arXiv:2601.22673v1 [math.DG] 30 Jan 2026

# 具有曲率上界的空间的墙奇异性

KOICHI NAGANO

Abstract. 我们研究具有曲率上界的局部紧、测地完备度量空间中典型的余维一墙奇异性。我们给出余维一奇异性的几何结构定理，以及余维二正则性的几何刻画。这些结果为奇异集的余维至少为二提供了充要条件。

Contents

1. 引言 1 2. 预备知识 8 3. CAT(1)空间的球面结构 11 4. CAT(1)空间的近球面结构 17 5. 局部几何正则性 24 6. 距离坐标映射的正则性 28 7. GCBA空间中奇异集的结构 32 8. GCBA空间上撑架映射的纤维 36 9. 余维一奇异性的几何结构 45 10. 余维二正则性的刻画 52 11. 应用 59 参考文献 62

## 1. Introduction

在亚历山德罗夫几何中，具有上曲率有界的 CBA空间和具有曲率下界的 CBB空间，都通过三角形比较条件对度量空间作出类似定义；然而，它们的性质彼此大相径庭。一般而言，CBA空间的奇异性远强于 CBB空间。例如，与 CBB空间不同，CBA空间的内部可能存在余维一的奇异集。我们关注局部紧且测地完备的 CBA空间中典型的余维一墙奇异性。

日期：2026年1月30日。2020 数学主题分类。53C20、53C23。关键词和短语。CAT($\kappa$) 空间，具有曲率上界的空间。本研究得到 JSPS KAKENHI Grant Numbers 18740023、20K03603、25K06996 的资助。

1.1. **动机**。如果一个度量空间是局部 CAT($\kappa$)，即每个点都有一个 CAT($\kappa$)邻域，则称其为 CBA($\kappa$)（ $\kappa \in \mathbb{R}$ ）。如果某个 $\kappa$使得一个度量空间是 CBA($\kappa$)，则称其为 CBA。若一个 CBA($\kappa$)空间是局部紧、可分且局部测地完备的，则称其为 GCBA($\kappa$)。如果某个 $\kappa$使得一个度量空间是 GCBA($\kappa$)，则称其为 GCBA。Lytchak 与作者 [17, 18] 在 [17], 研究了 GCBA空间的基本几何性质，并在 [18]研究了 GCBA空间的拓扑正则性。本文致力于对它们进行后续研究。

本文中，我们用 dim 表示拓扑维数，用 $\dim_{\mathrm{H}}$ 表示豪斯多夫维数。设 $X$ 为 GCBA空间。则 $\dim X$ 等于 $\dim_{\mathrm{H}} X$，也等于满足以下条件的 $m \in \mathbb{N}$ 的上确界： $X$ 含有一个与欧几里得 $m$-空间$\mathbb{R}^m$ 同胚的开子集[17, （定理 1.1]）；此外， $X$ 的每个相对紧开子集都具有有限拓扑维数（[17, 第 5.3]小节）。

对于 $X$中的点 $x$ ，我们用 $\Sigma_x X$ 表示 $X$中 $x$处的方向空间，用 $T_x X$ 表示 $X$中 $x$ 处的切空间。对每个 $x \in X$，方向空间 $\Sigma_x X$ 是紧的、测地完备的 CAT(1)空间，而切空间 $T_x X$ 是适当的、测地完备的 CAT(0)空间；特别地， $\Sigma_x X$ 和 $T_x X$ 都是 GCBA空间。

对于 $m \in \mathbb{N}$，我们用 $X^m$ 表示由 $X$ 中所有满足 $\dim T_x X = m$ 的点 $x$ 构成的 $m$维部分 $X$。点 $x$ 属于 $X$，当且仅当 $x$ 的每个充分小邻域的拓扑维数都是 $m$ （ [17, 定理 1.2] ）。

如果切空间 $T_x X$ 与某个 $Y$ 的 $\ell^2$-积度量空间 $\mathbb{R}^m \times Y$ 等距，我们就称度量空间 $X$ 中的点 $x$ 为 $m$-正则。$X$ 中的点若非 $m$-正则，则称为 $m$-奇异。对于 $X$ 的子集 $A$，我们用 $R_m(A)$ 表示 $A$ 中所有 $m$-正则点构成的集合，用 $S_m(A)$ 表示 $A$ 中所有 $m$-奇异点构成的集合。我们称 $R_m(A)$ 为 $A$ 中的 $m$-正则集，称 $S_m(A)$ 为 $A$ 中的 $m$-奇异集。注意，若 $\dim X = n$，则 $S_{n+1}(X)$ 与 $X$ 重合（见引理 5.3）。

拓扑空间中的点若有一个与 $\mathbb{R}^m$ 同胚的邻域，则称其为 $m$-流形点。若一个点对于任何 $m$ 都不是 $m$-流形点，则称其为非流形点。对于拓扑空间的开子集 $U$，我们用 $S(U)$ 表示 $U$ 中的拓扑奇异集，即 $U$ 中所有非流形点构成的集合。

作为GCBA空间的几何结构定理，Lytchak与作者 [17, 定理1.2 和1.3] 证明了：若 $X^m$ 非空，则存在 $X$ 的开子集 $M^m$ ，满足以下性质：(1) $M^m$ 是利普希茨 $m$-流形，且在 $X^m$中开且稠密；(2) $\dim_{\mathrm{H}}(\mathrm{cl}_X(X^m) - M^m) \leq m-1$，其中$\mathrm{cl}_X$是 $X$的闭包；(3) $\dim_{\mathrm{H}} S_m(M^m) \leq m-2$；(4) $M^m$具有DC 结构，以及在 $R_m(M^m)$上连续的 $\mathrm{BV}_{\mathrm{loc}}$-黎曼度量。Lytchak与作者[17, 定理1.6] 还证明了：对每个 $m \in \mathbb{N}$， $m$-奇异集$S_m(X)$是可数$(m-1)$-可求长的；特别地，若 $\dim X = n$，则拓扑奇异集 $S(X)$是可数$(n-1)$-可求长的。

让我们考虑以下问题:

**问题 1.1.** 设 $X$ 是一个维数为 $X = n$ 的 GCBA空间。令

$$(*) \qquad \emptyset \subset S_1(X) \subset \cdots \subset S_m(X) \subset \cdots \subset S_{n-1}(X) \subset S_n(X) \subset X$$

$X$ 的过滤由几何奇异集构成。

(1) 研究每个分层 $S_m(X) - S_{m-1}(X)$ 的几何结构。(2) 探究当某个分层 $S_m(X) - S_{m-1}(X)$ 为空时， $X$ 中会发生什么。

根据上文提到的 [17] 中的结构定理，若 $\dim X = n$，则最高分层 $X - S_n(X)$，即 (∗) 中的 $n$-正则集 $R_n(X)$，在 $X$ 中稠密于一个利普希茨 $n$-流形 $M^n$ ，该流形在$X$中开且稠密，并满足 $\dim_{\mathrm{H}}(\mathrm{cl}_X(X^n) - M^n) \leq n-1$ 且 $\dim_{\mathrm{H}} S_n(M^n) \leq n-2$ ；此外， $M^n$ 具有 DC 结构，以及一个在 $R_n(M^n)$ 上连续的 $\mathrm{BV}_{\mathrm{loc}}$-黎曼度量。

本文研究了问题 1.1 在 (∗) 中的第二高分层 $S_n(X) - S_{n-1}(X)$。我们给出了余维一奇异性的几何结构定理，以及余维二正则性的几何刻画。这些结果为奇异集具有至少二的余维提供了充要条件。

本文的研究可以与具有曲率下界的 CBB空间理论相比较。对于每个无边界的 CBB空间，其拓扑奇异集的豪斯多夫余维至少为二（[8, 注 10.6。1]）。我们对 GCBA空间奇异性的研究，似乎是度量几何中首次尝试处理余维一奇异性的几何结构。对于具有曲率下界的 CBB 空间，佩雷尔曼 [26, 27] 和佩雷尔曼 – 彼得鲁宁 [28] 已成功地以不同方法提供了过滤，使得每个分层都是拓扑流形。藤冈 [10, 11] 最近将他们的方法从 CBB空间推广到了 GCBA空间。我们为 GCBA 空间给出过滤（∗）的方法在几何上更加直接，以便进一步阐明其奇异性。

1.2. **墙奇异性**。 设 $X$ 是一个 GCBA空间。对于 $m \in \mathbb{N}$，如果点 $x$ 属于 $X$，且该点是 $m$-奇异的，同时又是 $(m-1)$-正则的，我们称其为 $m$-墙 。对于 $X$的子集 $A$，我们用 $W_m(A)$ 表示 $A$中所有 $m$-墙点构成的集合，并称之为 $A$中的 $m$-墙集 。我们注意到

$$W_m(A) = S_m(A) \cap R_{m-1}(A) = S_m(A) - S_{m-1}(A).$$

本文中，我们用 $\mathcal{H}^m$ 表示 $m$维豪斯多夫测度。令 $T_l^0$ 表示由 $l$ 个点组成、任意两点之间的距离均为 $\pi$的离散度量空间，并令 $T_l^1$表示以 $T_l^0$ 为底的欧几里得锥 $C_0(T_l^0)$。我们注意到，对于 $n$维部分 $X^n$中的每个 $n$-墙点 $x \in W_n(X^n)$，切空间 $T_x X$ 都等距于某个 $l \in \mathbb{N}$ 对应的 $\mathbb{R}^{n-1} \times T_l^1$，其中 $l \geq 3$。

主要结果之一是以下墙奇点定理:

**定理 1.1.** 设 $X$ 是一个 GCBA 空间。那么，对于其中任意一个 $n$墙点 $x \in W_n(X^n)$ $X^n$，以及 $x$ 的任意开邻域 $U$，都存在一个任意接近 $x$ 的点 $x_0 \in W_n(X^n)$，以及一个包含于 $U$ 的 $x_0$ 的开邻域$U_0$，使得 $x_0 \in S(U_0)$，且对于某个满足 $l_0 \geq 3$ 的 $l_0 \in \mathbb{N}$， $U_0$ 与 $\mathbb{R}^{n-1} \times T^1_{l_0}$ 同胚；此外，我们有

$$0 < \mathcal{H}^{n-1}\left(S(U_0)\right) < \infty.$$

注记 1.1. 对于任意满足 $l \geq 4$ 的 $l \in \mathbb{N}$，都存在一个纯 2 维 GCBA空间 $X$，它有一个 2-墙点 $x \in W_2(X)$，在该点处 $T_xX$ 与 $\mathbb{R} \times T^1_l$等距，且其任意开邻域都不同胚于 $\mathbb{R} \times T^1_l$([24, 例 4.4 和 4.5])。这就是我们在定理 1.1 中选择避开 $x$ 的点 $x_0$ 的原因。

如果一个可分度量空间的每个非空开子集的拓扑维数都是 $n$，则称该空间是纯 $n$维的。

由定理 1.1 可知，我们可以如下给出 GCBA空间余维 2 正则性的几何刻画：

**定理 1.2.** 设 $X$ 是一个GCBA 空间，且设 $U$ 是 $X$ 的一个纯 $n$ 维开子集。那么以下条件等价：

(1) $n$墙集 $W_n(U)$ 在 $U$ 中为空；(2) 不存在包含于 $U$ 中的开子集 $U_0$，使得对于某个满足 $l_0 \geq 3$的 $l_0 \in \mathbb{N}$， $U_0$ 与 $\mathbb{R}^{n-1} \times T^1_{l_0}$ 同胚；(3) 维数 $S_n(U) \leq n-2$;(4) 维数$_{\mathrm{H}}$ $S_n(U) \leq n-2$;(5) 维数 $S(U) \leq n-2$;(6) 维数$_{\mathrm{H}}$ $S(U) \leq n-2$。

GCBA空间的余维 2 正则性继承了切空间和方向空间的无穷小性质。

**定理 1.3.** 设 $X$ 是一个GCBA空间，且 $U$ 是 $X$的纯 $n$维开子集。那么以下条件等价：

(1) $S$的维数$(U) \leq n-2$；(2) 对任意 $x \in U$，
$S$的维数$(T_xX) \leq n-2$ $x \in U$；(3) 对任意
$x \in U$， $S$的维数$(\Sigma_xX) \leq n-3$ $x \in U$。

1.3. **松弛墙奇异性**。为了证明第 1.2 小节中提到的结果，我们需要对墙奇异性进行松弛形式的表述。

令 $\delta \in \in(0, 1)$。设 $X$ 是一个 GCBA空间。若点 $x \in X$ 是一个 $(m, \delta)$-受限点（见定义 5.1 和 5.2），则称其为 $(m, \delta)$-正则点。若点 $X$ 不是 $(m, \delta)$-正则点，则称其为 $(m, \delta)$-奇异点。对于 $X$的子集 $A$，记 $R_{m,\delta}(A)$ 为 $A$中所有 $(m, \delta)$-正则点构成的集合，记 $S_{m,\delta}(A)$ 为 $A$中所有 $(m, \delta)$-奇异点构成的集合。我们分别称 $R_{m,\delta}(A)$ 和 $S_{m,\delta}(A)$ 为 $A$ 中的 $(m, \delta)$-正则集和 $A$中的 $(m, \delta)$-奇异集。若 $\dim X = n$，则当 $\delta$ 充分小时，$S_{n+1,\delta}(X)$ 与 $X$重合（见引理 5.3）。

设 $\delta, \epsilon \in \in$(0,1) 满足 $\delta < \epsilon$。若 $X$中的一点是 $(m, \epsilon)$-奇异点，且是 $(m-1, \delta)$-正则点，则称其为 $(m, \delta, \epsilon)$-墙 点。对于 $X$的子集 $A$，记 $W_{m,\delta,\epsilon}(A)$ 为 $A$中所有 $(m, \delta, \epsilon)$-墙点构成的集合，并称其为 $A$中的 $(m, \delta, \epsilon)$-墙集。注意到

$$W_{m,\delta,\epsilon}(A) = S_{m,\epsilon}(A) \cap R_{m-1,\delta}(A) = S_{m,\epsilon}(A) - S_{m-1,\delta}(A).$$

定理 1.1 由以下墙奇点定理推出：

定理 *1.4.* 对每个 $n \in \mathbb{N}$，存在 $\delta^* \in$*(0, 1)* 和 $\delta \in$*(0,* $\delta^*$*)*，满足以下性质：设 $X$ 为一个 *GCBA*空间。那么，对于每个 $x \in W_n$、$\delta$、$\delta^*$*(*$X^n$*)*，以及 $x$ 的每个开邻域 $U$，都存在一个点 $x_0 \in W_n$ 、 $\delta$ 、 $\delta^*$*(*$X^n$*)*，它任意接近 $x$；并且存在 $x_0$ 的一个开邻域 $U_0$，包含于 $U$，使得 $x_0 \in S$*(*$U_0$*)*，且 $U_0$ 同胚于某个 $l_0 \in \mathbb{N}$，其中 $l_0 \geq 3$；此外，我们有 $S$*(*$U_0$*)* $= S_n$、$\delta^*$*(*$U_0$*)*，并且

$$0 < \mathcal{H}^{n-1}(S(U_0)) < \infty.$$

在证明定理 1.2 的同时，我们得到以下结果：

**定理 1.5**。对于每个 $n \in \mathbb{N}$，存在 $\delta^* \in (0,\ 1)$ 以及 $\delta \in (0,\ \delta^*)$满足以下条件：设 $X$ 为一个GCBA 空间，$U$ 为 $X$的一个纯$n$维开子集。那么以下条件等价：

*(1)* $U$ 中的*(*$n, \delta, \delta^*$*)*-墙集 $W_{n,\delta,\delta^*}$*(*$U$*)*为空；*(2)* 不存在包含于 $U$ 中的开子集 $U_0$，使得对某个满足 $l_0 \geq 3$ 的 $l_0 \in \mathbb{N}$，$U_0$ 与 $\mathbb{R}^{n-1} \times T^1_{l_0}$ 同胚，且 $S$*(*$U_0$*)* $= S_n$、$\delta^*$*(*$U_0$*)*以及 $\mathcal{H}^{n-1}$*(*$S$*(*$U_0$*))*为正且有限；*(3)* $\dim S_{n,\delta^*}$*(*$U$*)* $\leq n-2$；*(4)* $\dim_{\mathrm{H}} S_{n,\delta^*}$*(*$U$*)* $\leq n-2$；*(5)* $U$ 中的 $n$-墙集 $W_n$*(*$U$*)*为空。

**1.4. 应用**。我们讨论一些基于上述余维 2 正则性的几何度量刻画所得到的应用。

作者证明了一个适用于 CAT(1) 同调流形 的体积球面定理 （[22, 定理1.2]）：对于每个 $m \in \mathbb{N}$，存在 $\delta \in$(0, $\infty$)，使得若一个紧 CAT(1) 同调 $m$-流形 $Z$ 满足

$$\mathcal{H}^m(Z) < \frac{3}{2}\mathcal{H}^m(\mathbb{S}^m) + \delta,$$

那么 $Z$ 与 $\mathbb{S}^m$同胚。

作为推广，我们得到以下球面定理：

**定理1.6**。对于每个 $m \in \mathbb{N}$，存在 $\delta \in (0, \infty)$，满足以下性质：若一个纯 $m$ 维、紧、测地完备的$\mathrm{CAT}(1)$ 空间 $Z$ 的维数 $S(Z) \leq n-2$ 满足

$$\mathcal{H}^m(Z) < \frac{3}{2}\mathcal{H}^m(\mathbb{S}^m) + \delta, \tag{1.1}$$

那么 $Z$ 与 $\mathbb{S}^m$同胚。

我们用 $\omega_0^n(r)$ 表示 $\mathbb{R}^n$ 中半径为 $r$的度量球的 $n$维豪斯多夫测度。对于度量空间中的点 $p$，我们用$U_r(p)$表示以 $p$为中心、半径为 $r$ 的开度量球。对于度量空间 $X$，我们定义一个非负值 $\mathcal{G}_0^n(X) \in [0,\infty]$，其定义如下：

$$\mathcal{G}_0^n(X) := \limsup_{t\to\infty} \frac{\mathcal{H}^n\left(U_t(p)\right)}{\omega_0^n(t)} \tag{1.2}$$

对于某个基点 $p$，其中 $X$。我们指出，$\mathcal{G}_0^n(X)$ 不依赖于基点的选择。我们称 $\mathcal{G}_0^n(X)$ 为 $X$ 的（上） $n$维欧几里得体积增长。

设 $X$ 是一个适当的、测地完备的 CAT(0)空间。Bishop–Gromov 型的 CAT(0) 空间相对体积比较（ [21, 命题 6.3], [22, 命题 3.2] ）告诉我们，若 $n$ 维部分 $X^n$ 非空，则有以下结论：(1) $\mathcal{G}_0^n(X) \geq 1$；(2) 若$\mathcal{G}_0^n(X)$ 有限，则对任意 $p \in X^n$，(1.2) 中的上极限实际上就是极限。

作者证明了一个针对 *CAT(0)* 同调流形 的渐近拓扑正则性定理（[23, 定理 1.3]）：对每个 $n \in \mathbb{N}$，都存在 $\delta \in (0,\ \infty)$，使得若一个 CAT(0) 同调 $n$流形 $X$ 满足

$$\mathcal{G}_0^n\left(X\right) < \frac{3}{2} + \delta,$$

那么 $X$ 与 $\mathbb{R}^n$同胚。

作为推广，我们得到：

**定理1.7**。 对于每个 $n \in \mathbb{N}$，存在 $\delta \in (0,\ \infty)$，满足以下性质：如果一个纯 $n$维、适当、测地完备的$\mathrm{CAT}(0)$ 空间满足维数 $S(X) \leq n-2$，则

$$\mathcal{G}_0^n\left(X\right) < \frac{3}{2} + \delta, \tag{1.3}$$

那么 $X$ 与 $\mathbb{R}^n$同胚。

**1.5. 墙奇点定理的证明概要**。 我们概要说明定理1.4（关于墙奇异性）的证明。

对于 $n \in \mathbb{N}$，令 $\delta^* \in (0,\ 1)$充分小，并令 $\delta \in (0,\ \delta^*)$足够小以满足 $\delta^*$。令 $X$ 为一个GCBA空间。取一个（$n,\ \delta,\ \delta^*$）-墙点$x \in W_{n,\ \delta,\ \delta^*}(X^n)$，以及 $X$中 $x$ 的一个开邻域 $U$。不妨设 $U$ 是纯 $n$维的。

步骤1. 如果包含在 $U$ 中的 $x$ 的开邻域 $V$ 足够小，那么我们可以找到一个（$n-1,\ \delta$）-撑架映射 $\varphi\colon\ V \to \mathbb{R}^{n-1}$，其满足 $\varphi = (d_{p_1},\ \ldots,\ d_{p_{n-1}})$，其中每个 $d_{p_i}$ 都是来自$p_i$的距离函数。由具有距离坐标的撑架映射的正则性可知，$\varphi$ 在 $V$的所有点处都有微分，并且 $\varphi$ 是（$1+O_n(\delta)$）-利普希茨且（$1+O_n(\delta)$）-开映射，其中 $O_n(\delta)$是一个正数，仅依赖于 $n$ 和 $\delta$，且当 $O_n(\delta)$ 趋于 $\to 0$ 时，$\delta \to 0$趋于.....

步骤2. 对于点 $y \in V$，我们将 $\varphi$ 经过$y$ 的纤维记作 $\Pi_y$，其定义为 $\Pi_y :=\varphi^{-1}(\{\varphi(y)\})$。注意，纤维 $\Pi_y$ 是一致局部几何可缩的（[17, 定理1.11和9.1]）。此外，我们看到，$\Pi_y$ 上的内在度量 $d_{\Pi_y}$ 与 $X$上的环境度量（$1+O_n(\delta)$）-利普希茨等价。如果$V$ 中的一个序列（$y_k$）收敛到 $y$，那么 $d_{\Pi_{y_k}}$ 一致收敛到 $d_{\Pi_u}$。

步骤 3. 根据 Lytchak 开映射定理 [15, 命题 1.1],，我们可以找到一个任意接近给定点 $x$ 的（$n,\delta^*$）-奇异点 $x_0 \in S_{n,\delta^*}(V)$，使得对于某个充分小的开度量球 $U_{r_0}(x_0)$，以及某个 $l_0 \in \mathbb{N}$ 满足 $l \geq 3$，以下条件对所有 $r \in (0, r_0/10)$均成立：(1) 限制映射 $\varphi|_{S_{n,\delta^*}(U_r(x_0))}$ 是到 $\mathbb{R}^n$中的双利普希茨嵌入。(2) 对每个 $y \in S_{n,\delta^*}(U_r(x_0))$，纤维的切片$\Pi_y \cap U_r(x_0)$ 与 $T^1_{l_0}$同胚，且等距于一个以 $y$为单顶点的度量树。(3) 由.....定义的 $U$ 的子集 $Y_r(x_0)$

$$Y_r(x_0) := \bigcup \{\, \Pi_y \cap U_{r_0}(x_0) \mid y \in S_{n,\delta^*}(U_r(x_0)) \,\}$$

在 $U$ 中是开集。根据性质 (1)–(3)，我们定义映射 $\Phi$，从 $Y_r(x_0)$ 到 $\mathbb{R}^{n-1} \times T^1_{l_0}$，定义为 $\Phi(y) := \big(\varphi(y)\ d_{\Pi_y}(y_0,\ y)\big)$。于是，映射 $\Phi$ 是开嵌入。

至此，我们完成了定理 1.4 的证明。

1.6. **本文概要**。第 2 节介绍上曲率有界的度量空间几何中的基本概念。

从第 3 节到第 6 节，我们讨论 CBA空间的局部测地完备开子集。第 3 节研究 CAT(1)空间的多重球面悬挂结构。第 4 节研究一种识别近似多重球面悬挂结构的条件。第 5 节讨论 CBA空间的局部测地完备开子集的局部几何正则性。第 6 节研究这些子集上基于距离坐标的映射的正则性。Lytchak 和作者 [17] 已经讨论过第 3 节到第 6 节中关于 GCBA空间的部分。为了证明我们的墙奇点定理，我们需要对文献 [17] 中的研究稍作推广，尤其是在控制松弛项 $\delta^*$ 和 $\delta$ 时。

从第7节开始，我们研究 GCBA空间的墙奇异性。在第7节中，我们讨论 GCBA空间中奇异集的结构。在第8节中，我们研究具有距离坐标的撑架映射的纤维。在第9节中，我们证明关于墙奇异性的定理1.4和1.1。在第10节中，我们讨论余维 2 正则性的几何刻画，并证明定理 1.2、1.3 和 1.5。在第11节中，我们给出应用，并证明定理1.6和1.7。

**致谢**。作者谨向 Alexander Lytchak 致以谢意，感谢他在连续的私人通信中进行的宝贵讨论。作者还要感谢 Tadashi Fujioka、TakashiShioya 和 Takao Yamaguchi 对这项工作的关注。

## 2. Preliminaries

关于度量几何的基本知识，特别是曲率有上界的空间，请读者参阅 [1], [2], [3], [4], [6], [7], [9] 。

**2.1. 度量空间。** 设 $r \in (0,\infty)$。对于度量空间中的点 $p$，我们用 $U_r(p)$、$B_r(p)$ 和 $S_r(p)$ 分别表示以 $p$为中心、半径为 $r$的开度量球、闭度量球和度量球面。

设 $X$ 是度量为 $d_X$的度量空间。设 $d_X \wedge \pi$ 是 $X$上的 $\pi$-截断度量，其定义为 $d_X \wedge \pi := \min\{d_X, \pi\}$。$X$ 上的欧几里得锥 $C_0(X)$定义为锥 $[0,\infty) \times X/\{0\} \times X$，并赋予欧几里得度量 $d_{C_0(X)}$, 该度量定义如下:

$$d_{C_0(X)}\left([(t_1,x_1)],[(t_2,x_2)]\right)^2 := t_1^2 + t_2^2 - 2t_1t_2\cos\left((d_X \wedge \pi)(x_1,x_2)\right).$$

我们将 $C_0(X)$ 中的一个元素 $[(t,x)]$ 记作 $tx$，并用 0 表示 $C_0(X)$ 的顶点。令 $|tx| := t$。对于度量空间 $Y$ 和 $Z$，我们用$Y * Z$表示 $Y$与 $Z$的球面连接。注意，$C_0(Y * Z)$与 $C_0(Y)$ 和 $C_0(Z)$ 的 $\ell^2$-直积度量空间 $C_0(Y) \times C_0(Z)$ 等距。

**2.2.** 度量空间之间的映射。设 $c \in (0,\infty)$。设 $X$ 是度量为 $d_X$的度量空间，$Y$是度量为 $d_Y$的度量空间。若映射 $f\colon X \to Y$满足对所有 $x_1, x_2 \in X$，$d_Y(f(x_1)\ f(x_2)) \le c d_X(x_1,x_2)$，则称其为 $c$-利普希茨映射。若映射 $f\colon X \to Y$满足 $f$是 $c$-利普希茨映射，且对所有 $x_1, x_2 \in X$有 $d_X(x_1,x_2) \le c d_Y(f(x_1)\ f(x_2))$（因此，$c \in [1,\infty)$），则称其为 $c$-双利普希茨映射。1-双利普希茨同胚就是等距映射，而 1-双利普希茨嵌入就是等距嵌入。若对任意 $r \in (0,\infty)$ 以及满足 $B_{cr}(x)$ 完备的 $x \in X$，$Y$ 中的球 $U_r(f(x))$ 都包含于 $X$中球 $U_{cr}(x)$ 的像 $f(U_{cr}(x))$，则称映射 $f\colon X \to Y$为 $c$-开映射。当 $X$ 完备时，若映射 $f\colon X \to Y$ 是 $c$-开映射，则 $f$ 是满射。此外，当 $X$ 完备时，$c$-利普希茨映射 $f\colon X \to Y$是某个 $c \in [1,\infty)$- 双利普希茨同胚，当且仅当 $f$ 是单射的 $c$- 开映射。

**2.3. 测地度量空间。** 设 $X$ 是一个度量空间。测地线$\gamma\colon I \to X$ 指从区间 $I$到该空间的等距嵌入。对于 $X$中的一对点 $p$，$q$，从 $p$ 到 $q$ 的一条测地线 $pq$ $X$ $p$ $q$，指等距嵌入 $\gamma\colon [a,b] \to X$ 从有界闭区间$[a,b]$ 出发的像，其中 $\gamma(a) = p$ 且 $\gamma(b) = q$。

对于 $r \in (0,\ \infty]$，若度量空间 $X$ 中的任意一对距离小于 $r$ 的点都可以通过 $X$ 中的一条测地线连接，则称该空间为 $r$- 测地。如果一个度量空间是 $\infty$- 测地的，则称它为测地空间。测地度量空间是适当的，当且仅当它完备且局部紧。

对于 $r \in (0,\ \infty]$，度量空间的子集 $C$ 称为 $r$-凸，如果 $C$ 自身作为度量子空间是 $r$-测地的，并且连接 $C$ 中任意两点的每条测地线都包含在 $C$中。度量空间的子集 $C$ 是凸的，当且仅当 $C$ 是 $\infty$-凸的。

**2.4. 度量空间的收敛**。令 $d_{\mathrm{GH}}$ 表示度量空间之间的格罗莫夫–豪斯多夫距离。设 $X$ 为度量为 $d_X$的度量空间， $Y$为度量为 $d_Y$的度量空间。对于 $\epsilon \in (0, \infty)$，若映射 $f\colon X \to Y$满足以下条件，则称其为 $\epsilon$-逼近

$$\sup_{x_1,x_2\in X} |d_Y(f(x_1), f(x_2)) - d_X(x_1, x_2)| < \epsilon,$$

且若$\bigcup_{p\in f(X)} U_r(p)$与 $Y$ 重合。若对 $\epsilon > 0$有 $d_{\mathrm{GH}}(X, Y) < \epsilon$，则存在一个 $2\epsilon$-逼近 $f\colon X \to Y$。反之，若存在一个 $\epsilon$-逼近 $f\colon X \to Y$，则 $d_{\mathrm{GH}}(X, Y) < 2\epsilon$。若度量空间序列 $(X_k)$ 在 Gromov–Hausdorff拓扑下收敛到度量空间 $X$，则称该序列收敛到 $X$，当 $\lim_{k\to\infty} d_{\mathrm{GH}}(X_k, X) = 0$。若带基点的测地度量空间序列 $(X_k, p_k)$ 在带基点的 Gromov–Hausdorff 拓扑下收敛到带基点的度量空间 $(X, p)$，则称该序列收敛到 $(X, p)$，当对于每个 $r \in (0, \infty)$，存在一个 $(0, \infty)$ 中的序列 $(\epsilon_k)$，其满足 $\lim_{k\to\infty} \epsilon_k = 0$，并且对每个 $k$，都存在一个 $\epsilon_k$- 逼近 $\varphi_k\colon B_r(p) \to B_r(p_k)$，且 $\varphi_k(p) = p_k$。

一个非主超滤子 $\omega$ 定义在 $\mathbb{N}$ 上，是一个有限可加概率测度，满足对于每个子集 $A$， $\omega(A) = \{0, 1\}$，且当 $E$ 为有限集时， $\omega(E) = 0$。若 $k \in A$ 满足 $\omega(A) = 1$，则称 $k$ 为 $\omega$-大。若$f\colon \mathbb{N} \to B$ 是紧度量空间 $B$ 中的一个序列，则存在唯一的 $x \in B$，使得对于$x$的每个邻域 $U$，都有 $\omega(f^{-1}(U)) = 1$；这个唯一的 $x$ 称为 $f$的-极限，记作 $\lim_\omega f$。

在本文中，我们固定一个定义在 $\mathbb{N}$上的非主超滤子 $\omega$。设（$X_k$， $p_k$）是一个带基点度量空间序列，其度量为 $d_{X_k}$。我们将 $X_\omega^0$ 记为所有序列（$x_k$）的集合，其中 $x_k \in X_k$ 满足$d_{X_k}$（$p_k$， $x_k$）一致有界。令 $d_\omega\colon X_\omega^0 \times X_\omega^0 \to [0, \infty)$为由 $d_\omega$（（$x_k$），（$y_k$））$:= \lim_\omega d_{X_k}(x_k, y_k)$定义的函数。我们将 $\lim_\omega$（$X_k$， $p_k$）定义为商度量空间（$X_\omega^0$， $d_\omega$）$/d_\omega = 0$，称其为（$X_k$， $p_k$）关于 $\omega$的超极限。对于 $\xi = [(x_k)] \in \lim_\omega X_k$，记作 $x_k \to \xi$。注意，若 $\operatorname{diam} X_k$ 一致有界，则 $\lim_\omega X_k$ 不依赖于 $p_k$的选取。若每个 $X_k$ 都完备，则 $\lim_\omega X_k$也完备。若每个 $X_k$ 都是 $r$-测地的，则 $\lim_\omega X_k$也如此。若每个 $X_k$ 都测地完备，则 $\lim_\omega X_k$也如此。若紧度量空间序列（$X_k$）在 Gromov–Hausdorff拓扑中收敛到某个紧度量空间$X$，则 $\lim_\omega X_k$ 与$X$等距。若带基点的完备局部紧测地度量空间序列（$X_k$， $p_k$）在带基点 Gromov–Hausdorff拓扑中收敛到带基点度量空间（$X$， $p$），则 $\lim_\omega X_k$ 与 $X$ 等距，且 $p_k \to p$。

**2.5. CAT($\kappa$) 空间**。对于 $\kappa \in \mathbb{R}$，我们用 $M_\kappa^n$ 表示曲率为 $\kappa$ 的单连通完备黎曼 $n$流形，并用 $D_\kappa$ 表示 $M_\kappa^n$的直径。若度量空间 $X$ 是 $D_\kappa$-测地的，且其中周长小于 $2D_\kappa$ 的每个测地三角形都不比 $M_\kappa^2$中具有相同边长的比较三角形更厚，则称 $X$ 为 CAT($\kappa$) 空间。

设 $X$ 是 CAT($\kappa$) 空间。 $X$ 中距离小于 $D_\kappa$ 的任意一对点都能由唯一一条测地线连接。设 $p \in X$。对于每个 $r \in (0, D_\kappa/2]$，球 $U_r(p)$ 和 $B_r(p)$ 都是凸的。沿着从 $p$出发的测地线，对于每个 $r \in (0, D_\kappa)$，球 $U_r(p)$ 和$B_r(p)$ 都在自身内部可缩。 $X$ 的每个开子集都是一个 ANR（[13]）。对于 $x$, $y \in U_{D_\kappa}(p) - \{p\}$，我们用 $\angle pxy$表示 $p$处 $px$ 与 $py$之间的角。令 $\Sigma'_pX := \{\, px \mid x \in U_{D_\kappa}(p) - \{p\} \,\}$。 $p$处的角$\angle$ 是 $\Sigma'_pX$上的伪度量。 $p$处的方向空间 $\Sigma_pX$ 定义为商度量空间 $\Sigma'_pX/\angle = 0$的 $\angle$完备化。对于 $x \in U_{D_\kappa}(p) - \{p\}$，我们用 $x'_p \in \Sigma_pX$ 表示 $px$ 在 $p$处的初始方向。 $p$处的切空间 $T_pX$ 定义为 $C_0(\Sigma_pX)$。空间 $\Sigma_pX$ 是 CAT(1) 空间，而空间 $T_pX$ 是 CAT(0) 空间。事实上，对于度量空间 $\Sigma$，欧几里得锥 $C_0(\Sigma)$ 是 CAT(0) 空间，当且仅当 $\Sigma$ 是 CAT(1) 空间。对于两个度量空间 $Y$和 $Z$，球面连接 $Y * Z$ 是 CAT(1) 空间，当且仅当 $Y$和 $Z$ 都是 CAT(1) 空间。

设 $\lim_\omega(X_k, p_k)$ 为一列带基点 CAT($\kappa$) 空间的超极限。若对于某个 $r \in (0, D_\kappa/2)$，我们取 $x_k, y_k \in U_{D_\kappa/2}(p_k) - B_r(p_k)$，则有如下角度的上半连续性:

$$\lim_\omega \angle p_k x_k y_k \le \angle pxy. \tag{2.1}$$

**2.6. 测地完备 CAT($\kappa$) 空间。** 关于 GCBA 空间（即具有上曲率界的局部紧、可分、局部测地完备度量空间）的基本性质，读者可参阅 [17] 。回顾一下，若 CAT($\kappa$) 空间中每条定义在紧区间上的测地线都能延拓为一条局部测地线，使其越过两个端点继续延伸，则称该空间为局部测地完备（或具有测地线延拓性质）。若 CAT($\kappa$) 空间中的每条测地线都能延拓为定义在 $\mathbb{R}$ 上的局部测地线，则称该空间测地完备。每个局部测地完备的完备 CAT($\kappa$) 空间都是测地完备的。紧 CAT($\kappa$) 空间的测地完备性在 Gromov–Hausdorff 极限下保持（适当 CAT($\kappa$) 空间的测地完备性则在带基点的 Gromov–Hausdorff 极限下保持）。

设 $X$ 是一个适当且测地完备的 CAT($\kappa$)空间。对于每个$p \in X$，空间 $\Sigma_pX$ 是紧且测地完备的，而 $T_pX$是适当且测地完备的。事实上，对于 CAT(1)空间 $\Sigma$，欧几里得锥 $C_0(\Sigma)$测地完备，当且仅当 $\Sigma$ 测地完备且不是单点集。对于两个 CAT(1)空间 $Y$和 $Z$，球面连接 $Y * Z$ 测地完备，当且仅当$Y$ 和 $Z$ 测地完备且都不是单点集。

**2.7. CAT($\kappa$)空间的维数。** $_{\mathrm{G}}$的几何维数 dim定义为从CBA空间类到$\mathbb{N} \cup \{\infty\}$ 的函数中满足以下条件的最小函数：(1) $\dim_{\mathrm{G}} X = 0$ 当且仅当 $X$ 是离散的；(2) 对所有 $p \in X$，$\dim_{\mathrm{G}} X \ge 1 + \dim_{\mathrm{G}} \Sigma_pX$。在这种情况下，我们有

$$\dim_{\mathrm{G}} X = 1 + \sup_{p \in X} \dim_{\mathrm{G}} \Sigma_pX.$$

设 $X$ 是一个CBA空间。那么，$\dim_{\mathrm{G}} X$ 等于 $X$的紧子集 $B$ 的覆盖维数 $\dim B$ 的上确界；此外，如果$X$ 可分，则$\dim_{\mathrm{G}} X = \dim X$ （[12, 定理A]）。

设 $\lim_\omega(X_k, p_k)$ 是一列带基点的 CAT($\kappa$) 空间的超极限。则有以下（[15, 引理 11.1]）：

$$\dim_{\mathrm{G}} \left(\lim_\omega (X_k, p_k)\right) \leq \lim_\omega \dim_{\mathrm{G}} X_k. \tag{2.2}$$

设 $X$ 为 GCBA空间。 $X$的每个相对紧开子集都具有有限覆盖维数（见 [17, 第 5.3]小节）。覆盖维数 $\dim X$ 等于 $X$的豪斯多夫维数 $\dim_{\mathcal{H}} X$，并且等于满足以下条件的 $m$ 的上确界： $X$ 具有一个开子集 $U$，该子集与 $\mathbb{R}^m$ 同胚（[17,定理 1.1]）。

我们称一个可分度量空间是纯维的，如果它对于某个 $n$是纯 $n$维的。

我们有以下刻画（[18,命题 8.1]）：

**命题 2.1**。 （[18]）设 $X$ 为一个适当的、测地完备的、测地$\mathrm{CAT}(\kappa)$ 空间。设 $W$ 为 $X$的一个连通开子集。则以下各条件等价:

(1) $W$ 是纯维的; (2) 对每个 $p \in W$，空间 $\Sigma_p X$ 都是纯维的; (3) 对每个 $p \in W$，空间 $T_p X$ 都是纯维的。

我们还知道以下性质（[22, 引理 2.3]）：

**引理 2.2.** ([22]) 设 $(X_k, p_k)$ 是带基点的适当测地 $\mathrm{GCBACAT}(\kappa)$ 空间序列，并在带基点的 *Gromov–Hausdorff* 拓扑下收敛到某个带基点的度量空间$(X, p)$ 。若所有空间 $X_k$都是纯 $n$ 维的，则空间 $X$ 也是纯 $n$ 维的。

## 3. Spherical structure of $\mathrm{CAT}(1)$ spaces

本节中，我们为 CAT(1) 空间提出一个条件，以寻找多重球面悬挂结构。关于 Lytchak 对测地完备 CAT(1) 空间的相关研究，参见 [15] 。

**3.1. CAT(1) 空间的月牙引理**。 设 $Z$ 是一个度量为 $d_Z$ 的 CAT(1) 空间。若对于每个 $(z_1, z_2) \in A_1 \times A_2$，都有 $d_Z(z_1, z_2) = \pi/2$, 则称 $Z$ 的两个子集 $A_1, A_2$ 垂直。

设 $A_1, A_2$ 是 $Z$ 的相互垂直子集。设 $A_1 * A_2$ 是度量子空间 $A_1$ 和 $A_2$ 的球面连接。我们定义连续映射 $\Theta$: $A_1 * A_2 \to Z$，其定义为 $\Theta(t, z_1, z_2) := \gamma_{z_1 z_2}(t)$，其中 $\gamma_{z_1 z_2}$: $[0, \pi/2] \to Z$ 是一条从 $z_1$ 到 $z_2$ 的（唯一）测地线。我们称 $\Theta$ 为连接 $A_1$ 和 $A_2$ 的母线映射。设 $z_1 \in A_1$ 和 $z_2 \in A_2$, 并设 $z_1^* = [0, z_1, \cdot)$ 和 $z_2^* = [\pi/2, \cdot, z_2)$ 分别为 $A_1 * A_2$ 中对应于 $z_1$ 和 $z_2$ 的点。对于 $A_1 * A_2$ 中长度为 $\pi/2$ 的测地线 $z_1^* z_2^*$，母线映射 $\Theta$ 将 $z_1^* z_2^*$ 等距地映射到 $z_1 z_2$ 。

我们回顾以下月牙引理，其证明与 Ballmann–Brin 所给出的原始月牙引理类似，可参见 $[5,$ 引理 2.5$]$。

**引理 3.1.** 设 $Z$ 是一个$\mathrm{CAT}(1)$ 空间。设 $\{p_1,q_1\}$ 和 $\{p_2,q_2\}$ 是 $Z$ 的相互垂直子集。假设 $d_Z(p_1,q_1)\geq\pi$。那么连接 $\{p_1,q_1\}$和 $\{p_2,q_2\}$ 的母线映射 $\Theta_0\colon \{p_1,q_1\}*\{p_2,q_2\}\to Z$是一个等距嵌入。此外，若 $d_Z(p_2,q_2)<\pi$，则 $\{p_1,q_1\}$和 $p_2q_2$垂直，连接 $\{p_1,q_1\}$ 和 $p_2q_2$ 的母线映射 $\Theta\colon \{p_1,q_1\}*p_2q_2\to Z$也是一个等距嵌入。

月牙引理可推广如下（$[15,$ 引理 4.1$]$）：

**引理 3.2.** ($[15]$) 设 $Z$ 是一个$\mathrm{CAT}(1)$ 空间。若 $C_1$ 和 $C_2$ 是相互垂直的闭 $\pi$-凸子集，且属于 $Z$，则母线映射$\Theta\colon C_1*C_2\to Z$是一个等距嵌入。

3.2. **CAT(1)空间中的悬挂架**。设 $Z$ 是具有度量 $d_Z$的CAT(1)空间。若存在另一点 $q_0$ 属于 $Z$，使得对每一个 $z\in Z$ 都有，则称 $Z$ 中的点 $p_0$ 为 $Z$ 中的悬挂器

$$d_Z(p_0,z)+d_Z(z,q_0)=\pi. \tag{3.1}$$

在此情形下，我们称 $p_0$ 与 $q_0$ 彼此互为对踵 。由(3.1)，若 $p_0$与 $q_0$是 $Z$ 中互为对径的悬垂，则 $d_Z(p_0,q_0)=\pi$。

**例3.1**。若 $Z$ 等距于某个CAT(1)空间 $Z_0$的球面悬挂 $\mathbb{S}^0*Z_0$，则 $Z$ 中带有$\mathbb{S}^0=\{p_0,q_0\}$ 的悬挂点 $p_0,q_0$ 是 $Z$中互为对径的悬垂。

设 $z$ 为 $Z$中的一个点。若 $d_Z(z,\bar z)\geq\pi$，则称 $Z$ 中的点 $\bar z$ 为$z$ 的对径点。 $z$ 的所有对径点所成之集记作Ant($z$)，并称为 $z$的对跖点集 。若 $Z$ 测地完备，则只要$Z$ 不是单点空间，对每一个 $z\in Z$， $z$ 的对跖点集Ant($z$)非空。

**引理 3.3.** 设 $Z$ 是一个 $\mathrm{CAT}(1)$ 空间。假设 $Z$中存在互为对踵的悬挂架 $p_0$ 和 $q_0$ 。则有以下结论：

*(1)* 对跖点集$(p_0)=\{q_0\}$ 且对跖点集$(q_0)=\{p_0\}$；此外，对每个点$z\in Z-\{p_0,q_0\}$，点 $p_0$和 $q_0$之间都存在一条经过 $z$、长度为 $\pi$ 的测地线；*(2)* 对所有满足 $d_Z(z_1,z_2)\geq\pi$的 $z_1,z_2\in Z$，都有

$$d_Z(z_1,p_0)+d_Z(p_0,z_2)=\pi,\quad d_Z(z_1,q_0)+d_Z(q_0,z_2)=\pi; \tag{3.2}$$

特别地，$\mathit{diam}\,Z=\pi$。

证明。由于 $d_Z(p_0,q_0)=\pi$，由（3.1）可得 Ant$(p_0)=\{q_0\}$ 且 Ant$(q_0)=\{p_0\}$。令 $z\in Z-\{p_0,q_0\}$。那么 $z\in U_\pi^*(p_0)\cap U_\pi^*(q_0)$。由（3.1）可知，测地线 $p_0z$和 $zq_0$ 的并集 $p_0z\cup zq_0$ 是一条长度为 $\pi$ 、连接 $p_0$ 与 $q_0$ 的测地线。取 $z_1,z_2\in Z$，使得 $d_Z(z_1,z_2)\geq\pi$。由（3.1），有 $d_Z(p_0,z_1)+d_Z(z_1,q_0)=\pi$且$d_Z(p_0,z_2)+d_Z(z_2,q_0)=\pi$。这些等式推出（3.2）。□

注记 3.1。设 $p_0, q_0 \in Z$满足 $d_Z(p_0, q_0) = \pi$。若等式（3.2）对所有满足 $d_Z(z_1, z_2) \geq \pi$的 $z_1, z_2 \in Z$均成立，则 Ant($p_0$) $= \{q_0\}$且 Ant($q_0$) $= \{p_0\}$。一般而言，逆命题不成立。

注3.2。假设 $Z$ 是测地完备的。令 $p_0, q_0 \in Z$满足 $d_Z(p_0, q_0) = \pi$。那么以下条件等价：

(1) $p_0$ 和 $q_0$ 在 $Z$中互为对径的悬垂；(2) Ant($p_0$) $= \{q_0\}$ 且 Ant($q_0$) $= \{p_0\}$；(3) 对所有满足 $d_Z(z_1, z_2) \geq \pi$的 $z_1, z_2 \in Z$，等式(3.2)均成立。

3.3. **CAT(1)空间的圆形子集**。设 $Z$ 是度量为 $d_Z$的CAT(1)空间。若子集 $A$ 满足 $A$ 包含$\bigcup_{p\in A}$ Ant($p$)，则称其为对称的 。

Lytchak [15] 研究了由测地完备 CAT(1) 空间中对称子集的存在性所导出的刚性性质。我们不采用测地完备性，而是引入以下条件。

我们称 $Z$ 的对称子集 $A$ 为圆，如果$A$ 中的每一个点都是 $Z$中的悬挂器。由引理 3.3 可知，若 $Z$ 具有一个圆形子集，则直径 $Z = \pi$。$Z$ 的子集 $A$ 为圆，当且仅当对每一个 $p \in A$，存在唯一的点 $q \in A$，使得 $p$ 与 $q$是 $Z$中互为对径的悬垂。

**例 3.2.** 假设 $Z$ 等距分裂为球面连接$Z_1 * Z_2$。两个因子 $Z_1$ 与 $Z_2$ 在 $Z$ 中均为对称的。此外假设 $Z_1$与 $\mathbb{S}^{m-1}$等距。对 $l \in \{1, \ldots, m\}$，设 $Z_1^{l-1}$是 $Z_1$ 的一个子集，使得 $Z_1^{l-1}$与 $\mathbb{S}^{l-1}$等距。则 $Z_1^{l-1}$为圆。

对于 $Z$的子集 $A$，我们用 $A^\perp$ 表示 $Z$ 中满足$d_Z(z, A) \geq \pi/2$的所有点 $z$ 所成的集合，并称之为 $A$的极集 。若 $C$是 $Z$的闭 $\pi$-凸子集，则对每一个 $z \in Z - \left(C \cup C^\perp\right)$，在 $C$中存在唯一垂足 $z_0$，满足 $d_Z(z, z_0) = d_Z(z, C)$（参见 [6, 命题 II.2.4 与习题 II.2.6]）。

**引理 3.4**。设 $Z$ 是一个 $\mathrm{CAT}(1)$ 空间。设 $C$ 是 $Z$ 的一个圆的、闭的 $\pi$-凸子集。对于 $Z - \left(C \cup C^\perp\right)$ 中的点 $z$，令 $z_0$ 为 $C$ 中满足 $d_z$（$z$，$z_0$）$= d_Z$（$z$，$C$）的唯一垂足。则存在 $Y^\perp$ 中的点 $z_0^\perp$，使得 $z \in z_0 z_0^\perp$ 且 $d_Z\left(z_0、z_0^\perp\right) = \pi/2$。特别地，如果 $Z - C$ 非空，则 $C^\perp$ 也非空。

证明。由 $z_0$ 的选取可知 $d_Z(z,\ z_0) \in (0,\ \pi/2)$。由于 $C$ 是圆的，存在唯一的点 $\bar{z}_0 \in C$，使得 $z_0$ 和 $\bar{z}_0$ 在 $Z$ 中是互为对径的悬垂。由引理 3.3 可知，测地线 $z_0 z$ 和 $z\bar{z}_0$ 的并集 $z_0 z \cup z\bar{z}_0$ 是一条长度为 $\pi$、连接 $z_0$ 与 $\bar{z}_0$ 的测地线 $z_0\bar{z}_0$。取 $z_0$ 与 $\bar{z}_0$ 之间、位于 $z_0\bar{z}_0$ 中的中点 $z_0^\perp$。$C$ 的 $\pi$-凸性意味着 $z_0^\perp \in Z - C$。为证明 $z_0^\perp \in C^\perp$，取 $p \in C - \{z_0, \bar{z}_0\}$。对于某个唯一的 $q \in C - \{z_0, \bar{z}_0\}$，点 $p$ 和 $q$ 在 $Z$ 中互为对径的悬垂。长度为 $< \pi$ 的测地线 $z_0 p$ 和 $z_0 q$ 包含于 $C$ 中。由 $z_0$ 的选取可得

$\angle_{z_0}\left(p,\ z_0^{\perp}\right) \geq \pi/2$ 和 $\angle_{z_0}\left(q,\ z_0^{\perp}\right) \geq \pi/2$。因此 $d_Z\left(p,\ z_0^{\perp}\right) \geq \pi/2$ 且 $d_Z\left(q,\ z_0^{\perp}\right) \geq \pi/2$。因此 $z_0^{\perp} \in C^{\perp}$。□

存在一个圆的闭凸子集，这使得我们得到一个分裂。

**引理 3.5.** 设 $Z$ 是一个$\mathrm{CAT}(1)$空间。设 $C$ 是 $Z$的一个圆的闭凸子集 $\pi$。那么 $C$ 与 $C$ 的极集 $C^{\perp}$ 垂直。此外，连接 $C$ 与 $C^{\perp}$的母线映射 $\Theta\colon\ C * C^{\perp} \to Z$ 是一个等距映射。

证明。 我们首先证明 $C$ 与 $C^{\perp}$ 垂直。取 $p \in C$和 $z \in C^{\perp}$。选取 $q \in C$ ，使得 $p$ 和 $q$ 在 $Z$中是互为对径的悬垂。由引理 3.3，测地线 $pz$和 $zq$ 的并 $pz \cup zq$ 是一条长度为 $\pi$ 、连接 $p$ 与 $q$的测地线。根据$z \in C^{\perp}$ 的选取，我们得到 $d_Z(p, z) = \pi/2$。因此 $C$与 $C^{\perp}$ 垂直。

接下来证明 $C^{\perp}$ 是闭的且为 $\pi$-凸。由于 $C$ 是闭的，因此 $C^{\perp}$ 也如此。取 $z_1,\ z_2 \in C^{\perp}$，使得 $d_Z(z_1,\ z_2) < \pi$。选取 $p_0,\ q_0 \in C$，使得 $p_0$ 和 $q_0$ 是 $Z$ 中互为对径的悬垂。由于 $C$ 和 $C^{\perp}$ 垂直，我们已经知道，对所有 $i \in \{1, 2\},\ d_Z(p_0,\ z_i) = \pi/2$ 且 $d_Z(q_0,\ z_i) = \pi/2$。由引理 3.1 可知，$\{p_0, q_0\}$ 和 $z_1 z_2$ 垂直。因此，$z_1 z_2$ 包含于 $C^{\perp}$ 中。这意味着 $C^{\perp}$ 是 $\pi$-凸的。

根据引理 3.2，母线映射 $\Theta\colon\ C * C^{\perp} \to Z$ 是一个等距嵌入。由引理 3.4 可知，$\Theta$ 是满射。□

注记 3.3. 若 $Z$ 是测地完备的，且 $C$ 是 $Z$的一个对称的闭 $\pi$-凸子集，则 $C$ 与 $C^{\perp}$ 垂直，且母线映射 $\Theta\colon\ C * C^{\perp} \to Z$ 是一个等距（[15, 命题4.2]）。

**3.4. CAT(1)空间中的多重悬垂。** 设 $Z$ 是一个具有度量 $d_Z$的CAT(1)空间。设 $m \in \mathbb{N}$。我们称 $Z$ 中点的一个 $m$元组（$p_1$，……，$p_m$）为 $Z$ 中的一个 $m$-悬挂器，如果存在 $Z$中点的另一个 $m$元组（$q_1$，……，$q_m$）满足以下条件：

(1) 对所有 $i \in \{1, \ldots, m\}$，点 $p_i$与 $q_i$是 $Z$中互为对径的悬垂；
(2) 对所有互不相同的 $i,\ j \in \{1, \ldots, m\}$，我们有 $d_Z\ (p_i,\ p_j) = \pi/2$，$d_Z\ (p_i,\ q_j) = \pi/2$，以及 $d_Z\ (q_i,\ q_j) = \pi/2$。

在这种情况下，我们称（$p_1$，……，$p_m$）与（$q_1$，……，$q_m$）互为对踵。

**例3.3.** 假设 $Z$ 等距分裂为某个CAT(1)空间 $Z_0$的 $m$重球面纬悬 $\mathbb{S}^{m-1} * Z_0$。设（$p_1$，……，$p_m$）是 $\mathbb{S}^{m-1}$中的一组 $m$元标准正交点。对 $i \in \{1, \ldots, m\}$，令$q_i \in \mathbb{S}^{m-1}$ 为 $p_i$在 $\mathbb{S}^{m-1}$ 中的唯一对径点。则（$p_1$，……，$p_m$）与（$q_1$，……，$q_m$）是 $Z$中互为对跖的 $m$-悬挂架。

由 $m$-悬挂架的存在性，我们得到一个 $m$ 重球面悬挂结构。我们从以下内容开始：

**引理 3.6.** 设 $Z$ 是一个 $\mathrm{CAT}(1)$ 空间。设 $p_0$ 和 $q_0$ 是 $Z$中的互为对跖的悬挂架。假设 $p_1$ 和 $q_1$ 是 $Z$ 中的互为对跖的悬挂架，且 $d_Z(p_0, p_1) \in (0, \pi)$。那么，存在一个圆的、闭的 $\pi$-凸子集 $C_1$，它包含 $X$ 中的 $p_0$、$q_0$ 和 $p_1$、$q_1$，且 $C_1$ 与 $\mathbb{S}^1$等距。

证明。令 $C_1 := p_0p_1 \cup p_1q_0 \cup q_0q_1 \cup q_1p_0$。由引理 3.3 可知，对于所有不同的 $i, j \in \{0, 1\}$，并集 $p_ip_j \cup p_jq_i$和 $p_iq_j \cup q_jq_i$都是长度为 $\pi$、连接 $p_i$ 和 $q_i$的测地线。因此，$Y_1$ 与 $\mathbb{S}^1$等距。

我们证明 $C_1$的圆形性。取 $p \in C_1$。由对称性，不妨设 $p \in p_0p_1$。由于 $C_1$ 与 $\mathbb{S}^1$等距，存在唯一的点$q \in q_0q_1$，使得 $d_Z(p, q) = \pi$。只需证明 $p$和 $q$是 $Z$中的互为对径的球面点。取 $z \in Z - C_1$。由引理 3.3 可知，并集 $p_0z \cup zq_0$和 $p_1z \cup zq_1$是长度为$\pi$的测地线。在闭半球 $\mathbb{S}^2_+$上，存在一点 $\tilde{z}$ 位于 $\mathbb{S}^2_+$的内部，且存在一些点 $\tilde{p}_0, \tilde{p}_1, \tilde{q}_0, \tilde{q}_1$ 位于 $\mathbb{S}^2_+$的边界赤道上，使得 $\triangle\tilde{p}_0\tilde{p}_1\tilde{z}$和 $\triangle\tilde{q}_0\tilde{q}_1\tilde{z}$分别是 $\triangle p_0p_1z$和$\triangle q_0q_1z$的比较三角形。令 $\tilde{p} \in \triangle\tilde{p}_0\tilde{p}_1\tilde{z}$和 $\tilde{q} \in \triangle\tilde{q}_0\tilde{q}_1\tilde{z}$分别为 $p \in \triangle p_0p_1z$ 和 $q \in \triangle q_0q_1z$的比较点。在 $\mathbb{S}^2_+$ 上，我们有$d_{\mathbb{S}^2}(\tilde{p}, \tilde{z}) + d_{\mathbb{S}^2}(\tilde{z}, \tilde{q}) = \pi$，其中 $d_{\mathbb{S}^2}$ 是 $\mathbb{S}^2$上的标准度量。这与 $Z$的 CAT(1)性质共同推出 $d_Z(p, z)+d_Z(z, q) = \pi$。因此，$p$ 和 $q$ 是 $Z$中的互为对径的球面点。□

我们将证明以下结论：

**命题 3.7.** 设 $Z$ 是一个$\mathrm{CAT}(1)$ 空间。假设在 $Z$中存在互为对跖的 $m$-悬挂架 $(p_1, \ldots, p_m)$ 和 $(q_1, \ldots, q_m)$。那么存在一个圆的、闭的 $\pi$-凸子集 $C_{m-1}$，它包含在 $Z$ 中，并包含 $(p_1, \ldots, p_m)$ 和 $(q_1, \ldots, q_m)$，且 $C_{m-1}$ 与 $\mathbb{S}^{m-1}$等距。此外，$Z$ 等距分裂为球面连接 $C_{m-1} * C^{\perp}_{m-1}$，其中$C^{\perp}_{m-1}$ 是 $C_{m-1}$的极集。

证明。通过对 $m$作归纳法即可完成证明。$m = 1$ 的情形显然成立。假设该命题对 $m$成立。设 $(p_1, \ldots, p_m, p_{m+1})$ 和 $(q_1, \ldots, q_m, q_{m+1})$ 是 $Z$中的互为对跖的 $(m+1)$-悬挂架。对于 $i \in \{1, \ldots, m, m+1\}$，令 $p_{+i} := p_i$，$p_{-i} := q_i$。根据归纳假设，我们可以找到一个圆的、闭的 $\pi$-凸子集$C_{m-1}$，它包含在 $X$中并包含 $(p_{\pm 1}, \ldots, p_{\pm m})$，且 $Z$等距分裂为球面连接 $C_{m-1} * C^{\perp}_{m-1}$，其中 $C_{m-1}$ 与 $\mathbb{S}^{m-1}$等距。

现在证明 $\{p_{+(m+1)}, p_{-(m+1)}\}$ 和 $C_{m-1}$ 垂直。若 $m = 1$，则由定义可得此结论。令 $m \geq 2$。取$z \in C_{m-1}$。由于 $C_{m-1}$与 $\mathbb{S}^{m-1}$等距，对于某个 $i \in \{\pm 1, \ldots, \pm m\}$，有 $d_Z(p_i, z) \leq \pi/2$。不妨设 $d_Z(p_{+1}, z) \leq \pi/2$。作为 $C_{m-1}$的赤道，我们找到 $Z$的一个圆形、闭的 $\pi$-凸子集 $C_{m-2}$，使其包含 $(p_{\pm 2}, \ldots\ldots, p_{\pm m})$，且 $C_{m-2}$与$\mathbb{S}^{n-2}$等距。令 $z_0$为 $C_{m-2}$中的唯一垂足，满足 $d_Z(z, z_0) = d_Z(z, C_{m-2})$。根据假设，还存在另一个圆形、闭的 $\pi$-凸子集 $C'_{m-1}$

$Z$的一个圆形、闭的-凸子集，包含 $(p_{\pm 2}, \ldots\ldots, p_{\pm(m+1)})$，且 $C'_{m-1}$与 $\mathbb{S}^{m-1}$等距。由于 $C_{m-2}$也是 $C'_{m-1}$的赤道，因此有 $d_Z(p_{\pm(m+1)}, z_0) = \pi/2$。考察 $\triangle p_{\pm(m+1)} p_{+1} z_0$，得到 $d_Z(p_{\pm(m+1)}, z) = \pi/2$；事实上，根据引理 3.1，连接 $\{p_{+(m+1)}, p_{-(m+1)}\}$ 与 $p_{+1}z_0$ 的母线映射是一个等距嵌入。因此 $\{p_{+(m+1)}, p_{-(m+1)}\}$ 和 $C_{m-1}$ 垂直。

由引理 3.2，我们得出母线映射

$$\Theta_m \colon \{p_{+(m+1)}, p_{-(m+1)}\} * C_{m-1} \to Z$$

连接 $\{p_{+(m+1)}, p_{-(m+1)}\}$ 和 $C_{m-1}$ 是一个等距嵌入。令$C_m$ 为 $\Theta_m$的像。它与 $\mathbb{S}^m$等距。引理 3.6 表明 $C_m$ 是 $Z$的一个圆的、闭的 $\pi$-凸子集，而引理 3.5 表明 $Z$ 等距分裂为 $C_m * C_m^{\perp}$。□

**3.5. CAT(1)空间球面分裂的进展。** 设 $Z$是一个度量为 $d_Z$的CAT(1)空间。若 $Z$ 具有一个 $m$-悬挂架，则命题 3.7 表明 $Z$ 等距分裂为一个 $m$重球面悬挂。下一个引理给出了一个判据，用于判断空间 $Z$ 是否分裂为$(m+1)$重球面悬挂。

**引理 3.8.** 设 $Z$是一个 $\mathrm{CAT}(1)$ 空间。设 $(p_1, \ldots, p_m)$ 是 $Z$中的一个 $m$-悬挂器。假设存在 $Z$ 中的一个悬挂器 $p_0$，满足

$$\sum_{i=1}^{m} \cos^2 d_Z(p_i, p_0) < 1. \tag{3.3}$$

于是我们找到 $p_{m+1} \in Z$，使得$(m+1)$-元组$(p_1, \ldots, p_m, p_{m+1})$是 $Z$中的一个$(m+1)$-悬挂器。

证明。由命题 3.7，存在 $Z$的一个圆的、闭的 $\pi$-凸子集$C_{m-1}$，它包含$(p_1, \ldots, p_m)$，使得 $Z$分裂为 $C_{m-1} * C_{m-1}^{\perp}$，其中 $C_{m-1}$ 与 $\mathbb{S}^{m-1}$等距。取 $Z$ 中与 $p_0$互为对踵的悬挂器 $q_0$。假设(3.3)蕴含 $p_0 \in Z - C_{m-1}$ 与 $q_0 \in Z - C_{m-1}$。

若 $p_0 \in C_{m-1}^{\perp}$，则 $q_0 \in C_{m-1}^{\perp}$，从而由引理 3.5，$(m+1)$-元组$(p_1, \ldots, p_m, p_0)$是$Z$中的一个$(m+1)$-悬挂架。

接下来我们假设 $p_0 \notin C_{m-1}^{\perp}$。令 $z_0 \in C_{m-1}$ 为唯一垂足，满足 $d_Z(p_0, z_0) = d_Z(p_0, C_{m-1})$，并取 $\bar{z}_0 \in C_{m-1}$，使得 $z_0$和$\bar{z}_0$ 在 $Z$中互为对径的悬垂。由引理 3.4，存在$p_{m+1} \in C_{m-1}^{\perp}$，满足 $p_0 \in z_0 p_{m+1}$和 $d_Z(z_0, p_{m+1}) = \pi/2$。我们用$C_1$ 表示四条测地线 $p_0 z_0$、$z_0 q_0$、$q_0 \bar{z}_0$和 $\bar{z}_0 p_0$的并。它与 $\mathbb{S}^1$等距。引理 3.6 得出 $C_1$的圆形性。因此，存在 $q_{m+1} \in C_1 \cap C_{m-1}^{\perp}$，使得 $p_{m+1}$ 和 $q_{m+1}$ 在 $Z$中互为对径的悬垂。由引理 3.5 可知，$(m+1)$-元组 $(p_1, \ldots, p_m, p_{m+1})$ 是 $Z$中的一个$(m+1)$-悬挂器。□

**3.6. CAT(1)空间的球面核。** 设 $Z$ 是一个度量为 $d_Z$ 的 CAT(1)空间。我们用 $C_Z$ 表示 $Z$ 中所有球面点的集合。我们称 $C_Z$ 为 $Z$ 的球面核。集合 $C_Z$ 可能为空。

作为命题 3.7 的一个应用，我们得出以下结论：

**命题 3.9.** 设 $Z$ 是一个$\mathrm{CAT}(1)$ 空间。假设 $C_Z$ 的球面核非空。那么 $C_Z$ 等距于某个希尔伯特空间中的单位球面。此外， $Z$ 等距分裂为一个球面连接$C_Z * C_Z^{\perp}$。

证明。首先证明 $C_Z$ 是$Z$的一个圆的闭凸子集。集合 $C_Z$ 在 $Z$中对称，并且在 $Z$中也是圆的。为证明 $C_Z$是闭集，取 $C_Z$ 中一个收敛到某个$p \in Z$的序列 $(p_k)$。对每个 $k \in \mathbb{N}$，选取 $q_k \in C_Z$，使得 $p_k$ 和 $q_k$ 在 $Z$ 中互为对径的悬垂。由引理 3.6可知，对于所有不同的 $k$、$l \in \mathbb{N}$，都有 $d_Z(q_k, q_l) = d_Z(p_k, p_l)$。因此，$(q_k)$ 是 $Z$中的柯西序列。由于假设 $Z$ 完备，我们可在 $Z$ 中找到 $(q_k)$ 的极限点 $q$。对每个 $z \in Z$，我们有 $d_Z(p, z) + d_Z(z, q) = \pi$。这意味着$p \in C_Z$，因此 $C_Z$ 在 $Z$中是闭集。 $C_Z$ 的 $\pi$-凸性由引理 3.6得出。

假设在 $Z$ 中存在一个 $m$-悬挂架（$p_1, \ldots, p_m$）。根据命题 3.7，存在 $Z$ 的一个圆的、闭的 $\pi$-凸子集 $C_{m-1}$，包含（$p_1, \ldots, p_m$），使得 $Z$ 等距分裂为 $C_{m-1} * C_{m-1}^{\perp}$，其中 $C_{m-1}$ 与 $\mathbb{S}^{m-1}$ 等距。假设 $C_Z - C_{m-1}$ 非空。如上所示，球面核 $C_Z$ 是 $Z$ 的一个圆的、闭的 $\pi$-凸子集。利用引理 3.8，我们看到存在一个点$p_{m+1}$，位于 $Z$ 中，使得（$p_1, \ldots, p_m, p_{m+1}$）是 $Z$ 中的一个（$m+1$）-悬挂架。根据命题 3.7，存在 $Z$ 的一个圆的、闭的 $\pi$-凸子集 $C_m$，包含（$p_1, \ldots, p_m, p_{m+1}$），使得 $Z$ 等距分裂为$C_m * C_m^{\perp}$，其中 $C_m$ 与 $\mathbb{S}^m$ 等距。因此，我们归纳地证明了该命题。□

注记 3.4。文献 [15, 推论 4.4 和注记 4.1]表明，命题 3.9 对测地完备 CAT(1) 空间成立。

## 4. Almost spherical structure of $\mathrm{CAT}(1)$ spaces

本节研究一种用于识别 CAT(1)空间的近似球面悬挂结构的条件。关于紧致测地完备CAT(1)空间的相关研究，请参见 [17, 第 6]节。

**4.1. 可穿透性。** 设 $Z$ 为一个带有度量 $d_Z$的 CAT(1)空间。若存在 $Z$ 的一个稠密子集 $Z_0$，使得对每个 $p \in Z_0$ 都存在 $q \in Z_0$，满足 $d_Z(p, q) \geq \pi$，则称 $Z$ 是可穿透的。若 $Z$ 是可穿透的，则 $\operatorname{diam} Z \geq \pi$。若 $Z$ 至少有两个道路连通分支，则它是可穿透的。

CAT(1)空间的可穿透性在超极限下保持。更确切地说，对于每个带基点的可穿透 CAT(1)空间序列 $(Z_k, z_k)$，其超极限 $\lim_\omega (Z_k, z_k)$ 也是可穿透的。

我们通过以下例子讨论可穿透性。

**例 4.1.** 如果 $Z$ 是测地完备的，那么只要 $Z$ 至少包含两个点， $Z$ 就是可穿透的。事实上，对于每个 $p \in Z$，以及每个 $z \in U_\pi^*(p)$，都存在一条长度为 $\pi$的测地线 $pq$，其中某个$q \in \mathrm{Ant}(p)$，作为测地线 $pz$的延拓。

**例 4.2.** 设 $U$ 是 CAT($\kappa$) 空间 $X$的一个局部测地完备开子集。那么，对于每个 $x \in U$ ，方向空间$\Sigma_x X$ 都是可穿透的。事实上，对于由 $x$ 处所有真实方向组成的稠密子集 $\Sigma'_x X$ ，对每个 $\xi \in \Sigma'_x X$ ，都存在 $\eta \in \Sigma'_x X$ 使得$d_{\Sigma_x X}(\xi, \eta) = \pi$。

存在一个测地完备 CAT(1) 空间，其中有一点的方向空间并非测地完备。

**例 4.3.** 设 $\mathbb{S}^m_+$ 是一个闭单位 $m$-半球，其边界赤道为 $\mathbb{S}^{m-1}$。对每个 $z \in \mathbb{S}^{m-1}$，我们准备一条闭半直线$[a_z, \infty)$，其中某个 $a_z \in \mathbb{R}$。令 $Z := \mathbb{S}^m_+ \sqcup (\bigsqcup_{z \in \mathbb{S}^{m-1}} [a_z, \infty))/z = a_z$ 为将 $[a_z, \infty)$在所有 $z \in \mathbb{S}^{m-1}$处粘接到 $\mathbb{S}^{m-1}_+$ 上所得的商空间。这成为一个测地完备 CAT(1) 空间，其度量为由 $\mathbb{S}^m_+$ 和这些半直线诱导的内在度量。对于 $Z$中的每个 $z \in \mathbb{S}^{m-1}$，方向空间 $\Sigma_z Z$ 是 $\mathbb{S}^{m-1}_+$ 与一个单点的不交并。

为了研究 CAT($\kappa$) 空间中局部测地完备开子集的方向空间，我们考虑可穿透 CAT(1) 空间，而非测地完备空间。

4.2. **CAT(1)空间中的松弛悬点**。 设 $\delta \in \in (0, 1)$。设 $Z$为一个带度量 $d_Z$的 CAT(1)空间。若存在另一个点 $q_0 \in Z$ 满足

$$\sup_{z \in Z} \{ d_Z(p_0, z) + d_Z(z, q_0) \} < \pi + \delta. \tag{4.1}$$

在这种情况下，我们称 $p_0$ 和 $q_0$ 互为对踵。

对于可穿透 CAT(1) 空间，$(1, \delta)$-悬挂器的概念是对刚性1-悬点的一种扰动。

**引理 4.1**。 设 $Z$ 为一个可穿透 $\mathrm{CAT}(1)$ 空间。设 $p_0$ 和 $q_0$ 是 $Z$中互为对跖的$(1, \delta)$-悬挂器。那么

$$\inf_{z \in Z} \{ d_Z(p_0, z) + d_Z(z, q_0) \} > \pi - \delta. \tag{4.2}$$

证明。 根据（4.1），对于某个充分小的 $a \in (0, \delta)$，我们有

$$\sup_{z \in Z} \{ d_Z(p_0, z) + d_Z(z, q_0) \} < \pi + \delta - a.$$

取 $z \in Z$。由于 $Z$ 可穿透，我们可以找到一个任意接近 $z$ 的点 $z_0 \in Z$ ，以及 $z_0$ 的一个对径点 $\bar{z}_0 \in \mathrm{Ant}(z_0)$。于是

$$\pi \le d_Z(z_0, p_0) + d_Z(p_0, \bar{z}_0), \quad \pi \le d_Z(z_0, q_0) + d_Z(q_0, \bar{z}_0).$$

将这些不等式相加，得到

$$d_Z(p_0, z_0) + d_Z(z_0, q_0) > \pi - \delta + a.$$

由于 $z_0$ 可以任意接近 $z$，我们得到 (4.2)。 □

注 4.1。设 $Z$ 是一个可穿透 CAT(1) 空间。由 (4.1) 和 (4.2) 可知，如果 $p_0$ 和 $q_0$ 是 $Z$中互为对跖的 (1，$\delta$)-悬挂架，那么 $|d_Z(p_0，\ q_0) - \pi| < \delta$。

我们还有以下结果（参见引理 3.3）：

**引理4.2**。设 $Z$ 是一个$\mathrm{CAT}(1)$ 空间。若在 $Z$中存在互为对跖的 $(1，\ \delta)$-悬挂架 $p_0$ 和 $q_0$，则以下结论成立：

(1) 对跖点集($p_0$) 的直径 $< 2\delta$ 且 对跖点集($q_0$) 的直径 $< 2\delta$;

(2) 对于所有 $z_1，\ z_2 \in Z$ 满足 $d_Z(z_1，\ z_2) \geq \pi$ 我们有

$$(4.3)\quad d_Z(z_1, p_0) + d_Z(p_0, z_2) < \pi + 2\delta, \quad d_Z(z_1, q_0) + d_Z(q_0, z_2) < \pi + 2\delta;$$

特别地，我们有 直径 $Z \leq \pi + 2\delta$。

证明。对每个 $\bar{p}_0 \in$ 对跖点集($p_0$)，由（4.1）可得 $d_Z(\bar{p}_0, q_0) < \delta$。因此，$p_0$ 的对跖点集直径为 $< 2\delta$。同理可得，$q_0$的对跖点集直径为 $< 2\delta$

取 $z_1，\ z_2 \in Z$，使得 $d_Z(z_1, z_2) \geq \pi$。由（4.1）可得

$$d_Z(p_0, z_1) + d_Z(z_1, q_0) < \pi + \delta, \quad d_Z(p_0, z_2) + d_Z(z_2, q_0) < \pi + \delta.$$

这些不等式推出（4.3）。 □

注 4.2。由引理4.2可知，若 CAT(1)空间 $Z$ 存在互为对跖的 $(1, \delta)$-悬挂架 $p_0$ 和 $q_0$，则要么 $Z$ 是直径为 $Z \leq \pi + 2\delta$的测地空间，要么 $Z$ 有两个测地连通分支 $Z_+$ 和 $Z_-$，满足 $p_0 \in Z_+, q_0 \in Z_-$，且直径为 $Z_\pm < 2\delta$。此外，若 $Z$ 是测地完备的，则 $Z$ 要么是测地线，要么与 $\mathbb{S}^0$同胚。

假设 $Z$ 测地完备。如果 $Z$ 中某点的对跖点集直径足够小，那么它就是一个 (1，$\delta$)-悬挂器。更确切地说，我们有如下结论（参见注 3.2）：

**引理 4.3**。设 $Z$ 是一个测地完备的 $\mathrm{CAT}(1)$ 空间。若 $Z$ 中的点$p$ 满足对跖点集的直径($p$) $< \delta$，则对每个 $q \in$ 对跖点集($p$)，我们有

$$(4.4)\qquad \sup_{z \in Z} \{ d_Z(p, z) + d_Z(z, q) \} < \operatorname{diam} Z + \delta;$$

特别地，若还满足 直径 $Z = \pi$，则 $p$ 和 $q$ 在 $Z$ 中是互为对跖的 ($1, \delta$)-悬挂器。

证明。设 $z \in Z$。若 $z = p$ 或 $z \in$ 属于对跖点集($p$)，则有 (4.4)。假设$z \in U_\pi^*$($p$)。由于 $Z$ 测地完备，存在一条长度为 $\pi$ 的测地线 $pq_0$，经过某个 $z$，其中 $q_0 \in$ 属于对跖点集($p$)。于是我们有

$$d_Z(p, z) + d_Z(z, q) \leq \pi + d_Z(q, q_0) < \pi + \delta \leq d_Z(p, q) + \delta,$$

因此得到（4.4）。 □

**4.3. CAT(1)空间中的松弛多重悬垂子。**设 $Z$ 为一个CAT(1)空间，其度量为 $d_Z$。设 $m \in \mathbb{N}$ 和 $\delta \in (0, \pi)$。如果存在另一个 $m$元组（$q_1, \ldots, q_m$），由 $Z$ 中的点组成，并满足以下条件，我们就称 $Z$ 中的点构成的 $m$元组（$p_1, \ldots, p_m$）是一个（$m, \delta$）-悬挂器：

(1) 对所有 $i \in \{1, \ldots, m\}$，点 $p_i$ 和 $q_i$ 在 $Z$ 中是互为对跖的 $(1, \delta)$-悬挂架；(2) 对所有不同的 $i, j \in \{1, \ldots, m\}$，我们有

$$d_Z(p_i, p_j) < \frac{\pi}{2} + \delta, \quad d_Z(p_i, q_j) < \frac{\pi}{2} + \delta, \quad d_Z(q_i, q_j) < \frac{\pi}{2} + \delta. \tag{4.5}$$

在这种情况下，我们称 $(p_1, \ldots, p_m)$ 和 $(q_1, \ldots, q_m)$ 彼此互为对踵 。

注记 4.3。 如果 $Z$ 有一个 $(2, \delta)$-悬挂器，那么只要 $\delta$ 足够小，它就是测地线（参见注记 4.2）。

对于可穿透 CAT(1) 空间，$(m, \delta)$-悬挂架的概念是刚性 $m$-悬挂架的一种扰动形式。

**引理 4.4.** 设 $Z$ 是一个可穿透的$\mathrm{CAT}(1)$ 空间。设 $(p_1, \ldots, p_m)$和 $(q_1, \ldots, q_m)$ 是 $Z$ 中互为对跖的$(m, \delta)$-悬挂架。那么

(1) *for all* $i \in \{1, \ldots, m\}$ *we have*

$$\inf_{z \in Z} \{ d_Z(p_i, z) + d_Z(z, q_i) \} > \pi - \delta; \tag{4.6}$$

(2) 对所有互不相同的 $i, j \in \{1, \ldots, m\}$,

$$d_Z(p_i, p_j) > \frac{\pi}{2} - 2\delta, \quad d_Z(p_i, q_j) > \frac{\pi}{2} - 2\delta, \quad d_Z(q_i, q_j) > \frac{\pi}{2} - 2\delta. \tag{4.7}$$

证明。 如引理 4.1 所示，我们已经知道 (4.6)。由 (4.6)，对所有互不相同的 $i, j \in \{1, \ldots, m\}$，有

$$d_Z(p_i, p_j) \geq d_Z(p_i, q_i) - d_Z(p_j, q_i) > \pi - \delta - d_Z(p_j, q_i) > \frac{\pi}{2} - 2\delta.$$

类似地，我们有 $d_Z(p_i, q_j) > \pi/2 - 2\delta$ 和 $d_Z(q_i, q_j) > \pi/2 - 2\delta$。因此，我们得到 (4.7)。□

接下来，我们需要以下结论：

**引理 4.5**。 设 $Z$ 是一个 $\mathrm{CAT}(1)$ 空间。假设$(p_1, \ldots, p_m)$ 和$(q_1, \ldots, q_m)$ 是 $Z$ 中互为对跖的$(m, \delta)$-悬挂架。对每个 $i \in \{1, \ldots, m\}$，取 $\bar{p}_i \in$对跖点集$(p_i)$。那么，$(p_1, \ldots, p_m)$ 和 $(\bar{p}_1, \ldots, \bar{p}_m)$是 $Z$ 中互为对跖的$(m, 2\delta)$-悬挂架。

证明。 根据引理4.2，对于所有 $i \in \{1, \ldots, m\}$，我们知道 diam 对跖点集$(p_i)$ 小于 $2\delta$。由此性质可推出所述结论。□

4.4. **松弛多重悬架的稳定性**。 我们首先陈述以下关于超极限的稳定性结论：

引理 *4.6.* 设 $(Z_\omega, z_\omega)$ 是一列带基点的 *CAT(1)* 空间的超极限 $\lim_\omega(Z_k, z_k)$。设 $(p_1, \dots, p_m)$ 和 $(q_1, \dots, q_m)$ 是 $Z_\omega$ 中互为对跖的 $(m, \delta)$-悬挂架。对每个 $i \in \{1, \dots, m\}$，取$p_{i,k}, q_{i,k} \in Z_k$ ，使得 $p_{i,k} \to p_i$，$q_{i,k} \to q_i$。那么对所有 $\omega$-大的 $k$ ，$(p_{1,k}, \dots, p_{m,k})$ 与 $(q_{1,k}, \dots, q_{m,k})$ 这一对都是 $Z_k$ 中互为对跖的 $(m, \delta)$-悬挂架。

证明。 如果 $(p_1, \dots, p_m)$ 和 $(q_1, \dots, q_m)$ 是 $Z_\omega$ 中互为对跖的 $(m, \delta)$-悬挂架，那么对某个充分小的 $a \in (0, \delta)$，它们是 $Z_\omega$ 中互为对跖的 $(m, \delta - a)$-悬挂架。此性质即可推出该引理。 □

接下来我们断言，CAT(1)空间之间的每个满射 1-Lipschitz 映射都会将 $(m, \delta)$-悬挂架映射为 $(m, \delta)$-悬挂架。

引理 *4.7.* 设 $\varphi\colon Z_1 \to Z_2$ 是 *CAT(1)*空间之间的一个满射 *1-Lipschitz* 映射。设 $(p_1, \dots, p_m)$ 和 $(q_1, \dots, q_m)$ 是 $Z_1$ 中互为对踵的 $(m, \delta)$-悬挂架。那么，$(\varphi(p_1) \dots, \varphi(p_m))$ 与 $(\varphi(q_1) \dots, \varphi(q_m))$ 这一对是 $Z_2$ 中互为对踵的 $(m, \delta)$-悬挂架。

证明。 由于 $f$ 是满射且为 1-Lipschitz 映射，结论由此可见。 □

备注 4.4。 为了得到引理 4.6 和引理 4.7，我们通过单侧严格不等式 (4.1) 和 (4.5) 来表述 $\delta$-悬挂架和 $(m, \delta)$-悬挂架的概念。

4.5. **松弛多重悬架的进展**。 下一个引理将说明松弛的 $m$ 重悬挂器能否扩展为松弛的 $(m + 1)$ 重悬挂器（参见引理 3.8）。

**引理 4.8**。 对于每个 $\epsilon \in (0,1)$，以及每个 $m \in \mathbb{N}$，都存在$\delta \in (0,1)$ 满足以下条件：设 $Z$ 是一个具有度量 $d_Z$ 的可穿透 $\mathrm{CAT}(1)$ 空间，且 $(p_1, \dots, p_m)$ 是 $Z$ 中的一个 $(m, \delta)$-悬挂器。若 $Z$ 中存在一个 $(1, \delta)$-悬挂器 $p_0$ ，使得

$$\sum_{i=1}^{m} \cos^2 d_Z(p_i, p_0) < 1 - \epsilon, \tag{4.8}$$

那么存在 $p_{m+1} \in Z$，使得 $(p_1, \dots, p_m, p_{m+1})$ 这个 $(m+1)$-元组是 $Z$ 中的一个 $(m + 1, \epsilon)$-悬挂器。

证明。 假设对于某个在 $(0, \epsilon)$ 中的序列 $(\delta_k)$，满足 $\delta_k \to 0$，存在一个可穿透 CAT(1) 空间序列 $(Z_k)$，其度量为 $d_{Z_k}$，使得每个 $Z_k$ 都承认一个 $(m, \delta_k)$-悬挂器 $(p_{1,k}, \dots, p_{m,k})$，以及一个 $(1, \delta_k)$-悬挂器 $p_{0,k}$ ，满足

$$\sum_{i=1}^{m} \cos^2 d_{Z_k}(p_{i,k}, p_{0,k}) < 1 - \epsilon.$$

此外，假设在 $Z_k$ 中不存在点 $p_k$ ，使得 $(p_{1,k},\dots,p_{m,k},p_k)$ 是 $Z_k$ 中的一个 $(m+1,\epsilon)$-悬挂器。令 $(Z_\omega,z_\omega)$ 为某个 $z_k\in Z_k$ 的超极限 $\lim_\omega(Z_k,z_k)$。对每个 $i\in\{1,\dots,m\}$，取满足 $p_{i,k}\to p_i$ 的 $p_i\in Z_\omega$。引理 4.4 表明，$(p_1,\dots,p_m)$ 是 $Z_\omega$ 中的一个$m$-悬挂器。由当前假设可推出

$$\sum_{i=1}^{m}\cos^2 d_{Z_\omega}(p_i,p_0)\le 1-\epsilon.$$

根据引理 3.8，存在 $p_{m+1}\in Z_\omega$，使得（$p_1$，……，$p_m$，$p_{m+1}$）是 $Z_\omega$ 中的（$m+1$）-悬挂器。对于每个 $k$，我们选取 $p_{m+1,\,k}\in Z_k$，使得$p_{m+1,\,k}\to p_{m+1}$。由引理 4.6 可知，对于所有 $\omega$-大的 $k$，（$m+1$）元组（$p_{1,\,k}$，……，$p_{m,\,k}$，$p_{m+1,\,k}$）是 $Z_k$ 中的（$m+1$，$\epsilon$）-悬挂器。这就产生了矛盾。□

4.6. **维数与松弛多重悬垂**。首先证明如下结论：

**引理4.9**。对于每个 $n\in\mathbb{N}$，存在 $\delta\in(0,\,1)$，使得：如果一个可穿透的 $\mathrm{CAT}(1)$ 空间 $Z$ 的维数$_{\mathrm{G}}\,Z\le n-1$ 为 $m$，且它容许一个$(m,\,\delta)$-悬挂器，那么 $m\le n$。

证明。假设对于某些序列 $(\delta_k)\subset(0,\,1)$，满足 $\delta_k\to 0$，以及 $(m_k)\subset\mathbb{N}$，存在一个由可穿透 CAT(1) 空间组成的序列 $(Z_k)$，其维数为 $\dim_G Z_k\le n-1$，使得每个 $Z_k$ 都具有一个 $(m_k,\,\delta_k)$-悬挂器，其中 $m_k$ 满足 $m_k\ge n+1$。令 $(Z_\omega,\,z_\omega)$ 表示对于某个 $z_k\in Z_k$ 的超极限 $\lim_\omega(Z_k,\,z_k)$。由 (2.2) 可知 $\dim_{\mathrm{G}}Z_\omega\le n-1$。令 $m:=\lim_\omega m_k$。于是 $m\ge n+1$。极限 $m$ 可能为无穷大。不妨设 $m$ 有限。引理 4.4 表明，$Z_\omega$ 具有一个 $m$-悬挂器。根据命题 3.7，超极限 $Z_\omega$ 等距分裂为 $\mathbb{S}^{m-1}*Z_0$，其中某个 $Z_0$。这意味着 $\dim_{\mathrm{G}}Z_\omega\ge n$。矛盾。□

注记 4.5. 与引理4.9类似，我们看到，对每个 $m\in\mathbb{N}$，存在 $\delta\in(0,1)$，使得若可穿透 CAT(1) 空间 $Z$ 容许一个$(m,\delta)$-悬挂器，则 $m\le\dim_{\mathrm{G}}Z+1$。

在下文中，我们将使用以下结果：

**引理 4.10.** 对每个 $n\in\mathbb{N}$，以及对每个 $c\in[1,\infty)$，存在$\delta\in(0,1)$，使得若维数 $\dim_{\mathrm{G}}Z\le n-1$的可穿透 $\mathrm{CAT}(1)$ 空间 $Z$ 容许一个$(n,\delta)$-悬挂器$(p_1,\dots,p_n)$，则 $Z$ 中没有点 $z$满足

$$\max_{i\in\{1,\dots,n\}}\left|d_Z(p_i,z)-\frac{\pi}{2}\right|<c\delta.$$

引理 4.10 可通过超极限论证结合命题 3.7 和引理 4.4 得到证明。

**4.7. 近似球面悬挂结构。** 如果一个 CAT(1)空间$Z$ 等距分裂为 $\mathbb{S}^{m-1} * Z_0$, 那么我们可以在包含于球面因子 $\mathbb{S}^{m-1}$ 中的 $Z$ 里找到互为对跖的 $m$-悬挂器（见例3.3）。此外，若对某个 $m \in \mathbb{N}$，一个 CAT(1)空间 $Z$ 满足

$$d_{\mathrm{GH}}(Z, \mathbb{S}^{m-1} * Z_0) < \delta$$

对于某个度量空间 $Z_0$，那么我们便能在 $Z$中找到互为对踵的（$m$, $10\delta$）-悬挂架。

在接下来的两个命题中，我们将从存在松弛的多重悬挂架出发，推导出可穿透 CAT(1) 空间的近似悬挂结构（参见 [17, 第6.3和13.2]小节）。

令 $\mathcal{C}$ 表示所有紧致可穿透CAT(1)空间的等距类所构成的集合。若一个 CAT(1)空间 $X \in \mathcal{C}$ 等距分裂为球面连接 $Y * Z$，则两个因子 $Y$ 和 $Z$ 都属于 $\mathcal{C}$。

我们先陈述如下内容:

**命题4.11。** 设 $\mathcal{C}_0$ 是 $\mathcal{C}$ 关于*Gromov–Hausdorff*拓扑的一个相对紧子集。那么对于每个 $\epsilon \in (0, 1)$，都存在 $\delta \in (0, 1)$，使得若 $Z \in \mathcal{C}_0$ 具有一个$(m, \delta)$-悬挂架，则存在满足以下条件的 $Z_0 \in \mathcal{C}$

$$d_{\mathrm{GH}}(Z, \mathbb{S}^{m-1} * Z) < \epsilon.$$

对于 $n \in \mathbb{N}$，令 $\mathcal{C}(n-1)$ 表示覆盖维数为 $\leq n-1$ 的所有紧致可穿透CAT(1)空间的等距类集合。如果 CAT(1) 空间 $X \in \mathcal{C}(n-1)$ 等距分裂为 $m$ 重球面悬挂 $\mathbb{S}^{m-1} * Z_0$，则 $Z_0$ 属于 $\mathcal{C}(n-m-1)$。

命题 4.11 可通过结合超极限论证、命题 3.7 和引理 4.4 得出。细节留给读者。

与命题 4.11 类似，由引理4.9可得:

**命题 4.12.** 对于 $n \in \mathbb{N}$，令 $\mathcal{C}_0$ 为 $\mathcal{C}(n-1)$ 的一个相对于 *Gromov–Hausdorff*拓扑的相对紧子集。则对于每个 $\epsilon \in (0, 1)$，都存在 $\delta \in (0, 1)$，使得若 $Z \in \mathcal{C}_0$ *admite* 一个$(m, \delta)$-悬挂器，则 $m \leq n$，并且存在满足条件的 $Z_0 \in \mathcal{C}(n-m-1)$

$$d_{\mathrm{GH}}\left(Z, \mathbb{S}^{m-1} * Z_0\right) < \epsilon;$$

特别地，如果相对于 $n$而言， $\epsilon$ 足够小，那么 $Z$ 与 $\mathbb{S}^{m-1} * Z_0$同伦等价。

上述同伦等价性源自 Petersen 的同伦稳定性定理 [29, 定理A]，该定理适用于 LGC空间。

注记 4.6。 在命题 4.12 中，如果 $m = n$，那么 $Z_0$ 必为空，因此 $d_{\mathrm{GH}}\left(Z, \mathbb{S}^{n-1}\right) < \epsilon$。如果 $m = n-1$，那么 $Z_0$ 是一个至少包含两个点的有限离散度量空间。

## 5. Local geometric regularity

我们研究 CAT($\kappa$) 空间中局部测地完备开子集的局部几何结构。关于 GCBA 空间的相同研究，请参见 [17, 第 5 节和7] 。

**5.1. 方向空间的上半连续性。** 我们提及方向空间的上半连续性，这一点已在 [15,引理 13.1 和 13.2] 中针对测地完备空间证明。

设 $X$ 是一个 CAT($\kappa$) 空间，且 $U$ 是 $X$ 的一个局部测地完备开子集。对于 $U$ 中的点 $x$ ，设 $(x_k)$ 是 $U$ 中收敛到 $x$ 的一个序列。设 $(X_\omega, x_\omega)$ 是点度量空间的超极限 $\lim_\omega(X, x_k)$。设 $(\lim_\omega \Sigma_{x_k}X, \xi_\omega)$ 是某个带基点的方向空间序列 $(\Sigma_{x_k}X, \xi_k)$ 的超极限。我们按如下方式定义一个满射 1-Lipschitz 映射 $\varphi_{x_\omega}\colon \Sigma_{x_\omega}X_\omega \to \lim_\omega \Sigma_{x_k}X$：对于每个 $\eta_\omega \in \Sigma'_{x_\omega}X_\omega$，取满足 $\eta_\omega = (y_\omega)'_{x_\omega}$ 的 $y_\omega \in U_{D_\kappa}(x_\omega) - \{x_\omega\}$，并取满足 $y_k \to y$ 的 $y_k \in U_{D_\kappa}(x_k) - \{x_k\}$。令 $\varphi'_{x_\omega}(\eta_\omega)$ 为 $\lim_\omega \Sigma_{x_k}X$ 中满足 $(y_k)'_{x_k} \to \varphi'_{x_\omega}(\eta_\omega)$ 的点。由此得到一个良定义映射 $\varphi'_{x_\omega}\colon \Sigma_{x_\omega}X'_\omega \to \lim_\omega \Sigma_{x_k}X$。由于每个开球 $U_r(x_k)$ 都是局部测地完备的，$\varphi'_{x_\omega}$ 是满射；此外，$U_r(x)$ 也局部测地完备。由 (2.1) 可知，$\varphi'_{x_\omega}$ 是 1-Lipschitz 映射。将映射 $\varphi'_{x_\omega}$ 从 $\Sigma'_{x_\omega}X_\omega$ 延拓到完备化 $\Sigma_{x_\omega}X_\omega$，便得到一个满射 1-Lipschitz 映射 $\varphi_{x_\omega}\colon \Sigma_{x_\omega}X_\omega \to \lim_\omega \Sigma_{x_k}X$。

总之，我们有如下上半连续性：

**引理 5.1。** 设 $U$ 是一个$\mathrm{CAT}(\kappa)$ 空间中的局部测地完备开子集。对于 $x \in U$，设 $(x_k)$ 是 $U$ 中收敛到 $x$ 的一个序列。那么存在一个满射的 1-利普希茨映射 $\varphi_x\colon \Sigma_x X \to \lim_\omega \Sigma_{x_k}X$，使得对于 $U_{D_\kappa}(x) - \{x\}$ 中的每个点 $y$，以及 $U_{D_\kappa}(x_k) - \{x_k\}$ 中满足 $y_k \to y$ 的每个序列$(y_k)$，都有 $(y_k)'_{x_k} \to \varphi_x(y'_x)$。

注 5.1。设 $X$ 是一个 CAT($\kappa$) 空间。设 $(x_k)$ 是 $X$ 中收敛到某个 $x \in X$ 的序列。设 $(X_\omega, x_\omega)$ 是超极限 $\lim_\omega(X, x_k)$。映射 $\varphi_\omega\colon X \to X_\omega$ 由 $\varphi_\omega(y) := [y]$ 给出，是一个满足 $\varphi_\omega(x) = x_\omega$ 的等距嵌入。一般而言，映射 $\varphi_\omega$ 并非满射。

**5.2. 无穷小几何正则性。** 回顾一下，在 GCBA空间中，$m$-正则点是指方向空间等距地分裂为 $m$ 重球面悬挂的点。$m$-奇异点是指非 $m$-正则点。现在我们引入一种放宽的无穷小几何正则性，这在第1节中曾简要提及。

定义 5.1。设 $m \in \mathbb{N}$ 和 $\delta \in (0, 1)$。设 $U$ 是 CBA 空间 $X$ 的局部测地完备开子集。若存在 $\Sigma_x X$ 中的一个 $(m, \delta)$-悬挂器，则称 $U$ 中的点 $x$ 为 $(m, \delta)$-正则点。若 $U$ 中的点不是 $(m, \delta)$-正则点，则称其为 $(m, \delta)$-奇异点。对于 $U$ 的子集 $A$，用 $R_{m,\delta}(A)$ 表示 $A$ 中所有 $(m, \delta)$-正则点组成的集合，用 $S_{m,\delta}(A)$ 表示所有 $(m, \delta)$-奇异点组成的集合。我们称 $R_{m,\delta}(A)$ 为 $A$ 中的 $(m, \delta)$-正则集，称 $S_{m,\delta}(A)$ 为 $A$ 中的 $(m, \delta)$-奇异集。

设 $m \in \mathbb{N}$ 和 $\delta \in (0,\ 1)$。设 $U$ 是 CAT($\kappa$) 空间中的局部测地完备开子集，且 $A$ 是 $U$ 的子集。那么我们有 $R_m(A) \subset R_{m,\ \delta}(A)$；特别地，$S_{m,\ \delta}(A) \subset S_m(A)$。对于满足 $m \leq n$ 的每个 $n \in \mathbb{N}$，我们有 $R_{n,\ \delta}(A) \subset R_{m,\ \delta}(A)$。对于满足 $\delta \leq \epsilon$ 的每个 $\epsilon \in (0,\ 1)$，我们有 $R_{m,\ \delta}(A) \subset R_{m,\ \epsilon}(A)$。

由方向空间的上半连续性可得：

**引理 5.2.** 设 $U$ 是一个$\mathrm{CAT}(\kappa)$ 空间 $X$ 中局部测地完备的开子集，且 $A$ 是 $U$ 的子集。则 $R_{m,\ \delta}(A)$ 在 $A$ 中是开集；特别地，$S_{m,\ \delta}(A)$ 在 $A$ 中是闭集。

证明. 假设对于某个 $x \in R_{m,\delta}(A)$，存在 $S_{m,\delta}(A)$ 中的一个序列 $(x_k)$，使得 $x_k \to x$。那么我们可以在 $\Sigma_x X$ 中找到一个 $(m,\delta)$-悬挂器 $(\xi_1, \ldots, \xi_m)$。由引理 5.1，$\lim_\omega \Sigma_{x_k} X$ 中的 $m$-元组 $(\varphi_x(\xi_1) \ldots, \varphi_x(\xi_m))$ 是一个 $(m,\delta)$-悬挂器。因此，对于足够大的 $\omega$，我们可以在 $\Sigma_{x_k} X$ 中找到一个 $(m,\delta)$-悬挂器 $(\xi_{1,k}, \ldots, \xi_{m,k})$。这就矛盾了。□

引理4.9蕴含如下结论：

**引理 5.3.** 对每个 $n \in \mathbb{N}$，存在 $\delta \in (0,1)$，使得若$\mathrm{CAT}(\kappa)$ 空间 $X$ 的局部测地完备开子集 $U$ 满足$\dim_{\mathrm{G}} U \leq n$，则集合$R_{n+1,\delta}(U)$ 为空；特别地，$S_{n+1,\delta}(U)$与 $U$重合。

证明。对 $n \in \mathbb{N}$，取 $\delta \in (0,1)$充分小。假设对某个$x \in U$，空间 $\Sigma_x X$ 容许一个$(n+1,\delta)$-悬挂器。另一方面，我们有$\dim_{\mathrm{G}} \Sigma_x X \leq n-1$。这与引理4.9矛盾。□

下述内容实质上已在 [17, 命题7.3]中证明。

**命题 5.4.** 设 $\delta \in (0,1)$。设 $U$ 为某$\mathrm{CAT}(\kappa)$ 空间的局部紧、局部测地完备开子集。则对每个$p \in X$，存在 $r \in (0, D_\kappa/2)$，满足 $U_r(x) \subset U$，使得对每个$x \in U_r(p) - \{p\}$，方向 $p'_x$ 是 $\Sigma_x X$中的$(1,\delta)$-悬挂器。此外，对 $U$的每个紧子集 $B$，集合$S_{1,\delta}(B)$ 至多含有有限多个点。

5.3. **应变器**。基于 [17, 节 7],，我们在更一般的情形下讨论 CAT($\kappa$) 空间中应变器的概念。

**定义5.2**。设 $m \in \mathbb{N}$ 和 $\delta \in (0,1)$。设 $X$ 为一个度量为 $d_X$的 CAT($\kappa$) 空间。对于 $X$中的一点 $x$，若 $X - \{x\}$ 中的一个 $m$元组点$(p_1, \ldots, p_m)$满足以下条件，则称其为 $x$ 处的$(m,\delta)$-应变器：

(1) 对于每个 $i \in \{1, \ldots, m\}$，我们有 $d_X(p_i, x) < D_\kappa/2$；(2) $m$ 元组 $((p_1)'_x, \ldots, (p_m)'_x)$ 是 $\Sigma_x X$ 中的一个 $(m,\delta)$- 悬挂器；在此情形下，称 $x$ 被 $(p_1, \ldots, p_m)$ $(m,\delta)$-应变。若位于 $x$ 的两个 $(m,\delta)$-应变器 $(p_1, \ldots, p_m)$ 和 $(q_1, \ldots, q_m)$ 所对应的 $(m,\delta)$- 悬挂架 $((p_1)'_x, \ldots, (p_m)'_x)$ 与 $((q_1)'_x, \ldots, (q_m)'_x)$ 在 $\Sigma_x X$ 中互为对踵，则称这两个应变器互为对踵。

对于 $X$ 的一个子集 $A$，若其直径为 $A < D_\kappa/2$，若 $A$ 中由点组成的 $m$ 元组 $(p_1, \ldots, p_m)$ 满足以下条件，则称它是位于 $A$ 的 $(m, \delta)$-应变器

(1) 对每个 $i \in \{1, \ldots, m\}$，我们有 $\sup_{x\in A} d_X(p_i, x) < D_\kappa/2$；(2) $(p_1, \ldots\ldots, p_m)$ 这个 $m$ 元组在所有 $x \in A$ 处都是 $(m, \delta)$-应变器；

在这种情况下，$A$ 被称为由 $(p_1, \ldots\ldots, p_m)$ $(m, \delta)$-应变。若两个 $(m, \delta)$-应变器 $(p_1, \ldots\ldots, p_m)$ 和 $(q_1, \ldots\ldots, q_m)$ 在 $A$ 处于所有 $x \in A$ 都互为对踵，则称它们为互为对踵。

注5.2。设 $U$ 是 CAT($\kappa$) 空间的局部测地完备开子集。当且仅当 $x$ 是由某个 $(m, \delta)$-应变器 $(m, \delta)$-应变时，$U$ 中的点 $x$ 是 $(m, \delta)$-正则的。

注 5.3. 设 $m \in \mathbb{N}$ 与 $\delta \in (0,1)$。设 $U$ 为 CAT($\kappa$) 空间 $X$的局部测地完备开子集。若 $\delta$ 充分小，则对 $U$ 中每个 $(m, \delta)$-应变点 $x$，我们有 $\dim_G T_xX \geq m$（见注 4.5）。若 $X$ 为 GCBA，且若 $4m\delta < 1$，则对 $U$ 中每个 $(m, \delta)$-应变点 $x$，我们有 $\dim T_xX \geq m$（[17, 引理 11.7]）。

5.4. **撑架的稳定性**。由悬挂架的稳定性以及方向空间的上半连续性，我们得到如下结论：

引理 *5.5.* 设 $U$ 为 *CAT($\kappa$)* 空间 $X$的局部测地完备开子集。对 $x \in U$，设 $(x_k)$ 为 $U$ 中满足 $x_k \to x$的序列。设 $(p_1, \ldots, p_m)$ 与 $(q_1, \ldots, q_m)$ 是 $x$ 处互为对跖的 $(m, \delta)$-应变器。对每个 $i \in \{1, \ldots, m\}$，在 $X$ 中选取序列 $(p_{i,k})$ 与 $(q_{i,k})$，分别满足 $p_{i,k} \to p_i$ 以及 $q_{i,k} \to q_i$。则对所有充分大的 $k$，$m$元组 $(p_{1,k}, \ldots, p_{m,k})$ 与 $(q_{1,k}, \ldots, q_{m,k})$ 是 $x_k$处互为对跖的 $(m, \delta)$-应变器。

证明。$m$-元组 $((p_1)'_x, \ldots, (p_m)'_x)$ 和 $((q_1)'_x, \ldots, (q_m)'_x)$ 是 $\Sigma_x X$ 中互为对跖的 $(m, \delta)$-悬挂架。由引理 5.1，存在一个满射 1-Lipschitz 映射 $\varphi_x$，从 $\Sigma_x X$ 到超极限 $\lim_\omega \Sigma_{x_k} X$，使得对于所有 $i \in \{1, \ldots, m\}$，$(p_{i,k})'_{x_k} \to \varphi_x((p_i)'_x)$ 且 $(q_{i,k})'_{x_k} \to \varphi_x((q_i)'_x)$。由于 $\varphi_x$ 是满射且为 1-Lipschitz 映射，由引理 4.7 可得，$(\varphi_x((p_1)'_x) \ldots, \varphi_x((p_m)'_x))$ 和 $(\varphi_x((q_1)'_x) \ldots, \varphi_x((q_m)'_x))$ 是 $\lim_\omega \Sigma_{x_k} X$ 中互为对跖的 $(m, \delta)$-悬挂架。由引理 4.6，对于所有足够大的 $k$，$m$-元组 $(p_{1,k}, \ldots, p_{m,k})$ 和 $(q_{1,k}, \ldots, q_{m,k})$ 都是 $x_k$ 处互为对跖的 $(m, \delta)$- 应变器。这便证明了该引理。□

类似于引理 5.5，通过基于引理 4.6 和引理 4.7 对引理 5.1 进行推广，我们得到以下结论：

引理 *5.6.* 对于 $r \in (0, D_\kappa)$，设 $(X_\omega, x_\omega)$ 是 *CAT($\kappa$)* 空间序列 $(X_k, x_k)$ 的超极限，且每个开球 $U_r(x_k)$ 均为局部测地完备。设 $(p_1, \ldots, p_m)$ 与 $(q_1, \ldots, q_m)$ 是位于 $x_\omega$ 处互为对跖的 $(m, \delta)$- 应变器。对每个 $i \in \{1, \ldots, m\}$，在 $X_k$ 中分别选取序列 $(p_{i,k})$ 与 $(q_{i,k})$，使其分别满足$p_{i,k} \to p_i$ 与 $q_{i,k} \to q_i$。则对所有 $\omega$-大的 $k$，$m$-元组 $(p_{1,k}, \ldots, p_{m,k})$ 与 $(q_{1,k}, \ldots, q_{m,k})$ 是位于 $x_k$ 处互为对跖的 $(m, \delta)$- 应变器。

5.5. **应变半径**。 我们在本文的设定中讨论应变半径这一概念（参见 [17, 第7.5]小节）。

引理 *5.7.* 设 $U$ 是 *CAT(*$\kappa$*)* 空间 $X$ 的局部测地完备开子集，其度量为 $d_X$。如果 $x_0$ 中的一个点 $U$ 被 *(*$m, \delta$*)*-应变器 *(*$p_1, \ldots, p_m$*)* 所应变，那么存在 $r_0 \in \in (0, D_\kappa/2)$，使得 $U_{2r_0}(x_0) \subset U$，从而对于每个 $x \in U_{r_0}($ $x_0)$，以及满足 $x \in p_i q_i$ 且 $d_X(q_i, x) = r_0$，$i \in \{1, \ldots, m\}$ 的任意 $q_i \in U$，$m$-元组 *(*$p_1, \ldots, p_m$*)* 和 *(*$q_1, \ldots, q_m$*)* 在 $x$ 处是互为对跖的 *(*$m, 2\delta$*)*-应变器。

证明。 根据引理 5.5，我们找到 $r_0 \in \in (0, D_\kappa/2)$，使得 $U_{2r_0}(x_0) \subset U$，从而对于每个 $x \in U_{r_0}(x_0)$，$m$-元组 $(p_1, \ldots, p_m)$ 是 $x$ 处的 $(m, \delta)$-应变器。对于每个 $i \in \{1, \ldots, m\}$，取 $q_i \in U$，满足 $x \in p_i q_i$ 且 $d_X(q_i, x) = r_0$。引理 4.5 意味着 $(p_1, \ldots, p_m)$ 和 $(q_1, \ldots, q_m)$ 是 $x$ 处互为对跖的 $(m, 2\delta)$-应变器。□

根据引理 5.7，我们给出如下定义：

定义 5.3. 设 $U$ 是 CAT($\kappa$) 空间 $X$ 的一个局部测地完备开子集，其度量为 $d_X$。假设点 $x \in U$ 由 $(p_1, \ldots, p_m)$ 构成的应变器组$(m, \delta)$-应变。我们将 $\sigma_{(p_1,\ldots,p_m)}(x)$ 定义为满足以下条件的 $r \in (0, D_\kappa/2)$ 的上确界： $U_{2r}(x)$ 包含于 $U$ 中，且对每个 $y \in U_r(x)$，以及任意满足 $y \in p_i q_i$ 和 $d_X(q_i, y) = r$，$i \in \{1, \ldots, m\}$ 的 $q_i \in U$，$p_1, \ldots, p_m$ 与 $q_1, \ldots, q_m$ 这两个 $m$-元组在 $y$ 处是互为对踵的$(m, 2\delta)$-应变器。我们称 $\sigma_{(p_1,\ldots,p_m)}(x)$ 为 $x$ 关于 $(p_1, \ldots, p_m)$ 的应变半径。注意，根据引理 5.7，$\sigma_{(p_1,\ldots,p_m)}(x)$ 的值必定为正。

备注 5.4。 由定义 5.3 可知，函数$\sigma_{(p_1,\ldots,p_m)}$ 在$U_{r_0}(x_0)$上连续。

5.6. **受应变点周围的角**。 在受应变点周围，我们可以找到正则三角形，其底角几乎等于相应的比较角。我们将 [17, 引理 7.6]重新表述如下：

**引理 5.8**。 设 $A$ 是一个具有$\mathrm{CAT}(\kappa)$ 空间的子集，且直径 $A < D_\kappa/2$。设$(p_1, \ldots, p_m)$ 和$(q_1, \ldots, q_m)$ 是$A$处互为对跖的$(m, \delta)$-受应变点。取 $x, y \in A$，满足 $x \neq y$。那么，对每个 $i \in \{1, \ldots, m\}$，都有

$$|\angle p_i x y - \angle \tilde{p}_i \tilde{x} \tilde{y}| < 2\delta, \tag{5.1}$$

其中， $\angle \tilde{p}_i \tilde{x} \tilde{y}$是$M^2_\kappa$中对应于 $\angle p_i x y$的比较角。此外，

$$\pi - 2\delta < \angle p_i x y + \angle p_i y x < \pi. \tag{5.2}$$

此外，如果 $d(p_i, x) = d(p_i, y)$</style>，那么

$$\frac{\pi}{2} - 2\delta < \angle p_i x y < \frac{\pi}{2}. \tag{5.3}$$

证明。 由于 $(p_1, \ldots, p_m)$ 和 $(q_1, \ldots, q_m)$ 分别是 $x$ 和 $y$ 处互为对跖的 $(m, \delta)$-应变器，对于每个 $i \in \{1, \ldots, m\}$，我们有

$$\angle p_i x y + \angle q_i x y \geq \angle p_i x q_i > \pi - \delta, \quad \angle p_i y x + \angle q_i y x \geq \angle p_i y q_i > \pi - \delta$$

$\triangle p_i xy$ 和 $\triangle q_i xy$ 中的所有边长都小于 $D_\kappa/2$。将它们与 $M^2_\kappa$ 中的比较三角形进行比较，可得

$$\angle p_i xy + \angle p_i yx < \pi, \quad \angle q_i xy + \angle q_i yx < \pi.$$

将这些不等式结合起来，即可得到所需的(5.1)和(5.2)。若 $d(p_i,\ x) = d(p_i,\ y)$，则 $\angle p_i xy$ 和 $\angle p_i yx$ 都小于 $\pi/2$。这一点连同(5.2)蕴含(5.3)。□

5.7. **松弛墙点**。 我们引入第1节中提到的松弛墙奇异性。

定义 5.4. 设 $m \in \mathbb{N}$，并设 $\delta, \epsilon \in (0, 1)$满足 $\delta < \epsilon$。设$U$ 为CAT($\kappa$)空间$X$的一个局部测地完备开子集。我们称 $U$中的点 $x$ 为$(m, \delta, \epsilon)$-墙点，如果 $x$ 属于$S_{m,\epsilon}(U) - S_{m-1,\delta}(U)$，其中$S_{0,\delta}(U)$被定义为空集。对于 $U$的子集 $A$，我们用$W_{m,\delta,\epsilon}(A)$表示 $A$中所有$(m, \delta, \epsilon)$-墙点的集合，并称之为 $A$中的$(m, \delta, \epsilon)$-墙集。

我们验证如下：

**引理 5.9.** 对每个 $n \in \mathbb{N}$，存在 $\delta^* \in (0,1)$，使得对每个 $\delta \in (0, \delta^*)$，下列结论成立：若 $\mathrm{CAT}(\kappa)$ 空间 $X$ 的局部测地完备开子集 $U$ 满足 $\dim_{\mathrm{G}} U \le n$，则 $W_n(U)$包含于 $W_{n,\delta,\delta^*}(U)$。

证明。假设对 (0, 1) 中满足 $\delta_k < \delta^*_k$ 与 $\delta^*_k \to 0$ 的某些序列 $(\delta_k)$、$(\delta^*_k)$，存在 CAT($\kappa$) 空间 $X_k$ 的局部测地完备开子集 $U_k$ 中的点序列 $(x_k)$，且满足 $\dim_{\mathrm{G}} U_k \le n$，使得每个 $x_k$ 属于 $W_n(U_k) \cap (U_k - W_{n,\delta_k,\delta^*_k}(U_k))$。由于有 $x_k \in W_n(U_k)$，故有 $x_k \in R_{n-1,\delta_k}(U_k)$。因此 $x_k \in R_{n,\delta^*_k}(U_k)$。于是我们在 $\Sigma_{x_k} X_k$ 中找到一个 $(n, \delta^*_k)$-悬挂器。设 $(\lim_\omega \Sigma_{x_k} X_k, \xi_\omega)$ 为带基点方向空间序列 $(\Sigma_{x_k} X_k, \xi_k)$ 的某个超极限。引理 4.4 表明 $\lim_\omega \Sigma_{x_k} X_k$ 容许一个 $n$-悬挂器。由 (2.2) 可得 $\dim_{\mathrm{G}} (\lim_\omega \Sigma_{x_k} X_k) \le n - 1$。由命题 3.7，$\lim_\omega \Sigma_{x_k} X_k$ 等距于 $\mathbb{S}^{n-1}$。

另一方面，由于 $x_k \in W_n(U_k)$，每个 $\Sigma_{x_k} X_k$ 都等距分裂为 $\mathbb{S}^{n-2} * T^0_k$，其中 $T^0_k$是基数至少为 3 的离散度量空间。特别地，$\lim_\omega \Sigma_{x_k} X_k$等距分裂为 $\mathbb{S}^{n-2} * T^0_\omega$，其中 $T^0_\omega$ 是基数至少为 3 的离散度量空间。这是一个矛盾。□

## 6. Regularity of maps with distance coordinates

我们讨论 CBA空间上的距离坐标映射，这是对 Lytchak 和作者研究的推广 [17, 节 8]（另见 Lytchak、Stadler 和作者的 [19, 第 4 节及 5]）。

**6.1. 距离坐标映射。** 对于度量空间 $X$ 中的点 $p$，其度量为 $d_X$，我们将从 $p$出发的距离函数记为 $d_p(x) := d_X(p,\ x)$。

设 $U$ 是局部测地度量空间的一个开子集。若函数 $f\colon U \to \mathbb{R}$ 满足：对于 $U$ 中的每条测地线 $\gamma\colon I \to U$，复合函数 $f\circ\gamma$ 在 $I$ 上是凸的，则称其在 $U$ 上是凸的。

**例 6.1。** 设 $X$ 是一个 CAT($\kappa$) 空间。由 CAT($\kappa$) 性质可知，对于每个 $r \in (0, D_\kappa/2]$ 以及每个 $p \in X$，距离函数 $d_p\colon U_r(p) \to \mathbb{R}$ （从 $p$ 出发）在 $U_r(p)$ 上是凸的。

设 $X$ 是一个度量为 $d_X$ 的 CAT($\kappa$) 空间，并设 $p, x, y$ 是 $X$ 中三个互不相同的点，且两两距离均为 $< D_\kappa$。设 $\gamma_{xy}\colon [a,b] \to X$ 是 $X$ 中从 $x$ 到 $y$ 的一条测地线。那么我们有如下所谓的距离函数第一变分公式：

$$(d_p \circ \gamma_{xy})^+(a) = -\cos\angle_x(p,y), \tag{6.1}$$

其中，$(d_p\circ\gamma_{xy})^+(a)$ 是 $d_p\circ\gamma_{xy}$ 在 $a$ 处的右导数。

设 $U$ 是 $X$ 的一个直径为 $U < D_\kappa/2$ 的局部测地完备开子集。设 $(p_1, \ldots\ldots, p_m)$ 是 $X - U$ 中的一个 $m$ 元点组，使得对每个 $i \in \{1,\ldots,m\}$，都有 $d_X(p_i,\ x) < D_\kappa/2$，并用距离坐标定义映射 $\varphi\colon U \to \mathbb{R}^m$，使得 $\varphi = (d_{p_1}, \ldots\ldots, d_{p_m})$。由于每个坐标 $d_{p_i}$ 都是利普希茨且凸的，对每个 $x \in U$，映射 $\varphi$ 都有方向导数 $D_x\varphi\colon T_xX \to \mathbb{R}^m$ （见 [14]）。由第一变分公式（6.1），对于每个 $y \in U - \{x\}$，以及每个 $s \in [0,\infty)$，我们有

$$(D_x\varphi)\left([(s, y_x')]\right) = \left(-s\cos\angle_x(p_1,y), \ldots, -s\cos\angle_x(p_m,y)\right). \tag{6.2}$$

**6.2. 撑架映射。** 我们引入如下定义：

**定义 6.1.** 设 $m \in \mathbb{N}$ 和 $\delta \in (0,1)$。设 $U$ 是一个 CAT($\kappa$) 空间的开子集，且其 diam 为 $U < D_\kappa/2$。若 $U$ 局部测地完备，并且在 $U$处存在一个 $(m,\delta)$-应变，使得 $\varphi = (d_{p_1}, \ldots, d_{p_m})$，则称映射 $\varphi\colon U \to \mathbb{R}^m$是 $U$ 上的 $(m,\delta)$-应变映射 。

**例 6.2.** 设 $U$ 是 CAT($\kappa$) 空间的局部测地完备开子集。若 $U$ 中的点 $p$ 是 $\delta$-粗圆锥形的，则存在某个 $r \in (0, D_\kappa/2)$，使得从 $p$ 出发的距离函数 $d_p\colon U_r(p) - \{p\} \to \mathbb{R}$ 是 $U_r(p) - \{p\}$ 上的 $(1,\delta)$-应变映射。

对于 $u \in \mathbb{R}^m$，我们用 $\|u\|$ 表示 $\mathbb{R}^m$ 上 $u$ 的欧几里得范数。

由引理 5.8，我们导出撑架映射的如下第一变分不等式（参见 [17, 命题 8.5]）。

**引理 6.1.** 设 $\varphi\colon U \to \mathbb{R}^m$ 为 $U$ 上带有 $\varphi = (d_{p_1}, \ldots, d_{p_m})$ 的 $(m,\delta)$-应变映射。设 $\gamma\colon [a,b] \to U$ 为连接 $U$ 中两个不同点的测地线。则对每个 $i \in \{1,\ldots,m\}$，我们有

$$\left|\frac{(d_{p_i}\circ\gamma)(b) - (d_{p_i}\circ\gamma)(a)}{d(\gamma(b),\gamma(a))} - (d_{p_i}\circ\gamma)^+(a)\right| < 2\delta.$$

特别地，我们有

$$\left|\frac{\|(\varphi\circ\gamma)(b)-(\varphi\circ\gamma)(a)\|}{d(\gamma(b),\gamma(a))}-\|(\varphi\circ\gamma)^+(a)\|\right|<2\sqrt{m}\delta,$$

其中 $(\varphi\circ\gamma)^+(a)=((d_{p_1}\circ\gamma)^+(a)\ldots,(d_{p_m}\circ\gamma)^+(a))$。此外，若对某个 $j\in\{1,\ldots,m\}$，有 $(d_{p_j}\circ\gamma)(a)=(d_{p_j}\circ\gamma)(b)$，则 $\|(d_{p_j}\circ\gamma)^+(a)\|<2\delta$。而且，若有 $(\varphi\circ\gamma)(a)=(\varphi\circ\gamma)(b)$，则

$$\|(\varphi\circ\gamma)^+(a)\|<2\sqrt{m}\delta.$$

引理 6.1 告诉我们以下几何性质：

**命题 6.2**。设 $\varphi\colon\ U\to\mathbb{R}^m$ 是定义在 $U$ 上的一个$(m,\delta)$-应变映射，其应变为 $\varphi=(d_{p_1},\ldots,d_{p_m})$。设 $\gamma\colon\ [a,b]\to U$ 是一条连接 $U$ 中两个不同点的测地线。那么对所有 $s,t\in[a,b)$，我们有

$$\|(\varphi\circ\gamma)^+(s)-(\varphi\circ\gamma)^+(t)\|\le 4\sqrt{m}\delta.$$

如果对某些 $s_1,s_2\in[a,b)$，在 $s_1\neq s_2$ 下有 $(\varphi\circ\gamma)(s_1)=(\varphi\circ\gamma(s_2))$，那么对所有 $t\in[a,b)$，都有

$$\|(\varphi\circ\gamma)^+(t)\|\le 6\sqrt{m}\delta.$$

6.3. **伪应变映射**。回忆一下，度量空间中从单个点出发的每个距离函数都是 1-开映射。我们将证明，对某个常数 $c\in(0,1]$，每个 $(m,\delta)$-应变映射都是 $c$-开映射。为此，我们考虑更一般的距离坐标映射。

**定义 6.2**。设 $m\in\mathbb{N}$ 和 $\delta\in$ 属于 (0,1)。设 $X$ 是带度量 $d_X$ 的 CAT($\kappa$) 空间，且 $U$ 是 $X$ 的开子集，直径为 $U<D_\kappa/2$。若映射 $\varphi\colon U\to\mathbb{R}^m$ 满足以下条件，我们称其为 $U$ 上的 $(m,\delta)$-伪应变映射： $U$ 是局部测地完备的，并且存在一个 $m$-元组 $(p_1,\ldots,p_{m-1},p_m)$，其中各点属于 $X-U$，使得

(1) 对每个 $i\in\{1,\ldots,m\}$，我们有 $\sup_{x\in U}d_X(p_i,\ x)<D_\kappa/2$；(2) 对每个 $x\in U$，且对于满足 $i\neq j$ 的 $i,\ j\in\{1,\ldots,m\}$，我们有

$$\left|\angle_x(p_i,p_j)-\frac{\pi}{2}\right|<2\delta. \tag{6.3}$$

仿照定理 9.4]，中关于开性的某些论证，我们证明如下结论（参见 GCBA情形中的 [17, 引理 8.1] ）：

**引理 6.3.** 设 $m\in\mathbb{N}$，令 $\delta\in(0,1)$ 满足 $2(m-1)\delta<1$。令$\varphi=(d_{p_1},\ldots,d_{p_m})$: $U\to\mathbb{R}^m$ 为 $U$ 上的一个 $(m,\delta)$-伪应变映射，其中 $U$ 位于一个 $\mathrm{CAT}(\kappa)$ 空间 $X$ 中。那么 $\varphi$ 局部为 $1/(1-2(m-1)\delta)\sqrt{m}$- 开。特别地，当 $4(m-1)\delta<1$ 时，它局部为 $2/\sqrt{m}$-开。

证明。令 $\delta\in(0,1)$ 足够小。对于一个固定点 $x_0$ in $U$，选取$r\in(0,\infty)$，使得 $B_r(x_0)\subset U$。取一个元素 $u_0=(u_0^1,\ldots,u_0^m)$，属于 $\mathbb{R}^m$ 且满足 $\|u_0\|<r/2$。目标是找到一个点 $y_*$ in $U$，使得$\varphi(y_*)=\varphi(x_0)+u_0$，并满足 $(1-2(m-1)\delta)d_X(x_0,y_*)\le\|u_0\|_{\ell^1}$，其中$d_X$ 是 $X$ 的度量，而 $\|u_0\|_{\ell^1}$ 是 $u_0$ 的 $\ell^1$-范数。为此，我们将把 $y_*$ 构造为序列 $y_1,y_2,\ldots$ 的极限点。

首先，我们找到 $y_1 \in U$，使得 $d_X(x_0, y_1) \le \|u_0\|_{\ell^1}$，满足

$$\|\varphi(y_1) - (\varphi(x_0) + u_0)\|_{\ell^1} \le 2(m-1)\delta \|u_0\|_{\ell^1}. \tag{6.4}$$

令 $(e_1, \dots, e_m)$ 表示 $\mathbb{R}^m$ 的标准正交基。对于$u_0^1 \in \mathbb{R}$，我们选取 $x_1 \in U$，使得 $x_1 \in p_1 x_0$ 且 $|d_{p_1}(x_1) - d_{p_1}(x_0)| = |u_0^1|$。注意，若 $u_0^1 = 0$，则 $x_1 = x_0$。根据假设 (6.3) 和第一变分公式 (6.1)，我们推出：只要 $i \ne 1$，就有 $|d_{p_i}(x_1) - d_{p_i}(x_0)| < 2\delta |u_0^1|$。这意味着

$$\|\varphi(x_1) - (\varphi(x_0) + u_0^1 e_1)\|_{\ell^1} \le 2(m-1)\delta |u_0^1|.$$

依次地，对于 $u_0^m \in \mathbb{R}$，我们选取 $x_m \in U$，使得 $x_m \in p_m x_{m-1}$ 且 $|d_{p_m}(x_m) - d_{p_m}(x_{m-1})| = |u_0^m|$；特别地，

$$\|\varphi(x_m) - (\varphi(x_{m-1}) + u_0^m e_m)\|_{\ell^1} \le 2(m-1)\delta |u_0^m|.$$

令 $y_1 := x_m$。于是我们有 $d_X(x_0, y_1) \le \|u_0\|_{\ell^1}$，并且 (6.4)。

归纳地，对于 $y_k \in U$和 $u_k := \varphi(x_0) + u_0 - \varphi(y_k)$，我们可以构造 $y_{k+1} \in U$，使得 $d_X(y_k, y_{k+1}) \le \|u_k\|_{\ell^1}$，并且

$$\|\varphi(y_{k+1}) - (\varphi(y_k) + u_k)\|_{\ell^1} \le 2(m-1)\delta \|u_k\|_{\ell^1}.$$

对于每个 $k \in \mathbb{N}$，我们有

$$\|u_{k+1}\|_{\ell^1} \le 2(m-1)\delta \|u_k\|_{\ell^1} \le (2(m-1)\delta)^{k+1} \|u_0\|_{\ell^1} \tag{6.5}$$

$$d_X(x_0, y_{k+1}) \le \sum_{i=0}^{k} d_X(y_i, y_{i+1}) \le \frac{1 - (2(m-1)\delta)^{k+1}}{1 - 2(m-1)\delta} \|u_0\|_{\ell^1}, \tag{6.6}$$

其中我们令 $y_0 := x_0$。因此，$(y_k)$ 是 $B_r(x_0)$ 中的柯西序列。令$y_*$为 $(y_k)$ 在 $B_r(x_0)$ 中的极限。那么 (6.5) 蕴含 $\varphi(y_*) = \varphi(x_0) + u_0$，而 (6.6) 则有（$1 - 2(m-1)\delta$）$d_X(x_0, y_*) \le \|u_0\|_{\ell^1}$。□

由引理 6.3 可得：

**引理 6.4.** 对于 $m \in \mathbb{N}$，令 $\delta \in (0,1)$ 满足 $2(m-1)\delta < 1$。那么，每个 $(m, \delta)$-应变映射都是局部 $1/(1 - 2(m-1)\delta)\sqrt{m}$-开映射。特别地，只要 $4(m-1)\delta < 1$，它就是局部 $2/\sqrt{m}$-开映射。

证明。由引理 4.4 可知，每个准（$m, \delta$）应变映射都是一个（$m, \delta$）应变映射。由引理 6.3，我们得出该引理。□

**6.4. 应变映射的拓扑正则性。** 我们证明，每个应变映射几乎都是一个次度量映射（参见 [17, 第 8.3] 小节）。

**命题 6.5。** 对于每个 $\epsilon \in (0,1)$以及每个 $m \in \mathbb{N}$，都存在满足下列条件的 $\delta \in (0, 1)$：设 $\varphi\colon U \to \mathbb{R}^m$ 是一个$(m, \delta)$-应变映射。那么，只要$U$ 是凸的，$\varphi$ 就是$(1+\epsilon)$-利普希茨且$(1+\epsilon)$-开。特别地，对于每个 $x \in U$，$\varphi$ 在 $x$ 处的方向导数$D_x\varphi\colon T_xX \to \mathbb{R}^m$ 都是$(1+\epsilon)$-利普希茨且$(1+\epsilon)$-开。

证明。取 $\epsilon \in (0,1)$ 和 $m \in \mathbb{N}$。由超极限论证可知，若 $\delta \in (0,1)$ 足够小，则对于所有满足 $|\xi| = 1$ 的 $x \in U$ 和 $\xi \in T_xX$，都有 $\|(D_x\varphi)(\xi)\| < 1+\epsilon$；特别地，若进一步假设$U$ 是凸的，则可知 $\varphi$ 是 $(1+\epsilon)$-利普希茨的。

如引理 6.4 所示，对每个 $x \in U$，方向导数 $D_x\varphi$ 对某个仅依赖于 $m$ 和 $\delta$ 的 $c \in (0,1)$ 是 $c$-开的。因此，对每个 $u \in \mathbb{S}^{m-1}$，我们可找到 $\xi \in T_xX$，使得 $(D_x\varphi)(\xi) = u$ 且 $|\xi| < c$。由超极限论证可知，若 $\delta \in (0,1)$ 充分小，则对每个 $u \in \mathbb{S}^{m-1}$，我们可找到 $\xi \in T_xX$，使得 $(D_x\varphi)(\xi) = u$ 且$|\xi| < 1+\epsilon$。应用 Lytchak 开映射定理 [15, 定理 1.2]，我们得出 $\varphi$ 是 $(1+\epsilon)$-开的。由此我们证明了该命题。□

由引理 5.3 可知，若 $U$ 是 CAT($\kappa$) 空间的一个局部测地开子集且满足 $\dim_{\mathrm{G}} U \leq n$，则当 $\delta$ 充分小时，$R_{n+1,\delta}(U)$ 为空。在此情形下，人们希望 $U$ 上的所有 $(n,\delta)$-撑架映射都是局部双利普希茨嵌入。

**命题 6.6**。对于任意 $\epsilon \in (0,1)$，以及任意 $n \in \mathbb{N}$，存在 $\delta \in (0,1)$，使得若 $\varphi\colon U \to \mathbb{R}^n$ 是一个$(n,\delta)$-应变映射，且维数$_{\mathrm{G}}\, U \leq n$，则对于任意 $x_0 \in U$以及任意 $r_0 \in (0, D_\kappa/2)$，若$B_{r_0}(x_0) \subset U$，则限制映射 $\varphi|_{U_{r_0}(x_0)}$ 是到 $\mathbb{R}^n$中的一个$(1+\epsilon)$-双利普希茨嵌入。

证明。取足够小的 $\delta \in (0,1)$。设 $\varphi\colon U \to \mathbb{R}^n$ 是在 CAT($\kappa$) 空间 $X$ 上的一个 $(n,\delta)$-应变映射，其中 $\varphi = (d_{p_1}, \dots, d_{p_n})$。取$x_0 \in U$以及 $r_0 \in (0, D_\kappa/2)$，使得 $B_{r_0}(x_0) \subset U$。注意，对于任意$x \in B_{r_0}(x_0)$，都有 $\dim_{\mathrm{G}} \Sigma_x X \leq n-1$。

我们证明限制映射$\varphi|_{U_{r_0}(x_0)}$ 是单射。假设存在$U_{r_0}(x_0)$中的两个不同点 $x, y$，满足 $\varphi(x) = \varphi(y)$。可穿透 CAT(1) 空间 $\Sigma_x X$ 存在一个$(n,\delta)$-悬挂器 $((p_1)'_x, \dots, (p_n)'_x)$。由于$\varphi(x) = \varphi(y)$，由引理 5.8 可得 $|\angle_x(p_i, y) - \pi/2| < 2\delta$。这与引理 4.10 矛盾。因此$\varphi|_{U_{r_0}(x_0)}$ 是单射。

由命题 6.5 以及$\varphi|_{U_{r_0}(x_0)}$的单射性，我们得出$\varphi|_{U_{r_0}(x_0)}$ 是到 $\mathbb{R}^n$中的$(1+\epsilon)$-双利普希茨嵌入。□

作为命题 6.6 的推论，我们有：

**命题 6.7**。对于每个 $n \in \mathbb{N}$，都存在 $\delta \in (0,1)$，使得若$U$ 是一个 *CAT($\kappa$)* 空间中的局部测地完备开子集，且$\mathrm{CAT}(\kappa)$ 空间满足维数$_{\mathrm{G}}\, U \leq n$，则$R_{n,\delta}(U)$ 是一个利普希茨 $n$-流形。

## 7. Structure of singular sets in GCBA spaces

从现在起，我们将聚焦于 GCBA空间的几何结构。本节将讨论其奇异集的结构。

**7.1. 奇异集的可求长性**。我们首先回顾以下内容（[17,定理 1.6]）：

**定理 7.1.** ([17]) 若 $X$ 是一个$\mathrm{GCBA}(\kappa)$ 空间，那么对每个 $m \in \mathbb{N}$， $m$-奇异集 $S_m(X)$ 都是可数个子集的并，这些子集与 $\mathbb{R}^{m-1}$的某些紧子集双利普希茨等价；特别地，$S_m(X)$ 是可数$(m-1)$-可求长的，并且满足

$$\dim_{\mathrm{H}} S_m(X) \leq m-1.$$

作为定理 7.1 的推论，我们有：

**推论 7.2.** 设 $X$ 是一个 $\mathrm{GCBA}(\kappa)$ 空间，维数为 维 $X = n$。则拓扑奇异集 $S(X)$是可数个子集的并，而这些子集分别与 $\mathbb{R}^{n-1}$ 的某些紧子集双 *Lipschitz* 等价。特别地，$S(X)$ 是可数可（$n-1$）整流的，并且满足

$$\dim_{\mathrm{H}} S(X) \leq n-1.$$

证明. 若维数 $X = n$，则命题 6.7 蕴含 $R_n(X)$ 包含于 $X - S(X)$ 中（另见 [17, 推论 11.2]）。结合定理 7.1 即可得出结论。□

## 7.2. 奇异集的整流参数化。

**引理 7.3.** 对于每个 $\epsilon \in (0,1)$ 以及每个 $m \in \mathbb{N}$，都存在 $\delta \in (0,\epsilon)$ 满足以下条件：设 $\varphi\colon U \to \mathbb{R}^m$ 是一个定义在 $U$ 上的 $(m,\delta)$-应变映射，且 $U$ 包含于某个 $\mathrm{GCBA}(\kappa)$ 空间中。则对于 $S_{m+1,\epsilon}(U) - \{x\}$ 中的每个序列 $(x_k)$，若 $x_k \to x$，则有

$$\liminf_{k\to\infty} \frac{\|\varphi(x_k) - \varphi(x)\|}{d(x_k,x)} \geq 1-\epsilon. \tag{7.1}$$

证明。 取足够小的 $\delta \in (0,\epsilon)$，使得 $4\sqrt{m}\delta < \epsilon$。假设对于某个 $S_{m+1,\epsilon}$ 中的序列 $(x_k)$，$U - \{x\}$ 收敛到 $x$，我们有

$$\liminf_{k\to\infty} \frac{\|\varphi(x_k) - \varphi(x)\|}{d(x_k,x)} < 1-\epsilon.$$

取足够大的 $k$。由引理 6.1，我们有

$$\left| \frac{\|\varphi(x_k) - \varphi(x)\|}{d(x_k,x)} - \left\|(D_{x_k}\varphi)(x'_{x_k})\right\| \right| < 2\sqrt{m}\delta.$$

因此我们有

$$\left\|(D_{x_k}F)(x'_{x_k})\right\| < 1 - \epsilon + 2\sqrt{m}\delta < 1 - \frac{\epsilon}{2}.$$

由命题 5.4，只要 $k$ 足够大，点 $x$ 就是 $x_k$ 处的一个 $(1,\delta)$-撑点。引理 4.8 蕴含 $x_k$ 属于 $R_{m+1,\epsilon/2}(U)$。这就产生了矛盾。□

设 $X$ 是一个 CAT($\kappa$) 空间，其度量为 $d_X$。设 $\varphi\colon U \to \mathbb{R}^m$ 是从 $X$ 的开子集 $U$ 到 $B$ 的局部 Lipschitz 映射，其中 $B$ 是 $U$ 的闭子集。假设存在 $c \in (0,1]$，使得对于每个

点 $x \in B$，以及 $B - \{x\}$ 中收敛到 $x$ 的每个序列 $(x_k)$，都有

$$\liminf_{k\to\infty} \frac{\|\varphi(x_k) - \varphi(x)\|}{d_X(x_k, x)} \geq c.$$

根据度量空间的 Lytchak 开映射定理 [15, 命题 1.1]，存在 $B$ 的一个开稠密子集 $B_0$，使得限制映射 $\varphi|_{B_0}\colon B_0 \to \mathbb{R}^m$ 是到 $\mathbb{R}^m$中的局部（$1/c$）双利普希茨嵌入。如果此外 $B$ 可分，那么 $B$ 是可数 $m$-可整的。

因此，我们得出以下结论：

**命题 7.4.** 对于每个 $\epsilon \in (0, 1/2)$，以及每个 $m \in \mathbb{N}$，都存在 $\delta \in (0, \epsilon)$ 满足以下性质：设 $\varphi\colon U \to \mathbb{R}^m$ 是定义在包含于某个 $(m, \delta)$-应变映射上的映射，该映射定义在一个 $\mathrm{GCBA}(\kappa)$ 空间中的 $U$ 上。设$B$ 是 $U$的一个闭子集。那么存在$S_{m+1,\epsilon}(B)$ 的一个开稠密子集$R_\varphi(S_{m+1,\epsilon}(B))$，使得限制映射

$$\varphi|_{R_\varphi(S_{m+1,\epsilon}(B))}\colon R_\varphi(S_{m+1,\epsilon}(B)) \to \mathbb{R}^m$$

是到 $\mathbb{R}^m$ 中的局部$(1 + 2\epsilon)$-双利普希茨嵌入。若进一步假设 $B$可分，则集合 $S_{m+1,\,\epsilon}(B)$ 是可数 $m$-可整的。

证明。 由引理 5.2，集合 $S_{m+1,\,\epsilon}(B)$ 是 $U$ 中的闭子集。由引理 7.3，对于每个属于 $S_{m+1,\,\epsilon}(B)$ 的点 $x$，以及 $S_{m+1,\,\epsilon}(B)$ 中收敛到 $x$ 的每个序列 $(x_k)$，我们可得 (7.1)。由度量空间的 Lytchak 开映射定理 [15, 命题 1.1]，可推出该命题。□

**7.3. 奇异集的结构。** 我们准备如下内容：

**引理 7.5。** 对于每个 $n \in \mathbb{N}$，都存在一个严格单调递增的$(n+1)$-元组 $(\delta_1, \ldots, \delta_n, \delta_{n+1})$，其属于 $(0, 1/2)$ 且满足以下性质：设 $X$ 是一个 $\mathrm{GCBA}(\kappa)$ 度量空间，且 维数 $X \leq n$。若对于某个$m \in \{1, \ldots, n, n+1\}$，$X$ 的非空闭子集 $B$ 包含于 $S_{m,\,\delta_m}(X)$，则存在一个函数

$$\nu\colon B_0 \to \{0, 1, \ldots, m-1\}$$

在满足以下性质的开稠密子集 $B_0$ *of* $B$ 上：

*(1)* 对于 $x \in B_0$，我们有 $\nu(x) = 0$ 当且仅当 $x$ 是 $B$ 中的孤立点；*(2)* 若对于 $x \in B_0$，我们有 $\nu(x) \geq 1$，则存在一个 $(\nu(x), \delta_{\nu(x)})$-应变映射 $\varphi_x\colon V_x \to \mathbb{R}^{\nu(x)}$，其定义在 $x$ 的某个开邻域 $V_x$ 上，使得 *(a)* $\varphi_x$ 是 $(1 + \delta_{\nu(x)+1})$-利普希茨且 $(1 + \delta_{\nu(x)+1})$-开；*(b)* 限制映射 $\varphi_x|_{B_0}$ 是到 $\mathbb{R}^{\nu(x)}$ 中的 $(1 + 2\delta_{\nu(x)+1})$-双利普希茨嵌入；特别地，对每个 $y \in V_x$，我们有

$$\mathcal{H}^0\left(\varphi_x^{-1}(\varphi_x(y)) \cap B\right) \leq 1.$$

证明。 对于 $n \in \mathbb{N}$，令 $\delta_{n+1} \in (0, 1/2)$ 充分小，并取 $(0, 1/2)$ 中严格单调递增的序列 $(\delta_1, \ldots, \delta_n, \delta_{n+1})$，使得

每个 $\delta_i$ 对于 $\delta_{i+1}$ 都足够小。对于 $U$ 的任意子集 $A$，由引理 5.3 可得 $A = S_{n+1,\delta_{n+1}}(A)$，并且我们注意到

$$A = S_{1,\delta_1}(A) \sqcup \left( \bigsqcup_{l=1}^{n-1} S_{l+1,\delta_{l+1}} \left( \bigcap_{k=1}^{l} R_{k,\delta_k}(A) \right) \right) \sqcup \left( \bigcap_{i=1}^{n} R_{i,\delta_i}(A) \right).$$

由于 $B$ 包含于 $S_{m,\ \delta_m}(U)$（当 $m \in \{1, \dots, n, n+1\}$ 时），我们有

$$B = \begin{cases} S_{1,\delta_1}(B) & \text{if } m = 1, \\ S_{1,\delta_1}(B) \sqcup \left( \bigsqcup_{l=1}^{m-1} S_{l+1,\delta_{l+1}} \left( \bigcap_{k=1}^{l} R_{k,\delta_k}(B) \right) \right) & \text{if } m \geq 2. \end{cases} \tag{7.2}$$

在 $m = 1$ 的情形下，由命题 5.4 可知 $S_{1,\ \delta_1}(X)$ 至多局部有限，因此引理立即成立。

设 $m \geq 2$。用 $E(B)$ 表示 $B$ 中所有孤立点构成的集合，并令 $B^* := B - E(B)$。类似于 (7.2)，我们有

$$B^* = S_{1,\delta_1}(B^*) \sqcup \left( \bigsqcup_{l=1}^{m-1} S_{l+1,\delta_{l+1}} \left( \bigcap_{k=1}^{l} R_{k,\delta_k}(B^*) \right) \right).$$

设 $l \in \{1, \dots, m-1\}$。由引理 5.2、命题 6.5 和 7.4 可知，对于每个 $S_{l+1}$ 中的点 $x$，$_{\delta_{l+1}}\left(\bigcap_{k=1}^{l} R_{k,\delta_k}(B^*)\right)$，我们都能找到一个 $(l, \delta_l)$- 应变映射 $\varphi_x$: $V_x \to \mathbb{R}^l$，其定义在包含于 $\bigcap_{k=1}^{l} R_k$ 的 $x$ 的开邻域 $V_x$ 上；并且能找到 $S_{l+1,\delta_{l+1}}(V_x \cap B^*)$ 的一个开稠密子集 $R_{\varphi_x}\left(S_{l+1,\delta_{l+1}}(V_x \cap B^*)\right)$，满足以下性质：(a) $\varphi_x$ 是 $(1+\delta_{l+1})$-利普希茨且为 $(1+\delta_{l+1})$-开映射；(b) 限制映射 $\varphi_x|_{R_{\varphi_x}(S_{l+1,\delta_{l+1}}(V_x \cap B^*))}$ 是到 $\mathbb{R}^l$ 中的 $(1+2\delta_{l+1})$-双利普希茨嵌入。定义 $B^*$ 的子集 $B_l^*$ 如下：

$$B_l^* := \bigcup \left\{ R_{\varphi_x}\left(S_{l+1,\delta_{l+1}}(V_x \cap B^*)\right) \mid x \in S_{l+1,\delta_{l+1}} \left( \bigcap_{k=1}^{l} R_{k,\delta_k}(B^*) \right) \right\}.$$

注意，$B_l^*$ 在 $S_{l+1,\ \delta_{l+1}}\left(\bigcap_{k=1}^{l} R_{k,\delta_k}(B^*)\right)$ 中是开稠密的。令

$$B_0^* := \bigcup_{l=1}^{m} B_l^*, \quad B_0 := B_0^* \sqcup E(B) \sqcup S_{1,\delta_1}(B^*).$$

于是，$B_0^*$ 在 $B^*$ 中是开稠密的，而 $B_0$ 在 $B$ 中是开稠密的。

由该构造可知，对每个 $l \in \{1, \dots, m-1\}$，以及对每个 $x \in B_l^*$，我们得到一个 $(l, \delta_l)$-应变映射 $\varphi_x$: $V_x \to \mathbb{R}^l$，它来自包含于 $\bigcap_{k=1}^{l} R_{k,\ \delta_k}(U - E(B))$ 中的 $x$ 的一个开邻域 $V_x$，并且我们得到 $S_{l+1,\delta_{l+1}}(V_x \cap B^*)$ 的一个开稠密子集 $R_{\varphi_x}\left(S_{l+1,\delta_{l+1}}(V_x \cap B^*)\right)$，满足下列性质：(a) $\varphi_x$ 是 $(1+\delta_{l+1})$-利普希茨的且 $(1+\delta_{l+1})$-开的；(b) 限制 $\varphi_x|_{R_{\varphi_x}(S_{l+1,\delta_{l+1}}(V_x \cap B^*))}$ 是到 $\mathbb{R}^l$ 中的一个 $(1+2\delta_{l+1})$-双利普希茨嵌入。特别地，限制 $\varphi_x|_{B_0}$ 是

到 $\mathbb{R}^l$中的一个$(1+2\delta_{l+1})$-双利普希茨嵌入；事实上，集合 $V_x \cap B_0$ 包含于$S_{l+1,\delta_{l+1}}(V_x)$，因此 $\varphi_x|_{B_0}$ 是一个$(1+2\delta_{l+1})$-双利普希茨嵌入，因为$R_{\varphi_x}\left(S_{l+1,\delta_{l+1}}(V_x \cap B^*)\right)$ 在$S_{l+1,\delta_{l+1}}(V_x \cap B^*)$中稠密。此外，对每个 $y \in V_x$，我们有 $\mathcal{H}^0(\varphi_x^{-1}(\varphi_x(y)) \cap B) \leq 1$。该断言由下述内容得出：

**子引理 7.6.** 设 $\varphi\colon U \to V$ 为度量空间的开子集之间的连续映射。设 $A$ 为 $U$ 的子集，$A_0$ 为 $A$ 的稠密子集。若限制 $\varphi|_{A_0}$ 是双利普希茨嵌入，则对每个$x \in U$，我们有

$$\mathcal{H}^0\left(\varphi^{-1}(\varphi(x)) \cap A\right) \leq 1.$$

本子引理可由标准论证得到。
由此我们得出引理 7.5。 □

由引理 7.5，我们得到如下结论：

**命题 7.7.** 对每个 $n \in \mathbb{N}$，存在严格单调递增的$(n+1)$元组$(\delta_1, \dots, \delta_n, \delta_{n+1})$，其取值于$(0, 1/2)$，并满足如下条件：设 $X$ 是$\mathrm{GCBA}(\kappa)$ 空间，且维数为 $X \leq n$。若对某个 $m \in \{1, \dots, n, n+1\}$，$S(X)$ 非空且包含于 $S_{m,\delta_m}(X)$，则$m \leq n$，并且存在一个函数

$$\nu_{R(S(U))}\colon R(S(U)) \to \{0, 1, \dots, m-1\}$$

在满足以下条件的 $S(U)$ 的开稠密子集 $R(S(U))$ 上：

*(1)* 对于 $x \in R(S(U))$，有 $\nu_{R(S(U))}(x) = 0$ 当且仅当 $x$ 是 $S(U)$ 中的孤立点；*(2)* 若对于 $x \in R(S(U))$，有 $\nu_{R(S(U))}(x) \geq 1$，则存在一个 $(\nu(x)\ \delta_{\nu(x)})$-应变映射 $\varphi_x\colon V_x \to \mathbb{R}^{\nu(x)}$，它从 $U$ 中包含 $x$ 的开邻域 $V_x$ 出发，使得 *(a)* $\varphi_x$ 是 $(1+\delta_{\nu(x)+1})$-利普希茨且为 $(1+\delta_{\nu(x)+1})$-开；*(b)* 限制映射 $\varphi_x|_{R(S(U))}$ 是到 $\mathbb{R}^{\nu(x)}$ 中的 $(1+2\delta_{\nu(x)+1})$-双利普希茨嵌入；特别地，对每个 $y \in V_x$，有

$$\mathcal{H}^0\left(\varphi_x^{-1}(\varphi_x(y)) \cap S(U)\right) \leq 1.$$

证明。对于 $n \in \mathbb{N}$，取充分小的 $\delta_{n+1} \in (0, 1/2)$，并选取 $(0, 1)$ 中严格单调递增的序列 $(\delta_1, \dots, \delta_n, \delta_{n+1})$，使得每个 $\delta_i$ 对 $\delta_{i+1}$ 都足够小。由命题 6.6 可得$m \leq n$。将引理 7.5 应用于 $S(U)$，即可得出该命题。□

命题 7.7 中所述 $S(U)$ 的这样一个开稠密子集 $R(S(U))$ 将被称为正则拓扑奇异集于 $U$。

## 8. Fibers of strainer maps on GCBA spaces

我们讨论 GCBA空间上应变映射纤维的结构。

**8.1. 应变映射纤维的局部可缩性**。我们首先回顾 [17] 中关于应变映射上应变映射纤维局部可缩性的研究。

设 $\varphi\colon U \to \mathbb{R}^m$ 是 GCBA($\kappa$) 空间中 $U$ 上的 $(m,\ \delta)$-应变映射，且满足 $\varphi = (d_{p_1},\ \ldots,\ d_{p_m})$。对于 $x \in U$，令 $\Pi_x$ 表示经过 $x$ 的 $\varphi$ 的纤维，由 $\Pi_x := \varphi^{-1}(\{\varphi(x)\})$ 定义。

假设 $20m\delta \le 1$。那么，对于 $U$ 的任意闭子集 $B$，存在 $\sigma \in (0,\infty)$，使得对每个 $x \in B$ 以及每个 $r \in (0,\sigma)$，纤维的开度量球 $\Pi_x \cap U_r(x)$ 在自身内可缩（见定理 1.11 和 9.1]）。对于每个 $y \in U$ 以及每个满足 $3r \le \sigma_{(p_1,\ldots,p_m)}(y)$ 的 $r \in (0,\infty)$，要么 $\varphi|_{U_r}(x)$ 是单射，要么对于所有 $z \in B_r(y)$，纤维的开度量球 $\Pi_z \cap U_r(z)$ 是一个直径为 $\ge r$ 的连通集，其中 $\sigma_{(p_1,\ldots,p_m)}(y)$ 是 $y$ 处相对于 $(p_1, \ldots, p_m)$ 的撑架半径（见引理 9.2]）。此外，如果 $U$ 连通，那么要么 $\varphi$ 的所有纤维都不含孤立点，要么 $\varphi$ 的所有纤维都是离散的（见命题 9.3]）。

我们以推广的形式重新表述二分法 [17, 推论11。2]

**命题8.1**。对于每个 $m \in \mathbb{N}$，存在 $\delta \in (0,1)$ 满足以下条件：设 $\varphi\colon U \to \mathbb{R}^m$ 是定义在 $U$ 上的一个$(m,\delta)$-应变映射，其中 $U$是一个具有 $\varphi = (d_{p_1}, \ldots, d_{p_m})$的$\mathrm{GCBA}(\kappa)$ 空间。对于 $x \in U$，令 $\Pi_x$ 表示 $\varphi$ 经过 $x$的纤维。那么以下可能性之一成立：

(1) 在 $U$ 中不存在这样的点 $x$，使得 $\Pi_x$ 具有一个孤立点。在此情形下，对于包含于 $U$ 中的每个开子集 $V$，都有$\dim V \le m+1$。(2) $\varphi$ 的定义域 $U$ 是一个拓扑 $m$-流形。于是，对于每个$x \in U$以及每个 $r \in (0, D_\kappa/2)$，满足 $3r \le \sigma_{(p_1,\ldots,p_m)}(x)$，限制 $\varphi|_{U_r(x)}$ 是到 $\mathbb{R}^m$中的一个$(1+\epsilon)$-双利普希茨嵌入。

证明。*</style}*要么 的所有纤维都没有孤立点，要么映射 是局部单射（命题 *9.*）。在第一种情况下，中的每个点都不是中的孤立点。于是我们可以找到任意靠近的，使其为一个（，$12\delta$）-应变点（[17, 定理 10.5]）。因此$y \in R_{m+1,\ 12\delta}(U)$。由引理4.9可知 $\dim T_y X \ge m+1$。这就说明了第一个结论。在第二种情况下，结合 [17,引理 9.2] 和命题 6.5，即可得到第二个结论。□

注 8.1。关于应变映射的纤维维数，我们有如下结论：对每个 $n \in \mathbb{N}$，都存在满足以下条件的 $\delta \in (0,\ 1)$：设 $\varphi\colon U \to \mathbb{R}^m$ 是 GCBA($\kappa$) 空间中定义在 $U$ 上的一个（$m,\ \delta$）- 应变映射，且 $\dim U \le n$。那么对每个 $x \in U$，都有

$$\dim \Pi_x \le n - m.$$

由于该断言在本文中不会用到，我们省略证明。

8.2. **纤维的长度结构**。设 $\varphi\colon\ U \to \mathbb{R}^m$ 是 GCBA($\kappa$) 空间的一个开子集上的可微$c$-开映射。对于 $x_0 \in U$，令 $\Pi_{x_0}$为经过 $x_0$的 $\varphi$ 的纤维。那么，对每个 $x \in \Pi_{x_0}$，由 $T_x\Pi_{x_0} = (D_x\varphi)^{-1}(\{0\})$ 定义的 $\Pi_{x_0}$ 中 $x$ 处的切空间$T_x\Pi_{x_0}$，都可表示为重标度空间 $((1/t)\Pi_{x_0},\ x)$ 在 $t \to 0$ 时的带基点的 Gromov–Hausdorff 极限 ([14, 例 7.4])。

由命题 6.5，我们有如下结论：

**引理 8.2.** 对于 $m \in \mathbb{N}$，存在 $\delta \in (0,1)$ 满足以下条件：设 $\varphi\colon U \to \mathbb{R}^m$ 是空间 $U$ 中的一个 $(m,\delta)$-应变映射，其中该空间为 $\mathrm{GCBA}(\kappa)$。对于 $x_0 \in U$，令 $\Pi_{x_0}$ 为经过 $x_0$ 的 $\varphi$ 的纤维。则对每个 $x \in \Pi_{x_0}$，由 $T_x\Pi_{x_0} = (D_x\varphi)^{-1}(\{0\})$定义的 $x$ 处的切空间 $T_x\Pi_{x_0}$，由 $((1/t)\Pi_{x_0}, x)$ 当$t \to 0$时的带基点 *Gromov–Hausdorff* 极限定义。

我们将证明以下结论：

命题 *8.3.* 对每个 $\epsilon \in (0, 1)$ 和每个 $m \in \mathbb{N}$，存在 $\delta \in (0, 1)$ 满足以下条件：设 $\varphi\colon U \to \mathbb{R}^m$ 是 *GCBA*($\kappa$) 空间 $U$ 中的一个 $(m,\delta)$-应变映射，且该空间配有度量 $d_X$。那么对每个 $x_0 \in U$，存在 $r_0 \in (0, D_\kappa/2)$，使得 $U_{r_0}(x_0) \subset U$；并且对于所有 $x,\ y \in \Pi_{x_0} \cap U_{r_0}(x_0)$ 中存在一条曲线，其长度小于 $(1+\epsilon)d_X(x,y)$；特别地，由 $d_X$ 诱导的 $\Pi_{x_0} \cap U_{r_0}(x_0)$ 上的内在度量 $d_{\Pi_{x_0}}$ 满足

$$|d_{\Pi_{x_0}}(x,y) - d_X(x,y)| < \epsilon\, d_X(x,y).$$

为证明该命题，我们使用纤维上距离函数的梯度流。下面回顾 Lytchak [16]发展的梯度流。更一般的表述见 [16]。

设 $X$ 是一个度量为 $d_X$的度量空间。设 $f\colon\ X \to \mathbb{R}$ 是一个局部 Lipschitz 函数。对于 $x \in X$，记 在 $x$ 处的绝对梯度为

$$|\nabla_x f| := \max\left\{0, \limsup_{x_k \to x} \frac{f(x_k) - f(x)}{d_X(x_k, x)}\right\}.$$

若 $|\nabla_x f| = 0$，则称 $x \in X$ 为 $f$ 的临界点。若对每个收敛到 $x$ （其中$x_k$）的序列而言，在 $X$ 中都有以下性质，则称 $f$具有下半连续绝对梯度

$$|\nabla_x f| \le \liminf_{k\to\infty} |\nabla_{x_k} f|.$$

设 $f\colon\ X \to \mathbb{R}$ 是一个具有下半连续绝对梯度的局部 Lipschitz 函数。若对几乎所有 $t \in [0, a)$，都有以下性质，则称曲线 $\gamma\colon\ [0, a) \to X$ 为 $f$ 的梯度曲线

$$|\dot\gamma|(t) = |\nabla_{\gamma(t)} f|, \quad (f \circ \gamma)^+(t) = |\nabla_{\gamma(t)} f|^2, \tag{8.1}$$

其中 $|\dot\gamma|(t)$ 是 $\gamma$ 在 $t$ 处的度量导数。

设 $X$ 是一个局部紧度量空间。设 $f\colon X \to \mathbb{R}$ 是一个局部利普希茨函数，且其绝对梯度下半连续。根据 Lytchak 梯度流定理 [16, 定理 1.7]，，对 $f$ 的每个非临界点 $x \in X$，都存在一条从 $x$ 出发的极大梯度曲线 $\gamma\colon [0,a) \to X$，其对应函数为 $f$。此外，如果 $X$ 完备，且 $f$ 有界或具有一致的利普希茨常数，那么这样的曲线 $\gamma$ 是完备的，也就是说，$a=\infty$。

为证明命题 8.3，我们先证明以下结论：

引理 *8.4.* 对于每个 $\epsilon \in (0,1)$ 和每个 $m \in \mathbb{N}$，存在满足以下条件的 $\delta \in (0,1)$：设 $\varphi\colon U \to \mathbb{R}^m$ 是 *GCBA*$(\kappa)$ 空间 $U$ 上的 $(m,\delta)$-应变映射，且 $\varphi=(d_{p_1},\dots,d_{p_m})$。对于 $x_0 \in U$，取满足 $U_r(x_0) \subset U$ 的 $r \in (0, D_\kappa/2)$。对于每个 $y \in \Pi_{x_0} \cap U_r(x_0)$，令 $d_y\colon \Pi_{x_0} \to \mathbb{R}$ 为纤维 $\Pi_{x_0}$ 上从 $y$ 出发的距离函数。那么对于每个 $x \in \Pi_{x_0} \cap U_r(x_0) - \{y\}$，有

$$\frac{1}{\sqrt{1+\epsilon}} < |\nabla_x(-d_y)| \le 1. \tag{8.2}$$

特别地，$(-d_y)$ 在 $\Pi_{x_0} \cap U_r(x_0) - \{y\}$中没有临界点。此外，$(-d_y)$ 具有下半连续绝对梯度。

证明。设 $x \in \Pi_{x_0} \cap U_r(x_0) - \{y\}$。由引理 5.8 可知$\|(D_x\varphi)(y'_x)\| < 2\sqrt{m\delta}$。根据命题 6.5，$D_x\varphi$ 是 $(1+\epsilon)$-开集，因此 $U_{2\sqrt{m\delta}}((D_x\varphi)(y'_x))$ 包含于 $(D_x\varphi)(U_{(1+\epsilon)2\sqrt{m\delta}}(y'_x))$。于是我们找到$\xi \in U_{(1+\epsilon)2\sqrt{m\delta}}(y'_x)$，使得 $(D_x\varphi)(\xi) = 0$。如果 $\delta$ 足够小，那么有 $\cos \angle_x(y'_x,\xi') > 1/\sqrt{1+\epsilon}$。由引理 8.2 可知 $\xi \in T_x\Pi_{x_0}$，并且对于某个收敛到 $x$ 的序列 $(x_k)$，其中 $x$ 属于 $\Pi_{x_0}$，我们有 $(x_k)'_x \to \xi'$。由距离函数的第一变分公式 (6.1)，可知

$$|\nabla_x(-d_y)| \ge \lim_{k\to\infty} \frac{d_y(x)-d_y(x_k)}{d(x,x_k)} = \cos\angle_x(y'_x,\xi') > \frac{1}{\sqrt{1+\epsilon}}.$$

这与 $|\nabla_x(-d_y)| \le 1$ 一起推出 (8.2)。

为证明绝对梯度的半连续性，考虑一个梯度元素 $\xi_0 \in T_x\Pi_{x_0}$，满足

$$|\nabla_x(-d_y)| = \cos\angle_x(y'_x,\xi'_0) = \max_{\xi\in T_x\Pi_{x_0},|\xi|=1} \cos\angle_x(y'_x,\xi).$$

利用引理 8.2 以及角度的上半连续性 (2.1)，可知对于 $\Pi_{x_0} \cap U_r(x_0) - \{y\}$ 中收敛到 $x$ 的任意序列 $(x_k)$

$$|\nabla_x(-d_y)| = \cos\angle_x(y'_x,\xi'_0) \le \liminf_{k\to\infty} |\nabla_{x_k}(-d_y)|.$$

因此，$(-d_y)$ 具有下半连续绝对梯度。 □

对于度量空间 $X$ 中定义在有界区间 $I$ 上的曲线 $\gamma\colon I \to X$，我们用 $L(\gamma)$ 表示 $\gamma$ 的长度。

现在我们证明命题 8.3。

命题 8.3 的证明。 取充分小的 $\epsilon \in (0,\ 1)$ 和 $m \in \mathbb{N}$。令 $\delta \in (0,\ 1)$ 充分小。设 $\varphi\colon\ U \to \mathbb{R}^m$ 是在带度量 $d_X$ 的 GCBA($\kappa$) 空间 $X$ 上的 $(m,\ \delta)$-应变映射。对于 $x_0 \in U$，取 $r \in (0,\ D_\kappa/2)$，使得 $U_r(x_0) \subset U$。设 $x$ 和 $y$ 是 $U_r(x_0)$ 中的不同点。只需证明 $x$ 和 $y$ 可以由一条位于 $\Pi_{x_0} \cap U_r(x_0)$ 中的曲线连接，且该曲线的长度小于 $(1+\epsilon)d_X(x,\ y)$。

由引理 8.4，函数 $(-d_y)\colon\ \Pi_{x_0} \to \mathbb{R}$ 在$\Pi_{x_0} \cap U_r(x_0) - \{y\}$中没有临界点，且具有下半连续绝对梯度。根据 Lytchak 梯度流定理 [16, 定理 1.7], ，存在一条曲线 $\gamma\colon\ [0,a] \to \Pi_{x_0}$从 $x$到 $y$，其在$[0,a)$上的限制 $\gamma|_{[0,a)}$是 $(-d_y)$ 的梯度曲线。由 $(-d_y)$ 的性质 (8.1) 和 (8.2)，我们可得

$$L(\gamma) \le a < (1+\epsilon)\, d_X(x,y).$$

这就证明了命题 8.3。 □

**8.3. 余维一纤维的局部结构。** 对于 $N \in \mathbb{N}$，如果每个半径为 $r$ 的开度量球都能被至多 $N$ 个半径为 $r/2$ 的开度量球覆盖，则称度量空间为 $N$-倍增的。

我们称 GCBA($\kappa$) 空间中的开度量球 $U_r(x)$ 为小 球，若$r < D_\kappa/100$，且闭度量球 $B_{10r}(x)$ 是紧 CAT($\kappa$) 空间。对于 GCBA($\kappa$) 空间中的每个小球 $U_r(x)$，球 $B_{10r}(x)$ 都是 $N$-倍增的（[17, 命题 5.2]）。若 GCBA($\kappa$) 空间中的小球 $U_r(x)$ 满足球 $B_{10r}(x)$ 是 $N$-倍增的，则称其具有容量 $\le N$。

设 $\varphi\colon\ U \to \mathbb{R}^m$ 是一个（$m,\ \delta$）-应变映射，其中 $\varphi = (d_{p_1},\ \ldots\ldots,\ d_{p_m})$。对于 $\epsilon \in$（0，1），如果在 $\varphi$ 的定义域 $U$ 中的点 $x$ 不存在如下映射，则称其为 $\epsilon$-例外点：不存在一个（$m+1,\ \epsilon$）-应变映射 $\varphi^\dagger\colon\ U_x \to \mathbb{R}^{m+1}$，其定义在 $x$ 的某个开邻域 $U_x$ 上，且该邻域包含于 $U$ 中，使得 $\varphi^\dagger$ 可表示为$\varphi^\dagger = (d_{p_1},\ \ldots\ldots,\ d_{p_m},\ d_{p_{m+1}})$，其中 $p_{m+1}$是 $U$中的某个点。我们用$E_\epsilon(\varphi)$表示 $\varphi$ 的定义域 $U$ 中所有 $\epsilon$- 例外点的集合，并称其为 $\epsilon$- 例外集。

对于每个 $m \in \mathbb{N}$，存在 $\delta \in$（0，1），使得对每个 $N \in \mathbb{N}$，我们都能找到一个仅依赖于 $\delta$ 和 $N$ 的常数 $\mu \in \mathbb{N}$，满足以下性质：设 $U$ 是一个 GCBA($\kappa$) 空间的开子集，且 $U$ 包含于容量为 $\le N$ 的小球中。设 $\varphi\colon\ U \to \mathbb{R}^m$ 是 $U$ 上的一个（$m,\ \delta$）-应变映射。那么，对于每个 $x \in U$，$\varphi$ 经过 $x$ 的纤维 $\Pi_x$ 满足

$$\mathcal{H}^0\left(\Pi_x \cap E_{12\delta}(\varphi)\right) \le \mu$$

（[17,定理 10.5]）。

现在我们研究余维一纤维的几何结构。

**引理 8.5.** 对于每个 $n \in \mathbb{N}$，都存在 $\delta, \delta^* \in (0,\epsilon)$，使得 $\delta < \delta^*$，从而对于每个 $N \in \mathbb{N}$，我们都能找到一个常数 $\mu \in \mathbb{N}$，该常数仅依赖于 $\delta$ 和 $N$，并满足以下条件：设 $U$ 是$\mathrm{GCBA}(\kappa)$ 空间的一个开子集，且 维数$U = n$，使得 $U$ 包含在容量为 $\le N$ 的小球内。设 $\varphi\colon\ U \to \mathbb{R}^{n-1}$ 是 $U$ 上的一个$(n-1,\delta)$-应变映射。

取 $x_0 \in U$。那么存在 $r_0 \in (0, D_\kappa/2)$，使得 $U_{2r_0}(x_0) \subset U$，从而对于每个 $r \in (0, r)$，以及每个 $x \in U_{r_0}(x_0)$，纤维 $\Pi_x \cap U_r(x)$ 具有有限开度量树的结构，使得

(1) $\mathcal{H}^1(\Pi_x \cap U_r(x)) < \mu r$;
(2) $S(\Pi_x \cap U_r(x)) = \Pi_x \cap U_r(x) \cap E_{\delta^*}(\varphi)$, *where* $E_{\delta^*}(\varphi)$ *is the* $\delta^*$-*exceptional set;*
(3) $S(\Pi_x \cap U_r(x)) = S_{n,\delta^*}(\Pi_x \cap U_r(x))$,

其中 $S(\Pi_x \cap U_r(x))$ 是有限度量树 $\Pi_x \cap U_r(x)$ 中的拓扑奇异集，其基数至多为 $\mu$。

证明。令 $\delta^* \in (0,1)$ 足够小，并令 $\delta \in (0, \delta^*)$ 对于 $\delta^*$ 足够小。固定 $x_0 \in U$，并令 $r \in (0,1)$ 足够小。取 $x \in U_r(x_0)$。由 [17, 定理 9.1]，，纤维 $\Pi_x \cap U_r(x)$ 在自身内部是可缩的。注意，半径 $r$ 可以在 $x$ 属于 $U_r(x_0)$ 时一致地选取。由 [17, 定理 10.5]，，对于某个常数 $\mu_0 \in \mathbb{N}$，我们有

$$\mathcal{H}^0(\Pi_x \cap U_r(x) \cap E_{\delta^*}(\varphi)) \leq \mu_0.$$

首先，我们考察 $\Pi_x \cap U_r(x)$ 的几何结构。取一点 $y$，使其属于 $(\Pi_x \cap U_r(x)) - E_{\delta^*}(\varphi)$。对于包含于 $U_r(x)$ 的 $y$ 的某个开邻域 $U_y$，存在一个 $(n, \delta^*)$-应变映射 $\varphi^\dagger: U_y \to \mathbb{R}^n$，由某个 $p_n \in U - U_y$ 的 $\varphi^\dagger := (\varphi, d_{p_n})$ 给出。由命题 6.6，$\varphi^\dagger$ 是到 $\mathbb{R}^n$ 中的局部 $(1+\epsilon)$-双利普希茨嵌入。对于包含于 $U_y$ 的 $y$ 的某个开邻域 $V_y$，以及某个 $s \in (0, \infty)$，我们找到一条 $(1+\epsilon)$-双利普希茨曲线 $\gamma: (-s, s) \to V_y$，满足 $\gamma(0) = y$，且 $\gamma((-s, s))$ 与 $\Pi_x \cap V_y$ 重合。事实上，可以恰当地选择 $\gamma$，使得 $\varphi^\dagger \circ \gamma$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中经过 $(\varphi(y)\ d_{p_n}(y))$ 的最后一个坐标轴的一部分。这表明 $(\Pi_x \cap U_r(x)) - E_{\delta^*}(\varphi)$ 是一个拓扑 1-流形。特别地，$S(\Pi_x \cap U_r(x))$ 包含于 $\Pi_x \cap U_r(x) \cap E_{\delta^*}(\varphi)$。由命题 8.3 可知，$\Pi_x \cap U_r(x)$ 中任意两点都可以由其自身中的一条 $(1+\delta^*)$-双利普希茨曲线连接。因此，$\Pi_x \cap U_r(x)$ 具有有限开度量树的结构，且

$$\mathcal{H}^1(\Pi_x \cap U_r(x)) < \mu r$$

存在某个常数 $\mu \in \mathbb{N}$，它仅取决于 $\mu_0$，使得 $\Pi_x \cap U_r(x) \cap E_{\delta^*}(\varphi)$中任意两个相邻的点都可以由 $\Pi_x \cap U_r(x)$中的一条（$1+\delta^*$）-双 Lipschitz 曲线连接。

为了确定图 $\Pi_x \cap U_r(x)$的本质顶点集，我们将证明

$$\Pi_x \cap U_r(x) \cap E_{\delta^*}(\varphi) \subset S(\Pi_x \cap U_r(x)). \tag{8.3}$$

根据引理 8.2，对于每个 $y \in \Pi_x \cap U_r(x)$，$\Sigma_y \Pi_x$处于 $\Pi_x$ 中的 $y$ 处的方向空间由下式定义

$$\Sigma_y \Pi_x := (D_y \varphi)^{-1}(\{0\}) \cap \Sigma_y X$$

是一个基数为 $\geq 2$ 的有限集合。因此，点 $y$ 属于 $\Pi_x \cap U_r(x)$，当且仅当 $\Sigma_y \Pi_x$ 的基数为 $\geq 3$ 时，它属于 $S(\Pi_x \cap U_r(x))$。

要证明（8.3），只需证明以下结论：

**子引理 8.6.** 对于每个 $\delta^* \in (0,\ 1)$，以及每个 $n \in \mathbb{N}$，都存在 $\delta \in (0,\ \delta^*)$ 满足以下条件：设 $Z$ 是一个测地线完备的 $\mathrm{CAT}(1)$ 空间，其维数为 $_{\mathrm{G}}\, Z = n-1$，并且具有一个 $(n-1,\ \delta)$ 悬挂器$(p_1,\ \ldots,\ p_{n-1})$。如果由下式定义的 $Z$ 的子集 $P_{(p_1,\ldots,p_{n-1})}(Z)$

$$P_{(p_1,\ldots,p_{n-1})}(Z) := \left\{ p \in Z \mid d_Z(p_i, p) = \frac{\pi}{2} \right\}$$

的基数小于2，则存在一个点 $p_n$ 属于 $Z$，使得 $n$元组$(p_1, \ldots, p_{n-1}, p_n)$ 是 $Z$中的一个$(n, \delta^*)$悬挂器。

证明。假设对于某个满足 $\delta_k \to 0$ 的序列（$\delta_k$），其中各项属于 (0,1)，存在一个测地完备 CAT(1) 空间序列（$Z_k$），其维数为$_{\mathrm{G}}\, Z_k = n-1$，且具有某些（$n-1$, $\delta_k$）悬挂架（$p_{1,k}, \ldots, p_{n-1,k}$）。此外，假设由下式定义的 $Z_k$ 的子集 $P_{(p_{1,k},\ldots,p_{n-1,k})}(Z_k)$

$$P_{(p_{1,k},\ldots,p_{n-1,k})}(Z_k) := \left\{ p_k \in Z_k \mid d_{Z_k}(p_{i,k}, p_k) = \frac{\pi}{2} \right\}$$

的基数为 2，并且不存在点 $p_{n,k}$ 属于 $Z_k$，使得$n$元组（$p_{1,k}, \ldots, p_{n-1,k}, p_{n,k}$）是 $Z_k$中的一个（$n, \delta^*$）悬挂器。

设 $(Z_\omega, z_\omega)$ 是序列 $(Z_k, z_k)$ 的超极限 $\lim_\omega (Z_k, z_k)$。由 (2.2) 可得 $\dim_{\mathrm{G}}\, Z_\omega = n-1$。根据命题 3.7，$Z_\omega$ 与某个离散空间 $T^0$ 等距，即 $Z_\omega$ isometric to $\mathbb{S}^{n-2} * T^0$。于是 $T^0$ 的基数为 $\geq 3$；事实上，若 $T^0$ 的基数为 2，则 $Z_\omega$ 与 $\mathbb{S}^{n-1}$ 等距，因此对于所有 $\omega$-large $k$，我们都能找到 $p_{n,k} \in Z_k$，使得 $(p_{1,k}, \ldots, p_{n-1,k}, p_{n,k})$ 是 $Z_k$ 中的一个 $(n, \delta^*)$-悬挂器。由于 $T^0$ 的基数为 $\geq 3$，对于所有 $\omega$-large $k$，存在三个点 $q_{1,k}, q_{2,k}, q_{3,k}$ in$Z_k$，满足 $|d_{Z_k}(p_{i,k}, q_{l,k}) - \pi/2| < \delta^*/10n$ for all $i \in \{1, \ldots, n-1\}$and $l \in \{1, 2, 3\}$。以 $Z_k$ 为底的欧几里得锥 $C_0(Z_k)$ 是一个测地完备的 CAT(0)空间，且 $\dim_{\mathrm{G}}\, C_0(Z_k) = n$。现在，我们将 $Z_k$ 识别为 $C_0(Z_k)$ 在顶点 $0_k$ 处的度量球面 $S_1(0_k)$。令$\varphi_k$：$U_k \to \mathbb{R}^n$ be an $(n-1, \delta_k)$-应变映射 from an open neighbor-hood $U_k$ of $0_k$。对于 $\varphi_k$ 在 $0_k$ 处的方向导数 $D_{0_k}\varphi_k$：$T_{0_k}C_0(Z_k) \to \mathbb{R}^n$。于是有 $\|(D_{0_k}\varphi_k)(q_{l,k})\| < \delta^*/10$。根据命题 6.5，只要 $k$ 足够大，$D_{0_k}\varphi_k$ 就是 $(1+\delta^*)$-开映射。因此，$\mathbb{R}^n$ 中的原点 0 属于 $U_{\delta^*/10}((D_{0_k}\varphi_k)(q_{l,k}))$，且球包含于 $(D_{0_k}\varphi_k)\left(U_{(1+\delta^*)\delta^*/10}(q_{l,k})\right)$ 中。这意味着我们可以找到三个点 $\bar{q}_{l,k}$ in $U_{(1+\delta^*)\delta^*/10}(q_{l,k})$, $l \in \{1, 2, 3\}$，使得 $(D_{0_k}\varphi_k)(\bar{q}_{l,k}) = 0$。因此，我们找到三个点 $\tilde{q}_{l,k}$ in $Z_k$, $l \in \{1, 2, 3\}$, 属于$P_{(p_{1,k},\ldots,p_{n-1,k})}(Z_k)$。矛盾。□

子引理 8.6 导出了（8.3）。因此我们看到

$$\Pi_x \cap U_r(x) \cap E_{\delta^*}(\varphi) = S\left(\Pi_x \cap U_r(x)\right).$$

接下来我们研究 $S_{n,\delta^*}(\Pi_x \cap U_r(x))$ 的结构。根据定义可知，$S_{n,\delta^*}(\Pi_x \cap U_r(x))$ 包含于 $\Pi_x \cap U_r(x) \cap E_{\delta^*}(\varphi)$，因此也包含于 $S(\Pi_x \cap U_r(x))$。

我们将验证

$$\Pi_x \cap U_r(x) \cap E_{\delta^*}(\varphi) \subset S\left(\Pi_x \cap U_r(x)\right). \tag{8.4}$$

要验证 (8.4)，只需证明：

**子引理 8.7.** 对每个 $n \in \mathbb{N}$，都存在 $\delta^* \in (0,1)$，使得对每个 $\delta \in (0, \delta^*)$，以下结论成立：设 $Z$ 是一个 $\mathrm{CAT}(1)$ 空间，维数为 维$_{\mathrm{G}}\, Z = n-1$，且存在一个 $(n-1, \delta)$-悬挂器。若由下式定义的 $Z$ 的子集$P_{(p_1,\ldots,p_{n-1})}(Z)$

$$P_{(p_1,\ldots,p_{n-1})}(Z) := \left\{ p \in Z \mid d_Z(p_i, p) = \frac{\pi}{2} \right\}$$

的基数为 $3$，则 $Z$ 不存在 $(n, \delta^*)$-悬挂器。

子引理 8.7 可通过结合命题 3.7 和引理 4.4 的超极限论证来验证。细节从略。

由子引理 8.7 可推出 (8.4)。因此我们得出

$$S(\Pi_x \cap U_r(x)) = S_{n,\delta^*}(\Pi_x \cap U_r(x)).$$

至此完成引理 8.5 的证明。 □

**8.4. 余维一纤维的长度。** 为了研究余维一纤维长度的连续性，我们回顾 GCBA空间上 DC 映射以及 GCBA空间中 DC 曲线的研究。

局部测地空间上的函数称为 DC 的，如果它能局部表示为两个 Lipschitz 凸函数之差。

度量空间之间的局部 Lipschitz 映射 $\varphi\colon X \to Y$称为 DC 的，如果对 $Y$ 的开子集 $V$ 上的每一个 DC 函数 $f\colon V \to \mathbb{R}$，复合 $f \circ \varphi$ 在 $\varphi^{-1}(V)$ 上是 DC 的。注意，DC 映射的任意复合都是 DC 的。度量空间 $X$ 上的映射 $\varphi\colon X \to \mathbb{R}^m$ 是 DC 的，当且仅当 $\varphi$ 的每个坐标函数都是 DC 的。一个 DC 映射称为 DC 同构，如果它是双 Lipschitz 同胚，并且其逆映射是 DC 的。

对于每个 $n \in \mathbb{N}$，存在 $\delta \in (0, 1)$，使得如果 $\varphi\colon U \to \mathbb{R}^n$ 是一个定义在 GCBA（$\kappa$）空间的开子集上的（$n$，$\delta$）-应变映射，且维数为 $U = n$，那么映射 $\varphi\colon U \to \varphi(U)$ 是一个 DC 同构（[17,命题 14.4]）。

设 $X$ 是一个局部测地空间。对于 $c \in (0, \infty)$，如果曲线 $\gamma\colon I \to X$ 定义在有界闭区间 $I$ 上，我们称其为范数为 $\leq c$ 的 DC 曲线，如果 $\gamma$ 是 $c$- 利普希茨的，并且对于每个 1-Lipschitz 凸函数 $f\colon X \to \mathbb{R}$，复合函数 $f \circ \gamma$ 都可以在 $I$ 上表示为两个 $c$-Lipschitz 凸函数之差。

设 $U$ 是一个包含在小球中的 GCBA（$\kappa$）空间的开子集。若对于某个 $c \in (0, \infty)$，有界闭区间 $I$ 上范数为 $\leq c$ 的一列 DC 曲线 $\gamma_k\colon I \to U$ 收敛到曲线 $\gamma\colon I \to U$，则有 $L(\gamma_k) \to L(\gamma)$（[17, 命题 14.9]）。

现在我们证明余维一纤维长度的连续性。

引理 *8.8.* 对每个 $n \in \mathbb{N}$，存在满足以下性质的 $\delta \in (0, 1)$：设 $U$ 是一个 *GCBA*($\kappa$) 空间中的开子集，且 $\dim U = n$。设 $\varphi\colon U \to \mathbb{R}^{n-1}$ 是定义在 $U$ 上的 $(n-1, \delta)$-应变映射。取 $x_0 \in U$。那么存在 $r_0 \in (0, D_\kappa/2)$，使得 $U_{2r_0}(x_0) \subset U$，并且对每个 $r \in (0, r_0)$ 以及每个 $x \in U_{r_0}(x_0)$，以下结论成立：若对于 $U_{r_0}(x_0)$ 中点的一个序列 $(x_k)$，满足 $x_k \to x$，且对于一个常数 $c \in (0, \infty)$，存在一列单射 $c$-利普希茨曲线 $(\gamma_k)$，$\gamma_k\colon I \to \Pi_{x_k} \cap U_r(x_k)$，定义在有界闭区间 $I$ 上，并在逐点拓扑下收敛到曲线 $\gamma\colon I \to \Pi_x \cap U_r(x)$，那么我们有

$$L(\gamma) = \lim_{k\to\infty} L(\gamma_k);$$

特别地，

$$\mathcal{H}^1\left(\Pi_x \cap U_{r_0}(x_0)\right) = \lim_{k\to\infty} \mathcal{H}^1\left(\Pi_{x_k} \cap U_{r_0}(x_0)\right).$$

证明。对于 $\epsilon \in (0, 1)$ 与 $n \in \mathbb{N}$，令 $\delta$，$\delta^* \in (0, 1)$ 充分小且满足 $\delta < \delta^*$。由引理 8.5，存在 $r_0 \in (0, D_\kappa/2)$，使得对每个 $r \in (0, r_0)$，以及对每个 $x \in U_{r_0}(x_0)$，切片 $\Pi_x \cap U_r(x)$ 具有度量树的结构，其拓扑奇异集 $S(\Pi_x \cap U_r(x))$ 与 $\Pi_x \cap U_r(x) \cap E_{\delta^*}(\varphi)$ 重合，且基数为 $\mu$。

假设存在一个 $(n, \delta^*)$-应变映射 $\varphi^\dagger\colon V \to \mathbb{R}^n$，由 $\varphi^\dagger := (\varphi, d_{p_n})$ 给出，其中 $V \subset U$ 与 $p_n \in U - V$ 使得 $\varphi^*$ 是一个 $(1+\epsilon)$-双利普希茨嵌入并给出一个 DC 同构。取 $\Pi_x \cap V$ 中的一条单射 $c$-利普希茨曲线 $\gamma\colon I \to \Pi_x \cap V$。令 $f\colon V \to \mathbb{R}$ 为 1-Lipschitz 凸函数。令 $\bar{f} := f \circ (\varphi^*)^{-1}$。由 [17, 推论 14.7]，$\bar{f}$ 可写成 $\bar{f} = \bar{f}_1 - \bar{f}_2$，其中有两个 $(1 + 1/n^2)(1+\epsilon)$-Lipschitz 凸函数。令 $\bar{\gamma} := \varphi^\dagger \circ \gamma$。则曲线 $\bar{\gamma}\colon I \to \mathbb{R}^n$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中最后一个坐标轴上的一条线段。因此 $f \circ \gamma$ 也可写成两个 $(1 + 1/n^2)(1+\epsilon)$-Lipschitz 凸函数之差。因此 $\gamma$ 是范数为 $\le c(\epsilon, n)$ 的 DC 曲线，其中 $c(\epsilon, n)$ 是由 $c(\epsilon, n) := \max\{c, (1 + 1/n^2)(1+\epsilon)\}$ 给出的常数。借助 [17, 命题 14.9]，若存在单射 $c$-利普希茨曲线 $\gamma_k\colon I \to \Pi_{x_k} \cap V$ 的序列 $(\gamma_k)$ 在逐点拓扑中收敛于 $\gamma$，则我们得到 $L(\gamma_k) \to L(\gamma)$。

对于一列满足 $x_k \to x$ 的 $U_{r_0}(x_0)$ 中的点序列 $(x_k)$，以及常数 $c \in (0, \infty)$，存在一列定义在有界闭区间 $I$ 上的单射 $c$-利普希茨曲线序列 $(\gamma_k)$，$\gamma_k\colon I \to \Pi_{x_k} \cap U_r(x_k)$，它在逐点拓扑下收敛到曲线 $\gamma\colon I \to \Pi_x \cap U_r(x)$。如果 $\gamma(I)$ 在 $\Pi_x \cap U_r(x) \cap E_{\delta^*}(\varphi)$ 中不含任何点，那么它至多可以被有限条范数为 $\le c(\epsilon, n)$ 的 DC 曲线覆盖。因此我们得到 $L(\gamma_k) \to L(\gamma)$。假设 $\gamma(I)$ 与 $\Pi_x \cap U_r(x) \cap E_{\delta^*}(\varphi)$ 的交集非空。由于后一个集合的基数为 $\le \mu$，我们也得到 $L(\gamma_k) \to L(\gamma)$。

由引理 8.8，纤维 $\Pi_x \cap U_r(x)$ 具有有限开度量树的结构，其中拓扑奇异集 $S(\Pi_x \cap U_r(x))$ 的基数有一个统一常数 $\mu$ 作为上界。这就得到了关于 $\mathcal{H}^1$ 的第二个结论。证明完毕。□

## 9. Geometric structure of codimension one singularity

本节中，我们证明墙奇点定理 1.1 和 1.4。

**9.1. 驯顺松弛墙奇点。** 为证明定理 1.4，我们考虑如下内容：

**假设 9.1。** 对于 $n \in \mathbb{N}$，令 $\delta^* \in (0,\ 1/10)$ 充分小，并令 $\delta \in (0,\ \delta^*)$ 对于 $\delta^*$ 也充分小。设 $X$ 为一个 GCBA($\kappa$) 空间，其度量为 $d_X$，且 $U$ 是 $X$ 的一个纯 $n$ 维开子集。假设存在某个点 $x_0$ 属于 $W_{n,\ \delta,\ \delta^*}(U)$，以及一个包含于 $U$ 中的开球 $U_{r_0}(x_0)$，使得存在一个 $(n-1,\ \delta)$-应变映射 $\varphi\colon U_{r_0}(x_0) \to \mathbb{R}^{n-1}$，满足以下条件：

(1) $\varphi$ 是 $(1+\delta^*)$-利普希茨且为 $(1+\delta^*)$-开映射；(2) $\varphi|_{S_{n,\delta^*}(U_{r_0}(x_0))}$ 是 $(1+2\delta^*)$- 双利普希茨嵌入；(3) 对每个 $y \in U_{r_0}(x_0)$，由 $\varphi$ 经 $y$ 且由 $\Pi_y := \varphi^{-1}(\{\varphi(y)\})$ 定义的纤维 $\Pi_y$ 是赋有内在度量 $d_{\Pi_y}$ 的度量树，使得对所有 $y_1, y_2 \in \Pi_y$，我们有

$$\left|d_{\Pi_y}(y_1,y_2) - d_X(y_1,y_2)\right| < \delta^*\, d_X(y_1,y_2).$$

在假设 9.1 的条件下，由于映射 $\varphi|_{S_{n,\delta^*}(U_{r_0}(x_0))}$ 是 $(1+2\delta^*)$-双利普希茨嵌入，因此对每个 $y \in U_{r_0}(x_0)$，我们有

$$\mathcal{H}^0\left(S_{n,\delta^*}(\Pi_y)\right) \le 1. \tag{9.1}$$

此外，引理 8.8 告诉我们，若对于 $U_{r_0}(x_0)$ 中的一个点 $y$，以及 $U_{r_0}(x_0)$ 中收敛到 $y$ 的一个序列 $(y_k)$，我们能找到单射利普希茨曲线 $\gamma$: $I \to \Pi_y \cap U_{r_0}(x_0)$、$\gamma_k\colon I \to \Pi_{y_k} \cap U_{r_0}(x_0)$、$k = 1, 2, \ldots$，它们定义在有界闭区间 $I$ 上，并且序列 $(\gamma_k)$ 在逐点拓扑下收敛到 $\gamma$，那么我们有

$$L(\gamma) = \lim_{k\to\infty} L(\gamma_k); \tag{9.2}$$

换言之，$d_{\Pi_{y_k}}$ 收敛到 $d_{\Pi_y}$.

本小节的目标是证明以下结论：

**命题 9.1。** 在假设 9.1 的条件下，存在一个开邻域 $U_0$，它包含 $x_0$ 且包含于 $U_{r_0}(x_0)$，使得 $U_0$ 与 $\mathbb{R}^{n-1} \times T^1_{l_0}$ 同胚，其中某个 $l_0 \in \mathbb{N}$ 满足 $l_0 \ge 3$；此外，我们有 $S(U_0) = S_{n,\ \delta^*}(U_0)$ 以及

$$0 < \mathcal{H}^{n-1}\left(S(U_0)\right) < \infty.$$

我们将证明命题 9.1。

**引理 9.2。** 在假设 9.1 的条件下，设 $r_1 \in (0,\ r_0/2]$，且 $r \in (0,\ r_1]$。那么对于每个 $y \in U_r(x_0)$，存在唯一的点 $y_0$ 属于 $\Pi_y \cap U_{r_1}(y)$，使得 $\{y_0\} = S_{n,\ \delta^*}(\Pi_y \cap U_{r_1}(y))$。换言之，

$$U_r(x_0) = \left\{\, y \in U_r(x_0) \mid \mathcal{H}^0\left(S_{n,\delta^*}(\Pi_y \cap U_{r_1}(y))\right) = 1 \,\right\}.$$

证明。定义 $U_r(x_0)$ 的一个子集 $V_r(x_0)$，如下：

$$V_r(x_0) := \left\{ y \in U_r(x_0) \mid \mathcal{H}^0\left(S_{n,\delta^*}(\Pi_y \cap U_{r_1}(y))\right) = 1 \right\}.$$

由（9.1）可知，$x_0 \in V_r(x_0)$，因此 $V_r(x_0)$ 非空。

我们首先证明 $U_r(x_0) - V_r(x_0)$ 在 $U_r(x_0)$ 中是开的。为此，取 $y \in U_r(x_0) - V_r(x_0)$。由（9.1）可知，$S_{n,\delta^*}(\Pi_y \cap U_{r_1}(y))$ 为空，因此切片 $\Pi_y \cap U_{r_1}(y)$ 包含于 $R_{n,\delta^*}(U_{r_0}(x_0))$。由引理 8.5，切片 $\Pi_y \cap U_{r_1}(y)$ 同胚于一个开区间。由于 $\varphi$ 是 $(1+\delta^*)$-利普希茨且 $(1+\delta^*)$-开，对于 $U_r(x_0)$ 中每个充分接近 $y$ 的点 $z$，切片 $\Pi_z \cap U_{r_1}(z)$ 包含于 $R_{n,\delta^*}(U_{r_0}(x_0))$；特别地，$z$ 属于 $U_r(x_0) - V_r(x_0)$。因此，$U_r(x_0) - V_r(x_0)$ 在 $U_r(x_0)$ 中是开的。

接下来证明 $U_r(x_0) - V_r(x_0)$ 在 $U_r(x_0)$ 中是闭集。取一个点 $y$ 属于 $U_{r_0}(x_0)$，以及一个在 $U_r(x_0) - V_r(x_0)$ 中收敛到 $y$ 的序列 $(y_k)$。由 (9.1) 可知，对每个 $k$，切片 $\Pi_{y_k} \cap U_{r_1}(y_k)$ 都包含于 $R_{n,\delta^*}(U_{r_0}(x_0))$。由引理 8.5，切片 $\Pi_{y_k} \cap U_{r_1}(y_k)$ 同胚于一个开区间。由于 $\varphi$ 是 $(1+\delta^*)$-利普希茨且 $(1+\delta^*)$-开，我们得到

$$\lim_{k\to\infty} d_{\mathrm{H}}\left(\Pi_{y_k} \cap U_{r_1}(y_k), \Pi_y \cap U_{r_1}(y)\right) = 0,$$

其中 $d_{\mathrm{H}}$ 是豪斯多夫距离。假设 $y \in V_r(x_0)$。由引理 8.5，切片 $\Pi_y \cap U_{r_1}(y)$ 同胚于某个 $T^1_l$，其中 $l \in \mathbb{N}$ 满足 $l \geq 3$。区间 $\Pi_{y_k} \cap U_{r_1}(y_k)$、$k = 1, 2, \ldots$，不可能在 $d_{\mathrm{H}}$-拓扑下收敛到 $\Pi_y \cap U_{r_1}(y)$。这是矛盾。因此，$y$ 属于 $U_r(x_0) - V_r(x_0)$，从而 $U_r(x_0) - V_r(x_0)$ 在 $U_r(x_0)$ 中是闭集。

因此，$V_r(x_0)$ 是连通空间 $U_r(x_0)$ 的一个非空的既开又闭子集。因此 $U_r(x_0)$ 与 $V_r(x_0)$ 重合。□

我们也可以确定纤维的切片的拓扑。

引理 *9.3*。在假设 *9.1* 的设定下，存在整数 $l_0 \in \mathbb{N}$，且 $l_0 \geq 3$ 对所有 $r_1 \in (0, r_0/2]$ 以及 $r \in (0, r_1]$ 满足以下性质：对每个 $y \in U_r(x_0)$，切片 $\Pi_y \cap U_{r_1}(y)$ 是与 $T^1_{l_0}$ 同胚的度量树，其单顶点是满足 $\{y_0\} = S_{n,\delta^*}(\Pi_y \cap U_{r_1}(y))$ 的唯一点 $y_0$。特别地，对 $S_{n,\delta^*}(U_r(x_0))$ 中的每个点 $z_0$，切片 $\Pi_{z_0} \cap U_{r_1}(z_0)$ 是与 $T^1_{l_0}$ 同胚的度量树，其单顶点是给定的点 $z_0$。

证明。根据引理 8.5 和 9.2，我们定义函数 $l\colon U_r(x_0) \to \mathbb{N}$ in，使得对于每个 $y \in U_r(x_0)$，都有 $l(y) \in \mathbb{N}$，满足 $l(y) \geq 3$，使得切片 $\Pi_y \cap U_{r_1}(y)$ 是一个与 $T^1_{l(y)}$ 同胚的度量树，其顶点为点 $y_0$，并满足 $\{y_0\} = S_{n,\,\delta^*}(\Pi_y \cap U_{r_1}(y))$。令 $l_0 := l(x_0)$，并通过以下方式定义 $U_r(x_0)$ 的一个子集 $U^{l_0}_r(x_0)$：

$$U^{l_0}_r(x_0) := \left\{ y \in U_r(x_0) \mid l(y) = l_0 \right\}.$$

只需证明 $U_r(x_0)$ 与 $U^{l_0}_r(x_0)$ 重合。

我们证明 $U_r^{l_0}(x_0)$ 在 $U_r(x_0)$ 中是闭的。取一个点 $y$，使其属于 $U_r(x_0)$，并取一个收敛到 $y$ 的序列 $(y_k)$，其中 $(y_k)$ 属于 $U_r^{l_0}(x_0)$，且对所有 $k$ 都有 $l(y_k) = l_0$。若 $y \notin U_r^{l_0}(x_0)$ 成立，即 $l(y) \neq l_0$，那么就会导出矛盾

$$\lim_{k\to\infty} d_{\mathrm{H}}\left(\Pi_{y_k} \cap U_{r_1}(y_k), \Pi_y \cap U_{r_1}(y)\right) = 0,$$

由于切片 $\Pi_{y_k} \cap U_{r_1}(y_k)$ 同胚于 $T^1_{l_0}$，因此不可能在 $l(y) \neq l_0$ 的条件下收敛到同胚于 $T^1_{l(y)}$ 的切片 $\Pi_y \cap U_{r_1}(y)$。因此我们有 $y \in U_r^{l_0}(x_0)$，所以 $U_r^{l_0}(x_0)$ 在 $U_r(x_0)$ 中是闭的。

类似地，我们可以证明 $U_r(x_0) - U_r^{l_0}(x_0)$ 在 $U_r(x_0)$ 中是开的。因此，$U_r^{l_0}(x_0)$ 是连通空间$U_r(x_0)$ 的一个非空、闭且开的子集。因此，$U_r(x_0)$ 与 $U_r^{l_0}(x_0)$ 重合。□

我们可以考虑到奇异性的投影。

**引理 9.4.** 在假设 9.1 的设定下，对于 $r_1 \in (0, r_0/2]$，令 $\lambda_{r_1}\colon U_{r_1}(x_0) \to S_{n,\delta^*}(U_{r_0}(x_0))$ 为一个映射，它将 $y$ 赋给满足 $\{y_0\} = S_{n,\delta^*}(\Pi_y \cap U_{r_1}(y))$ 的唯一点 $\lambda_{r_1}(y) := y_0$。那么 $\lambda_{r_1}$ 是 $(1+4\delta^*)$-利普希茨的。

证明。由于 $\varphi$ 是一个 $(1+\delta^*)$-利普希茨映射，且由于 $\varphi|_{S_{n,\delta^*}(U_{r_0}(x_0))}$ 是一个 $(1+2\delta^*)$- 双利普希茨嵌入，对所有 $y$，$z \in U_{r_1}(x_0)$，我们有

$$\begin{aligned} d_X(\lambda_{r_1}(y), \lambda_{r_1}(z)) &\le (1+2\delta^*)\, d_{\mathbb{R}^{n-1}}(\varphi(y_0), \varphi(z_0)) \\ &= (1+2\delta^*)\, d_{\mathbb{R}^{n-1}}(\varphi(y), \varphi(z)) < (1+4\delta^*)\, d_X(y,z), \end{aligned}$$

只要 $\delta^*$ 足够小即可。这就证明了该引理。 □

接下来，我们将各纤维的切片合并起来。

**引理 9.5。** 在假设 9.1 的设定下，对于一个固定的数 $r_1 \in (0, r_0/4]$，对每个 $r \in (0, r_1]$，由下式定义的集合 $Y_r(x_0)$

$$Y_r(x_0) := \bigcup \{\, \Pi_{y_0} \cap U_{r_1}(y_0) \mid y_0 \in S_{n,\delta^*}(U_r(x_0)) \,\} \tag{9.3}$$

是 $X$ 中的开集；特别地，$\mathbb{R}^{n-1}$ 的开集 $\varphi(Y_r(x_0))$ 与 $\varphi(S_{n,\delta^*}(U_r(x_0)))$ 重合。

证明。任取 $y \in Y_r(x_0)$，并取一点 $y_0$，使其属于 $S_{n,\delta^*}(U_r(x_0))$ 且满足 $y \in \Pi_{y_0} \cap U_{r_1}(y_0)$。于是 $d_X(x_0, y) < 2r_1$，因此 $y \in U_{r_0/2}(x_0)$。由引理 9.2 可得 $\{y_0\} = S_{n,\delta^*}(\Pi_{y_0} \cap U_{r_1}(y_0))$。由引理 9.4 可知，映射

$$\lambda_{r_0/2}\colon U_{r_0/2}(x_0) \to S_{n,\delta^*}(U_{r_0}(x_0))$$

引理中定义的函数是 $(1+4\delta^*)$-利普希茨的。

任取 $\epsilon \in (0,\infty)$。于是我们可以找到 $t \in (0, \epsilon/1+4\delta_n)$，使得 $U_t(y) \subset U_{r_0/2}(x_0)$，并且若 $z \in U_t(y)$，则对于由 $z_0 := \lambda_{r_0/2}(z)$ 定义的点 $z_0$，有 $z_0 \in U_\epsilon(y_0)$；事实上，我们有

$$d_X(y_0, z_0) = d_X\left(\lambda_{r_0/2}(y), \lambda_{r_0/2}(z)\right) \le (1+4\delta^*)\, d_X(y,z) < \epsilon.$$

若 $\epsilon$ 足够小，则 $U_\epsilon(y_0)$ 包含于 $U_r(x_0)$，因而 $z_0$ 属于 $S_{n,\ \delta_n}(U_r(x_0))$。此外，若 $\epsilon$ 足够小，则点 $z$ 属于 $U_{r_1}(z_0)$。这意味着 $Y_r(x_0)$ 在 $X$ 中是开的。由于 $\varphi$ 是 $(1+\delta^*)$-开的，像 $\varphi(Y_r(x_0))$ 在 $\mathbb{R}^{n-1}$ 中是开的。根据 $Y_r(x_0)$ 的定义，我们立即看出 $\varphi(Y_r(x_0))$ 与 $\varphi(S_{n,\delta^*}(U_r(x_0)))$ 重合。□

**注记 9.1。** 在引理 9.5 的相同条件下，对于固定的数 $r_1 \in (0, r_0/4]$，对于每个 $r \in (0, r_1]$，集合 $Y_r(x_0)$ 包含于 $U_{r_0/2}(x_0)$ 中。将引理 9.4 中定义的映射 $\lambda_{r_0/2}$ 限制在 $Y_r(x_0)$ 上所得的限制映射 $\lambda_{r_0/2}|_{Y_r(x_0)}$ 是 $(1+4\delta^*)$-利普希茨的。限制映射 $\varphi|_{Y_r(x_0)}$ 是从开子集 $Y_r(x_0)$ 到 $\mathbb{R}^{n-1}$ 的开子集 $\varphi(Y_r(x_0))$ 上的 $(1+4\delta^*)$-双利普希茨嵌入。

在假设 9.1 的条件下，对于固定的 $r_1 \in (0, r_0/4]$，对于$r \in (0, r_1)$，令 $Y_r(x_0)$ 为 (9.3) 中定义的 $X$ 中的开集。如引理 9.3 所示，我们可以找到某个 $l_0 \in \mathbb{N}$，使得 $l_0 \geq 3$，从而对于每个$y_0 \in S_{n,\delta^*}(U_r(x_0))$，切片 $\Pi_{y_0} \cap U_{r_1}(y_0)$ 是一个与 $T^1_{l_0}$ 同胚的度量树，其单顶点是给定的点 $y_0$。对于最初给定的点 $x_0 \in S_{n,\delta^*}(U_r(x_0))$，令 $x_1, \ldots, x_{l_0}$ 为切片 $\Pi_{x_0} \cap U_{r_1}(x_0)$ 的 $l_0$ 个边界点，其中 $\{x_1, \ldots, x_{l_0}\} = \Pi_{x_0} \cap S_{r_1}(x_0)$；在这种情况下，我们可以写成

$$\Pi_{x_0} \cap B_{r_1}(x_0) = \bigcup_{i=1}^{l_0} \overline{x_0 x_i},$$

其中，每条$\overline{x_0 x_i}$都是切片 $\Pi_{x_0} \cap U_{r_1}(x_0)$ 中从$x_0$ 到 $x_i$ 的唯一测地线，其长度包含在 $[r_1, (1+\delta_n) r_1]$内。类似地，对于 $S_{n,\delta^*}(U_r(x_0))$ 中的每个点 $y_0$，令 $y_1, \ldots, y_{l_0}$ 为切片 $\Pi_{y_0} \cap U_{r_1}(y_0)$ 的 $l_0$ 个边界点，其中 $\{y_1, \ldots, y_{l_0}\} = \Pi_{y_0} \cap S_{r_1}(y_0)$；在这种情况下，我们可以写作

$$\Pi_{y_0} \cap B_{r_1}(y_0) = \bigcup_{i=1}^{l_0} \overline{y_0 y_i},$$

其中，每条 $\overline{y_0 y_i}$都是切片 $\Pi_{y_0} \cap U_{r_1}(y_0)$ 中从$y_0$ 到 $y_i$ 的唯一测地线，其长度包含在 $[r_1, (1+\delta_n) r_1]$内。

**引理 9.6。** 在假设 9.1 的设定下，固定一个数$r_1 \in (0, r_0/4]$，对于每个 $r \in (0, r_1/100)$，令 $Y_r(x_0)$ 为 $X$ 中由 (9.3) 定义的开集。对于原先给定的点 $x_0 \in S_{n,\delta^*}(U_r(x_0))$，以及给定的点 $y_0 \in S_{n,\delta^*}(U_r(x_0))$，我们记作

$$\Pi_{x_0} \cap B_{r_1}(x_0) = \bigcup_{i=1}^{l_0} \overline{x_0 x_i}, \quad \Pi_{y_0} \cap B_{r_1}(y_0) = \bigcup_{i=1}^{l_0} \overline{y_0 y_i}.$$

那么，对于每个与 $y_0$ 不同的点 $y$ *in* $\Pi_{y_0} \cap U_{r_1}(y_0)$，以及满足 $y \in y_0 y_i - \{y_0, y_{i(y)}\}$ 的数 $i(y) \in \{\overline{1, \ldots}, l_0\}$，存在唯一的数 $i_0(y)$ 属于 $\{1, \ldots, l_0\}$，使得

$$d_X\left(x_{i_0(y)}, y_{i(y)}\right) < \delta_n r_1 + 10r.$$

此外，由$\iota(y) := i_0(y)$ 定义的映射 $\iota\colon Y_r(x_0) - S_{n,\delta^*}(U_r(x_0)) \to \{1,\dots,l_0\}$ 是连续的。

证明。设 $y \in \Pi_{y_0} \cap U_{r_1}(y_0)$ 与 $y_0$ 不同，并设 $i(y)$ 是 $\{1,\dots,l_0\}$ 中满足 $y \in y_0 y_i - \{y_0, y_{i(y)}\}$ 的数。由于 $\varphi$ 是$(1+\delta^*)$-利普希茨且 $(1+\delta^*)$-开，我们有

$$d_X\left(y_{i(y)}, \Pi_{x_0}\right) \le (1+\delta^*)^2 d_X(x_0, y_0) < 4r.$$

因此，我们在 $\Pi_{x_0}$ 中找到一个满足 $d\left(x_\perp, y_{i(y)}\right) < 4r$ 的点 $x_\perp$。注意 $x_\perp \in \Pi_{x_0} - \{x_0\}$。由 $d_X\left(y_0, y_{i(y)}\right) = r_1$ 和 $d_X(x_0, y_0) < r$，可得

$$|d_X(x_0, x_\perp) - r_1| < 5r. \tag{9.4}$$

对于 $\Pi_{x_0} - \{x_0\}$ 中的点 $x_\perp$，我们在 $\{1,\dots,l_0\}$ 中找到某个数 $i_0(y)$，使得 $x_\perp$ 位于测地线 $x_0 x_{i_0(y)}$ 中，或 $x_{i_0(y)}$ 位于测地线 $x_0 x_\perp$ 上。在这两种情形下，由于有 (9.4) 和 $\left|d_{\Pi_{x_0}} - d_X\right| < \delta^* d_X$，我们看到

$$d_X\left(x_\perp, x_{i_0(y)}\right) \le d_{\Pi_{x_0}}\left(x_\perp, x_{i_0(y)}\right) < \delta^* r_1 + 5r. \tag{9.5}$$

由（9.5）和 $d_X\left(x_\perp, y_{i(y)}\right) < 4r$，我们推出

$$d_X\left(x_{i_0(y)}, y_{i(y)}\right) < \delta^* r_1 + 10r.$$

现在假设，对于另一个满足 $i_0 \ne i(y)$ 的数 $i_0$，若有 $\{1,\dots,l_0\}$，则 $d_X\left(x_{i_0}, y_{i(y)}\right) < \delta^* r_1 + 10r$。由于 $\left|d_{\Pi_{x_0}} - d_X\right| < \delta^* d_X$，

$$\begin{aligned} d_X\left(x_{i_0}, x_{i_0(y)}\right) &> \frac{1}{1+\delta^*} d_{\Pi_{x_0}}\left(x_{i_0}, x_{i_0(y)}\right) \\ &= \frac{1}{1+\delta^*}\left\{d_{\Pi_{x_0}}(x_0, x_{i_0}) + d_{\Pi_{x_0}}\left(x_0, x_{i_0(y)}\right)\right\} \ge \frac{2r_1}{1+\delta^*} > r_1, \end{aligned}$$

因此 $d_X\left(x_{i_0(y)}\ y_{i(y)}\right) > r_1 - \delta^* r_1 + 10r$。这与我们当前的假设 $r \in (0, r_1/100)$ 矛盾，因为假设 $\delta^*$ 足够小且满足 $\delta^* < 1/10$。因此，存在唯一的数 $i_0(y)$ 属于 $\{1,\dots,l_0\}$，使得 $d_X\left(x_{i_0(y)}\ y_{i(y)}\right) < \delta^* r_1 + 10r$。

对于给定的点 $y$，取一个在 $Y_r(x_0) - S_{n,\ \delta^*}(U_r(x_0))$ 中且充分接近 $y$ 的点 $z$。根据上文所述的同一论证可知，存在唯一的数 $i_0(z)$ 属于 $\{1,\dots,l_0\}$，满足$d_X\left(x_{i_0(z)}\ z_{i(z)}\right) < \delta^* r_1 + 10r$，且 $i_0(z)$ 必须等于 $i_0(y)$。这说明引理中定义的映射 $\iota$ 是连续的。□

**引理 9.7**。在假设 9.1 的设定下，对于一个固定的数$r_1 \in (0, r_0/4]$，对于每个 $r \in (0, r_1/100)$，令 $Y_r(x_0)$ 为 $X$ 中由 (9.3) 定义的开集，使得切片 $\Pi_{y_0} \cap U_{r_1}(y_0)$ 同胚于一个度量树 $T^1_{l_0}$，该度量树写作欧几里得锥

$$T^1_{l_0} = C_0\left(\{\xi_1, \dots, \xi_{\ell_0}\}\right).$$

定义映射 $\psi\colon\ \ Y_r(x_0)\to T^1_{l_0}$ 为

$$\psi(y):=\begin{cases} d_{\Pi_y}\left(y,\lambda_{r_0/2}(y)\right)\xi_{\iota(y)} & \text{if } y\in Y_r(x_0)-S_{n,\delta^*}(U_r(x_0)),\\ 0 & \text{otherwise,}\end{cases}$$

其中 $\lambda_{r_0/2}\colon\ \ U_{r_0/2}(x_0)\to S_{n,\ \delta^*}(U_r(x_0))$ 是引理 9.4 中定义的 $(1+4\delta^*)$-利普希茨映射，而 $\iota\colon\ \ Y_r(x_0)-S_{n,\ \delta^*}(U_r(x_0))\to\{1,\dots,l_0\}$ 是引理 9.6 中定义的映射。因此 $\psi$ 是一个 1-开连续映射。

证明。由于 $\lambda_{r_0/2}$ 和 $\iota$ 连续，且 $d_{\Pi_{y_k}}$ 收敛到 $d_{\Pi_y}$，因此映射 $\psi$ 也是连续的。我们将证明 $\psi$ 是 1-开映射。为此，任取 $Y_r(x_0)$ 中满足 $y\in Y_r(x_0)$ 的球 $U_t(y)\cap Y_r(x_0)$。为了证明

$$U_t(\psi(y))\cap\psi(Y_r(x_0))\subset\psi(U_t(y)\cap Y_r(x_0)),\tag{9.6}$$

任取 $\zeta\in U_t(\psi(y))\cap\psi(Y_r(x_0))$。

我们首先假设中心 $y$ 属于 $R_{n,\ \delta^*}(U_r(x_0))$，并令 $y_0:=\lambda_{r_0/2}(y)$。记

$$\Pi_{y_0}\cap B_{r_1}(y_0)=\bigcup_{i=1}^{\ell_0}\overline{y_0y_i}$$

使得对于某个 $i(y)\in\{1,\dots,l_0\}$，有 $y\in y_0y_{i(y)}$。

情形 1. $\zeta\neq0$，且方向 $\zeta'$ 与 $\xi_{\iota(y)}$重合。在此情形下，存在唯一的点 $z$属于 $y_0y_{i(y)}$，满足 $d_{\Pi_y}(y_0,\ z)=d_{T^1_{l_0}}(0,\ \zeta)$，从而 $\psi(z)=\zeta$。若 $z\in y_0y$，则有

$$\begin{aligned}d_X(y,z)\le d_{\Pi_y}(y,z)&=d_{\Pi_y}\left(y_0,y_{i(y)}\right)-d_{\Pi_y}(y_0,z)-d_{\Pi_y}\left(y,y_{i(y)}\right)\\&=d_{T^1_{l_0}}\left(0,\psi\left(y_{i(y)}\right)\right)-d_{T^1_{l_0}}(0,\zeta)-d_{T^1_{l_0}}\left(\psi(y),\psi\left(y_{i(y)}\right)\right)\\&=d_{T^1_{l_0}}(\psi(y),\zeta).\end{aligned}$$

若 $z\in\overline{yy_{i(y)}}$，则有

$$\begin{aligned}d_X(y,z)\le d_{\Pi_y}(y,z)&=d_{\Pi_y}\left(y_0,y_{i(y)}\right)-d_{\Pi_y}(y_0,y)-d_{\Pi_y}\left(z,y_{i(y)}\right)\\&=d_{T^1_{l_0}}\left(0,\psi\left(y_{i(y)}\right)\right)-d_{T^1_{l_0}}(0,\psi(y))-d_{T^1_{l_0}}\left(\zeta,\psi\left(y_{i(y)}\right)\right)\\&=d_{T^1_{l_0}}(\psi(y),\zeta).\end{aligned}$$

因此可知 $d_X(y,\ z)<t$。这就推出 (9.6)。

情形 2. $\zeta\neq0$，且 $\zeta'$ 与某个不同于 $\xi_{\iota(y)}$的 $\xi_j$ 重合。在此情形下，存在唯一的点 $z\in y_0y_j$满足 $d_{\Pi_y}(y_0,\ z)=d_{T^1_{l_0}}(0,\ \zeta)$，从而 $\psi(z)=\zeta$。于是有

$$\begin{aligned}d_X(y,z)&\le d_X(y_0,y)+d_X(y_0,z)=d_{\Pi_y}(y_0,z)+d_{\Pi_y}(y_0,z)\\&=d_{T^1_{l_0}}(0,\psi(y))+d_{T^1_{l_0}}(0,\zeta)=d_{T^1_{l_0}}(\psi(y),\zeta).\end{aligned}$$

因此 $d_X(y,\ z)<t$，从而得到 (9.6)。

情形 3. $\zeta=0$。与情形 2 类似，我们立即证明（9.6）。

因此，只要 $y$ 属于 $R_{n,\ \delta^*}(U_r(x_0))$，我们就证明了（9.6）。另一方面，即使 $y$ 属于 $S_{n,\ \delta^*}(U_r(x_0))$，我们也可以像情形 3 那样证明（9.6）。因此， $\psi$ 是 1-开集。□

备注 9.2。 若我们定义映射 $\tilde{\psi}$: $Y_r(x_0) \to T^1_{l_0}$ 为

$$\tilde{\psi}(y) := d_X\left(y, \lambda_{r_0/2}(y)\right)\xi_{\iota(y)}$$

若 $y \in Y_r(x_0) - S_{n,\ \delta^*}(U_r(x_0))$，且 $\psi(y) := 0$ 否则，则作者不知道 $\psi$ 是否为开集。

我们证明一个关键引理，以得到命题 9.1。

**引理 9.8**。 在假设9.1的条件下，对于固定的数$r_1 \in (0, r_0/4]$，对于每个 $r \in (0, r_1/100)$，令 $Y_r(x_0)$ 为$X$ 中由$(9.3)$ 定义的开集，使得切片 $\Pi_{y_0} \cap U_{r_1}(y_0)$ 同胚于某个度量树 $T^1_{l_0}$ ，其中 $l_0 \in \mathbb{N}$ 满足 $l_0 \geq 3$。我们定义映射$\Phi$: $Y_r(x_0) \to \mathbb{R}^{n-1} \times T^1_{l_0}$ 为

$$\Phi(y) := (\varphi(y), \psi(y)),$$

其中， $\psi$: $Y_r(x_0) \to T^1_{l_0}$ 是引理 9.7 中定义的映射。于是， $\Phi$ 是从 $Y_r(x_0)$ 到 $\mathbb{R}^{n-1} \times T^1_{l_0}$ 的某个开子集上的开嵌入，并且

$$(\mathrm{pr}_{\mathbb{R}^{n-1}} \circ \Phi)\left(S_{n,\delta^*}(Y_r(x_0))\right) = F\left(S_{n,\delta^*}(U_r(x_0))\right), \tag{9.7}$$

其中 $\mathrm{pr}_{\mathbb{R}^{n-1}}$: $\mathbb{R}^{n-1} \times T^1_{l_0} \to \mathbb{R}^{n-1}$ 是到 $\mathbb{R}^{n-1}$ 上的标准投影。特别地，我们有

$$0 < \mathcal{H}^{n-1}\left((\mathrm{pr}_{\mathbb{R}^{n-1}} \circ \Phi)\left(S_{n,\delta^*}(Y_r(x_0))\right)\right) < \infty. \tag{9.8}$$

证明。 在引理 9.7 中，我们已经看到 $\psi$ 是 1-开且连续的。由于 $\varphi$ 是 $(1+\delta^*)$-利普希茨的且 $(1+\delta^*)$-开，映射 $\Phi$ 是开且连续的。对于 $Y_r(x_0)$ 中的每个切片 $\Pi_{y_0} \cap U_{r_1}(y_0)$，限制映射$\psi|_{\Pi_{y_0} \cap U_{r_1}(y_0)}$ 是单射。因此 $\Phi$ 是单射。根据引理 9.5， $\mathbb{R}^{n-1}$ 的开子集 $\varphi(Y_r(x_0))$ 与 $\varphi(S_{n,\ \delta^*}(U_r(x_0)))$ 相同，因此我们得到 (9.7)。此外，我们有

$$0 < \mathcal{H}^{n-1}\left(\varphi\left(Y_r(x_0)\right)\right) < \infty,$$

因此我们得到 (9.8)。引理得证。 □

现在我们来证明命题 9.1。

命题 9.1 的证明。在假设 9.1 的设定下，对于固定的数 $r_1 \in (0, r_0/4]$，对每个 $r \in (0, r_1/100)$，令 $Y_r(x_0)$ 为 $X$ 中由 (9.3) 定义的开集。由引理 9.8，集合 $Y_r(x_0)$ 是 $U_{r_0}(x_0)$ 中包含 $x_0$ 的一个开邻域，使得 $Y_r(x_0)$ 与某个满足 $l \geq 3$ 的 $l_0 \in \mathbb{N}$ 同胚；此外，我们有 $S(Y_r(x_0)) = S_{n,\delta^*}(Y_r(x_0))$，并且

$$0 < \mathcal{H}^{n-1}\left(S\left(Y_r(x_0)\right)\right) < \infty.$$

至此，命题 9.1 的证明完成。 □

**9.2. 墙奇点定理的证明。**我们首先证明松弛墙奇点定理 1.4。

定理 1.4 的证明。对于 $n \in \mathbb{N}$，令 $\delta^* \in (0, 1/10)$ 充分小，并令 $\delta \in (0, \delta^*)$ 对 $\delta^*$ 也充分小。设 $X$ 是一个度量为 $d_X$ 的 GCBA($\kappa$) 空间，且 $U$ 是 $X$ 中一个纯 $n$ 维开子集。任取 $x$ 属于 $W_{n,\delta,\delta^*}(U)$。由命题 6.5，存在一个 $(n-1,\delta)$-应变映射 $\varphi_x\colon V_x \to \mathbb{R}^{n-1}$，其定义域是包含于 $U$ 的某个 $x$ 的开邻域 $V_x$，并且该映射局部 $(1+\delta^*)$-利普希茨且局部 $(1+\delta^*)$-开。令 $r_x$ 为一个充分小的正数，使得 $U_{2r_x}(x) \subset V_x$，且 $\varphi_x|_{U_{2r_x}}(x)$ 是 $(1+\delta^*)$-利普希茨并且 $(1-\delta^*)$-开。由命题 7.4 可知，存在 $S_{n,\delta^*}(U_{2r_x}(x))$ 的一个开稠密子集 $R_{\varphi_x}(S_{n,\delta^*}(U_{2r_x}(x)))$，使得限制映射 $\varphi_x|_{R_{\varphi_x}(S_{n,\delta^*}(U_{2r_x}(x)))}$ 是 $(1+2\delta^*)$-双利普希茨嵌入。此外，由命题 8.3 和引理 8.8，对于每个 $y \in U_{r_x}(x)$，以及由 $\Pi_y := \varphi_x^{-1}(\{\varphi_x(y)\})$ 定义的纤维 $\Pi_y$，并且对于每个$s \in (0, r_x)$，切片 $\Pi_y \cap B_s(y)$ 是配备内在度量 $d_{\Pi_y}$ 的度量树，使得对所有 $y_1, y_2 \in \Pi_y \cap B_s(y)$，我们有

$$\left| d_{\Pi_y}(y_1, y_2) - d_X(y_1, y_2) \right| < \delta^*.$$

对于每个 $\epsilon \in (0,\infty)$，我们都能找到一点 $x_0 \in R_{\varphi_x}(S_{n,\delta^*}(U_{2r_x}(x)))$，满足 $d_X(x, x_0) < \epsilon$，以及一个充分小的数 $r_0 \in (0, r_x)$，使得 $U_{r_0}(x_0) \subset U_{2r_x}(x)$，从而 $S_{n,\delta^*}(U_{r_0}(x_0))$ 包含于 $R_{\varphi_x}(S_{n,\delta^*}(U_{2r_x}(x)))$ 中。于是，$(n-1,\delta)$-应变映射 $\varphi_x|_{U_{r_0}(x_0)}$ 满足假设 9.1 中的所有性质。根据命题 9.1，我们可以找到 $x_0$ 的一个开邻域 $Y_r(x_0)$，其中某个 $r$，以及一个满足 $l_0 \geq 3$ 的整数 $l_0 \in \mathbb{N}$，还有一个开嵌入 $\Phi\colon Y_r(x_0) \to \mathbb{R}^{n-1} \times T^1_{l_0}$，使得 $S(Y_r(x_0)) = S_{n,\delta^*}(Y_r(x_0))$，并且

$$0 < \mathcal{H}^{n-1}(S(Y_r(x_0))) < \infty.$$

我们已经完成了定理 1.4 的证明。 □

注 9.3。在定理 1.4 的证明中，作者不知道在命题 9.1 的证明中构造的开嵌入 $\Phi\colon Y_r(x_0) \to \mathbb{R}^{n-1} \times T^1_{l_0}$ 是否为双利普希茨嵌入。

接下来我们证明定理 1.1。

定理 1。1 的证明。对于 $n \in \mathbb{N}$，取充分小的 $\delta^* \in (0, 1/10)$，并取对 $\delta^*$ 也充分小的 $\delta \in (0, \delta^*)$。设 $X$ 为一个 GCBA($\kappa$) 空间，且 $U$ 是 $X$ 的纯 $n$维开子集。任取 $U$ 中的一个 $n$-墙点 $x \in W_n(U)$。引理 5.9 表明 $x$属于 $W_{n,\,\delta,\,\delta^*}(U)$。由定理 1.4 可得定理 1.1。 □

## 10. Characterizations of regularity of codimension two

在本节中，我们证明定理 1.2、1.3 和 1.5。

10.1. **具有曲率上界的同调流形**。 设$H_*$ 表示以 $\mathbb{Z}$为系数的奇异同调。局部紧的可分度量空间 $M$ 称为同调 $n$-流形，如果对每个 $p \in M$，在 $p$ 处的局部同调 $H_*(M, M-\{p\})$同构于 $H_*(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n-\{0\})$，其中0是 $\mathbb{R}^n$的原点。同调$n$-流形 $M$ 是广义 $n$-流形，如果 $M$ 是具有有限拓扑维数的绝对邻域收缩核。每个广义 $n$-流形的维数为 $n$。根据Moore定理（见 [31, 第IV章]），对每个 $n \in \{1, 2\}$，每个广义 $n$-流形都是拓扑 $n$-流形。

每个具有曲率上界的同调 $n$-流形都是 GCBA 广义 $n$-流形。关于具有曲率上界的同调流形的进阶研究，请参阅 [18] 。Thurston [30, 定理 3.3] 证明，每个具有曲率上界的同调 3-流形都是拓扑 3-流形。Lytchak 和作者 [18, 定理 1.2]证明，对于每个具有曲率上界的同调 $n$-流形 $M$，都存在一个局部有限子集 $E$，使得 $M$ 中的 $M-E$ 是拓扑 $n$-流形。

我们回顾 [18,引理 3.1 和推论 3.4] 中给出的以下同调流形识别结果:

**命题 10.1**。 ([18]) 一个 GCBA空间 $X$ 的开子集 $U$ 是同调 $n$-流形，当且仅当对每个 $x \in U$，空间 $\Sigma_x X$ 与 $\mathbb{S}^{n-1}$ 具有相同的同调；在这种情况下， $\Sigma_x X$ 是同调 $(n-1)$-流形，而 $T_x X$ 是同调 $n$-流形。

这引出如下结论:

**命题 10.2**。 设 $U$ 是一个GCBA 空间 $X$的开子集，并且是一个同调 $n$-流形。则 $n$-墙集 $W_n(U)$ 在 $U$ 中为空。

证明。 假设我们在 $W_n(U)$ 中找到一个 $n$-墙点 $x$ 。则 $\Sigma_x X$等距分裂为 $\mathbb{S}^{n-2} * T^0_l$，其中 $l \in \mathbb{N}$ 满足 $l \geq 3$。因此， $H_{n-1}(\Sigma_x X)$ 同构于 $\mathbb{Z}^{l-1}$。这与命题 10.1 矛盾。□

10.2. **余维二的性质**。 对于定理 1.2 和 1.5 的证明，我们从以下结论开始:

**引理 10.3**。 设 $X$ 是一个GCBA空间，且 $U$ 是 $X$的一个纯 $n$-维开子集。则以下各项等价:

(1) -墙集 $W_n(U)$ 在 $U$ <style id='11}为空;
(2) $S_n(U)$ 的维数为 $\leq n-2$; (3) $U(_{\mathrm{H}}\, S_n)$ 的维数为 $\leq n-2$。

证明。 首先假设 $W_n(U)$ 为空。那么 $S_n(U)$ 与$S_{n-1}(U)$ 重合。由定理 7.1 可得

$$\dim_{\mathrm{H}} S_n(U) = \dim_{\mathrm{H}} S_{n-1}(U) \leq \dim_{\mathrm{H}} S_{n-1}(X) \leq n-2.$$

因此我们看到蕴含关系 (1) $\Rightarrow$(2) 与 (1) $\Rightarrow$ (3)。

接下来假设 $\dim S_n(U) \leq n-2$。设 $W_n(U)$ 非空。令 $\delta^* \in (0,1)$ 足够小，并令 $\delta \in (0,\delta^*)$ 对 $\delta^*$ 而言充分小。引理 5.9 表明 $W_n(U)$ 包含于$W_{n,\delta,\delta^*}(U)$。因此 $W_{n,\delta,\delta^*}(U)$ 非空。由定理 1.4，存在包含于 $U$ 的开子集 $U_0$，使得对满足 $l \geq 3$ 的 $l \in \mathbb{N}$， $U_0$ 同胚于 $\mathbb{R}^{n-1} \times T^1_l$；此外，我们有 $S(U_0) = S_{n,\delta^*}(U_0)$。由于$S_{n,\delta^*}(U_0)$ 包含于 $S_n(U_0)$，我们得到

$$n-1 = \dim S_{n,\delta^*}(U_0) \leq \dim S_n(U_0) \leq \dim S_n(U),$$

这与当前假设矛盾。因此我们得到蕴含关系 (2) $\Rightarrow$ (1) 和 (3) $\Rightarrow$ (1)。□

与引理 10.3 类似，我们验证如下结论：

**引理 10.4.** 设 $X$ 是一个GCBA 空间，且 $U$ 是 $X$的一个纯 $n$维开子集。若 维数 $S(U) \leq n-2$，则 $W_n(U)$为空。

证明。 假设 $W_n(U)$ 非空。根据定理 1.1，存在一个包含于 $U$ 的开子集 $U_0$，使得 $U_0$ 与带有 $k \geq 3$的 $\mathbb{R}^{n-1} \times T^1_k$同胚。因此

$$n-1 = \dim S(U_0) \leq \dim S(U),$$

这就产生了矛盾。 □

10.3. **余维二的松弛正则性**。 我们将证明定理 1.5。引理 10.3 可以放宽为以下形式：

**引理10.5**。 对于每个 $n \in \mathbb{N}$，存在 $\delta^* \in (0,1)$ 和 $\delta \in (0,\delta^*)$，满足如下条件：设 $X$ 是一个 GCBA 空间， $U$ 是 $X$中的纯 $n$维开子集。那么以下条件等价：

(1) $W_{n,\delta,\delta^*}(U)$ 在 $U$ 中为空；(2) $\dim S_{n,\delta,\delta^*}(U) \leq n-2$；(3) $\dim_{\mathrm{H}} S_{n,\delta,\delta^*}(U) \leq n-2$。

证明。 对于 $n \in \mathbb{N}$，取充分小的 $\delta^* \in (0,1)$，并取对 $\delta^*$ 足够小的 $\delta \in (0,\delta^*)$。先假设$W_{n,\delta,\delta^*}(U)$ 为空。那么$S_{n,\delta^*}(U)$ 与 $S_{n-1,\delta^*}(U)$ 重合。由于 $S_{n-1,\delta^*}(U)$ 包含于$S_{n-1}(U)$，定理 7.1 推出

$$\begin{aligned}\dim_{\mathrm{H}} S_{n,\delta_n}(U) = \dim_{\mathrm{H}} S_{n-1,\delta_n}(U) &\leq \dim_{\mathrm{H}} S_{n-1}(U) \\ &\leq \dim_{\mathrm{H}} S_{n-1}(X) \leq n-2.\end{aligned}$$

因此我们得到蕴含关系 (1) $\Rightarrow$ (2) 和 (1) $\Rightarrow$ (3)。

接下来假设 $\dim S_{n,\delta^*}(U) \leq n-2$。设 $W_{n,\delta,\delta^*}(U)$ 非空。由定理 1.4，存在一个包含于 $U$ 的开子集 $U_0$，使得对于满足 $l_0 \geq 3$ 的 $l_0 \in \mathbb{N}$， $U_0$ 与 $\mathbb{R}^{n-1} \times T^1_{l_0}$ 同胚；此外，我们有 $S(U_0) = S_{n,\delta^*}(U_0)$。因此 $\dim S_{n,\delta^*}(U_0) = n-1$，这与假设矛盾。因此我们得到 (2) $\Rightarrow$ (1) 和 (3) $\Rightarrow$ (1)。□

接下来我们证明如下：

**引理 10.6.** 对每个 $n \in \mathbb{N}$，存在 $\delta^* \in (0,1)$ 和 $\delta \in (0, \delta^*)$，满足如下条件：设 $X$ 为一个 GCBA 空间，且 $U$ 为 $X$的一个纯 $n$维开子集。则以下各项等价：

*(1)* $U$ 中的$(n, \delta, \delta^*)$-墙集$W_{n,\delta,\delta^*}(U)$为空；*(2)* 不存在包含于 $U$ 中的开子集 $U_0$，使得 $U_0$ 与某个 $l_0 \in \mathbb{N}$ 的 $\mathbb{R}^{n-1} \times T^1_{l_0}$ 同胚，且满足 $l_0 \geq 3$，其中 $S(U_0) = S_{n,\delta^*}(U_0)$，并且 $\mathcal{H}^{n-1}(S(U_0)) \in (0, \infty)$；*(3)* $U$ 中的 $n$-墙集 $W_n(U)$为空。

证明。对于 $n \in \mathbb{N}$，取充分小的 $\delta^* \in (0, 1)$，并取充分小的 $\delta \in (0, \delta^*)$。由定理 1.4，对于每个$x \in W_{n,\delta,\delta^*}(U)$，存在包含于 $U$ 中的开子集 $U_0$，使得 $U_0$ 与某个 $l_0 \in \mathbb{N}$ 的 $\mathbb{R}^{n-1} \times T^1_{l_0}$ 同胚，且满足 $l_0 \geq 3$，其中 $S(U_0) = S_{n,\delta^*}(U_0)$，并且 $\mathcal{H}^{n-1}(S(U_0)) \in (0, \infty)$。这蕴含(2) $\Rightarrow$ (1)。

接下来我们验证 (1) $\Rightarrow$ (3)。假设 $W_{n,\delta_n}(U)$ 为空。由引理 5.9 可知，$W_n(U)$ 包含于 $W_{n,\delta_n}(U)$。因此$W_n(U)$ 为空。这蕴含 (1) $\Rightarrow$ (3)。

余下要证明 (3) $\Rightarrow$(2)。假设我们找到一个 $n$-墙点$x$，它位于 $W_n(U)$ 中。引理 5.9 蕴含 $x \in W_{n,\delta,\delta^*}(U)$。由定理 1.4，存在包含于 $U$ 的开子集 $U_0$，使得对某个满足 $l_0 \geq 3$ 的 $l_0 \in \mathbb{N}$，$U_0$ 同胚于 $\mathbb{R}^{n-1} \times T^1_{l_0}$，且 $S(U_0) = S_{n,\delta^*}(U_0)$ 以及 $\mathcal{H}^{n-1}(S(U_0)) \in (0, \infty)$。这蕴含 (3) $\Rightarrow$ (2)。□

由此我们得到定理 1.5。

定理 1.5的证明。引理 10.5 和 10.6 导出了该定理。 □

10.4. **余维二的正则性**。为证明定理 1.2，我们先证明以下结论：

**引理 10.7**。设 $X$ 是一个GCBA空间，且 $U$ 是 $X$的一个纯 $n$维开子集。假设 $U$ 中的 $n$墙集 $W_n(U)$ 为空。那么不存在包含于 $U$ 中的开子集 $U_0$，使得对于某个满足 $l_0 \geq 3$的 $l_0 \in \mathbb{N}$，$U_0$ 与$\mathbb{R}^{n-1} * T_{l_0}$ 同胚。

证明。假设包含于 $U$ 中的开子集 $U_0$ 与某个满足 $l_0 \geq 3$的 $l_0 \in \mathbb{N}$ 所对应的 $\mathbb{R}^{n-1} * T_{l_0}$ 同胚。那么 $\dim S(U_0) = n-1$，且 $S(U_0)$中的每个点在 $S(U_0)$中都不是孤立点。此外，对于每个 $x \in S(U_0)$，以及 $x$的每个充分小的开邻域 $V$，我们有

$$\dim (S(U) \cap V) = n - 1.$$

根据命题 7.7，对于 $S(U_0)$ 的某个非空开 sense 子集 $R(S(U_0))$，存在一个函数 $\nu_{R(S(U_0))}$: $R(S(U_0)) \to \{1, \ldots, n-1\}$，使得若对于 $R(S(U_0))$ 中的一个点 $x$，我们令 $m := \nu_{R(S(U_0))}(x)$，那么可以找到一个 $(m, \delta_m)$-应变映射 $\varphi_x$: $V_x \to \mathbb{R}^m$，其定义在 $x$ 的某个开邻域 $V_x$ 上，并且其限制 $\varphi|_{R(S(U_0))}$ 到 $R(S(U_0))$ 是一个 $(1 + 2\delta_{m+1})$-双利普希茨嵌入到 $\mathbb{R}^m$ 中。在这种情况下，我们得到如下结果：

**子引理 10.8**。对于每个 $x \in R(S(U_0))$，我们有

$$\nu_{R(S(U_0))}(x) = n - 1.$$

特别地，集合 $R(S(U_0))$ 包含于 $R_{n-1,\delta_{n-1}}(U_0)$中。

证明。假设我们找到 $x_0 \in R(S(U_0))$，满足 $\nu_{R(S(U_0))}(x_0) \leq n-2$。令 $m_0 := \nu_{R(S(U_0))}(x_0)$。此时，对于某个包含 $x_0$ 的开邻域 $V_{x_0}$，存在一个 $(m_0, \delta_{m_0})$-应变映射$\varphi_{x_0}$: $V_{x_0} \to \mathbb{R}^{m_0}$，其限制$\varphi_{x_0}|_{R(S(U_0))}$ 在 $R(S(U_0))$ 上是到$\mathbb{R}^{m_0}$中的一个 $(1+2\delta_{m_0+1})$-双利普希茨嵌入。于是存在一个包含 $x_0$ 且包含于 $V_0$中的开邻域 $V_1$，使得 $R(S(U_0)) \cap V_1$ 与 $S(U_0) \cap V_1$重合。因此我们得到

$$\dim\left(S(U_0) \cap V_1\right) \leq \dim_{\mathrm{H}}\left(R(S(U_0)) \cap V_1\right) \leq m_0,$$

因此我们有 $\dim\left(S(U_0) \cap V_1\right) \leq n-2$。另一方面，在我们的情形下，$\dim\left(S(U_0) \cap V_1\right) = n-1$。这就产生了矛盾。□

由子引理 10.8 可知，集合 $R(S(U_0))$ 包含于 $W_{n,\delta_n}(U_0)$；特别地，$W_{n,\delta_{n-1},\delta_n}(U_0)$ 非空。由引理 10.6，$U_0$ 中的 $n$-墙集 $W_n(U_0)$ 非空。因此集合 $W_n(U)$ 非空。至此完成引理 10.7 的证明。□

现在我们证明定理 1.2。

定理 *1.2* 的证明。设 $X$ 为一个 GCBA空间，且 $U$ 为 $X$ 的一个纯 $n$ 维开子集。在引理 10.7 中，我们验证蕴含关系 (1) $\Rightarrow$ (2)。相反的蕴含 (2) $\Rightarrow$ (1) 可由定理 1.5 推出。在引理 10.3 中，我们证明 (1)、(3) 与 (4) 彼此等价。蕴含 (6) $\Rightarrow$ (5) 由 $\dim \leq \dim_{\mathrm{H}}$ 得出，而 (5) $\Rightarrow$(1) 由引理 10.4 得出。余下要证明的是 (1) $\Rightarrow$ (6)。假设 $W_n(U)$ 为空。设 $\delta^* \in (0,1)$ 足够小。定理 1.5 蕴含 $\dim_{\mathrm{H}} S_{n,\delta^*}(U) \leq n-2$。由于 $S(U)$ 包含于 $S_{n,\delta^*}(U)$,

$$\dim S(U) \leq \dim_{\mathrm{H}} S(U) \leq \dim_{\mathrm{H}} S_{n,\delta^*}(U) \leq n-2.$$

因此我们得到 (1) $\Rightarrow$ (6)。定理 1.2 的证明至此完成。□

10.5. **余维二正则性的收敛**。我们首先回顾以下（[18,引理3。3]）：

**引理 10.9.** （[18]）设 $r \in (0, D_\kappa/2)$。取一列带基点的适当测地 *CAT(κ)* 空间$(X_k, p_k)$，它们在带基点的 *Gromov–Hausdorff* 拓扑下收敛到某个带基点的度量空间$(X, p)$ 。若 $X_k$ 中所有开度量球 $U_r(p_k)$ 都是同调流形，那么 $X$ 中的开度量球 $U_r(p)$ 是同调流形。

接下来我们证明以下结论：

**引理 10.10.** 设 $r \in (0, D_\kappa/2)$。取一个由带基点的纯 $n$ 维适当测地线 $\mathrm{GCBACAT}(\kappa)$空间 $(X_k, p_k)$ 构成的序列，该序列在带基点的 *Gromov–Hausdorff* 拓扑下收敛到某个带基点的度量空间 $(X, p)$ 。若 $U_r(p_k)$ 中所有 $n$ 墙集 $W_n(U_r(p_k))$ 都为空，则 $U_r(p)$ 中的 $n$ 墙集 $W_n(U_r(p))$ 为空。

证明。 根据引理 2.2，极限空间 $X$ 是纯 $n$ 维的。

假设我们找到一个 $n$-墙点 $x$ in $W_n(U_r(p))$。取一个序列 $(x_k)$，其中 $x_k \in X_k$ 收敛于 $X$ 中的点 $x$。对于 $n \in \mathbb{N}$，令 $\delta^* \in (0,1)$ 足够小，并令 $\delta \in (0,\delta^*)$ 足够小，使得 $\delta^*$。为得到矛盾，我们分为以下两种情形：

情形 *1*。假设对于某个 $s \in (0, D_\kappa/2)$，开度量球$U_s(x_k)$ 对所有充分大的 $k$都包含于 $R_{n,\delta^*}(U_r(p_k))$ 中。那么所有的球 $U_s(x_k)$ 都是拓扑 $n$-流形。根据引理 10.9，球 $U_s(x)$ 是同调 $n$-流形。由命题 10.2 可知，$W_n(U_s(x))$ 为空。这就产生了矛盾。

情形 *2*。假设情形 1 不发生。在这种情况下，我们可以假设，对于某个序列 $(s_k)$，其中 $s_k \to 0$，我们在 $S_{n,\ \delta^*}(U_r(p_k)) \cap U_{s_k}(x_k)$ 中找到一些点$y_k$，对所有 $k$ 均如此。由于序列 $(y_k)$ 收敛于 $X$ 中的点 $x$，引理 5.6 中的应变器的稳定性意味着，对于所有充分大的 $k$，都有 $y_k \in R_{n-1,\ \delta}(U_r(p_k))$；特别地，我们有 $y_k \in W_{n,\ \delta,\ \delta^*}(U_r(p_k))$。由定理 1.5，我们推得 $W_n(U_r(p_i))$ 非空。这同样构成矛盾。

在情形 1 和情形 2 中，我们都得到矛盾。因此，我们得出该引理。□

由定理 1.2 和引理 10.10，我们得到如下结论：

**命题 10.11.** 设 $(X_k, p_k)$ 是一个由纯 $n$ 维适当测地线 $\mathrm{CAT}(\kappa)$ GCBA 空间组成的序列，并在带基点的 *Gromov–Hausdorff* 拓扑下收敛到某个度量空间 $(X, p)$。那么，对每个 $r \in (0, D_\kappa/2)$，以下结论成立：

*(1)* 若对所有 $k$，都有 $\dim S_n(U_r(p_k)) \le n-2$，则有 $\dim S_n(U_r(p)) \le n-2$; *(2)* 若对所有 $k$，都有 $\dim_{\mathrm{H}} S_n(U_r(p_i)) \le n-2$，则有 $\dim_{\mathrm{H}} S_n(U_r(p)) \le n-2$; *(3)* 若对所有 $k$，都有 $\dim S(U_r(p_i)) \le n-2$，则有 $\dim S(U_r(p)) \le n-2$; *(4)* 若对所有 $k$，都有 $\dim_{\mathrm{H}} S(U_r(p_i)) \le n-2$，则有 $\dim_{\mathrm{H}} S(U_r(p)) \le n-2$.

10.6. **余维二的无穷小正则性**。 为证明定理 1.3，我们验证以下结论：

**引理 10.12**。 设 $Z$ 是一个纯$(n-1)$维的$\mathrm{GCBA}\,\mathrm{CAT}(1)$空间，且不是单点集。令 $C_0(Z)$ 为 $Z$上的欧几里得锥。则 $n$-墙集 $W_n(C_0(Z))$ 在 $C_0(Z)$ 中为空，当且仅当$(n-1)$-墙集 $W_{n-1}(Z)$ 在 $Z$ 中为空。

证明。以 $Z$ 为底的欧几里得锥 $C_0(Z)$ 是一个纯 $n$ 维的 GCBA CAT(0)空间。

我们假设 $W_n(C_0(Z))$ 为空。设 $W_{n-1}(Z)$ 非空。于是我们找到一点 $z_0$，位于 $Z$ 中，在该点处 $T_{z_0}Z$ 等距分裂为 $\mathbb{R}^{n-2} \times T^1_{l_0}$，其中某个 $l_0 \in \mathbb{N}$ 满足 $l_0 \ge 3$。因此，对于该点

$[(z_0,\ 1)] \in C_0(Z)$，切空间 $T_{[(z_0,1)]}C_0(Z)$ 等距分裂为$\mathbb{R}^{n-1} \times T^1_{l_0}$。这意味着 $[(z_0,\ 1)] \in W_n(C_0(Z))$，这与假设矛盾。因此 $W_{n-1}(Z)$ 为空。

反过来，接下来假设 $W_{n-1}(Z)$ 为空。设 $W_n(C_0(Z))$ 非空。于是我们可以在 $C_0(Z)$ 中找到一点 $w_0$，使得 $T_{w_0}C_0(Z)$ 等距分裂为 $\mathbb{R}^{n-1} \times T^1_{l_0}$，其中 $l_0 \in \mathbb{N}$ 满足 $l_0 \geq 3$。若 $w_0$ 是 $C_0(Z)$ 的顶点 0，由于 $C_0(Z)$ 与 $T_0C_0(Z)$ 等距，欧几里得锥 $C_0(Z)$ 等距分裂为 $\mathbb{R}^{n-1} * T^1_{l_0}$。因此，$Z$ 等距分裂为 $\mathbb{S}^{n-1} * T^0_{l_0}$。这意味着 $W_{n-1}(Z)$ 非空，产生矛盾。若 $w_0$ 不同于 $C_0(Z)$ 的顶点 0，我们可以找到满足 $w_0 = [(z_0, 1)]$ 的 $z_0 \in Z$，使得 $T_{z_0}Z$ 等距分裂为 $\mathbb{R}^{n-1} \times T^1_{l_0}$。这意味着 $z_0 \in W_{n-1}(Z)$，产生矛盾。因此 $W_n(C_0(Z))$ 为空。□

接下来我们证明如下结论：

**引理 10.13.** 设 $X$ 是一个GCBA 空间，且 $U$ 是 $X$ 的一个纯 $n$ 维开子集。那么以下各条件等价：

(1) $U$ 中的 $n$-墙集 $W_n(U)$ 为空；(2) 对每个 $x \in U$，$T_xX$ 中的 $n$-墙集 $W_n(T_xX)$ 为空；(3) 对每个 $x \in U$，$\Sigma_xX$ 中的 $(n-1)$-墙集 $W_{n-1}(\Sigma_xX)$ 为空。

证明。由引理 10.12，只需证明 (1) $\Leftrightarrow$ (2) 的等价性。

首先证明 (1) $\Rightarrow$ (2)。假设 $W_n(U)$ 为空。任取 $x \in U$。考虑 Gromov–Hausdorff 放大极限

$$\lim_{\lambda\to\infty}(\lambda X, x) \to (T_xX, 0_x),$$

我们可找到充分大的 $\lambda_0 \in (0,\infty)$，使得对于每个 $\lambda \in (\lambda_0,\infty)$，$\lambda X$ 中以 $x$ 为中心、半径为 1 的开度量球 $U_1^{\lambda X}(x)$ 包含于 $U$。因此，$U_1^{\lambda X}(x)$ 中的 $n$- 墙集 $W_n(U_1^{\lambda X}(x))$ 为空。由引理 10.10 可知，开球 $U_1(0_x)$（位于 $T_xX$ 中）中的 $n$-墙集 $W_n(U_1(0_x))$ 为空。这意味着整个空间 $T_xX$ 中的 $n$-墙集 $W_n(T_xX)$ 为空。因此可得 (1) $\Rightarrow$ (2)。

接下来证明 (2) $\Rightarrow$ (1)。假设对于任意 $x \in U$，$T_xX$ 中的 $n$-墙集 $W_n(T_xX)$ 都是空的。设 $W_n(U)$ 非空。那么我们可以找到 $U$ 中的一个点 $x_0$，使得 $T_{x_0}X$ 等距分裂为 $\mathbb{R}^{n-1} \times T^1_{l_0}$，其中某个 $l_0 \in \mathbb{N}$ 满足 $l_0 \geq 3$。由于 $T_{0_{x_0}}T_{x_0}X$ 与 $T_{x_0}X$ 等距，顶点 $0_{x_0}$ 是 $T_{x_0}X$ 中的一个 $n$-墙点。这就产生了矛盾。因此，$W_n(U)$ 为空。由此可知 (2) $\Rightarrow$ (1)。□

定理 1.3的证明。结合定理 1.2 和引理 10.13 即可得到该定理。□

## 11. 应用

**11.1. 没有墙奇异性的低维 GCBA空间**。我们首先引用 Lytchak 与作者 [18, 定理 1.1] 所确立的局部拓扑正则性定理，其形式如下：

**定理 11.1**。([18]) 设 $U$ 是一个连通局部紧 $\mathrm{CBA}(\kappa)$ 空间 $X$ 的开子集。那么以下条件等价：

(1) $U$ 是一个拓扑 $n$-流形；(2) 对于每个 $x \in U$，空间 $\Sigma_x X$ 都与 $\mathbb{S}^{n-1}$ 同伦等价；(3) 对于每个 $x \in U$，空间 $T_x X$ 都与 $\mathbb{R}^n$ 同胚。

由定理 11.1 和我们的余维二无穷小正则性定理 1.3，推得以下结论：

**命题 11.2**。设 $X$ 是一个$\mathrm{GCBA}$ 空间，并设 $U$ 是 $X$ 的一个纯 $n$ 维开子集。假设维数 $S(U) \leq n-2$。

(1) 如果 $n=2$，那么 $U$ 是一个拓扑*2*-流形。(2) 如果 $n=3$，那么对于每个 $x \in U$，点$x$ 处的方向空间 $\Sigma_x X$ 都是一个闭拓扑*2*-流形。

证明。(1) 假设 $n=2$。那么对于每个 $x \in U$，根据定理 1.3，空间 $\Sigma_x X$ 是一个闭拓扑1-流形，因此它与 $\mathbb{S}^1$同胚。根据局部拓扑正则性定理11.1，我们可知$U$ 是一个拓扑2-流形。

(2) 假设 $n=3$。那么对于每个 $x \in U$，根据定理 1.3，空间$\Sigma_x X$ 是一个纯二维GCBA空间，且 $\dim S(\Sigma_x X) \leq 0$。因此，(2)意味着 $\Sigma_x X$ 是一个闭拓扑2-流形。□

**11.2. CAT(1)空间的体积夹挤定理**。我们称 CAT(1)空间中的三个点构成一个三脚架，如果这三个点两两之间的距离为 $\pi$。Lytchak 与作者证明了一个容量球面定理 [18, 定理 1.5]，适用于 CAT(1)空间：如果一个紧的、测地完备的 CAT(1)空间不含三脚架，那么它同胚于球面。作为其应用，Lytchak 与作者还证明了一个体积球面定理 [18, 定理 8.3]，适用于 CAT(1)空间：如果一个纯 $m$维的、紧的、测地完备的 CAT(1)空间 $Z$ 满足 $\mathcal{H}^m(Z) < (3/2)\,\mathcal{H}^m(\mathbb{S}^m)$。作者给出了如下刻画（[22, 定理 1.1]）：

**定理 11.3**。([22]) 如果一个纯 $m$维的、紧的、测地完备的$\mathrm{CAT}(1)$空间 $Z$ 满足

$$\mathcal{H}^m(Z) = \frac{3}{2}\,\mathcal{H}^m(\mathbb{S}^m),$$

那么，$Z$要么与 $\mathbb{S}^m$ 同胚，要么与$\mathbb{S}^{m-1} * T_3^0$等距。此外，如果 $Z$ 有一个三脚架，那么 $Z$ 与 $m$-三棱体或$\mathbb{S}^{m-1} * T_3^0$等距；其中，$m$-三棱体是 [22, 例 1。1] 中定义的$\mathrm{CAT}(1)$ 空间的一个具体例子，并且与 $\mathbb{S}^m$同胚。

若函数 $\rho\colon [0,r) \to [0,\infty)$ 满足 $\rho(0) = 0$，则称其为收缩函数，如果 $\rho$ 在 0 处连续，且对所有 $t \in [0,r)$，均有 $\rho(t) \geq t$。对于收缩函数 $\rho\colon [0,r) \to [0,\infty)$，若度量空间 $X$ 满足：对每个 $x \in X$ 以及每个 $s \in (0,r)$，球 $B_s(x)$ 都在 $B_{\rho(s)}(x)$内可缩，则称其为 LGC($\rho$)。每个 CAT($\kappa$) 空间都是 LGC(id$_{[0,D_\kappa)}$)。

我们回顾 LGC 空间的 Petersen 同伦稳定性定理 [29, 定理A] 。设 $\rho$ 为一个收缩函数。那么，对每个$m \in \mathbb{N}$，都存在一个仅依赖于 $m$ 和 $\rho$ 的 $\delta \in (0,\infty)$，使得若两个维数至多为 $m$ 的紧 LGC($\rho$) 空间之间的 Gromov–Hausdorff距离小于 $\delta$，则它们同伦等价。

按照 [22, 命题 5.6], 中的相同思路，我们证明如下结论：

**引理11.4.** 对每个 $m \in \mathbb{N}$，都存在 $\delta \in (0,\infty)$，使得若一个纯 $m$维、紧且测地完备的$\mathrm{CAT}(1)$ 空间 $Z$满足维数 $S(Z) \leq m-2$ 和$(1.1)$，则 $Z$ 与 $\mathbb{S}^m$同伦等价。

证明。假设该引理不成立。根据体积球面定理 [18, 定理 8.3], ，不妨设存在一列纯 $m$维、紧且测地完备的 CAT(1) 空间 $Z_i$, $i = 1, 2, \ldots$, 满足 dim $S(Z_i) \leq m-2$，且 $\lim_{i\to\infty} \mathcal{H}^m(Z_i) = (3/2)\,\mathcal{H}^m(\mathbb{S}^m)$，其中每个 $Z_i$ 都不同伦等价于 $\mathbb{S}^m$。根据容量球面定理 [18, 定理 1.5], ，可假设每个 $Z_i$ 都有一个三脚架。序列 $Z_i$,$i = 1, 2, \ldots$, 存在一个收敛子列 $Z_j$, $j = 1, 2, \ldots$, 在 Gromov–Hausdorff拓扑下趋于某个紧度量空间 $Z$ （参见 [22, 命题 3.4], 和 [20, 命题 6.5]）。由引理 2.2, 极限 $Z$ 是一个纯 $m$维、紧且测地完备的 CAT(1) 空间。由于每个 $Z_j$ 都有一个三脚架，极限 $Z$ 也有一个三脚架。由体积收敛定理 [22, 定理 3.3]（[21,定理 1.1]），可得 $\mathcal{H}^m(Z) = (3/2)\,\mathcal{H}^m(\mathbb{S}^m)$。

定理 11.3 随即推出，极限 $Z$ 要么与$m$-重三元组等距，要么就是 $\mathbb{S}^{m-1} * T_3^0$。命题 10.11 推出 dim $S(Z) \leq m-2$，因此 $Z$ 必与 $m$-重三元组等距。 $m$-重三元组 $Z$ 与 $\mathbb{S}^m$同胚。针对 LGC 空间的 Petersen 同伦稳定性定理 [29,定理A] 告诉我们，对于所有充分大的 $j$， $Z_j$ 与$\mathbb{S}^m$ 同伦等价。这就产生了矛盾。□

我们给出以下判据（与 [22, 定理 1.3]对比）。

**命题 11.5**。对于每个 $n \in \mathbb{N}$，都存在 $\delta \in (0,\infty)$，使其具有以下性质：设 $X$ 是一个纯 $n$ 维、适当、测地完备的 $\mathrm{CAT}(\kappa)$ 空间，且 维数 $S(X) \leq n-2$，并设 $U$ 是 $X$的一个开子集。若对每个 $x \in U$，都存在 $r \in (0, D_\kappa)$ 满足

$$\frac{\mathcal{H}^n(B_r(x))}{\omega_\kappa^n(r)} < \frac{3}{2} + \delta, \tag{11.1}$$

那么 $U$ 是一个拓扑 $n$流形。

证明。 对于 $n \in \mathbb{N}$，令 $\delta \in (0, \infty)$充分小。设 $X$ 是一个纯 $n$维、适当且测地完备的 CAT($\kappa$)空间，满足 $\dim S(X) \leq n-2$，并令 $U$ 为 $X$的一个开子集。假设对每个 $x \in U$，都存在满足（11.1）的 $r \in (0, D_\kappa)$。那么

$$\frac{\mathcal{H}^{n-1}(\Sigma_x X)}{\mathcal{H}^{n-1}(\mathbb{S}^{n-1})} \leq \frac{\mathcal{H}^n(B_r(x))}{\omega_\kappa^n(r)} < \frac{3}{2} + \delta$$

（见 [22, 引理3.6]）。由定理 1.3和命题2.1可知， $\Sigma_x X$ 是一个纯（$n-1$）维、紧的测地完备 CAT(1) 空间，且$\dim S(\Sigma_x X) \leq n-3$。引理11.4表明 $\Sigma_x X$ 与 $\mathbb{S}^{n-1}$同伦等价。由局部拓扑正则性定理11.1可知， $U$ 是一个拓扑 $n$-流形。□

定理*1.6*的证明。 对 $m \in \mathbb{N}$，令 $\delta \in (0, \infty)$足够小。设$Z$ 为一个纯 $m$ 维、紧的测地完备 CAT(1) 空间，且$\dim S(Z) \leq m-2$ 满足(1.1)。假设(1.1)连同相对体积比较 [22, 命题3.2] （[21,命题6.3]）表明，对任意 $z \in Z$ 和 $r \in (0, \pi)$，我们有

$$\frac{\mathcal{H}^m(B_r(z))}{\omega_1^m(r)} \leq \frac{\mathcal{H}^m(Z)}{\mathcal{H}^m(\mathbb{S}^m)} < \frac{3}{2} + \frac{\delta}{\mathcal{H}^m(\mathbb{S}^m)}.$$

由命题 11.5 可知，只要 $\delta$ 足够小， $Z$ 就是一个拓扑 $m$流形。CAT(1) 同调流形的体积球面定理 [21, 定理 1.2]导出了定理 1.6。□

11.3. **CAT(0)空间的渐近拓扑正则性**。 设$X$ 是一个纯 $n$维的、适当的、测地完备的CAT(0)空间。则以下各项等价（[23, 命题 3.8]）：(1) $X$具有倍增性；(2) $X$ 具有格罗莫夫–豪斯多夫渐近锥；(3) 对某个 $c \in [1, \infty)$，我们有 $\mathcal{G}_0^n(X) \leq c$；在此情形下，对于每个 $x \in X$

$$\frac{\mathcal{H}^{n-1}(\Sigma_x X)}{\mathcal{H}^{n-1}(\mathbb{S}^{n-1})} \leq \frac{\mathcal{H}^{n-1}(\partial_{\mathrm{T}} X)}{\mathcal{H}^{n-1}(\mathbb{S}^{n-1})} = \mathcal{G}_0^n(X), \tag{11.2}$$

其中 $\partial_{\mathrm{T}} X$ 是 $X$的蒂茨边界。

定理 *1.7* 的证明。 对于 $n \in \mathbb{N}$，令 $\delta \in (0, \infty)$ 足够小。设$X$ 是一个纯 $n$维的、紧的、测地完备的CAT(0)空间，其维数 $\dim S(X) \leq n-2$ 满足(1.3)。于是根据(11.2)，对于每个$x \in X$，我们有

$$\frac{\mathcal{H}^{n-1}(\Sigma_x X)}{\mathcal{H}^{n-1}(\mathbb{S}^{n-1})} < \frac{3}{2} + \delta.$$

由定理 1.3 和命题2.1可知， $\Sigma_x X$ 是一个纯（$n-1$）维、紧且测地完备的CAT(1)空间，并且 $\dim S(\Sigma_x X) \leq n-3$。由命题 11.5可得， $X$ 是一个拓扑 $n$流形。渐近拓扑正则性定理[23,定理 1.4] 推出定理1.7。□

## References

[1] S. Alexander、V. Kapovitch 和 A. Petrunin，《亚历山德罗夫几何导论：CAT(0)空间》，Springer数学简明读物，Springer，2019。[2] S. Alexander、V. Kapovitch 和 A. Petrunin，《亚历山德罗夫几何：基础》，数学研究生教材，第236卷，美国数学学会，2024。[3] A. D. Alexandrov、V. N. Berestovskiĭ 和 I. G. Nikolaev，广义黎曼空间，［《俄罗斯数学调查》］, 41 (1986)，(249)，3–44，240；译文见《俄罗斯数学调查》41 (1986)，1–54。[4] W. Ballmann，《非正曲率空间讲义》，德国数学学会研讨班，第25卷，Birkh¨auser，1995。[5] W. Ballmann 和 M. Brin，球面多面体的直径刚性，《杜克数学杂志》97 (1999)，第2期，235–259。[6]M. R. Bridson 和 A. Haefliger，《非正曲率度量空间》，数学科学基础丛书，第319卷，Springer-Verlag，1999。[7] D. Burago、Yu. D. Burago 和 S. Ivanov，《度量几何教程》，数学研究生教材，第33卷，美国数学学会，2001。[8] Yu. D. Burago、M. Gromov 和 G. Perelman，具有曲率下界的 A. D. Alexandrov 空间，［《俄罗斯数学调查》］, 47 (1992)，第2期（284），3–51，222；译文见《俄罗斯数学调查》47 (1992)，第2期，1–58。[9] S. V. Buyalo 和 V. Schroeder，曲率有上界空间，《微分几何综述》第XI卷《度量与比较几何》（J. Cheeger 和 K. Grove 编），International Press，2007，第295–327页。[10] T. Fujioka，曲率有上界的测地完备空间上的非临界映射，《全球分析与几何年刊》62 (2022)，第3期，661–677。[11]T. Fujioka，曲率有上界的测地完备空间中的极值子集，《分析、几何与度量空间》11 (2023)，第1期，论文编号20230104，共19页。[12] B. Kleiner，曲率有上界的长度空间的局部结构，《数学杂志》231 (1999)，第3期，409–456。[13] L. Kramer，《CAT($\kappa$)空间与欧几里得建筑的局部结构及同调》，《几何学进展》11 (2011)，第2期，347–369。[14] A. Lytchak，度量空间中的微分，《代数与分析》16 (2004)，第6期，128–161；《圣彼得堡数学杂志》16 (2005)，第6期，1017–1041。[15] A. Lytchak，度量空间中的开映射定理，《代数与分析》17 (2005)，第3期，139–159；《圣彼得堡数学杂志》17 (2006)，第3期，477–491。[16] A. Lytchak，球面建筑与球面连接的刚性，《几何与泛函分析》15 (2005)，第3期，720–752。[17] A. Lytchak 和 K. Nagano，具有曲率上界的测地完备空间，《几何与泛函分析》29 (2019)，第1期，295–342。[18] A. Lytchak 和 K. Nagano，具有曲率上界空间的拓扑正则性，《欧洲数学会杂志》（JEMS）24 (2022)，第1期，137–165。[19] A. Lytchak、K. Nagano 和 S. Stadler，CAT(0)四维流形是欧几里得的，《几何与拓扑》28 (2024)，第7期，3285–3308。[20]K. Nagano，二维CAT(1)空间的球面定理，《太平洋数学杂志》206 (2002)，第2期，401–423。[21] K. Nagano，曲率有上界的亚历山德罗夫空间的体积收敛定理，《数学杂志》241 (2002)，第1期，127–163。[22] K. Nagano，CAT(1)空间的体积夹挤定理，《美国数学杂志》144 (2022)，第1期，267–285。

[23] K. Nagano，渐近拓扑正则性（关于CAT(0)空间），《全球分析与几何年刊》**61**（2022），第2期，427–457。[24] K. Nagano、T. Shioya 与 T. Yamaguchi，上曲率有界的二维度量空间 *I*，《几何与拓扑》28（2024），第7期，3023–3093。[25] K. Nagano、T. Shioya 与 T. Yamaguchi，上曲率有界的二维度量空间 *II*，预印本，2023：arXiv:2308.16398。[26]G. Perelman，亚历山德罗夫空间上的莫尔斯理论要素，《代数与分析》**5**（1993），第1期，232–241；《圣彼得堡数学杂志》**5**（1994），第1期，205–213。[27]G. Perelman，*A. D. Alexandrov* 的曲率下界空间，*II*，预印本，1991。[28] G. Perelman 与 A. Petrunin，亚历山德罗夫空间中的极值子集与广义利伯曼定理，《代数与分析》**5**（1993），第1期，242–256；《圣彼得堡数学杂志》**5**（1994），第1期，215–227。[29] P. Petersen，度量空间的有限性定理，《微分几何杂志》**31**（1990），第2期，387–395。[30] P. Thurston，CAT(0) 4维流形若仅有一个驯点则为欧几里得的，《几何分析杂志》**6**（1996），第3期，475–494。[31] R. Wilder，《流形的拓扑学》，美国数学学会学术讨论会出版物，第32卷，美国数学学会，1979。

(KOICHI NAGANO)Department of Mathematics,
University of TsukubaTennodai 1-1-1, Tsukuba, Ibaraki,
305-8571, Japan电子邮箱：nagano@math.tsukuba.ac.jp