么，对于所有$\delta \in (\epsilon, 1)$，都有 $H^x[A,B] \le \delta$。令 $\delta \to \epsilon$，得到 $H^x[A,B] \le \epsilon$。■

定义 3.2（Gromov-Hausdorff距离）。对于任意两个带基点度量空间 (X,x) 和 (Y,y)，我们定义带基点格罗莫夫-豪斯多夫距离

$$d_{\mathrm{pGH}}((X,x),(Y,y)) := \inf_{\iota_1,\iota_2} H^z[\iota_1(X), \iota_2(Y)] \tag{3.4}$$

其中，下确界取遍所有将 $\iota_1 : (X,x) \to (Z,z)$ 和$\iota_2 : (Y,y) \to (Z,z)$ 等距嵌入到同一个带基点度量空间 (Z,z) 的等距嵌入。使用下述 Walkup-Wets距离的 Gromov-Hausdorff 变体来度量这一距离将很方便。对于任意 $r > 0$ 以及任意两个带基点度量空间 (X,x) 和 (Y,y)，我们定义

$$\mathrm{D}^r_{\mathrm{GH}}[(X,x),(Y,y)] := \inf_{\iota_1,\iota_2} \mathrm{D}^{z,r}[\iota_1(X), \iota_2(Y)] \tag{3.5}$$

其中下确界取遍上述所有等距嵌入。容易证明，$d_{\mathrm{pGH}}((X,x),(Y,y)) \le \epsilon$ 当且仅当 $\mathrm{D}^{1/\epsilon}{}_{\mathrm{GH}}[(X,x),(Y,y)] \le \epsilon^2$，并且 D_{GH} 满足以下弱形式的单调性：对任意 $r < s$，

$$\mathrm{D}^r_{\mathrm{GH}}[(X,x),(Y,y)] \le \frac{s}{r}\mathrm{D}^s_{\mathrm{GH}}[(X,x),(Y,y)]. \tag{3.6}$$

最后，我们给出本文将采用的切空间定义。

定义 3.3（度量切锥）。设 X 是一个完备度量空间，且令 $x \in X$。若存在某个序列 $r_i \to 0$，使得完备带基点度量空间 (Y,y) 在带基点 Gromov-Hausdorff 拓扑下 $\to (Y,y)$，则称 (Y,y) 是 X 在 x 处的度量切锥 或带基点格罗莫夫 - 豪斯多夫切锥 。我们用 $\mathrm{Tan}_{\mathrm{GH}}(X,x)$ 表示 X 在 x处的度量切锥的带基点等距类集合。

根据格罗莫夫紧致性判据 [Gro81，第 6]，节，任何局部紧致的加倍空间在每一点都存在度量切锥；另见 [Hei03，定理 2.11]。以下引理用 D_{GH} 来表述 Gromov-Hausdorff 切锥存在的条件。

引理 3.4. </style}当且仅当存在一个序列 使得 $(Y,y)] \in \mathrm{Tan}_{\mathrm{GH}}(X,x)$ </style}。

$$\lim_{i\to\infty} \mathrm{D}^R_{\mathrm{GH}}[(r_i^{-1}X,x),(Y,y)] = 0 \quad \textit{for all } R > 0.$$

证明。 </style}首先假设 $(,y)] \in \mathrm{Tan}_{\mathrm{GH}}(X,x)$，并固定 $R > 0$ 和 $\epsilon < 1/R$。存在一个序列 $(r_i)_i$ ，且存在 $i_0 \ge 0$ 使得 $r_i \to 0$ 且$d_{\mathrm{pGH}}((r_i^{-1}X,x),(Y,y)) \le \epsilon$ 对所有 $i \ge i_0$ 均成立。由单调性，

$$\mathrm{D}^R_{\mathrm{GH}}[(r_i^{-1}X,x),(Y,y)] \le \frac{1/\epsilon}{R}\mathrm{D}^{1/\epsilon}_{\mathrm{GH}}[(r_i^{-1}X,x),(Y,y)] \le \frac{1/\epsilon}{R}\epsilon^2 \le \frac{\epsilon}{R}$$

对所有 $i \ge i_{0}$。令 $\epsilon \to 0$，可得 $\lim_{i\to\infty} D^R_{\mathrm{GH}}[(r_i^{-1}X,x),(Y,y)] = 0$。反过来，固定一个序列 $r_i \to 0$，使得对所有$R > 0$，$\lim_{i\to\infty} \mathrm{D}^R_{\mathrm{GH}}[(r_i^{-1}X,x),(Y,y)] = 0$。再固定 $\epsilon > 0$，并令 i_0 满足对所有 $i \ge i_0$，$\mathrm{D}^{1/\epsilon}\mathrm{GH}[(r_i^{-1}X,x),(Y,y)] < \epsilon^2$。那么对所有 $i \ge i_0$，$d_{\mathrm{pGH}}((r_i^{-1}X,x),(Y,y)) < \epsilon$，这表明

$$\lim_{i\to\infty} d_{\mathrm{pGH}}((r_i^{-1}X,x),(Y,y)) = 0.$$ ■

我们还需要理解空间之间的带基点 Gromov-Hausdorff 距离，与空间之间存在不同类型的“近似等距映射”之间的关系。我们将使用 ϵ-等距映射 的概念，出自 [Bat22]。

定义 3.5 (ϵ-等距映射)。 设 (X,x)、(Y,y) 为带基点度量空间，且$\epsilon > 0$。若博雷尔映射 $f\colon (X,x) \to (Y,y)$ 满足 $f(x) = y$且二者均.....，则称其为 ϵ-等距映射

$$\sup_{z,z'\in B_X(x,1/\epsilon)} |d_Y(f(z),f(z')) - d_X(z,z')| \le \epsilon,$$

and

$$B_Y(y,1/\epsilon-\epsilon) \subset B_Y(f(B_X(x,1/\epsilon)),\epsilon).$$

引理 3.6 ([Bat22，引理 2。24])。 设 $0 < \epsilon < 1/2$。设 (X,x) 和 (Y,y) 为带基点度量空间。以下陈述成立：

(1) 若 X和 Y可分，且 $d_{\mathrm{pGH}}((X,x),(Y,y)) < \epsilon$，则存在一个有基点的博雷尔映射 $f\colon X\cap B_X(x,1/\epsilon) \to (Y,y)$，使得

$$|d_Y(f(x'),f(x'')) - d_X(x',x'')| \le 2\epsilon$$

对所有 $x',x'' \in B_X(x,1/\epsilon)$ 以及

$$B_Y(y,1/\epsilon-\epsilon) \subset B_Y(f(B_X(x,1/\epsilon)),2\epsilon).$$

特别地，存在一个 2ϵ-等距映射，将(X,x) 映到(Y,y)。

(2) 如果存在一个从(X,x) 到(Y,y)的 ϵ-等距映射，那么

$$d_{\mathrm{pGH}}((X,x),(Y,y)) \le 2\epsilon.$$

引理 3.7 (超额下界)。 设(Z,z) 是一个带基点度量空间。˜ ˜ ˜ ˜设 X, $X,Y\subset Z$满足 $X\subset X$，设 $z\in X\cap Y$，并设 $\epsilon,r>0$。如果 X是闭集且

$$\mathrm{D}^{z,r/4}[X,Y] > \epsilon \quad and \quad \mathrm{D}^{z,r}[\tilde{X},Y] < \frac{\epsilon}{8},$$

then

$$\mathrm{ex}(X\cap B_Z(z,r/2),\tilde{X}) \ge \frac{\epsilon}{8}r.$$

˜ ˜证明。 由 $X\subset X$ 可知 $\mathrm{ex}(X\cap B_Z(z,r)\ X) = 0$。利用弱˜拟三角不等式 (3.3)、 $x\in X\cap Y$这一事实以及单调性 (3.2)，我们得到

$$\begin{aligned}\epsilon < \mathrm{D}^{z,r/4}[X,Y] &\le 2\mathrm{D}^{z,r/2}[X,\tilde{X}] + 2\mathrm{D}^{z,r/2}[\tilde{X},Y]\\ &\le 4\frac{\mathrm{ex}(X\cap B_Z(z,r/2),\tilde{X})}{r} + 4\mathrm{D}^{z,r}[\tilde{X},Y]\\ &\le \frac{4}{r}\,\mathrm{ex}(X\cap B_Z(z,r/2),\tilde{X}) + \frac{\epsilon}{2}.\end{aligned}$$

˜重新整理该不等式可得 $\mathrm{ex}(X\cap B_Z(z,r/2)\ X) \ge (\epsilon/8)r$。 ■

3.2. **Attouch-Wets 切锥**。 由于 Gromov-Hausdorff距离无法区分巴拿赫空间中旋转的切平面，因此我们需要采用不同的切锥概念，并对结果的欧几里得版本作一些论证上的修改。

我们在定义欧几里得空间子集的切线时所使用的距离概念，实际上在闭集上诱导了 *Attouch-Wets* 拓扑。给定 $n\in\mathbb{N}$，令 $\mathfrak{C}(\mathbb{R}^n)$为 $\mathbb{R}^n$的非空闭子集的集合；令 $\mathfrak{C}(\mathbb{R}^n,\mathbf{0})$为如下集合：

$\mathbb{R}^n$ 中包含原点**0**的非空闭子集。我们考虑这两个空间均配备*Attouch-Wets* 拓扑，该拓扑定义于 [Bee93的定义3.1.2]。下面的引理给出了这种收敛的一个有用刻画，并告诉我们：包含原点的闭集子族在该拓扑中是序列紧的。

引理 3.8 ([Bee93, 定理 3.1.7], [DS97, 引理 8.2])。 在集合 $\mathfrak{C}(\mathbb{R}^n)$ 上存在一种可度量化拓扑，使得集合序列 $(X_i)_{i=1}^{\infty} \subset \mathfrak{C}(\mathbb{R}^n)$ 收敛到集合 $X \in \mathfrak{C}(\mathbb{R}^n)$ 当且仅当

$$\lim_{m\to\infty} \mathrm{D}^{\mathbf{0},r}(X_m, X) = 0, \quad \textit{for every } r > 0.$$

此外，子集族 $\mathfrak{C}(\mathbb{R}^n,\mathbf{0})$ 是序列紧的；也就是说，对于任意序列 $(X_i)_{i=1}^{\infty} \subset \mathfrak{C}(\mathbb{R}^n, \mathbf{0})$，存在一个子序列 $(X_{i_j})_{j=1}^{\infty}$ 和一个集合 $X \in \mathfrak{C}(\mathbb{R}^n, \mathbf{0})$，使得 $(X_{i_j})_{j=1}^{\infty}$ 收敛到 X。

根据 [BL15], ，现在我们可以定义相对于此拓扑的切锥概念。

定义 3.9 （Attouch-Wets 切锥）。设 $E \in \mathfrak{C}(\mathbb{R}^n)$、$T \in \mathfrak{C}(\mathbb{R}^n,\mathbf{0})$，且令$x \in E$。我们称 T 是 E 在 x 处的一个切集或 ***Attouch-Wets*** 切对象，当且仅当存在一个序列 $r_i \to 0$，使得

$$r_i^{-1}(E - x) \to T \text{ in the Attouch-Wets topology.}$$

我们将 E 在 x 处的所有 Attouch-Wets 切锥记为 $\mathrm{Tan}_{\mathrm{AW}}(E, x)$。

根据引理 3.8，每个闭集 $X \subset \mathbb{R}^n$ 在其中的每一点处都有 Attouch-Wets 切锥。

注3.10. 可以尝试将这一切锥概念推广，把 $\mathbb{R}^n$替换为抽象的巴拿赫空间 V。然而，与度量切锥不同，即使集合 E是倍增且紧的，在这一更一般的情形下也不能保证 Attouch-Wets 切锥的存在。例如，令 $E = \{\mathbf{0}\} \cup \{2^{-n}\mathbf{e}_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \ell_\infty$，其中 $\{\mathbf{e}_n\}_n$ 是 ℓ_∞的标准基。容易看出， E 是倍增且紧的。现在固定一个正数序列 $(r_j)_j$，满足 $r_j \to 0$。我们声称 E 在 0 处没有 Attouch-Wets 切锥。为此，固定 $i, j \in \mathbb{N}$，使得$r_j < 1$且 $r_i < (1/4)r_j$，并取 $n_i, n_j \in \mathbb{N}$，使得 $r_i \in (2^{-n_i}, 2^{-n_i+1}]$且$r_j \in (2^{-n_j}, 2^{-n_j+1}]$。注意，$2^{-n_j}\mathbf{e}_{n_j} \in (r_j^{-1}E) \cap B_{\ell_\infty}(\mathbf{0}, 1)$，因为

$$\frac{1}{2} \le \left| \frac{2^{-n_j}\mathbf{e}_{n_j}}{r_j} \right| \le 1.$$

由于 $(r_i^{-1}E) \cap B_{\ell_\infty}(\mathbf{0}, 1)$ 与 $\mathbf{e}^{n_j}$ 正交，我们知道

$$\mathrm{ex}((r_j^{-1}E) \cap B_{\ell_\infty}(\mathbf{0}, 1), r_i^{-1}E) \ge \inf_{x \in (r_i^{-1}E) \cap B_{\ell_\infty}(\mathbf{0},1)} \mathrm{dist}(\mathbf{e}_j, x) \ge \frac{1}{2}.$$

后者连同超出量的三角不等式 [BL15，第 2], 节，意味着不存在一个子序列$(r_k^{-1}E)_{k\in\mathbb{N}}$ 在 Attouch-Wets 拓扑下收敛。

在下面的引理中，我们记录 Attouch-Wets 收敛、Walkup-Wets距离和 Gromov 指向距离之间的一些基本关系；该引理是引理 3.4 的类似结果。

引理 3.11。 设 $(A_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathfrak{C}(\mathbb{R}^d)$ 以及 $A \in \mathfrak{C}(\mathbb{R}^d)$。以下各项等价：

（*1*）在 *Attouch-Wets* 拓扑中，（*2*）存在 $x \in \mathbb{R}^d$ 使得 $\lim_{i\to\infty} \mathrm{D}^{x,\,r}[A_i, A] = 0$，对所有 $r > 0$ 均成立；（*3*）$\lim_{i\to\infty} \mathrm{D}^{x,\,r}[A_i, A] = 0$，对所有 $x \in \mathbb{R}^d$ 和所有 $r > 0$ 均成立；（*4*）存在 $x \in \mathbb{R}^d$ 使得 $\lim_{i\to\infty} H^x[A_i, A] = 0$；（*5*）$\lim_{i\to\infty} H^x[A_i, A] = 0$，对所有 $x \in \mathbb{R}^d$ 均成立。

证明。 根据定义，（1）蕴含（2），而（3）蕴含（1）。

为了证明（2）蕴含（3），固定 $x,\ y \in \mathbb{R}^d$ 和 $r > 0$，并假设对所有 $R > 0$，$\lim_{i\to\infty} \mathrm{D}^{x,\,R}[A_i, A] = 0$。由（3.2），我们有

$$\mathrm{D}^{y,r}[A_i, A] \le \frac{|x-y|+r}{r}\mathrm{D}^{x,r+|x-y|}[A_i, A] \xrightarrow{i\to\infty} 0.$$

显然，(5) 蕴含 (4)。为证明 (4) 蕴含 (2)，固定 $x \in \mathbb{R}^d$ 和 $r > 0$，并假设 $\lim_{i\to\infty} H^x[A_i, A] = 0$。令 $\epsilon \in (0, 1/r)$，并令 $i_0 \in \mathbb{N}$ 使得对所有 $i \ge i_0$ 都有 $H^x[A_i, A] \le \epsilon$。根据引理 3.1 和 (3.2)，对所有 $i \ge i_0$

$$\mathrm{D}^{x,r}[A_i, A] \le \frac{1/\epsilon}{r}\mathrm{D}^{x,1/\epsilon}[A_i, A] \le \frac{1/\epsilon}{r}\epsilon^2 = \epsilon/r.$$

令 $\epsilon \to 0$，得到 $\lim_{i\to\infty} \mathrm{D}^{x,\,r}[A_i, A] = 0$。

剩下需要证明 (3) 蕴含 (5)。为此，固定 $x \in \mathbb{R}^d$ 并令 $\epsilon > 0$。存在 $i_0 \in \mathbb{N}$，使得对所有 $i \ge i_0$ 都有 $\mathrm{D}^{x,\,1/\epsilon}[A_i, A] < \epsilon^2$。于是，根据定义，对所有 $i \ge i_0$ 都有 $H^x[A_i, A] \le \epsilon$。因此，$\lim_{i\to\infty} H^x[A_i, A] = 0$。 ■

3.3. **锥形切锥**。 在本小节中，我们推导一个关于锥形度量切锥的附加引理。首先，回顾欧几里得锥的定义。

定义 3.12（欧几里得锥）。 我们称 $T \subset \mathbb{R}^d$ 为一个**锥**，如果对每个 $\lambda > 0$都有 $\lambda T = T$。

欧几里得锥相当容易处理，但要对度量锥作出类似的断言，还需要额外的工作。度量锥的典型例子是赋范空间，但度量几何中还会出现其他几类度量锥（参见 [BBI01] 第 3.6.2 节和第 8.2 节）。

定义 3.13（度量锥）。 设 Z 为一个度量空间。定义一个商空间

$$C(Z) = (Z \times [0,\infty))/(Z \times \{0\}) \quad \text{and} \quad c = Z \times \{0\}.$$

如果满足以下条件，我们称带基点度量空间 $(C(Z),\ c)$ 为一个**度量锥**：

(1) 对任意 $z \in Z$，空间 $\{(z,\ t) : t > 0\} \subset C(Z)$ 与欧几里得射线 $(0,\ \infty)$ 等距。(2) 对任意 $\lambda > 0$，存在一个带基点双射 $\psi : (C(Z),\ c) \to (C(Z),\ c)$，使得

$$d_{C(Z)}(\psi(x), \psi(y)) = \lambda d_{C(Z)}(x, y) \quad \text{for all } x, y \in C(Z)$$

我们称 ψ 为一个 λ-**相似性**。

我们将使用以下类型的近似等距映射 [BHS23]，以研究度量锥。

定义 3.14 （Gromov-Hausdorff 逼近）。 设 (X,x) 和 (Y,y) 为带基点度量空间，且 $\epsilon > 0$。博雷尔映射 $\phi: X \to Y$ 是一个带基点ϵ-*Gromov-Hausdorff* 逼近 （或 ϵ-pGHA），如果

$$\sup_{w,v\in X} |d_Y(\phi(w),\phi(v)) - d_X(w,v)| \le \epsilon \quad \text{and} \quad \sup_{u\in Y} \operatorname{dist}_Y(u,\phi(X)) \le \epsilon.$$

我们用此来定义

$$\xi_{X,\,Y}(x,\ y,\ r) := \text{下确界}\{\epsilon > 0 : \text{存在一个 } \epsilon r\text{-pGHA } \phi : (B_X(x,r),x) \to (B_Y(y,r),y)\}.$$

带基点的格罗莫夫-豪斯多夫逼近类似于 ϵ-等距映射，但更适合用 ξ来量化两个度量空间在固定球内的接近程度。稍后我们将使用以下引理，将 $(r^{-1}X,\ x)$ 到某个赋范空间的带基点格罗莫夫-豪斯多夫距离的界，与从 $B_X(x,\ r)$ 到半径为 r 的赋范球且满足 $r \to 0$的良好 pGHA 的存在性联系起来。

引理 3.15 (锥形度量切锥)。 设(X,x) 和(Y,y) 是可分的带基点度量空间，且(Y,y) 是一个度量锥。令 $\epsilon, r > 0$。

(1) 若 $D^{1/\epsilon}GH[(r^{-1}X,x),(Y,y)] < \epsilon^2$，则 $\xi_{X,Y}(x,y,r/\epsilon) < 3\epsilon^2$。

(2) 若 $\xi_{X,Y}(x,y,r/\epsilon) < \epsilon^2$，则 $D^{1/2\epsilon}GH\ [(r^{-1}X,x),(Y,y)] < 4\epsilon^2$。

特别地，对于每个 $R > 0$，当且仅当 $\lim_{r\to 0}\xi_{X,Y}(x,y,r) = 0$ 时，$\lim_{r\to 0} \mathrm{D}^R_{\mathrm{GH}}[(r^{-1}X, x),(Y,y)] = 0$ 。

证明。首先，假设 $\mathrm{D}^{1/\epsilon}\,\mathrm{GH}[(r^{-1}X,x),(Y,y)] < \epsilon^2$。于是 $d_{\mathrm{pGH}}((r^{-1}X,x),(Y,y)) < \epsilon$，我们可以应用引理 3.6(1)，得到一个映射 $f: B_{r^{-1}X}(x,1/\epsilon) \to Y$，满足引理中列出的性质。现在，作为集合，$B_{r^{-1}X}(x,1/\epsilon) = B_X(x,r/\epsilon)$，而定义 3.13(2) 意味着存在一个 r-相似映射 $\psi: B_Y(y,1/\epsilon) \to B_Y(y,r/\epsilon)$。我们声称 $\psi\circ f: B_X(x,r/\epsilon) \to B_Y(y,r/\epsilon)$ 是一个 $3\epsilon^2 r$-pGHA。事实上，对于任意 $x', x'' \in B_X(x,r/\epsilon)$，

$$\begin{aligned}|d_Y(\psi(f(x')),\psi(f(x''))) - d_X(x',x'')| &= r|d_Y(f(x'),f(x'')) - r^{-1}d_X(x',x'')| \\ &\le 2\epsilon r.\end{aligned}$$

现在，定义 3.13(1) 表明，对任意 $\tilde{u} \in B_Y(y,1/\epsilon)$，存在 $\tilde{w} \in B_Y(y,1/\epsilon - \epsilon)$ 使得 $|\tilde{u} - \tilde{w}| = \epsilon$。这意味着

$$\begin{aligned}\sup_{u\in B_Y(y,r/\epsilon)} \operatorname{dist}(u,\psi(f(B_X(x,r)))) &= r \sup_{\tilde{u}\in B_Y(y,1/\epsilon)} \operatorname{dist}(\tilde{u}, f(B_{(\epsilon r)^{-1}X}(x,1/\epsilon))) \\ &\le \epsilon r + r \sup_{\tilde{w}\in B_Y(y,1/\epsilon-\epsilon)} \operatorname{dist}(\tilde{w}, f(B_{(\epsilon r)^{-1}X}(x,1/\epsilon))) \\ &\le 3\epsilon r.\end{aligned}$$

因此 $\xi_{X,Y}(x,y,r/\epsilon) \le 3\epsilon^2$。

现在，假设 $\xi_{X,Y}(x,y,r/\epsilon) < \epsilon^2$。设 $\phi: B_X(x,r/\epsilon) \to B_Y(y,r/\epsilon)$ 为一个 $\epsilon^2 r/\epsilon = \epsilon r$-pGHA，并设 $\psi: B_Y(y,r/\epsilon) \to B_Y(y,1/\epsilon)$ 为一个 r^{-1}-相似映射。我们断言 $\psi\circ\phi: B_{r^{-1}X}(x,1/\epsilon) \to B_Y(y,1/\epsilon)$ 是一个 ϵ-pGHA。首先，设 $z, z' \in B_{r^{-1}X}(x,1/\epsilon) = B_X(x,r/\epsilon)$。则，

$$|d_Y(\psi\circ\phi(z),\psi\circ\phi(z')) - r^{-1}d_X(z,z')| = r^{-1}|d_Y(\phi(z),\phi(z')) - d_X(z,z')| \le \epsilon$$

其次，令 $y' \in B_Y(y,\ 1/\epsilon)$，并注意到

$$\operatorname{dist}_Y(y',\psi\circ\phi(B_{r^{-1}X}(x,1/\epsilon))) = r^{-1}\operatorname{dist}_Y(\psi^{-1}(y'),\phi(B_X(x,r/\epsilon))) \le \epsilon.$$

这验证了 $\psi \circ \phi$ 是一个 ϵ-pGHA。特别地， $\psi \circ \phi$ 是一个 ϵ-等距映射。利用引理 3.6(2)，我们得到

$$\mathrm{D}_{\mathrm{GH}}^{1/2\epsilon}[(r^{-1}X, x), (Y, y)] \leq 4\epsilon^2.$$

这验证了引理的前两个陈述。引理的最后一个陈述由上述陈述推出；正向推导用到了 D_{GH} 的单调性。■

3.4. **Gromov-Hausdorff 与 Attouch-Wets 切锥**。本节最后给出一个定理，精确描述欧几里得空间子集的 Gromov-Hausdorff 切锥与 Attouch-Wets 切锥之间的关系。

定理 3.16. 设 $E \in \mathfrak{C}(\mathbb{R}^n)$ 并设 $x \in E$。

(1) 若 $T \in \mathit{Tan}_{\mathrm{AW}}(E, x)$，则 $(T, 0) \in \mathit{Tan}_{\mathrm{GH}}(E, x)$。 *(2)* 若 $[(Y, y)] \in \mathit{Tan}_{\mathrm{GH}}(E, x)$，则存在 $T \in \mathit{Tan}_{\mathrm{AW}}(E, x)$，使得 $(T, 0)$ 与 (Y, y) 之间存在带基点等距映射。

证明。首先，假设 $T \in \mathrm{Tan}_{\mathrm{AW}}(E, x)$。由 $\iota_1(y) = \frac{y-x}{r}$ 和 $\iota_2(z) = z$ 给出的映射 $\iota_1 : E \to V$ 和 $\iota_2 : T \nrightarrow V$，将 $(E, r^{-1}|\cdot|)$ 和 $(T, |\cdot|)$ 等距嵌入到 $\mathbb{R}^n$ 中，且满足 $\iota_1(x) = \mathbf{0}$ 和 $\iota_2(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$。这意味着我们可以计算

$$d_{\mathrm{pGH}}((E, r^{-1}|\cdot|, x), (T, |\cdot|, \mathbf{0})) \leq H^{\mathbf{0}}(\iota_1(E), \iota_2(T)) = H^{\mathbf{0}}\left(r^{-1}(E - x), T\right). \tag{3.7}$$

由于 $T \in \mathrm{Tan}_{\mathrm{AW}}(E, x)$，引理 3.11 表明存在一个序列 $r_i \to 0$，使得将 r 替换为 r_i 后，(3.7) 右侧的表达式当 $i \to \infty$ 时趋于零。于是 r_i 满足 $\lim_{i\to\infty} d_{\mathrm{pGH}}((E, r_i^{-1}|\cdot|, x), (T, |\cdot|, \mathbf{0})) = 0$，这表明 $[(T, \mathbf{0})] \in \mathrm{Tan}_{\mathrm{GH}}(E, x)$。

现在，设 $[(Y, y)] \in \mathrm{Tan}_{\mathrm{GH}}(E, x)$。由引理 3.6(1)，存在 $r_i \to 0$ 以及 2^{-i}-等距映射 $\iota_i : (Y, y) \to (r_i^{-1}(E - x), 0)$。令 $E_i = r_i^{-1}(E - x)$。由引理 3.8，我们可以取一个子序列，并进一步假设 $(E_i)_{i\in\mathbb{N}}$ 在 $\mathbb{R}^n$ 中依 Attouch-Wets 拓扑收敛到极限集 $T \in \mathfrak{C}(\mathbb{R}^n, 0)$。因此， $T \in \mathrm{Tan}_{\mathrm{AW}}(E, x)$。注意， Y 是可分的，因为它是倍增的（见 [MT10, 命题 6.1.5]），并且对任意 $x \in Y$，注意到 $|\iota_i(x) - \mathbf{0}| = |\iota_i(x) - \iota_i(y)| \leq d_Y(x, y) + 1$ 对所有$i \in \mathbb{N}$ 成立，从而

$$\overline{\{\iota_i(x)\}_{i\in\mathbb{N}}} \subset B^n(\mathbf{0}, d_Y(x, y) + 1).$$

上述集合是紧的，并且依照阿尔泽拉–阿斯科利定理的证明，我们得到 (Y, y) 与 $(T, \mathbf{0})$ 之间的带基点等距映射。■

4. Sobolev maps into metric spaces

本节讨论度量空间中的索伯列夫映射。我们首先介绍一类度量空间取值索伯列夫空间。本文仅介绍我们所需的特定定义和结果。有关更多细节和更一般的论述，建议感兴趣的读者参阅 [HKST15，第 7] 节以及 [HKST01]。本节其余部分中，我们固定一个可分度量空间 X。根据库拉托夫斯基嵌入定理， X 可等距嵌入到一个巴拿赫空间 V（例如 $V = \ell_\infty$）中，本文余下部分均固定使用该空间。为方便起见，以下假设 $X \subset V$。

定义 4.1（取值于度量空间的索伯列夫映射）。设 $1 \leq p \leq \infty$，且 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是一个博雷尔集。若 u 属于 牛顿-索伯列夫空间 $\in N^{1,p}(\Omega, X)$

则称其在 Ω 上为 p 阶、以 X 为目标空间，若 $u \in L^p(\Omega\ V)$，且存在一个博雷尔函数 $\rho : \Omega \to [0,\infty]$，使得 $\rho \in L^p(\Omega)$，并且

$$d_X(u(\gamma(a)), u(\gamma(b))) \le \int_\gamma \rho\, ds \tag{4.1}$$

对于 p-几乎处处的可求长曲线 $\gamma : [a,b] \to \Omega$。

此处“p-几乎处处的曲线”一词指曲线族的 p-模；参见 [HKST15，第 5] 节，关于 $p \in (1,\ \infty)$，以及 [DCJ10，定义 5.5]，关于 $p = \infty$。

以类似方式，我们定义牛顿-索博列夫空间 $N^{1,\ p}(\Omega\ V)$，将 X 替换为其超集 V。显然，

$$N^{1,p}(\Omega, X) \subset N^{1,p}(\Omega, V).$$

众所周知，

本节余下部分的主要目标是下面的定理。

定理 4.2. 设 $n < p \le \infty$。若 $f \in N^{1,\ p}(\mathbb{B}^n, X)$ 连续，则 $f(\mathbb{B}^n)$ 是n-可求长的，且具有有限的 n-装填容度。

我们先给出定理 4.2 在利普希茨映射这一特殊情形下的一个简单证明，该情形对应于 $p = \infty$ [DCJ10, 推论 5.24]。

注记 4.3. 设 $f : \mathbb{B}^n \to X$ 是 L-利普希茨的。根据定义， $f(\mathbb{B}^n)$ 是 n-可求长的。定义前推测度 $\nu_f = f_*(\mathscr{L}^n)$ 如下：

$$\nu_f(A) = \mathscr{L}^n(f^{-1}(A)) \quad \text{for any Borel } A \subset X.$$

我们声称 ν_f 是下 n-正则的。事实上，设 $y = f(x) \in f(\mathbb{B}^n)$ 且 $r > 0$。那么$f(B^n(x,\ r/L)) \subset B_X(f(x)\ r)$，因此

$$\nu_f(B_X(y,r)) \ge \mathscr{L}^n(B^n(x, r/L) \cap \mathbb{B}^n) \gtrsim_n L^{-n} r^n.$$

根据注记 2.6， $f(\mathbb{B}^n)$ 具有有限的 n-装填容度。

当 $p < \infty$ 时，我们采用两种略有不同的 Sobolev 空间概念会更方便。下述命题中 Reshetnyak-索伯列夫空间的定义性质，将有助于在索伯列夫像上构造一个下 n-正则测度。

命题 4.4. 设 $1 < p < \infty$ 和 $f : \mathbb{B}^n \to V$ 是一个 *Borel* 函数，且 $f(\mathbb{B}^n)$可分。以下条件等价：

(1) f 属于牛顿-索伯列夫空间 $N^{1,p}(\mathbb{B}^n, V)$；*(2)* f 属于 *Reshetnyak*-索伯列夫空间 $W^{1,p}(\mathbb{B}^n, V)$：存在 $g \in L^p(\mathbb{B}^n)$，满足 $g \ge 0$，使得对任意 *1*-利普希茨函数 $\varphi : V \to \mathbb{R}$, $\varphi \circ f \in W^{1,p}(\mathbb{B}^n, \mathbb{R})$，以及 $|\nabla(\varphi \circ f)| \le g$， $\mathscr{L}^n$ 在 $\mathbb{B}^n$ 中几乎处处成立；*(3)* f 属于 *Haj-lasz*-索伯列夫空间 $M^{1,p}(\mathbb{B}^n, V)$：存在 $g \in L^p(\mathbb{B}^n)$，满足 $g \ge 0$，使得对所有 $x, y \in \mathbb{B}^n$，

$$d_X(f(x), f(y)) \le |x-y|(g(x) + g(y)).$$

证明。由于 $\mathbb{B}^n$ 支持庞加莱不等式，且 $\mathscr{L}^n$ 具有倍增性质，(1) 与 (2) 的等价性由 [HKST15，推论 10.2.9] 得出。

现在我们证明（2）与（3）的等价性。由于 $f(\mathbb{B}^n)$ 是可分的， [HKST01] 中的定理 3.17 的性质（2’）成立。但是， $N^{1,\ p}(\mathbb{B}^n,\ \mathbb{R}) = W^{1,\ p}(\mathbb{B}^n,\ \mathbb{R})$，且任意牛顿-索博列夫函数的最小 p-弱上梯度都与其经典梯度一致。因此， [HKST01] 中的定理 3.17 的性质（2’）等价于 $W^{1,\ p}(\mathbb{B}^n,\ V)$ 的定义性质。■

在 $p > n$ 的限制下，牛顿-索博列夫映射满足 Lusin 的 N 条件。以下定理是 [LZ24] 中更一般结果的一个特例。

定理 4.5 （[LZ24，定理 1。4]）。若 $p > n$，$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是开集，且 $f \in_{N^{1,\,p}}(\Omega\ X)$ 连续，则 f 满足 *Lusin* 的 *N* 条件：若 $E \subset \Omega$ 满足 $\mathscr{L}^n(E) = 0$，则 $\mathcal{H}^n(f(E)) = 0$。

接下来，我们回顾 p-容量的定义。

定义 4.6 （p-容量）。设 K 是一个紧集，设 Ω 是满足 $K \subset \Omega \subset \mathbb{R}^n$ 的开集，并设 $1 < p < \infty$。我们将 $\mathrm{cap}_p(K, \Omega)$ 定义为 K 相对于 Ω 的 p-容量，定义如下：

$$\mathrm{cap}_p(K,\Omega) = \inf\left\{\int_\Omega |\nabla u|^p dx : u \in \mathscr{R}(K,\Omega)\right\},$$

其中

$$\mathscr{R}(K,\Omega) = \{u \in C_0^\infty(\Omega) : u \geq 1 \ \text{ on } K\}.$$

引理 4.7 ([Maz85, §2.2.3 推论 2])。设 K 为一个紧集，使得 $K \subset \Omega \subset \mathbb{R}^n$，并设 $1 < p < \infty$、$p \neq n$。则

$$\mathrm{cap}_p(K,\Omega) \geq \omega_n^{p/n} n^{(n-p)/n} \left|\frac{p-n}{p-1}\right|^{p-1} \left|\mathscr{L}^n(\Omega)^{\frac{p-n}{n(p-1)}} - \mathscr{L}^n(K)^{\frac{p-n}{n(p-1)}}\right|^{1-p}$$

注 4.8。设 $x \in \Omega$ 与 $p > n$。引理 4.7 蕴含

$$\mathrm{cap}_p(\{x\},\Omega) \gtrsim_{p,n} \left|\mathscr{L}^n(\Omega)^{\frac{p-n}{n(p-1)}}\right|^{1-p} = \mathscr{L}^n(\Omega)^{-\frac{p-n}{n}}. \tag{4.2}$$

公式 (4.2) 是我们将在证明中使用的引理 4.7 的推论。

为技术上的方便，我们还将使用如下延拓结果。该陈述的一般性远低于作者所证明的结果；他们允许度量空间定义域，并说明如何从满足远比球所满足的条件更为一般的条件的子集向外延拓。

引理 4.9。对每个 $1 \leq p < \infty$，存在一个有界线性延拓算子 $E_V\colon M^{1,p}(\mathbb{B}^n, V) \to M^{1,p}(\mathbb{R}^n, V)$，使得 $\|E_V\| \leq C(p)$。此外，对任意 $u \in M^{1,p}(\mathbb{B}^n, V)$，我们可以假设 $E_V(u) = \mathbf{0}$ 在 $\mathbb{R}^n \setminus B^n(\mathbf{0}, 2)$ 上。

证明。第一个结论由 [GBIZ23, 定理 5.1] 得出。第二个结论由 [GBIZ23, 推论 5.9] 的证明得出，其中通过将已构造的延拓乘以一个截断函数，定义了整个空间上的延拓。■

现在我们可以证明定理 4.2 了。

定理 *4.2* 的证明。由于 $f \in N^{1,p}(\mathbb{B}^n, X)$，命题 4.4 推出 $f \in_{M^{1,p}}(\mathbb{B}^n, X)$，因此存在一个非负的 $g \in L^p(\mathbb{B}^n)$，使得定理 4.4(3) 成立。令

$$A = \{x \in \mathbb{B}^n : g(x) < 1\}, \quad A_j = \{x \in \mathbb{B}^n : 2^j \leq g(x) < 2^{j+1}\}.$$

由于 $g \in L^p$，我们有 $\mathbb{B}^n = \bigcup_{j=0}^\infty A_j \cup A \cup N$，其中 $\mathcal{H}^n(N) = 0$，且构成这些并集的所有集合彼此不相交。这意味着 $f(\mathbb{B}^n) \subset \bigcup_{i=1}^\infty f(A_i) \cup f(A') \cup f(N)$，其中 $\mathcal{H}^n(f(N)) = 0$，因为根据定理 4.5，f 满足 Lusin 的 N 条件。由于 $f|_{A_i}$ 是 2^{j+1}-利普希茨的，而 $f|_A$ 是 2-利普希茨的，这表明 $f(\mathbb{B}^n)$ 是 n-可求长的。

现在假设 $n < p < \infty$。只需对 $f \in N^1$, $^p(\mathbb{B}^n, X) \subset_{N^1}$, $^p(\mathbb{B}^n, V)$ 证明 (2)，其中 $f(0) = \mathbf{0}$，这里的 0 是 V中的原点。由于 $f(\mathbb{B}^n) \subset X$，我们有 $f(\mathbb{B}^n)$ 是可分的，并且根据命题 4.4，$f \in M^1$, $^p(\mathbb{B}^n, V)$。我们可以应用引理 4.9，将 f扩展为函数 $\tilde{f} = E_V(f) \in M^1$, $^p(\mathbb{R}^n, V)$，使得~ ~ $f = \mathbf{0}$ 在 $\mathbb{R}^n \setminus B^n(0, 2)$ 上成立。我们可以假设 f 是连续的，在 $\mathbb{B}^n$上与 f 一致，并且 $\tilde{f} \in M^1$, $^p(B^n(0, 2)\ V)$，其中 $\|\tilde{f}\|_{M^1, p} \lesssim \|f\|_{M^1, p}$。令 $E = \tilde{f}(B^n(0, 2))$。由于 E 是紧的，$\operatorname{diam}(E) < \infty$，且 $D = \max\{1, \operatorname{diam}(E)\} < \infty$。根据命题 4.4，$\tilde{f} \in W^1$, $^p(B^n(0, 2)\ V)$，因此存在 $g \in L^p(B^n(0, 2))$，满足命题 4.4(2)。

我们断言，由下式给出的测度 ν

$$\nu(A) = D^n \delta_{\mathbf{0}}(A) + \tilde{f}_*[(1 + g^p)dx](A)$$

是有限的且具有下 n-正则性。假设该断言成立，由注记 2.6 可知，E 具有有限的 n-装填容度，因此，作为 E的子集，$f(\mathbb{B}^n)$具有有限的 n-装填容度。

注意，ν 是有限的，因为

$$\nu(E) = D^n \delta_{\mathbf{0}}(E) + \int_{B^n(\mathbf{0}, 2)} 1 + g^p = D^n + \mathscr{L}^n(B^n(\mathbf{0}, 2)) + \|g\|_p^p < \infty.$$

~剩下要证明的是，ν 具有下 n-正则性。令 $y = f(x) \in E$，并令 $0 < R < \operatorname{diam}(E)$。我们要证明，存在一个常数 $c_0 > 0$，它与 x和 R 无关，使得

$$D^n \delta_{\mathbf{0}}(B_X(y, R)) + \int_{\tilde{f}^{-1}(B_X(y,R))} (1 + g^p(x))dx \geq c_0 R^n.$$

若 $\mathscr{L}^n(\ \tilde{f}^{-1}(B_X(y, R))) \geq R^n$，则 $\nu(B_X(y, R)) \geq \mathscr{L}^n(\ \tilde{f}^{-1}(B_X(y, R))) \geq R^n$。此外，若存在 $x \in \tilde{f}^{-1}(B_X(y, R))$ 使得 $\tilde{f}(x) = \mathbf{0}$，则

$$\nu(B_X(y, R)) \geq D^n \delta_{\mathbf{0}}(B_X(y, R)) = D^n \geq R^n.$$

因此，在证明的其余部分中，我们可以假设

$$\mathscr{L}^n(\tilde{f}^{-1}(B_X(y, R))) < R^n$$

并且 $0 \notin \tilde{f}^{-1}(B_X(y,\ R))$。由于 $\tilde{f}|\partial B^n(\mathbf{0},\ 2) = \mathbf{0}$，这一事实意味着 $\tilde{f}^{-1}(B^n(y,\ R))$ 是一个包含于开球 $U^n(\mathbf{0},\ 2)$ 中的紧集。

我们计划使用引理 4.7，具体来说是 (4.2)，来证明 g^p 在 $\tilde{f}^{-1}(B_X(y,\ R))$ 上足够大。定义 $\psi\colon X \to \mathbb{R}$，使得 $\psi(z) = d_X(z,\ y)$。由于 $\tilde{f} \in_{W^{1,}} {}^p(B^n(\mathbf{0},\ 2)\ X)$，且 ψ 是 1-利普希茨的，我们有 $\psi \circ \tilde{f} \in W^{1,}\ ^p(B^n(\mathbf{0},\ 2)\ \mathbb{R})$，并且 $\lrcorner\nabla(\psi \circ f)| \leq g\ \mathscr{L}^n$-几乎处处。定义 $h\colon B^n(\mathbf{0},\ 2) \to \mathbb{R}$，使得

$$h(u) = \max\left(1 - 2\frac{\psi(\tilde{f}(u))}{R}, 0\right).$$

定义 $\Omega_0 = \tilde{f}^{-1}(U(y,\ R/2))$，$\Omega_1 = \tilde{f}^{-1}(U(y,\ R))$，并令 $x \in \Omega_0$ 满足~$f(x) = y$。我们声称，h 是一个连续函数，并满足以下性质：

(1) $h(x) = 1$ 且 $h(u) = 0$ 对所有 $u \in \Omega_1 \setminus \overline{\Omega}_0$,(2) $h \in W^{1,}{}_0{}^p(\Omega_1,\ \mathbb{R})$, (3) $(R/2)|\nabla h(u)| \leq g(u)$ 对 $\mathscr{L}^n$-几乎处处的 $u \in \Omega_1$ 成立。

性质 (1) 由 h 的定义可得。性质 (2) 由进一步的断言可得，即 h 支持在 $\Omega_0 \Subset \Omega_1$ 中。为证明 $\Omega_0 \Subset \Omega_1$，这一事实，注意到 f 在紧集 Ω_1 上一致连续，并且对任意 $x_0 \in \Omega_0,$ ，我们有 $\operatorname{dist}(f(x_0), y) \leq R/2$。选取 $\delta > 0$，使得对任意 $u,\ v \in \Omega_1, |u - v| \leq \delta$ 蕴含 $\operatorname{dist}(f(u), f(v)) < R/4$。现在，令 $v \in B^n(\Omega_0, \delta)$，并令 $u \in \Omega_0$ 满足$|u - v| \leq \delta$。那么

$$d_X(f(v), y) \leq d_X(f(v), f(u)) + d_X(f(u), y) < \frac{R}{4} + \frac{R}{2} < \frac{3R}{4}.$$

这表明，Ω_0 的 a δ-邻域包含于 Ω_1，内，这足以证明该结论。

为证明 (3)，注意若 $u \in \Omega_0,$ ，则 $h(u) = 1 - (2/R)\psi(f(u))$ 几乎处处成立。反之，若 $u \in \Omega_1 \setminus \Omega_0,$ ，则 $\psi(f(u)) > R/2$，从而 $h(u) = 0$。这意味着 $\frac{R}{2}|\nabla h(u)| = 0 \leq g(u)$，由此完成 (3) 的证明。

由于 $h \in W^{1,\ p}_0(\Omega_1,\ \mathbb{R})$，存在一个序列 $h_i \in C_0^\infty(\Omega_1)$，使得 $h_i \to h$ 属于 $W^{1,\ p}(\Omega_1, \mathbb{R})$。由于 h 连续，任意这样的序列都满足 $h_i(x) \to 1$。因此，存在 $\tilde{h} \in C_0^\infty(\Omega_1)$，使得 $\|h - \tilde{h}\|_{W^{1,\ p}} < \|h\|_{W^{1,\ p}}/10$ 且 $\tilde{h}(x) \geq \frac{1}{2}$。因此，$2\tilde{h}(x) \geq 1$，从而 $2h \in \mathscr{R}(\{x\},\ \Omega_1)$，并且我们可以估计

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_1} g^p \geq \frac{R^p}{2^p} \int_{\Omega_1} |\nabla h|^p \geq \frac{R^p}{2^{p+1}} \int_{\Omega_1} |\nabla \tilde{h}|^p = \frac{R^p}{2^{2p+1}} \int_{\Omega_1} |\nabla (2\tilde{h})|^p \\ \gtrsim_p R^p \operatorname{cap}_p(\{x\}, \Omega_1).\end{aligned}$$

现在，将 (4.2) 与我们的假设 $p > n$ and $\mathscr{L}^n(\Omega_1) < R^n$ 结合起来可得

$$\operatorname{cap}_p(\{x\}, \Omega_1) \gtrsim_{n,p} \mathscr{L}^n(\Omega_1)^{-\frac{p-n}{n}} > R^{n-p}.$$

因此，我们得到

$$\int_{\Omega_1} g^p \gtrsim_{n,p} R^p \cdot R^{n-p} = R^n.$$

这证明了 $\nu(B_X(y,\ R)) \gtrsim_{n,\ p} R^n$，因此 ν是下 n-正则的。 ■

5. Expansive subsets of metric spaces

本节通过引入度量空间的扩张的 子集，为定理 1.1 和 1.2 的证明做其余准备。在定理 1.1 和 1.2 的证明中，我们将证明：任何结论不成立的正 $\mathcal{H}^n$ 测度子集都是定义 5.1 所述的 n-扩张的。根据本节的结果，我们可以得出，这样的集合具有无限的n-装填容度，这将与定理 4.2 矛盾。我们将首先对任意 $s > 0$ 的 s-扩张空间进行更一般的研究，并由此导出所需结果。

5.1. 扩张子集的预备知识。 直观地说，对于$s > 0$，如果满足以下条件，则称 $F \subset X$ 是 s-扩张的：对于任意 $x \in F$，都存在一个尺度序列 $r_k \to 0$和“s-实质性快照”$F_{x,\ r_k} \subset B_X(x,\ r_k)$ 包含 x，且其中有 $B_X(x,\ r_k)$ 中的某个点\ $F_{x,\ r_k}$与 r_k的距离相当。

定义 5.1 （s-扩张的空间）。设 X 为一个度量空间，且设 $s > 0$。一个 $\mathcal{H}^s$-可测子集 $F \subset X$ 若满足 $0 < \mathcal{H}^s(F) < \infty$，并且对 $\mathcal{H}^s$-几乎处处成立，则称为 s-扩张的 X

对 $x \in F$，存在一个序列 $r_k \to 0$、一个常数 $0 < \alpha < 1$ 以及闭子集 $F_{x,\ r_k} \subset F \cap B_X$（$x$，$r_k$），使得 $x \in F_{x,\ r_k}$，

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\mathcal{H}^s(F \cap B_X(x, r_k) \setminus F_{x,r_k})}{(2r_k)^s} = 0, \tag{5.1}$$

and

$$\limsup_{k\to\infty} \frac{\mathrm{ex}(B_X(x, \alpha r_k), F_{x,r_k})}{r_k} > 0. \tag{5.2}$$

例5.2。

(1) 集合 $F = [0,1]^n \times \{0\}$ 在 $X = [0,1]^{n+1}$ 中是 n-扩张的。事实上，任何满足 $0 < \mathcal{H}^n(F') < \infty$ 的 $F' \subset X$ 都在 X 中是 n-扩张的。(2) 若 $F \subset [0,1]^n$ 满足 $\mathcal{H}^n(F) > 0$，则由勒贝格密度定理，F 在 $[0,1]^n$ 中不是 n- 扩张的。(3) 在例 8.1 中，集合 $[0,1]^n \times \{0\}$ 在 X 中是 n-扩张的。(4) 在例 8.3 中，集合 $D = [0,1]^n \times \{0\}^{d-n}$ 在 E 中是 n-扩张的。

正如我们将看到的，这一名称的动机在于，一个 s-扩张的子集 F会在 F附近“扩张” X，从而把仅仅存在 $F \subset X$ 且带有 $0 < \mathcal{H}^s(F) < \infty$的情形增强为 $P^s_\infty(X) = \infty$。这一条件也可以视为 X内部 F 的一种局部孔隙条件。

例5.3。设 X 是一个可分度量空间，对某个$s > 0$满足 $0 < \mathcal{H}^s(X) < \infty$。设 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 X 的一个可数稠密子集，并设$(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset [0,1]$ 是满足 $y_n \to 0$的任意序列。考虑度量空间

$$Y = (X \times \{0\}) \cup (\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \times \{y_n : n \in \mathbb{N}\}) \subset X \times [0,1]$$

并配备乘积度量。集合 $F = X \times \{0\}$ 在 X中是 s-扩张的。

为了建立关于 s-扩张性的主要引理，我们将需要使用维塔利覆盖以及渐近倍增测度的概念。

定义 5.4（维塔利覆盖）。度量空间 X 上的闭球族 $\mathscr{B}$ 是 $E \subset X$ 的维塔利覆盖，如果对任意 $x \in E$ 和 $\epsilon > 0$，都存在 $0 < r < \epsilon$，使得 $B_X(x, r) \in \mathscr{B}$。

定义 5.5（渐近倍增测度）。度量空间 X 上的博雷尔正则测度 μ 称为渐近倍增，如果

$$\limsup_{r\to 0} \frac{\mu(B_X(x, 2r))}{\mu(B_X(x, r))} < \infty \quad \text{for } \mu\text{-a.e. } x \in X.$$

下面的引理表明，只要测度是渐近倍增的，我们就可以使用维塔利覆盖定理。

引理 5.6 ([Bat22, 定理 2.10])。如果 $\mathcal{H}^s$ 在 $\mathcal{H}^s$-几乎处处渐近倍增，那么 $\mathcal{H}^s$ 满足维塔利覆盖定理。也就是说，如果 $E \subset X$ 有一个维塔利覆盖 $\mathscr{B}$，那么存在 $\mathscr{B}' \subset \mathscr{B}$，使得 $\mathscr{B}'$ 两两不相交、可数，且$\mathcal{H}^s\left(E \setminus \bigcup \mathscr{B}'\right) = 0$。

我们将利用以下引理，为具有正下 s密度的 s-扩张空间构造有用的维塔利覆盖。本节余下部分我们需要将讨论限制在这类空间上。

给定度量空间 X、博雷尔集 $A \subset X$ 和 $x \in \mathbb{X}$，回顾豪斯多夫上密度和下密度的定义：

$$\Theta^{*,s}(A,x) = \limsup_{r\to 0} \frac{\mathcal{H}^s(B(x,r))}{(2r)^s}, \quad \Theta^s_*(A,x) = \liminf_{r\to 0} \frac{\mathcal{H}^s(B(x,r))}{(2r)^s}.$$

引理 5.7。设 X 为一个度量空间，并设 $F \subset X$ 在 X中是 s-扩张的。固定组闭集 $\{F_{x,r_k}\}_{x\in F,\ k\geq 0}$，满足 (5.1) 和(5.2)，并对每个$\epsilon > 0$定义

$$F^\epsilon = \left\{ x \in \tilde{F} : \limsup_{k\to\infty} \frac{\mathrm{ex}(B_X(x,(1-\epsilon)r_k), \tilde{F}_{x,r_k})}{r_k} > \epsilon,\ \Theta^s_*(\tilde{F},x) > \epsilon, \right.$$
$$\left. and\ \Theta^{*s}(\tilde{F},x) \leq 1 \right\}.$$

令 $F \subset F^\epsilon$，令 $\delta > 0$，并令 $\mathscr{B}$（ϵ，δ）为 X中的球的集合，使得对于任意 B_X（x，r）$\in \mathscr{B}$（ϵ，δ），存在一个闭集 $F_{x,\ r} \subset F \cap B_X$（$x$，$r$）满足

(i) $(1-\delta)\mathcal{H}^s(F \cap B_X(x,r)) \leq \mathcal{H}^s(F_{x,r}) \leq (1+\delta)(2r)^s$,

(ii) y，ϵr $\subseteq B_X$，r 一个 $\mathrm{dist}(y, F_{x,r}) > \epsilon r$，或某个 $y \in B_X$（x，r）$\setminus F_{x,r}$。于是，集合 $\mathscr{B}$（ϵ，δ）是 F的一个满 $\mathcal{H}^s$-测度子集的维塔利覆盖。

证明。令 $\delta > 0$和 $F \subset F^\epsilon$。对于每个 $x \in F$和 $k \geq 0$，设 $F_{x,r_k} = F_{x,r_k} \cap F$。在 $\mathcal{H}^s$-几乎处处的 $x \in F$，我们得到

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\mathcal{H}^s(F \cap B_X(x,r_k) \setminus F_{x,r_k})}{(2r_k)^s} = \lim_{k\to\infty} \frac{\mathcal{H}^s(F \cap B_X(x,r_k) \setminus \tilde{F}_{x,r_k})}{(2r_k)^s}$$
$$\leq \lim_{k\to\infty} \frac{\mathcal{H}^s(\tilde{F} \cap B_X(x,r_k) \setminus \tilde{F}_{x,r_k})}{(2r_k)^s} = 0,$$

and

$$\Theta^s_*(F,x) = \Theta^s_*(\tilde{F},x) > \epsilon \quad \text{and} \quad \Theta^{*s}(F,x) = \Theta^{*s}(\tilde{F},x) \leq 1.$$

这意味着对于每个充分大的 k，以下结论在 $\mathcal{H}^s$-几乎处处的 $x \in F$成立：

(1) $\epsilon(2r_k)^s \leq \mathcal{H}^s(F \cap B_X(x,r_k)) \leq (1+\delta)(2r_k)^s$, and

(2) $\mathcal{H}^s(F \cap B_X(x,r_k) \setminus F_{x,r_k}) \leq \delta\epsilon(2r_k)^s \leq \delta\mathcal{H}^s(F \cap B_X(x,r_k))$.

由（1）中的右侧不等式，显然可得 $\mathcal{H}^s(F_{x,r_k} \cap B_X(x,r_k)) \leq (1+\delta)(2r_k)^s$；而由（2）可得

$$\mathcal{H}^s(F_{x,r_k}) = \mathcal{H}^s(F \cap B_X(x,r)) - \mathcal{H}^s(F \cap B_X(x,r) \setminus F_{x,r_k})$$
$$\geq (1-\delta)\mathcal{H}^s(F \cap B_X(x,r_k)).$$

此外，我们还可以找到无穷多个 k，使得

$$\mathrm{ex}(B_X(x,(1-\epsilon)r_k), F_{x,r_k}) \geq \mathrm{ex}(B_X(x,(1-\epsilon)r_k), \tilde{F}_{x,r_k}) > \epsilon r_k,$$

这意味着存在 $y \in B_X(x,(1-\epsilon)r_k)$，使得 $\mathrm{dist}(y, F_{x,r_k}) > \epsilon r_k$。因此，$B_X(x,r_k) \in \mathscr{B}(\epsilon,\delta)$。这表明 $\mathscr{B}(\epsilon,\delta)$ 是 F 的维塔利覆盖。■

5.2. **扩张子集给出无限装填容度**。在以下命题中，我们迭代引理 5.7，以证明在任何具有一个带正下 s-密度的 s-扩张子集的度量空间中，都可以将一棵大的互不相交球的树装入 X。树中每一层的球都会对s-装填容度贡献一个固定量，从而表明 X 具有无限 s-装填容度。

命题 5.8。设 X 为一个度量空间。若存在一个在 X 中 s-扩张的 $F \subset X$，并且对 $\mathcal{H}^s$-几乎处处的 $x \in F$，有 $\Theta^s_*(F,x) > 0$，则 X 不具有有限s-装填容度。

证明。对于任意 $x \in F$，固定一个序列 $r_k \to 0$ 和一组选定的子集 $F_{x,\,r_k} \subseteq B_X(x,\ r_k)$，使其满足 (5.1) 和 (5.2)。由不等式 (5.2) 及下 s-密度假设可知，存在 $0 < \epsilon < \frac{1}{2}$，使得集合

$$F^\epsilon = \left\{ x \in F : \limsup_k \frac{\mathrm{ex}(B_X(x,(1-\epsilon)r_k), F_{x,r_k})}{r_k} > \epsilon,\ \Theta^s_*(F,x) > \epsilon, \right. \\ \left. \text{and } \Theta^{*s}(F,x) \le 1 \right\}$$

具有 $\mathcal{H}^s(F^\epsilon) > 0$。令 $\delta_k = 2^{-k}\,\frac{1}{100}$，对所有整数 $k \ge 0$均成立。

我们希望将引理 5.7 应用于 F^ϵ 本身。令 $\mathscr{B}'_0 := \mathscr{B}(\epsilon,\ \delta_0)$ 为以 F^ϵ 为中心、满足引理 5.7 中关于 $\delta = \delta_0$的所有条件的球族。集合 $\mathscr{B}'_0$ 是 F^ϵ的维塔利覆盖，而事实是

$$0 < \Theta^s_*(F,x) = \Theta^s_*(F^\epsilon,x) \le \Theta^{*s}(F^\epsilon,x) = \Theta^{*s}(F,x) < \infty$$

在 $\mathcal{H}^s$-几乎处处的 $x \in F^\epsilon$ 处，这意味着 $\mathcal{H}^s$ 在 F^ϵ上是渐近倍增的。引理 5.6 给出一个有限的不交集合 $\mathscr{B}_0 \subset \mathscr{B}'_0$，使得

$$\mathcal{H}^s\left(F^\epsilon \setminus \bigcup \mathscr{B}_0\right) \le \delta_0 \mathcal{H}^s(F^\epsilon), \tag{5.3}$$

并且对任意 $B \in \mathscr{B}_0$，存在闭子集 $F_B \subset F^\epsilon \cap B$ 满足

(1) $(1-\delta)\mathcal{H}^s(F^\epsilon \cap B) \le \mathcal{H}^s(F_B) \le (1+\delta)(2r(B))^s$,
(2) There exists $y_B \in B_X(x,r) \setminus F_B$ such that $B_X(y_B, \epsilon r) \subseteq B_X(x,r)$ and $\mathrm{dist}(y, F_B) \ge \epsilon r$.

这意味着

$$\sum_{B \in \mathscr{B}_0} (2r(B))^s \ge \sum_{B \in \mathscr{B}_0} \frac{1-\delta_0}{1+\delta_0} \mathcal{H}^s(F^\epsilon \cap B) \ge \frac{1}{2}\mathcal{H}^s(F^\epsilon), \tag{5.4}$$

其中第二个不等式用到了(5.3)。由于 $\mathscr{B}_0$ 是由有限个互不相交的闭球组成的集族，我们还可以找到 $\eta_0 > 0$，使得对任意 $B,\ B' \in \mathscr{B}_0$，有$(1+10\eta_0)B \cap (1+10\eta_0)B' = \varnothing$。

假设我们已经按上述方式对所有 $0 \le j \le k-1$ 定义了有限互不相交族 $\mathscr{B}_j$ 以及递减常数 η_j，现在我们通过在 $\mathscr{B}_{k-1}$ 的每个球内迭代这一构造来定义一个新族 $\mathscr{B}_k$，从而形成一棵由球构成的无穷树。对任意具有子集 $F_B \subset F^\epsilon \cap B_X$（$x,\ r$）的球 $B = B_X$（$x,\ r$）$\in \mathscr{B}_{k-1}$，我们令 $\mathscr{B}'_k$（B）为以 F_B为中心的球 $B' = B_X$（$y,\ t$）所组成的集族，使得 $t < \min\{\epsilon r, \eta_{k-1} r\}$，并且存在闭子集 $F'_B \subset F_B$ 满足

(1) $(1-\delta_k)\mathcal{H}^s(F_B \cap B') \le \mathcal{H}^s(F_{B'}) \le (1+\delta_k)(2t)^s$，(2) 存在 $y_{B'} \in B' \setminus F_{B'}$使得 $B_X(y_{B'},\ \epsilon t) \subseteq B'$且 $\mathrm{dist}(y_{B'},\ F_{B'}) \ge \epsilon t$。

引理 5.7 表明，$\mathscr{B}'_k(B)$ 是 F_B 中一个满测度子集的维塔利覆盖。我们得到一个有限且两两不交的子族 $\mathscr{B}_k(B) \subset \mathscr{B}'_k(B)$，使得

$$\mathcal{H}^s\left(F_B \setminus \bigcup \mathscr{B}_k(B)\right) \le \delta_k \mathcal{H}^s(F_B) \tag{5.5}$$

以及一个常数 $\eta_k > 0$，使得 $(1+10\eta_k)B' \cap (1+10\eta_k)B'' = \varnothing$ 对任意 $B',\ B'' \in \mathscr{B}_k(B)$。

现在，定义

$$\mathscr{B}_k = \bigcup_{B\in\mathscr{B}_{k-1}} \mathscr{B}_k(B).$$

这就完成了对 $\mathscr{B}_k$ 的定义，其中 $k \geq 0$。现在我们定义

$$\mathscr{B} = \bigcup_{k=0}^{\infty} \mathscr{B}_k. \tag{5.6}$$

我们将通过证明集合 $\mathscr{B}$ 的存在性蕴含 X 具有无限的 s-装填容度来完成证明。对于每个 $k \in \mathbb{N}$ 和 $B \in \mathscr{B}_k$，存在 $y_B \in B$，使得 $B_X(y_B,\ \epsilon r(B)) \subset B$，且 $\operatorname{dist}(y_B,\ F_B) \geq \epsilon r(B)$。该条件保证球 $T_B = B_X(y_B,\ \epsilon r(B))$ 对任意满足 $m > k$的 $B' \in \mathscr{B}_m$ 都满足 $T_B \cap B' = \varnothing$。另一方面，对 η_k 的选择确保 $B \in \mathscr{B}_m$的任意子球 B' 都保留在 $(1 + 10\eta_m)B$ 内，从而保证对于任意满足 $m \leq k$的 $B'' \in \mathscr{B}_m$，都有 $T_{B'} \cap B'' = \varnothing$。这意味着对于任意满足 $B \neq B'$ 的球 $B,\ B' \in \cup_k \mathscr{B}'_k$，都有 $T_B \cap T_{B'} = \varnothing$。现在，我们希望通过对 $\mathscr{B}$中的球的半径之和给出下界，来证明 $\{T_B\}_{B\in\mathscr{B}}$ 中不相交球的半径之和是无限的。

对每个 $k \in \mathbb{N}$，先应用 (1)，再应用 (5.5)，可得

$$\begin{aligned}\sum_{B\in\mathscr{B}_k} \mathcal{H}^s(F_B) &= \sum_{B'\in\mathscr{B}_{k-1}} \sum_{B\in\mathscr{B}_k(B')} \mathcal{H}^s(F_B)\\ &\geq \sum_{B'\in\mathscr{B}_{k-1}} \sum_{B\in\mathscr{B}_k(B')} (1-\delta_k)\mathcal{H}^s(F_{B'} \cap B)\\ &\geq (1-\delta_{k-1})^2 \sum_{B'\in\mathscr{B}_{k-1}} \mathcal{H}^s(F_{B'}).\end{aligned}$$

利用 (1)，再对前一不等式进行迭代并利用 (5.4)，可得

$$\begin{aligned}\sum_{B\in\mathscr{B}_k(B)} (2r(B))^s \geq (1-\delta_k)^2 \sum_{B\in\mathscr{B}_k} \mathcal{H}^s(F_B) &\geq \left(\prod_{j=0}^{k}(1-\delta_j)^2\right) \sum_{B\in\mathscr{B}_0} \mathcal{H}^s(F_B)\\ &\gtrsim \mathcal{H}^s(F^\epsilon).\end{aligned}$$

现在我们可以得出结论：X 具有无穷的 s-装填容度。事实上，

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{B\in\mathscr{B}_k} (2r(T_B))^s \gtrsim_{s,\epsilon} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{B\in\mathscr{B}_k} r(B)^s \gtrsim_s \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{H}^s(F^\epsilon) = \infty. \qquad \blacksquare$$

6. Tangents and approximate tangents

在本节中，我们探讨近似切空间，这是一个比切线更弱的概念：此时并不考虑整个集合 $E \subset \mathbb{R}^d$ （欧几里得情形）或空间 X （度量情形），而只考虑“实质性”子集。我们对近似切空间的定义推广了研究可整流集时所用的著名近似切平面。

6.1. 近似 Attouch-Wets 切空间。 直观地说，如果存在一个“s-实质性快照”序列 $E_{x,r_k} \subset E$，其中包含 x，使得 E_{x,r_k} 在测度和 Walkup-Wets距离两方面都趋近于 T，那么集合 $T \subset \mathbb{R}^d$ 就是 $E \subset \mathbb{R}^d$ 在 $x \in E$ 处的一个近似 s-切锥。

定义6.1（近似 Attouch-Wets 切锥）。设 $E \subset \mathbb{R}^d$ 和 $s > 0$。若存在一个序列$r_i \to 0$ 和子集 $E_{x,r_i} \subset E$，满足 $x \in E_{x,r_i}$，使得集合 $T \in \mathfrak{C}(\mathbb{R}^d, \mathbf{0})$ 是 $x \in E$ 处的一个近似 s切锥，则

$$\lim_{i\to\infty} \frac{\mathcal{H}^s(E \cap B^d(x, Rr_i) \setminus E_{x,r_i})}{(2Rr_i)^s} = 0 \quad \text{for every } R > 0 \tag{6.1}$$

and

$$\lim_{i\to\infty} \mathrm{D}^{\mathbf{0},R}[r_i^{-1}(E_{x,r_i} - x), T] = 0 \quad \text{for every } R > 0. \tag{6.2}$$

若上述结论对所有序列 $r_i \to 0$均成立，则称 T 是 $x \in E$处的强近似 s-切锥。我们将所有近似 s-切锥组成的集合记为 $\mathrm{AppTan}_{\mathrm{AW}}(E, x, s)$。

命题 6.2（提升 Attouch-Wets 近似 s-切锥）。设 $E \subseteq \mathbb{R}^d$，且设 $s > 0$。若 E 的 s-装填容度有限，则对 $\mathcal{H}^s$-几乎处处的 $x \in E$，以下结论成立：

(1) $\mathrm{AppTan}_{\mathrm{AW}}(E, x, s) = \mathrm{Tan}_{\mathrm{AW}}(E, x)$；*(2)* 若 T_x 是 x处的强近似 s-切锥，则 $\mathrm{Tan}_{\mathrm{AW}}(E, x) = \{T_x\}$.

证明。先证 (1)。反设存在一个 $\mathcal{H}^s$-可测集 $F \subset E$，使得 $0 < \mathcal{H}^s(F) < \infty$，且 (1) 在该集合上不成立。我们断言 F 在 E中是 s-扩张的。这样即可完成证明，因为此时命题 5.8 将推出 E 具有无限的 s-装填容度，这与假设矛盾。事实上，由 [BLZ23] 中的推论 2.4 可知，有限的 s- 装填容度意味着对 $\mathcal{H}^s$- 几乎处处的 $x \in F$，$\Theta^s_*(F, x) > 0$；也就是说，F满足该命题的假设。

设 $x \in F$，且 $T \in \mathrm{AppTan}_{\mathrm{AW}}(E, x, s) \setminus \mathrm{Tan}_{\mathrm{AW}}(E, x)$。根据近似切空间的定义，存在一个序列 $r_i \to 0$ 和子集 $E_{x,\, r_i} \subset E$，使得

$$\lim_{i\to\infty} \frac{\mathcal{H}^s(E \cap B^d(x, Rr_i) \setminus E_{x,r_i})}{(2Rr_i)^s} = 0 \quad \text{for every } R > 0,$$

and

$$\lim_{i\to\infty} \mathrm{D}^{\mathbf{0},R}[r_i^{-1}(E_{x,r_i} - x), T] = 0 \quad \text{for every } R > 0.$$

由于 $T \notin \mathrm{Tan}_{\mathrm{AW}}(E, x)$，引理 3.8 意味着存在某些 $R_0 > 0$ 和 $\epsilon > 0$，使得

$$\limsup_{i\to\infty} \mathrm{D}^{\mathbf{0},R_0/4}[r_i^{-1}(E - x), T] > \epsilon.$$

设 $s_i = R_0 r_i$ 且 $E_{x,\, s_i} = E_{x,\, r_i} \cap B(x, s_i)$。我们声称 $E_{x,\, s_i}$ 满足 (5.1) 和 (5.2)。由于 (6.1) 立即推出 (5.1)，我们只需证明 (5.2) 成立。

前面显示的两个陈述意味着存在无穷多个 i，使得

$$D^{\mathbf{0},R_0/4}[r_i^{-1}(E - x), T] > \epsilon \quad \text{and} \quad D^{\mathbf{0},R_0}[r_i^{-1}(E_{x,r_i} - x), T] < \frac{\epsilon}{8}.$$

应用引理 3.7，我们可知，对于每个这样的 i，

$$\begin{aligned} \mathrm{ex}(E \cap B^d(x, s_i/2), E_{x,s_i}) &= \mathrm{ex}(E \cap B^d(x, R_0 r_i/2),\ E_{x,r_i}) \\ &= r_i \,\mathrm{ex}(r_i^{-1}(E - x) \cap B^d(\mathbf{0}, R_0/2), r_i^{-1}(E_{x,r_i} - x)) \\ &> r_i \left(\frac{\epsilon R_0}{8}\right) = \frac{\epsilon}{8} s_i. \end{aligned}$$

为证明 (2)，我们同样采用反证法。我们得到一个集合 $F \subset E$，使得 $0 < \mathcal{H}^s(F) < \infty$，且 (2) 在该集合上不成立。只需证明 F 在 E 中是 s-扩张的，因为应用命题 5.8 即可得到矛盾。

设 $x \in F$，并设子集 $E_{x,\,r} \subset E$ 对于 $r > 0$ 生成在 x 处的强近似切空间 T_x。根据 (1)，我们还可以假设，对于每个 $x \in F$，都有 $T_x \in \mathrm{Tan}_{\mathrm{AW}}(E,\ x)$。(6.2) 的强形式表明

$$\lim_{r \to 0} \mathrm{D}^{\mathbf{0},R}[r^{-1}(E_{x,r} - x), T_x] = 0 \quad \text{for every } R > 0.$$

由于 $T_x \in \mathrm{Tan}_{\mathrm{AW}}(E,\ x) \neq \{T_x\}$，因此存在 $T'_x \neq T_x$，使得 $T'_x \in \mathrm{Tan}_{\mathrm{AW}}(E,\ x)$，并且存在一个序列 $r_i \to 0$，满足

$$\lim_{i \to \infty} \mathrm{D}^{\mathbf{0},R}[r_i^{-1}(E - x), T'_x] = 0.$$

这意味着存在 $R_0 > 0$ 和 $\epsilon > 0$，使得

$$\limsup_{i \to \infty} \mathrm{D}^{\mathbf{0},R_0/4}[r_i^{-1}(E - x), T_x] > \epsilon.$$

事实上，否则引理 3.8 将推出 $r_i^{-1}(E - x)$ 在 Attouch-Wets 拓扑下同时收敛到 T_x 和 T'_x。令 $s_i = R_0 r_i$，并设 $E_{x,\,s_i} = E_{x,\,r_i} \cap B^d(x,\ s_i)$。我们声称子集 $E_{x,\,s_i}$ 满足 (5.1) 和 (5.2)。由于 (5.1) 可由 (6.1) 立即推出，我们只需证明 (5.2) 成立。我们找到了无穷多个 $i > 0$，使得

$$D^{\mathbf{0},R_0/4}[r_i^{-1}(E - x), T_x] > \epsilon \quad \text{and} \quad D^{\mathbf{0},R_0}[r_i^{-1}(E_{x,r_i} - x), T_x] < \frac{\epsilon}{8}.$$

按照前面的论证应用引理 3.7，我们得到

$$\limsup_{i \to \infty} s_i^{-1} \operatorname{ex}(E \cap B^d(x, s_i/2), E_{x,s_i}) > \frac{\epsilon}{8}. \qquad \blacksquare$$

6.2. **近似度量切锥**。这里我们定义 Attouch-Wets 近似切锥的度量类比。

定义 6.3（近似度量切锥）。设 X 为一个度量空间。带基点度量空间 (Y, y) 是 $x \in X$ 处的一个近似 s-切锥，如果存在一个序列$r_i \to 0$，使得对每个 $i \geq 0$，都存在 $X_{x,r_i} \subset X$，满足 $x \in X_{x,r_i}$

$$\lim_{i \to \infty} \frac{\mathcal{H}^s(B_X(x, Rr_i) \setminus X_{x,r_i})}{(2Rr_i)^s} = 0 \quad \text{for every } R > 0, \tag{6.3}$$

and

$$\lim_{i \to \infty} \mathrm{D}^R_{\mathrm{GH}}[(r_i^{-1} X_{x,r_i}, x), (Y, y)] = 0 \quad \text{for every } R > 0. \tag{6.4}$$

如果上述条件对每个序列 $r_i \to 0$ 都成立，那么我们称 (Y, y) 是 $x \in X$ 处的一个强近似 s-切锥。我们将 x 处所有近似 s-切锥的带基点等距类组成的集合记为 $\mathrm{AppTan}_{\mathrm{GH}}(X, x, s)$。

当我们试图提升近似度量切锥时，会遇到欧几里得情形中所没有的复杂情况。我们希望得出结论：一个相当大的集合$X_{x,r}$到切锥 Y的距离很小，而 $B_X(x, r)$到 Y 的距离很大，这蕴含 X 关于$X_{x,r}$的超额下界。我们需要采用$X_{x,r}$ 与 Y 在某个公共空间 Z 中的特定等距嵌入，使该距离很小，并利用这同一嵌入结构，得到 $B_X(x, r)$ 与Y的Walkup-Wets下界。下面的引理使我们能够把等距嵌入从$X_{x,r}$ 延拓到

$\hat{}X$，并嵌入扩展公共空间 Z，从而使我们能够适当地度量X,$X_{x,r,}$ 与 Y 之间的相互距离。

˜引理 *6.4.* 设 (X, x)、(Y, y)、(Z, z) 为带基点度量空间，并设 $X \subset X^{\tilde{}}$ ˜且 $x \in X$。设 $\iota_{\tilde{X}} : (X, x) \to (Z, z)$ 以及 $\iota_Y : (Y, y) \to (Z, z)$ 为带基点等距˜嵌入，并将 X 和 Y 与其在 Z 中的像等同。集合

$$\hat{Z} = Z \sqcup (X \setminus \tilde{X}) \tag{6.5}$$

配备度量

$$d_{\hat{Z}}(u,v) = \begin{cases} d_X(u,v) & \text{if } u,v \in X, \\ d_Z(u,v) & \text{if } u,v \in Z, \\ \inf_{\tilde{x}\in\tilde{X}} d_X(u,\tilde{x}) + d_Z(\tilde{x},v) & \text{if } u \in X,\ v \in Z. \end{cases} \tag{6.6}$$

是一个度量空间。带基点空间 $(\hat{}Z, z)$ 包含 X、$\tilde{X}$ 以及˜Y的等距副本，并且对所有 $u \in X$ 和 $v \in Y$，还包含 $d_{\hat{Z}}(u, v) = d_Z(u, v)$。特别地，存在一个等距嵌入 $\iota_X : X \to \hat{}Z$，使得对所有 $x' \in \tilde{X}$，$\iota_X(x') = \iota_{\tilde{X}}(x')$。

证明。</*style*'>唯一非平凡的断言是 是一个度量，而唯一需要证明的非平凡性质是 满足三角不等式。由于 $\hat{}_Z$ 在 Z 和 X 上分别是一个度量 $\hat{}$，我们只需考虑三元组 u，v，$w \in Z$，其中要么有两个点属于 X，另一个点属于 Z，要么有两个点属于 Z，另一个点属于 X。

首先，设 u，$v \in X$，并设 $w \in Z$。我们有

$$\begin{aligned} d_{\hat{Z}}(u,w) + d_{\hat{Z}}(w,v) &= \inf_{\tilde{x}\in\tilde{X}} d_X(u,\tilde{x}) + d_Z(\tilde{x},w) + \inf_{\tilde{x}'\in\tilde{X}} d_X(v,\tilde{x}') + d_Z(\tilde{x}',w) \\ &= \inf_{\tilde{x},\tilde{x}'\in\tilde{X}} d_X(u,\tilde{x}) + d_X(v,\tilde{x}') + (d_Z(\tilde{x},w) + d_Z(\tilde{x}',w)) \\ &\geq \inf_{\tilde{x},\tilde{x}'\in\tilde{X}} d_X(u,\tilde{x}) + d_X(v,\tilde{x}') + d_Z(\tilde{x},\tilde{x}') \\ &= \inf_{\tilde{x},\tilde{x}'\in\tilde{X}} d_X(u,\tilde{x}) + d_X(\tilde{x},\tilde{x}') + d_X(\tilde{x}',v) \\ &\geq d_X(u,v) = d_{\hat{Z}}(u,v). \end{aligned}$$

现在，假设 $u \in X$ 和 v，$w \in Z$。那么

$$\begin{aligned} d_{\hat{Z}}(u,w) + d_{\hat{Z}}(w,v) &= \inf_{\tilde{x}\in\tilde{X}} d_X(u,\tilde{x}) + d_Z(\tilde{x},w) + d_Z(w,v) \\ &\geq \inf_{\tilde{x}\in\tilde{X}} d_X(u,\tilde{x}) + d_Z(\tilde{x},v) \\ &= d_{\hat{Z}}(u,v). \end{aligned}$$

当 u，$v \in Z$ 且 $w \in X$ 时的情形与上面的第一种情形类似，而当 $u \in Z$ 且 v，$w \in X$ 时的情形与上面的第二种情形类似。■

命题 6.5 (提升近似度量切锥)。设 X 是一个度量空间，并设 $s > 0$。若 X 的 s-装填容度有限，则以下结论对 $\mathcal{H}^s$-几乎处处的 $x \in X$ 成立：

(1) $\mathrm{AppTan}_{\mathrm{GH}}(X, x, s) = \mathrm{Tan}_{\mathrm{GH}}(X, x)$；*(2)* 如果 (Y, y) 是 s 在 x处的强近似切锥，则

$$\mathrm{Tan}_{\mathrm{GH}}(X,x) = \{[(Y,y)]\}. \tag{6.7}$$

证明。 这与命题 6.2 的证明类似，但由于收敛性是使用 D_{GH} 而不是 D 来度量的，正如引理 6.4 之前所讨论的那样，因此会产生一些复杂之处。我们从 (1) 开始。为导出矛盾，假设存在一个 $\mathcal{H}^s$-可测集 $F \subset X$，满足 $0 < \mathcal{H}^s(F) < \infty$，且 (1) 在其上不成立。我们断言， F 在 X 中是 s-扩张的。这将完成证明，因为届时命题 5.8 将推出 X 具有无限的 s- 装填容度，从而与我们的假设矛盾。事实上，根据 [BLZ23] 中的推论 2.4，我们知道有限的 s-装填容度意味着对于 $\mathcal{H}^s$-几乎处处的 $x \in F$， $\Theta^s_*(F, x) > 0$，这意味着F 将满足该命题的假设。

设 $x \in F$，并令 $[(Y, y)] \in \mathrm{AppTan}_{\mathrm{GH}}(X, x, s) \setminus \mathrm{Tan}_{\mathrm{GH}}(X, x)$。设 $r_i \to 0$，并令 $X_{x,\, r_i} \subset X$ 产生近似切对象 (Y, y)。由于 $[(Y, y)] \notin \mathrm{Tan}_{\mathrm{GH}}(X, x)$，引理 3.4 推出存在 $R_0 > 0$ 和 $\epsilon > 0$，使得

$$\limsup_{i\to\infty} \mathrm{D}_{\mathrm{GH}}^{R_0/4}[(r_i^{-1}X, x), (Y, y)] > \epsilon. \tag{6.8}$$

设 $s_i = R_0 r_i$，并定义 $X_{x,\, s_i} = X_{x,\, r_i} \cap B_X(x, s_i)$。我们声称 $X_{x,\, s_i}$ 满足 (5.1) 和 (5.2)。由于 (5.1) 可由 (6.3) 立即推出，我们只需证明 (5.2) 成立。

根据 D_{GH} 的定义以及以下事实

$$\lim_{i\to\infty} \mathrm{D}_{\mathrm{GH}}^{R}[(r_i^{-1}X_{x,r_i}, x), (Y, y)] = 0 \quad \text{for every } R > 0,$$

对于任意充分大的 i，我们都可以找到一个带基点度量空间 (Z, z)，以及带基点等距映射 $\iota_1 : (r_i^{-1}X_{x,\, r_i}, x) \to (Z, z)$ 和 $\iota_2 : (Y, y) \to (Z, z)$，使得

$$\mathrm{D}^{z,R_0}[\iota_1(r_i^{-1}X_{x,r_i}), \iota_2(Y)] < \frac{\epsilon}{8}. \tag{6.9}$$

$\hat{}$ 应用引理 6.4，我们得到一个延拓 Z 的度量空间 Z，以及一个等距嵌入 ι_X : $(r_i^{-1}X, x) \to (Z, z)$，使得对所有 $x' \in r_i^{-1}X_{x,r_i}$，都有 $\iota_X(x') = \iota_1(x')$。将 $r_i^{-1}X$,$r_i^{-1}X_{x,r_i}$, 和 Y 与它们在 $\hat{}Z$ 内的等距副本等同，并利用 (6.8) 和 (6.9)，我们找到无穷多个 i，使得

$$\mathrm{D}^{z,R_0/4}[r_i^{-1}X, Y] > \epsilon \quad \text{and} \quad \mathrm{D}^{z,R_0}[r_i^{-1}X_{x,r_i}, Y] < \frac{\epsilon}{8}. \tag{6.10}$$

于是引理 3.7 蕴含

$$\begin{aligned} \mathrm{ex}(B_X(x, s_i/2), X_{x,s_i}) &= \mathrm{ex}(B_X(x, R_0 r_i/2), X_{x,r_i}) \\ &= r_i \,\mathrm{ex}(r_i^{-1}X \cap B_{\hat{Z}}(z, R_0/2), r_i^{-1}X_{x,r_i}) \\ &\geq r_i \left(\frac{R_0\epsilon}{8}\right) = \frac{\epsilon}{8} s_i. \end{aligned}$$

至此完成了 (5.2) 的证明。

为证明 (2)，我们同样采用反证法。我们得到一个集合 $F \subset X$，满足 $0 < \mathcal{H}^s(F) < \infty$，且 (2) 在其上不成立。只需证明 F 在 X 中是 s-扩张的，因为应用命题 5.8 便会得出矛盾。

令 $x \in F$，并令子集 $X_{x,\, r} \subset X$ 对于 $r > 0$ 产生点 $x \in F$处的强近似切空间（Y_x, y）。根据（1），我们还可以假设，对于每个 $x \in F$， [（Y_x, y）] $\in \mathrm{Tan}_{\mathrm{GH}}$（$X$, x）。根据定义，

$$\lim_{r\to 0} \mathrm{D}_{\mathrm{GH}}^{R}[(r^{-1}X_{x,r}, x), (Y_x, y)] = 0 \quad \text{for every } R > 0.$$

由于 $\{[(Y_x,\ y)]\} \subsetneq \mathrm{Tan}_{\mathrm{GH}}(X,\ x)$，存在一个带基点等距类 $[(Y'_x,\ y')] \not\in (Y_x,\ y)]$，使得 $[(Y'_x,\ y')] \in \mathrm{Tan}_{\mathrm{GH}}(X,\ x)$。利用引理 3.4，存在 $r_i \to 0$ 使得

$$\lim_{i\to\infty} \mathrm{D}_{\mathrm{GH}}^{R/4}[(r_i^{-1}X, x), (Y'_x, y')] = 0 \quad \text{for every } R > 0.$$

这意味着存在 $R_0 > 0$ 和 $\epsilon > 0$ 使得

$$\limsup_{i\to\infty} \mathrm{D}_{\mathrm{GH}}^{R_0/4}[(r_i^{-1}X, x), (Y_x, y)] > \epsilon.$$

事实上，否则 $(r_i^{-1}X, x)$ 将在带基点Gromov–Hausdorff拓扑中同时收敛到 (Y_x, y) 和 (Y'_x, y')。令 $s_i = R_0 r_i$，并令 $X_{x,s_i} = X_{x,r_i} \cap B(x, s_i)$。我们断言，$X_{x,s_i}$ 满足 (5.1) 和 (5.2)。由于 (5.1) 直接由 (6.3) 得出，我们只需证明 (5.2) 成立。

如同 (1) 的证明，对于任意 $i > 0$，我们使用引理 6.4 构造一个公共度量空间 $(\hat{}Z, z)$，其中包含 $r_i^{-1}X, r_i^{-1}X_{x,r_i}$ 和 Y_x 的等距副本，并且在其中

$$\mathrm{D}^{z,R_0/4}[r_i^{-1}X, Y_x] > \epsilon \quad \text{and} \quad \mathrm{D}^{z,R_0}[r_i^{-1}X_{x,r}, Y_x] < \frac{\epsilon}{8} \tag{6.11}$$

按照证明 (1) 的方法应用引理 3.7，我们得到

$$\limsup_{i\to\infty} s_i^{-1} \operatorname{ex}(B_X(x, s_i/2), X_{x,s_i}) > \frac{\epsilon}{8}. \qquad \blacksquare$$

6.3. 在 H¨older 像上的应用。 自许多著名的分形可以用 H¨older 方式参数化、却无法用利普希茨方式参数化以来，对 H¨older 可求长集（即包含在某条 H¨older 曲线像中的集合）进行分类一直备受关注。例如，参见 [MM93、MM00、BV19、BNV19、BZ20]。H¨older 可求长性问题远比其利普希茨对应问题困难，其中一个原因是 H¨older 曲线的切线可能表现得更加变幻莫测 [SV25]。本节最后给出以下定理，它表明对于 H¨older 像，近似切空间恰好就是切线。

定理6.6. 设 $s > 0$，且 $m, d \in \mathbb{N}$ 满足 $0 < m < d$。若 $f\colon\ \mathbb{B}^m \to \mathbb{R}^d$ 是 $\frac{s}{m}$-*H¨older* 的，则

(6.12) $\mathrm{AppTan}_{\mathrm{AW}}(f(\mathbb{B}^m)\ x,\ s) = \mathrm{Tan}_{\mathrm{AW}}(f(\mathbb{B}^m)\ x)$ 对 $\mathcal{H}^s$-几乎处处 $x \in f(\mathbb{B}^m)$。

如果改为 $f\colon\ \mathbb{B}^m \to X$ 对某个度量空间 $(X,\ d)$，则

(6.13) $\mathrm{AppTan}_{\mathrm{GH}}(f(\mathbb{B}^m)\ x,\ s) = \mathrm{Tan}_{\mathrm{GH}}(f(\mathbb{B}^m)\ x)$ 对 $\mathcal{H}^s$-几乎处处 $x \in f(\mathbb{B}^m)$。

为证明定理6.6，我们需要下面的引理。

引理 6.7. 设 X 为度量空间，设 $s > 0$，并设 $m \in \mathbb{N}$。设 $f\colon\ \mathbb{B}^m \to X$ 为 (m/s)-*H¨older*。集合 $f(\mathbb{B}^m)$ 具有有限的 s-装填容度。

证明. 设 $B_X(x_i,\ r_i)$，$i \in \mathbb{N}$，为两两不交的球，满足 $x_1.x_2,\ \cdots \in f(\mathbb{B}^m)$，且对所有 $i \in \mathbb{N}$ 有 $r_i < \operatorname{diam} f(\mathbb{B}^m)$。存在仅依赖于 m、s 和 f 的常数 $C > 0$，使得球 $B^m(f^{-1}(x_i)\ Cr_i^{s/m})$ 两两不交。由注记 2.6（回顾 $\mathbb{B}^m$ 具有有限的勒贝格 m- 测度），$\mathbb{B}^m$ 具有有限的 m-装填容度，且存在仅依赖于 m 的 $H > 0$，使得

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} r_i^s = C^{-m} \sum_{i\in\mathbb{N}} (Cr_i^{s/m})^m < C^{-m} H.$$

因此，$f(\mathbb{B}^m)$ 具有有限的 s-装填容度。 $\blacksquare$

定理*6.6* 的证明。引理 6.7 表明，在两种情况下，$f(\mathbb{B}^m)$ 都具有有限的装填 s-容度。因此，应用命题 6.2 和 6.5 即可得出这些结果。■

7. Rectifiable metric spaces admitting finite packing content

本节给出定理 1.1 和定理 1.2 的证明。利用定理 4.2，只需证明，具有有限 n 装填容度的 n-可整流集，$\mathcal{H}^n$-几乎处处有唯一的 n维平面 Attouch-Wets 切对象（或唯一的 n维赋范空间 Gromov-Hausdorff 切锥）。在欧几里得情形和度量情形中，证明策略大致如下。

(1) 对于 $\mathcal{H}^n$-几乎处处的 $x \in E$，构造一个近似切 n维平面（或近似切赋范 n 空间），且它也是强近似切空间。(2) 运用升级判据，将这些近似切空间升级为 $\mathcal{H}^n$-几乎处处唯一的真实切对象。

第 1 步中的近似切对象是欧几里得情形下 Rademacher 定理以及度量情形下 Kirchheim 定理的一个众所周知的推论。本节的主要新贡献是运用前几节的结果来完成第 2 步。

7.1. 近似切平面。 我们称 n-平面 $V \subset \mathbb{R}^d$ 在 $x \in E$ 处是 $E \subset \mathbb{R}^d$ 的近似切对象 n-平面，当且仅当 V 是 E 在 x处的近似n-切对象。

我们首先证明，一个 n-可求长集 $E \subset \mathbb{R}^d$ 在 $\mathcal{H}^n$-几乎处处的点处都有唯一的近似切平面，而且该平面也是一个强近似切空间。文献中存在几种近似切平面的定义，而这些近似切平面几乎处处存在且唯一，是众所周知的结果（参见 [Mat95, 定理 15.19] 以及 [Sim83, 定理 11.16]）。实际上，对于 n-可求长集而言，这些定义之间的差异很小，因为它们所得到的平面几乎处处相同。我们对近似切平面的定义与 [Bat22]中给出的弱版本相似。在证明近似切 n-平面的存在性之前，我们需要以下拓扑引理。

引理 *7.1*（[*BHS*23] 引理 *2.3.9*）。设 $0 < \delta < \frac{1}{2}$。设 $x \in \mathbb{R}^n$ 和 $r > 0$。设 $f\colon B^n(x, r) \to \mathbb{R}^n$ 是一个连续函数，使得对所有 $x \in \partial B^n(x, r)$，均有 $|f(x) - x| \leq \delta r$。那么 $f(B^n(x, r)) \supset B^n(x, (1 - \delta r))$。

引理 7.2。 如果 $E \subset \mathbb{R}^d$ 是 $\mathcal{H}^n(E) < \infty$意义下的 n-可求长集，那么在 $\mathcal{H}^n$-几乎处处的点$x \in E$，集合 E 有唯一的近似 n-平面切对象。该平面是一个强近似 n-切锥。

证明。设 $\{f_i\}$ 是一个由利普希茨映射组成的可数族 $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^d$，使得$\mathcal{H}^n(E \setminus \bigcup_i f_i(\mathbb{R}^n)) = 0$。设 $G \subset E$ 为满足下述条件的点 $x \in E$ 的集合

(1) $\Theta^{*n}(E, x) \leq 1$；(2) 存在 $i > 0$，使得 (a) x 是 $f_i(\mathbb{R}^n)$ 的 $\mathcal{H}^n$-密度点；(b) 存在 $y \in f_i^{-1}(x)$，使得 $Df_i(y)$ 存在且具有满秩。

根据豪斯多夫测度密度定理 [Mat95，定理 6.2], Rademacher 定理 [Mat95，定理 7.3], 以及 Sard 型定理 [Mat95，定理 7.6]，G 在 E中具有全测度。因此，只需固定 $x \in G$ 并证明存在一个

E 在 x 处的唯一近似切对象，且该对象是一个 n-平面。在证明的其余部分，固定一个 Lipschitz 函数 $f \equiv f_i$，以及一个如G的定义中那样与 x 相关联的点 y。

令 $A_y\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^d$，其中 $A_y(z) = f(y) + Df(y)(z-y) = x + Df(y)(z-y)$。由于 $Df(y)$ 满秩，存在 $L_y > 1$，使得 A_y 是一个 L_y-双利普希茨映射。令 $\epsilon = (10L_y)^{-1}$，并令 $r_0 > 0$ 满足

$$|f(z) - (f(y) + Df(y)(z-y))| \le \epsilon |z-y|$$

对所有 $z \in B^n(y,\ r_0)$ 都成立。令 $V_x = A_y(\mathbb{R}^n)$，并定义 $\pi_{V_x}\colon \mathbb{R}^d \to V_x$ 为到 V_x 的正交投影。考虑连续映射

$$\tilde{f} := A_y^{-1} \circ \pi_{V_x} \circ f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n.$$

若 $z \in \partial B^n(y,\ r_0)$，则

$$\begin{aligned} |\tilde{f}(z) - z| &= |A_y^{-1}(\pi_{V_x}(f(z))) - A_y^{-1}(A_y(z))| \\ &\le L_y |\pi_{V_x}(f(z)) - A_y(z)| \\ &= L_y |\pi_{V_x}(f(z) - A_y(z))| \\ &\le L_y |f(z) - A_y(z)| \le L_y \epsilon |z-y| \le \frac{r_0}{10}. \end{aligned}$$

因此，由引理 7.1，$\tilde{f}(B^n(y,\ r_0)) \supset B^n(y,\ \frac{1}{2}r_0)$。由此可得

$$\pi_{V_x}(f(B^n(y,r_0))) \supset A_y(B^n(y,r_0/2)) \supset B^d(x, L_y^{-1} r_0/2) \cap V_x. \tag{7.1}$$

我们对所有 $r > 0$ 定义 $E_{x,\ r} = f(B^n(y,\ r_0))$。利用 V_x 是以 x 为中心的锥这一事实，再根据 $Df(y)$ 的定义，很容易证明对任意 $R > 0$,

$$\begin{aligned} \lim_{r\to 0} \mathrm{D}^{\mathbf{0},R}[r^{-1}(E_{x,r} - x), V_x - x] &= \lim_{r\to 0} \mathrm{D}^{\mathbf{0},Rr}[E_{x,r} - x, r(V_x - x)] \\ &= \lim_{r\to 0} \mathrm{D}^{\mathbf{0},Rr}[E_{x,r} - x, V_x - x] \\ &= \lim_{r\to 0} \mathrm{D}^{x,Rr}[E_{x,r}, V_x] = 0. \end{aligned} \tag{7.2}$$

这验证了(6.2)的强形式成立。就密度结论而言，回想我们选取 x 作为 $f(\mathbb{R}^n)$的密度点，并且(7.1)与趋于零的相对 Walkup-Wets 距离相结合表明，对任意 $R > 0$,

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^n(E_{x,r} \cap B^d(x,Rr)) &\ge \mathcal{H}^n(\pi_{V_x}(f(B^n(y,r_0))) \cap B^d(x,Rr)) \\ &\ge \mathcal{H}^n(V_x \cap B^d(x,(1-\delta(Rr))Rr)) \end{aligned}$$

其中我们取 $r < (10L_y)^{-1} r_0$ 与 $\delta(r) \to 0$ 作为 $r \to 0$。这意味着

$$\lim_{r\to 0} \frac{\mathcal{H}^n(E_{x,r} \cap B^d(x,Rr))}{(2Rr)^n} = \lim_{r\to 0} \frac{\mathcal{H}^n(E \cap B^d(x,Rr))}{(2Rr)^n} = 1, \tag{7.3}$$

这表明 $\lim_{r\to 0}(2Rr)^{-n}\mathcal{H}^n(E \cap B^d(x,Rr) \setminus E_{x,r}) = 0$。这表明$V_x - x$ 是一个近似切对象 n-平面，同时也是强近似切空间。

现在我们证明 V_x 是唯一的。为反证，假设存在一个仿射 n维平面 $V_x' \ne V_x$，使得 $V_x' - x$ 是 E 在 x处的一个近似切对象n维平面。取满足 $\mathrm{D}^{x,\ r}[V_x, V_x'] > 10\epsilon$ 的 $\epsilon > 0$，对所有 $r > 0$ 成立；并取$r_k \to 0$ 和子集 $E'_{x,\ r_k}$，使它们对V_x'满足条件 (6.1) 和 (6.2)，其中 $k > 0$。利用

由 (7.1) 和 (7.2)，我们可以得出，对于任意充分小的 $r > 0$ ，存在$v \in V_x$ 使得 $|v - x| = r/2$，且 $\mathrm{dist}(v, V_x') \geq 5\epsilon r$，并且

$$\pi_{V_x}(E_{x,r} \cap B^d(V_x, n^{-1}\epsilon r)) \supset V_x \cap B^d(v, \epsilon r). \tag{7.4}$$

特别地，这表明

$$\mathcal{H}^n(E_{x,r} \cap B^d(v, \epsilon r)) \gtrsim_n \epsilon^n r^n \quad \text{for all sufficiently small } r > 0. \tag{7.5}$$

由于 $E_{x,\ r} \subset E$，这意味着我们可以像在 (7.2) 中一样进行论证，从而找到足够小的 $r_k > 0$ ，使得

$$\mathrm{D}^{x,r_k}[E'_{x,r_k}, V'_x] = \mathrm{D}^{\mathbf{0},1}[r_k^{-1}(E'_{x,r_k} - x), V'_x - x] < \epsilon,$$

并且存在 $y \in E'_{x,\ r_k} \cap (E_{x,\ r_k} \cap B^d(v,\ \epsilon r_k))$. 由于 $y \in B^d(x,\ r_k)$，这导致如下矛盾：

$$\epsilon r_k > \mathrm{ex}(E'_{x,r_k}, V'_x) \geq \mathrm{dist}(y, V'_x) \geq \mathrm{dist}(v, V'_x) - |y - v| \geq 4\epsilon r_k. \qquad \blacksquare$$

7.2. 近似切向赋范空间。 我们称赋范空间 $(\mathbb{R}^n,\ \|\cdot\|)$ 是度量空间 X 在 $x \in X$ 处的近似切向赋范 n-空间，若它是 X 在 x 处的一个近似 n-切锥。关于切空间的一个相关概念，以及根据该概念刻画可整流度量空间的相关定理，参见 [Bat22, 定理 1.2]。在 n-可整流度量空间中，这些切锥的存在性主要由 Kirchheim 提出的下述定理处理。

定理 7.3 ([Kir94，定理 9])。 设 X 是具有 $\mathcal{H}^n(X) < \infty$的 n-可求长空间。对于$\mathcal{H}^n$-几乎处处的 $x \in X$，存在 $\mathbb{R}^n$上的一个范数 $\|\cdot\|_x$、一个映射 $\phi_x \colon X \to \mathbb{R}^n$以及一个闭集 $X_x \subset X$ ，使得 $\phi_x(x) = \mathbf{0}$，

$$\lim_{r \to 0} \frac{\mathcal{H}^n(X_x \cap B_X(x,r))}{(2r)^n} = \lim_{r \to 0} \frac{\mathcal{H}^n(B_X(x,r))}{(2r)^n} = 1, \tag{7.6}$$

and

$$\limsup_{r \to 0} \left\{ \left| 1 - \frac{\|\phi_x(y) - \phi_x(z)\|_x}{d_X(y,z)} \right| : y, z \in X_x \cap B_X(x,r),\ y \neq z \right\} = 0. \tag{7.7}$$

特别地，对于每个 $\delta > 0$，都存在某个 $r_\delta > 0$ ，使得对于每个 $r < r_\delta$，都存在一个从 $X_x \cap B(x,r)$ 到 $B_{\|\cdot\|_x}(\mathbf{0}, r)$的 δr-*pGHA*。

尽管 Kirchheim 的结果给出了定理 7.3 意义下近似切空间的存在性和唯一性，但要证明我们较弱的近似切对象概念下的唯一性，还需要比 [Kir94]中已有内容更多的工作。

引理 7.4。 若 X 是一个具有 $\mathcal{H}^n(X) < \infty$的 n-可求长度量空间，则对于 $\mathcal{H}^n$-几乎处处的 $x \in X$ ，空间 X 都有一个近似切赋范 n-空间，且该空间在等距映射意义下唯一。这个赋范空间是一个强近似 n-切锥。

证明。 只需证明由定理 7.3 得到的良集 G 中每一点都存在近似切空间。固定 $x \in G$ ，并令 $X_x, \phi_x,$ 和 $\|\cdot\|_x$ 如定理 7.3 中所述。我们声称，$(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_x, \mathbf{0})$ 是我们在 x 处所需的切锥，其中$X_{x,r} = X_x$ 作为任意 $r > 0$ 的“实质集”。事实上，方程 (7.6) 蕴含了 (6.3) 的强版本，而定理的最后陈述则蕴含

$$\lim_{r \to 0} \xi_{X_x, (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_x)}(x, \mathbf{0}, r) = 0.$$

由于 $(\mathbb{R}^n,\ \|\cdot\|_x,\ \mathbf{0})$ 是一个度量锥，引理 3.15 的最后一个结论表明，(6.4) 的强形式成立，因此 $(\mathbb{R}^n,\ \|\cdot\|_x,\ \mathbf{0})$ 是一个强近似 n-切锥。

现在我们证明，$(\mathbb{R}^n,\ \|\cdot\|_x,\ \mathbf{0})$ 是 x 处唯一的近似切锥 n-赋范空间（在等距映射意义下）。设 $\|\cdot\|'_x$ 是一个范数，使得 $(\mathbb{R}^n,\ \|\cdot\|'_x,\ \mathbf{0})$ 是 x 处的近似切锥 n-赋范空间，并设 $r_i \to 0$ 和 $X_{x,\ r_i} \subset X$ 是满足 (6.3) 和 (6.4) 的子集。我们将构造一个等距映射 $f\colon B_{\|\cdot\|_x}(\mathbf{0},\ 1) \to B_{\|\cdot\|'_x}(\mathbf{0},\ 1)$。

利用 (7.6) 和 (6.3)，其中 X'_{x,r_i}，我们得到

$$\lim_{r\to 0} \frac{\mathcal{H}^n(B_X(x, Rr_i) \setminus (X_{x,r_i} \cap X'_{x,r_i}))}{(2Rr_i)^n} = 0 \quad \text{for every } R > 0. \tag{7.8}$$

利用双 Lipschitz 估计 (7.7)，可得如下结论：对于每个 R、$\epsilon > 0$，都存在 $r_\epsilon > 0$，使得 $r_i < r_\epsilon$ 蕴含一个 $\epsilon^2 Rr_i$-pGHA φ_{ϵ,Rr_i} 的存在：$B_{\|\cdot\|_x}(\mathbf{0}, Rr_i) \to B_X(x, Rr_i) \cap (X_{x,r_i} \cap X_{x',r_i})$。只要 r_i 足够小，引理 3.15 (1) 和 (6.4) 就保证存在一个 $3\epsilon^2(r_i/\epsilon)$-pGHA $\psi_{\epsilon,r_i/\epsilon}$：$B_X(x, r_i/\epsilon) \cap X'_{x,r_i} \to B_{\|\cdot\|'_x}(\mathbf{0}, r_i/\epsilon)$。当 r_i 足够小时，我们令 $R = 1/\epsilon, s_i = r_i/\epsilon$，并将这些映射合并，得到一个映射 f_ϵ：$B_{\|\cdot\|_x}(\mathbf{0}, 1) \to B_{\|\cdot\|'_x}(\mathbf{0}, 1)$，其定义如下：

$$f_\epsilon(u) = \frac{1}{s_i}\psi_{\epsilon,s_i}(\varphi_{\epsilon,s_i}(s_i u)). \tag{7.9}$$

注意到 $\varphi_{\epsilon,\ s_i}(\mathbf{0}) = x$ 且 $\psi_{\epsilon,\ s_i}(x) = \mathbf{0}$，因此 $f_\epsilon(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$。由于 $\psi_{\epsilon,\ s_i}$ 和 $\varphi_{\epsilon,\ s_i}$ 都是 $3\epsilon^2 s_i$-pGHA，利用三角不等式可以直接证明

$$\left| \|f_\epsilon(u) - f_\epsilon(v)\|'_x - \|u - v\|_x \right| \le 6\epsilon^2 \quad \text{for all } u, v \in B_{\|\cdot\|_x}(\mathbf{0}, 1). \tag{7.10}$$

我们将利用这些映射，令 ϵ 递减，从而构造一个等距映射 f，它在 $B_{\|\cdot\|_x}$ 与 $(\mathbf{0}, 1)$ $B_{\|\cdot\|'_x}(\mathbf{0},\ 1)$ 之间建立对应。

令 $\epsilon_i \to 0$，并考虑映射序列 $\{f_{\epsilon_i}\}$。取一个可数稠密集 $N \subset B_{\|\cdot\|_x}(\mathbf{0},\ 1)$。通过标准的对角线论证，我们可以找到一个子序列 i_k，使得

$$\lim_k f_{\epsilon_{i_k}}(w) \quad \text{exists for all } w \in N. \tag{7.11}$$

我们定义映射 $f\colon B_{\|\cdot\|_x}(\mathbf{0},\ 1) \to B_{\|\cdot\|'_x}(\mathbf{0},\ 1)$，定义如下

(7.12)

$$f(u) = \begin{cases} \lim_k f_{\epsilon_{i_k}}(u) & \text{if } u \in N, \\ \lim_n f(u_n) & \text{for any sequence } u_n \to u \text{ with } u_n \in N \text{ when } u \notin N. \end{cases}$$

利用三角不等式，容易证明 f 定义良好，并且

$$\|f(u) - f(v)\|'_x = \|u - v\|_x \quad \text{for all } u, v \in B_{\|\cdot\|_x}(\mathbf{0}, 1). \tag{7.13}$$

现在我们证明，对于任意 $0 < r \le 1$，f 在 $\partial B_{\|\cdot\|_x}(\mathbf{0}, r)$ 上是满射。首先注意到，$f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ 以及 (7.13) 蕴含 f 将 $\partial B_{\|\cdot\|_x}(\mathbf{0}, r)$ 映入 $\partial B_{\|\cdot\|'_x}(\mathbf{0}, r)$。为反证，假设 $f : \partial B_{\|\cdot\|_x}(\mathbf{0}, r) \to \partial B_{\|\cdot\|'_x}(\mathbf{0}, r)$ 不是满射。这意味着存在一个同胚嵌入 g：$\mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{S}^{n-1} \setminus \{p\}$，其中某个 $p \in \mathbb{S}^{n-1}$。由此得到矛盾 $g(\mathbb{S}^{n-1}) = \mathbb{S}^{n-1} \setminus \{p\}$，因为 $g(\mathbb{S}^{n-1})$ 是连通空间 $\mathbb{S}^{n-1} \setminus \{p\}$ 中的开集和闭集。这证明了 f 是满射，因此它是 $B_{\|\cdot\|_x}(\mathbf{0}, 1)$ 与 $B_{\|\cdot\|'_x}(\mathbf{0}, 1)$ 之间的等距映射。■

7.3. **欧几里得空间值索博列夫映射**。在本节中，我们证明关于切锥 n-平面几乎处处存在的结果。

定理 7.5. 若 $E \subset \mathbb{R}^d$ 是 n-可求长的，且具有有限的 n-装填容度，则对 $\mathcal{H}^n$-几乎处处的 $x \in E$，存在一个 n-平面 V_x，使得

$$\mathrm{Tan}_{\mathrm{AW}}(E, x) = \{V_x\}.$$

证明. 由于 E 是 n-可求长的，引理 7.2 表明 E 具有一个近似切对象 n-平面 V_x，它在 $\mathcal{H}^n$-几乎处处的 $x \in E$ 处为强近似切空间。应用命题 6.2，即得结论。■

现在我们用若干直接的推论来结束本小节。

推论 7.6. 设 $n < p \leq \infty$ 与 $k \in \mathbb{N}$。假设 $f_i \in N^{1,p}(\mathbb{B}^n, \mathbb{R}^d)$ 对 $i \in \{1, \ldots, k\}$ 连续。若 $A = \bigcup_{i=1}^k f_i(\mathbb{B}^n)$，则对 $\mathcal{H}^n$-几乎处处的 $x \in A$，存在一个 n-平面 V_x，使得

$$\mathrm{Tan}_{\mathrm{AW}}(A, x) = \{V_x\}$$

证明。根据定理 4.2， A 是 n-可求长的，且具有有限的 n-装填容度，因此 A满足定理 7.5 的假设。■

推论 7.7。设 $E \subset \mathbb{R}^d$ 是 n-可求长的，且具有有限的 $\mathcal{H}^n$ 测度。对于任意 $\epsilon > 0$、$\tilde{}$ $\tilde{}$ $\tilde{}$，存在 $E \subset E$，使得 $\mathcal{H}^n$（$E \setminus E$）$< \epsilon$；并且对于 $\mathcal{H}^n$-几乎处处的 $x \in E$，存在一个 n维平面 V_x，使得

$$\mathrm{Tan}_{\mathrm{AW}}(A, x) = \{V_x\}$$

证明。设 $\{f_i\}_{i=1}^N$ 是有限个利普希茨映射 $f_i : \mathbb{B}^n \to \mathbb{R}^d$，满足$\mathcal{H}^n(E \setminus \bigcup_{i=1}^N f_i(\mathbb{B}^n)) < \epsilon$)。令 $\tilde{E} = E \cap \bigcup_{i=1}^N f_i(\mathbb{B}^n)$。由于 $\tilde{E}$ 是有限个利普希茨像的 $\tilde{}$ 并集的子集， E 具有有限的 n-装填容度。因此，我们可以应用定理 7.5。■

7.4. **度量空间值索博列夫映射**。 在本小节中，我们证明关于存在切的 n 维赋范空间的结果。

定理 7.8。 若 X 是一个 n 可求长且具有有限 n 装填容度的度量空间，则对 $\mathcal{H}^n$-几乎处处的 $x \in X$，存在一个定义在 $\mathbb{R}^n$ 上的范数 $\|\cdot\|_x$，使得

$$\mathrm{Tan}_{\mathrm{GH}}(X, x) = \{[(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_x, \mathbf{0})]\}.$$

证明。 由于 X 是 n 可求长的，引理 7.4 表明， X 具有一个近似切赋范 n 空间 $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_x, \mathbf{0})$，它在 $\mathcal{H}^n$-几乎处处的 $x \in X$ 处是一个强近似切空间。应用命题 6.5，即得结论。■

以下推论是推论 7.6 和 7.7 的度量版本。

推论 7.9。 设 $n < p \leq \infty$ 和 $k \in \mathbb{N}$。假设 $f_i \in N^{1,\,p}(\mathbb{B}^n, X)$ 关于 $i \in \{1, \ldots, k\}$ 连续。若 $A = \bigcup_{i=1}^k f_i(\mathbb{B}^n)$，则对 $\mathcal{H}^n$-几乎处处的 $x \in X$，存在一个定义在 $\mathbb{R}^n$ 上的范数 $\|\cdot\|_x$，使得

$$\mathrm{Tan}_{\mathrm{GH}}(A, x) = \{[(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_x, \mathbf{0})]\}.$$

证明。 根据定理 4.2， A 是 n-可求长的，且具有有限的 n装填容度，因此 A满足定理 7.8 的假设。■

推论 7.10。 设 X 是一个具有有限 $\mathcal{H}^n$ 测度的 n-可求长度量空间。对于任意 $\epsilon > 0$，存在 $\tilde{X} \subset X$ 使得 $\mathcal{H}^n(X \setminus \tilde{X}) < \epsilon$，并且对于 $\mathcal{H}^n$-几乎处处的 $x \in \tilde{X}$，存在 $\mathbb{R}^n$ 上的一个范数 $\|\cdot\|_x$，使得

$$\mathrm{Tan}_{\mathrm{GH}}(\tilde{X}, x) = \{[(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_x, \mathbf{0})]\}.$$

证明。 不失一般性，我们可以假设 $X \subset V$，其中 V 是一个巴拿赫空间，并且 $\{f_i\}_{i=1}^N$ 是由利普希茨映射 $f_i : \mathbb{B}^n \to \ell_\infty$ 组成的集合，使得 $\mathcal{H}^n(X \setminus \bigcup_{i=1}^N f_i(\mathbb{B}^n)) < \epsilon$。令 $\tilde{X} = X \cap \bigcup_{i=1}^N f_i(\mathbb{B}^n)$。由于 $\tilde{X}$ 是有限个利普希茨像的并集的子集，它具有有限的 n-装填容度。因此，我们可以应用定理 7.8。■

8. Related Examples

本节中，我们将说明我们结果的尖锐性。第一个例子是一个闭的 n-可求长集合，它几乎处处有近似切平面，但没有切 n-平面。

例 8.1。 固定 $n \in \mathbb{N}$，并对每个 $k \in \mathbb{N}$ 定义 $\tilde{V}_k = 2^{1-k}\{0, \dots, 2^{k-1}\}^n \subset [0,1]^n$。再定义 $V_1 = \tilde{V}_1$ 和 $V_k = \tilde{V}_k \setminus \tilde{V}_{k-1}$，其中 $k \geq 2$。令

$$X := ([0,1]^n \times \{0\}) \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{x \in V_k} \{x\} \times [-1/k, 1/k] \subset \mathbb{R}^{n+1}.$$

不难看出，X 是闭集、n-可求长的，并且 $\mathcal{H}^n(X) = \mathcal{H}^n([0,1]^n \times \{0\}) = 1$。然而，对于所有 $p \in (0,1)^n \times \{0\}$（因此对于 $\mathcal{H}^n$-几乎处处的 $p \in X$），我们有 $\mathrm{Tan}_{\mathrm{AW}}(X, p) = \{\mathbb{R}^{n+1}\}$。

第二个例子表明，在我们的结果中，结论里的切线不能替换为伪切线。回忆一下，如果存在点序列 $(p_m)_{m\in\mathbb{N}}$ 属于 X，以及一个收敛于零的正数序列 $(r_m)_{m\in\mathbb{N}}$，使得 $r_m^{-1}(X - x_m)$ 在 Attouch-Wets 拓扑 [BL15，定义3.1]下收敛于 T，则称 T 是 $X \subset \mathbb{R}^n$ 在 $p \in X$ 处的伪切锥。

例8.2。 设 $n \in \mathbb{N}$，并令 $\{\mathcal{C}_{i_1 \cdots i_k}$ 为：$k \in \mathbb{N}$，i_1，……，$i_k \in \{1, \dots, 2^n\}\}$ 是 $[0,1]^n$ 中的一族闭 n-立方体，使得

（1）如果 $w = i_1 \cdots i_k \in \{1, \dots, 2^n\}^k$ 且如果 i，$j \in \{1, \dots, 2^n\}$ 彼此不同，则

$$\mathcal{C}_{wi} \subset \mathcal{C}_w, \quad \mathcal{C}_{wi} \cap \partial\mathcal{C}_w = \emptyset, \quad \text{and} \quad \mathcal{C}_{wi} \cap \mathcal{C}_{wj} = \emptyset,$$

(2)

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{w \in \{1,\dots,2^n\}^k} \operatorname{diam} \mathcal{C}_w = 0,$$

（3）康托尔集

$$E := \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{w \in \{1,\dots,2^n\}^k} \mathcal{C}_w$$

具有正的勒贝格 n测度。

对于每个 $k \in \mathbb{N}$ 和 $w = i_1 \cdots i_k \in \{1, \dots, 2^n\}^k$，固定 $p_w \in [0,1]^n$ 和 $r_w \in (0, 2^{-k})$，使得

$$B^n(p_w, 2r_w) \subset \mathcal{C}_w \setminus \bigcup_{i \in \{1,\dots,2^n\}} \mathcal{C}_{wi}.$$

注意，若 w，w' 互不相同，则 $B^n(p_w, r_w) \cap B^n(p_{w'}, r_{w'}) = \emptyset$。

现在定义函数 $f\colon\ [0,1]^n \to \mathbb{R}$，如下：

$$f(x) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \sum_{w\in\{1\ldots,2^n\}^k} \max\{0, r_w - |x - p_w|\}.$$

不难看出，f 是一个 Lipschitz 函数，这意味着 f 在 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的图像$G = \{(x, f(x)) : x \in [0,1]^n\}$ 允许双 Lipschitz 参数化

$$F : [0,1]^n \to G, \qquad F(x) = (x, f(x)).$$

因此，$F(E)$ 具有正的 $\mathcal{H}^n$-测度。我们断言，对所有 $x \in F(E)$，存在 G 在 x 处的伪切锥 T，它不是一个 n-平面。

为此，固定 $x \in E$，并令 $(w_k)_{k\in\mathbb{N}}$ 为一个词的序列，使得对每个 $k \in \mathbb{N}$ 有 $w_k \in \{1,\ldots,2^n\}^k$，并且

$$\{x\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \mathcal{C}_{w_k}.$$

再令 $x_k = (p_{w_k}, r_k) \in G$。根据集合 $\mathcal{C}_w$ 定义中的性质 (2)，

$$|x_k - (x, 0)| \le r_{w_k} + \operatorname{diam} \mathcal{C}_{w_k} \xrightarrow{k\to\infty} 0.$$

存在正整数 $k_1 < k_2 < \cdots$，使得 $r_{k_j}^{-1}(G - x_j) \to T$，其中某个闭集 $T \in \mathfrak{C}(\mathbb{R}^{n+1})$ 在 Attouch-Wets 拓扑下成立。为完成该断言的证明，注意对所有 $j \in \mathbb{N}$，锥

$$\{(x, 1 - |x|) : x \in B^n(\mathbf{0}, 1)\} \subset B^n(\mathbf{0}, 1) \times [0,1]$$

包含于 $r_{k_j}^{-1}(G - x_j)$ 中，因此也包含于 T 中。因此，T 与一个 n-平面并非等距。

~~我们现在给出一个例子，说明在推论 7.7 中，不能取 $E \subset \tilde{E}$ 使得 $\mathcal{H}^n(E \setminus E) = 0$。~~

例 8.3. 设 $1 \le n < d$，$D = [0,1]^n \times \{0\}^{d-n} \subset \mathbb{R}^d$，并令 $\mathcal{W}$ 为相对于 D 的 $[0,1]^d$ 的标准二进 Whitney 分解。设 $X = \{x_i\}_i$ 为 $\mathcal{W}$ 中各立方体中心的一个枚举。设 $r_i > 0$ 为一列半径，使得 $\sum_i r_i^n < \infty$，并令 $B^n(x_i, r_i)$ 表示以 x_i 为中心、半径为 r_i、位于前 n 个 n 维坐标中的闭圆盘。定义 $E = D \cup \bigcup_{i=1}^{\infty} B^n(x_i, r_i)$。那么 ~~$\mathcal{H}^n(E) < \infty$，$E$ 是紧的、n-可求长的；然而，若 $E \subset \tilde{E}$ 且 $\mathcal{H}^n(E \setminus E) = 0$，则 $\tilde{E}$ 在 $D \cap E$ 的任意点都没有 n-平面切锥。~~

最后，我们给出一个例子，说明当 $n \ge 2$ 时，推论 7.6 中的 p 取值是精确的：构造一个函数 $F \in W^{1,n}([0,1]^n, \mathbb{R}^{n+1})$，它满足 Lusin 的 N 条件，并且其像在胖 Cantor 集 K 中$[0,1]^n \times \{0\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$没有 n 维切线。

例8.4。设 $(\lambda_i)_{i\in\mathbb{N}}$ 是 $(0,\ 1)$ 中的一个序列，使得 $\prod_{i=1}^{\infty}(1 - \lambda_i) > 0$。令 K_0 为 $[0,1]^n$ 内边长为 $1-\lambda_0$ 的 2^n 个角立方体的并。给定K_j 对任意 $j \ge 0$，~~定义~~ K_{j+1} 为边长为 $1-\lambda_{j+1}$ 的 2^n 个角立方体的并，其中 Q 是 K_j 定义中的任意一个 j 阶角立方体。令 $K = \bigcap_{j=1}^{\infty} K_j$，并注意到 $\mathscr{L}^n(K) > 0$。

现在我们构造一个函数 $f \in W^{1,n}([0,1]^n, \mathbb{R})$，并将所需函数$F$定义为其图像，设 $F(x) = (x, f(x))$。构造 F的思路是，在 K 的补集中小心地“戳出”一些小球，并将它们沿 $(n+1)$-th 坐标

方向映射到高度 $\ell(Q)$。对于上述构造中 K_j 里的每个角立方体 Q，设 $B_Q = B^n(x_Q, \frac{\lambda_{j+1}}{2}\ell(Q))$，其中 x_Q 是 Q 的中心，使得 $B_Q \subset [0,1]^n \setminus K_{j+1}$ 且 $B_Q \cap B_{Q'} = \varnothing$ 对 $Q \neq Q'$ 成立。令 $\mathscr{Q}$ 为构造中所有角立方体的集合，并令 $\{\alpha_Q\}_{Q\in\mathscr{Q}}$ 为 $(0, 1/2)$ 中的一个数列，使得若 Q 是第 k 代立方体，则

$$|\log(\alpha_Q)| \geq \left(2^{nk}k^2\ell(Q)^n\right)^{\frac{1}{n-1}}. \tag{8.1}$$

定义 $f\colon [0,1]^n \to \mathbb{R}$ 为

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0,1]^n \setminus \bigcup_{Q\in\mathscr{Q}} B_Q, \\ \ell(Q)\dfrac{\log\left(|x-x_Q|r(B_Q)^{-1}\right)}{\log(\alpha_Q)} & x \in B_Q \setminus \alpha_Q B_Q,\ Q \in \mathscr{Q}, \\ \ell(Q) & x \in \alpha_Q B_Q,\ Q \in \mathscr{Q}. \end{cases}$$

注意到 f 是连续的，几乎处处可微，并且对几乎所有 $\mathscr{L}^n$，$x \in [0,1]^n$，

$$|\nabla f(x)| = \begin{cases} 0 & x \in [0,1]^n \setminus \left(\bigcup_{Q\in\mathscr{Q}} B_Q \setminus \alpha_Q B_Q\right), \\ \dfrac{\ell(Q)}{|\log(\alpha_Q)|\,|x-x_Q|} & x \in B_Q \setminus \alpha_Q B_Q,\ Q \in \mathscr{Q}. \end{cases}$$

由此可得

$$\begin{aligned} \int_{[0,1]^n} |\nabla f|^n &= \sum_{Q\in\mathscr{Q}} \int_{B_Q\setminus\alpha_Q B_Q} |\nabla f|^n \simeq_n \sum_{Q\in\mathscr{Q}} \frac{\ell(Q)^n}{|\log(\alpha_Q)|^n} \int_{\alpha_Q r(B_Q)}^{r(B_Q)} \frac{1}{r}dr \\ &= \sum_{Q\in\mathscr{Q}} \frac{\ell(Q)^n}{|\log(\alpha_Q)|^{n-1}} < \infty, \end{aligned}$$

其中，最后一个不等式由 (8.1) 得出。因此，函数 $F(x) = (x, f(x))$ 满足 $F \in W^{1,n}([0,1]^n, \mathbb{R}^{n+1})$，且 F 是一个从 $[0,1]^n$ 到其像的同胚。我们知道，F 的像在 K 中的任何一点都没有 n-平面切线，因为对每个 $x \in K$ 和 $0 < r < 1$，$B^{n+1}(x,r) \cap F([0,1]^n)$ 都包含 $[0,1]^n \times \{0\}$ 的一个大子集，以及一个高度为 $\ell(Q)$ 的尖峰，其中某个 Q 满足 $\ell(Q) \simeq r$。

References

[Bat22] David Bate. 利用切空间刻画可整流度量空间。 *Invent.* , ( ): – . [BBI01] *Math.* 230 3 995 1070, 2022 Dmitri Burago、Yuri Burago 和 Sergei Ivanov。 *A Course in Metric Geometry*, *Graduate Studies in Mathematics*第33卷。美国数学学会，普罗维登斯，罗得岛州，2001年。[Bee93] Gerald Beer。 *Topologies on closed and closed convex sets* 268 *Mathematics , and its Applications* 1993 [卷。Kluwer Academic Publishers Group，荷兰多德雷赫特，[。[Bes39] A. S. Besicovitch. 关于线性可测平面点集的基本几何性质（III）。 *Math. Ann.*, 116(1):349–357, 1939. [BET24] Matthew Badger、Max Engelstein 和 Tatiana Toro。缓慢消失的平均振荡：两相自由边界问题中放大极限的不唯一性。 *Vietnam J.Math.*, 52(3):615–625, 2024. [BHS23] David Bate、Matthew Hyde 和 Raanan Schul。一致可整流度量空间：利普希茨像、双边弱几何引理和科罗纳分解。arXiv 预印本，arXiv:2306.12933，2023。[BL15] Matthew Badger 和 Stephen Lewis。局部集合逼近：Mattila-Vuorinen 型集合、Reifenberg 型集合和切集。 *Forum Math. Sigma*, 3 24, 63, 2015 :论文编号 e 。

[BLZ23] Matthew Badger、Sean Li 和 Scott Zimmerman。Carnot群中的1-可整流测度。 *Anal. Geom. Metr. Spaces*, 11(1):20230102, 2023. [BNV19] Matthew Badger、Lisa Naples 和 Vyron Vellis。分析师旅行推销员定理中的霍尔德曲线与参数化。 *Adv. Math.*, 349:564–647, 2019.[BV19] Matthew Badger 和 Vyron Vellis。通过霍尔德参数化研究实维数中的测度几何。 *J. Geom. Anal.*, 29(2):1153–1192, 2019. [BZ20] Zolt ´ ¨ ¨ *Arch.* an M. Balogh 和 *Math. (Basel)* 114 5 561 572, 2020 Roger Zust。利用霍尔德旅行推销员方法进行盒计数。 , ( ): – . [Cal51] Alberto P. Calder ´ *Riv.* on。关于绝对连续函数 *Mat. Univ. Parma* 2 203 的可微性。 , : –213, 1951.[Che99] J. Cheeger。度量测度空间上Lipschitz函数的可微性。 *Geom.* , ( ): – . [DCJ10] E. *Funct. Anal.* 9 3 428 517, 1999 Durand-Cartagena 和 J.A. Jaramillo。度量空间上的逐点Lipschitz函数。 *J. Math. Anal. Appl.*, 363(2):525–548, 2010. [DS97] Guy David 和 Stephen Semmes。 *Fractured fractals and broken dreams*, *Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications*第7卷。Clarendon出版社，牛津大学出版社，纽约，1997年。通过度量与测度研究自相似几何。[Fed69] Herbert Federer。 *Geometric measure theory* 153 *Die Grundlehren der* , *mathematischen Wissenschaften* 1969

Geometric measure theory 153 *Die Grundlehren der* 第 *mathematischen Wissenschaften* 1969

Geometric measure theory 153 *Die Grundlehren der* 卷。Springer-Verlag *mathematischen Wissenschaften* 1969 New York, Inc., 纽约,

Geometric measure theory 153 *Die Grundlehren der* 。[FTV25] Ian *mathematischen Wissenschaften* 1969 Fleschler、Xavier Tolsa 和 Michele Villa。高维中的Carleson ε^2 猜想。 *Invent. Math.*, 241(1):207–307, 2025. [GBIZ23] Miguel Garc´ía-Bravo、Toni Ikonen 和 Zheng Zhu。Banach值Sobolev函数的延拓与逼近。 *Math. Z.*, 305(4):论文编号67，50，2023。[Gro81] Mikhael Gromov。多项式增长群与膨胀映射。 *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (53):53–73, 1981. [Haj96] Piotr Haj·lasz。任意度量空间上的Sobolev空间。 *Potential Anal.*, 5(4):403–415, 1996.[Hei01] Juha Heinonen。 *Lectures on Analysis on Metric Spaces*。Universitext。施普林格，纽约，NY，2001年。[Hei03] Juha Heinonen。 *Geometric embeddings of metric spaces* 90 *Report. Univer-* , *sity of Jyväskylä Department of Mathematics and Statistics* ¨ ¨

Geometric embeddings of metric spaces 90 *Report. Univer-* 卷。于韦斯屈莱大学, *sity of Jyväskylä Department of Mathematics and Statistics* ¨ ¨ 芬兰于韦斯屈莱，2003年。[HKST01] Juha Heinonen、Pekka Koskela、Nageswari Shanmugalingam 和 Jeremy T. Tyson。Banach空间值函数的索博列夫类与拟共形映射。 *J.Anal. Math.*, 85:87–139, 2001. [HKST15] Juha Heinonen、Pekka Koskela、Nageswari Shanmugalingam 和 Jeremy T. Tyson。 *Sobolev spaces on metric measure spaces*， *New Mathematical Monographs*第27卷。剑桥大学出版社，剑桥，2015年。基于上梯度的方法。[HV22] Matthew Hyde 和 Michele Villa。欧几里得空间任意子集的锥点与抛物面点。预印本，2022年。[Kir94] Bernd Kirchheim。可整流度量空间：豪斯多夫测度的局部结构与正则性。 *Proc. Amer. Math. Soc.*, 121(1):113–123, 1994. [LT12] Hans Lindblad 和 Terence Tao。一维非线性波动方程的渐近衰减。 *Anal. PDE*, 5(2):411–422, 2012. [LZ24] Panu Lahti 和 Xiaodan Zhou。倍增度量测度空间上的绝对连续映射。 *Manuscripta Math.*, 173(1-2):1–21, 2024. [Mat95] Pertti Mattila。 *Geometry of sets and measures in Euclidean spaces* 44 *Cam-* , *bridge Studies in Advanced Mathematics*

Geometry of sets and measures in Euclidean spaces 44 *Cam-* 卷。剑桥大学出版社, *bridge Studies in Advanced Mathematics* 剑桥，1995年。分形与可整流性。[Maz85] Vladimir G. Maz'ja。 *Sobolev spaces*。苏联数学丛书。施普林格出版社，柏林，1985年。T. O. Shaposhnikova 从俄文译出。[MM93] Miguel ´Angel Mart´ín 和 Pertti Mattila。豪斯多夫测度、霍尔德连续映射与自相似分形。 *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 114(1):37–42, 1993. [MM 00] Miguel Angel Mart´ín 和 Pertti Mattila。自相似及其他分形集合的参数化。 *Proc. Amer. Math. Soc.*, 128(9):2641–2648, 2000。

[MT10] John M. Mackay 和 Jeremy T. Tyson。 *Conformal dimension* 54 *University*，第 卷。美国数学学会，罗得岛州普罗维登斯，。理论与应用。[NP06] Constantin P. Niculescu 和 Lars-Erik Persson。 *Convex functions and their applications* 23 *CMS Books in Mathematics/Ouvrages de Mathématiques de la*，第 卷。施普林格，纽约，。一种当代方法。[Pan89] Pierre Pansu。Carnot–Carathéodory 度量与秩一对称空间的拟等距。 *Ann. of Math. (2)*，129(1):1–60，1989。[Sem96] Stephen Semmes。关于双 Lipschitz 参数化的不存在性以及有关 A_∞-权的几何问题。 *Rev. Mat. Iberoamericana*，12(2):337–410，1996。[Sha00] Nageswari Shanmugalingam。牛顿空间：将索博列夫空间延拓到度量测度空间。 *Rev. Mat. Iberoamericana*，16(2):243–279，2000。[Sim83] Leon Simon。 *Lectures on geometric measure theory* 3 *Proceedings of the*，第 卷，。澳大利亚国立大学数学分析中心，堪培拉，1983。[SV25] Eve Shaw 和 Vyron Vellis。具有奇异切空间的 Hölder 曲线。，（）：论文编号 e。[Vil20] Michele Villa。下内容 d β *J. Lond.* -正则集的切点与数值。，*Math. Soc. (2)* 101 2 530 555, 2020 （）：–。

Department of Mathematics, University of Connecticut, Storrs, CT 06269-1009
Email address: matthew.badger@uconn.edu

Department of Mathematics, University of California, Davis, Davis, CA 95616
Email address: jkrandel@ucdavis.edu

Department of Mathematics, The University of Tennessee, Knoxville, TN 37966
Email address: vvellis@utk.edu