arXiv:2601.22775v1 [math.DG] 30 Jan 2026

辛-接触对应词典

FABRIZIO PUGLIESE、GIOVANNI SPARANO 与 LUCA VITAGLIANO

Abstract. 接触几何是辛几何的奇数维类比。这一模糊想法实际上可以借助辛到接触字典以相当精确的方式加以形式化。本综述论文旨在讨论该字典中的基本条目。令人惊讶的是，该字典也可应用于看似相距甚远的情形，例如复结构与 G-结构，从而得到既有的以及新的有趣几何。

Contents

1. 引言 1 2. 接触结构 3 3. Jacobi 括号与规范代数胚 4 4. Atiyah 形式与字典 6 5. 齐次辛结构 8 6. Jacobi 丛 10 7. 奇复结构 13 8. 齐次 G-结构 15 参考文献 17

1. Introduction

接触几何起源于 S. Lie 在 19世纪晚期对偏微分方程几何的研究（以及后来 Cartan 及其合作者在 20世纪上半叶的工作）。接触流形是一元依赖变量的一阶偏微分方程坐标无关理论的自然背景（参见例如 [20, 节 3]）。如今，接触结构主要从两个角度进行研究：

- 接触度量几何：研究接触结构（及相关结构）与度量结构之间的联系（例如 Sasakian 流形），参见例如 [4, 5],和
- 接触拓扑：分析接触流形的全局拓扑性质（与辛拓扑有些类似），参见例如 [12]。

Poisson 几何领域也有一些研究探讨接触结构与各种括号、李代数丛、李群胚 [11, 10, 3, 1] 以及几何力学之间的联系（关于这一方向最早的研究之一，参见[6]；另见 [13] 及其中的参考文献）。这第三

2020年 数学主题分类。53D10（主要分类），53D05，53D15，53D17，53C10，53C15。关键词和短语。接触几何、辛几何、近似接触几何、 G-结构。

条研究路线源自 Kirillov [14]和 Lichnerowicz [15], 以及后来 Marle [16] （及其合作者）关于 Jacobi 括号的研究。

接触流形必然是奇数维的，在许多方面，接触几何可以看作辛几何的奇数维类比。事实上，Arnol'd 有一句名言 [2]:

辛几何中的每个定理都可以表述为接触几何定理，
而接触几何中的论断也可以用辛几何的语言来表达。 (1.1)

这不仅仅是一句名言。事实证明，存在一套精确的字典，可以相当直接地将辛几何中的自然构造和论述转换到接触几何中。本文旨在回顾这套从辛几何到接触几何的字典，并简洁地介绍其主要条目。值得注意的是，这套字典的部分内容已见于文献中的不同论文，而本文首次对其作系统介绍。

有些出人意料的是，这套字典可以应用于表面上与辛几何相去甚远的微分几何情形，从而得到新旧兼具的有趣几何结构。例如，可以将这套字典应用于复几何 [18, 附录 A] ，以找到一种奇数维类比，它在文献中称为正规近接触几何 [4]。这套字典还可应用于多辛几何 [21], 、狄拉克几何 [24],、广义复几何 [23],以及 G-结构 [19],等领域。

本文结构如下：第 2 节回顾接触结构的定义。我们从不假设存在全局接触形式，这一特点从概念层面支撑了这部字典。第 3 节回顾接触结构的法丛 L 截面上的李括号。这个括号是辛几何中泊松括号的接触类比，并且等价于一个类似张量的对象；该对象类似于泊松张量，可以用 L 的规范代数丛和一阶喷射丛轻松描述。第 4 节介绍辛到接触字典的第一个版本。这里的核心对象是线丛 L的规范代数丛 DL，以及定义在 L 上的所谓*Atiyah* 形式，即 DL 上取值于 L 的李代数丛上链。根据这部字典，切丛对应于 DL，而微分形式对应于 Atiyah 形式。这部字典实际上有两个版本。第 5 节介绍第二个版本：接触结构等价于齐次辛结构。第一个版本的字典更偏代数，第二个版本则更偏几何，但两者都很有用。最后 3 节通过实例说明如何运用这部字典，在特定几何之间进行转换。第 6 节将这部字典应用于泊松结构，并得到雅可比结构。第 6 节也起到引介 Jacobi 几何的作用。最后，第 7 节和第 8 节分别将这部字典应用于复结构和 G-结构。后一个例子表明，实际上可能不止一部字典，具体取决于我们想要转换的特定几何。例如，除了辛到接触字典，还有一部辛几何到余辛几何词典，

余辛几何是辛几何另一种有趣的奇数维类比。

我们省略了大部分证明。详情可见所引用的参考文献，也可轻易推导得出。

致谢。F. P. 和 L. V. 是 INdAM 的 GNSAGA 成员。

2. Contact Structures

设 M 是一个光滑流形。在 M 上的**接触结构**是一种超平面分布$H \subseteq TM$，并具有最大程度不可积这一附加性质。这意味着可积性条件以最严重的方式失效。具体而言，给定一个分布$H \subseteq TM$，存在一个定义良好的**曲率2-形式**:

$$\kappa_H : \wedge^2 H \to TM/H, \quad (X, Y) \mapsto [X, Y] \bmod H. \tag{2.1}$$

2-形式 κ_H 当且仅当 H 不可积时才不为零。当 H 的余维为 1 时，法丛 $L := TM/H$ 是一个线丛，因此要求 κ_H 非退化是有意义的。

定义 2.1. M 上的**接触结构**是一个超平面分布 $H \subseteq TM$，满足 κ_H 非退化。

设 H 是 M上的接触结构。由 κ_H 的非退化条件，我们立即得到，对于某个 n，$\dim M = 2n + 1$，即 M 是奇数维的。局部而言， H 总是某个一形式 η的核，而 H 的非退化条件则转化为 $d\eta$ 在 H上非退化的条件，或者等价地 $\eta \wedge d\eta^n \neq 0$。通常假设一形式 η 全局存在，并称 η 为**接触一形式**。这等价于假设法线丛 $L := TM/H$ 全局平凡。每个接触流形都有一个二重接触覆盖，使其上存在全局接触一形式。然而，我们倾向于不对 L 作任何假设，因为我们认为这会掩盖一些重要的概念层面问题。此外，还有一些有趣的接触流形不存在全局接触一形式（见例 2.3）。

因此，设 (M, H) 是一个接触流形（不一定配备全局一形式），并将 $L := TM/H$ 记为法丛。我们仍可将 H 表示为某种形式对象的核。具体而言，令

$$\theta_H : TM \to L, \quad X \mapsto X \bmod H,$$

为典范投影。显然， $H = \ker \theta_H$。此外， θ_H可理解为一个取值于线丛 L的 1-形式。注意，给定任意线丛 L 以及任意 L 值的一形式 $\theta \in \Omega^1(M, L)$，当且仅当 θ处处非零时，核 $\ker \theta$才是一个超平面分布。在第 4 节中，我们将讨论 θ 需满足的其他条件，以保证 $\ker \theta$ 是一个接触分布。

例 2.2. 在坐标为 (x^i, u, p_i)，$i = 1, \dots, n$ 的 $\mathbb{R}^{2n+1}$ 上，考虑一形式

$$\eta_{\text{can}} = du - p_i dx^i.$$

H_{can} 的核 η_{can} 由以下向量场张成

$$\ldots, D_i := \frac{\partial}{\partial x^i} + p_i \frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial p_i}, \ldots, \quad i = 1, \ldots, n,$$

它是一种接触结构：**标准切触结构**。

例 2.3。 设 N 是一个光滑流形，其维数为 $N = n > 1$，并设

$$M = \mathrm{Gr}(N, n-1)$$

N 中超平面的格拉斯曼丛。等价地， $M = P(T^*N)$ 是 N 的射影化余切丛。记 π : $M \to N$ 为投影。流形 M 上典范地配备了线丛 $L \to M$，其定义为

$$L_\xi := T_{\pi(\xi)} N / \xi, \quad \xi \in M,$$

并且存在一个典范满射

$$\theta : TM \to L, \quad v \mapsto d\pi(v) \bmod \xi,$$

其中 $v \in T_\xi M$。 θ 的核 H 是 M 上的接触结构。将 M 解释为射影化余切丛时， L 是 $P(T^*M)$ 上典范丛 $O(-1)$ 的对偶。特别地，除非 $n = 2$，它永远不会是平凡的。

设 (M_1, H_1),(M_2, H_2) 为接触流形。将接触结构对应起来的微分同胚 Φ: $M_1 \to M_2$ 称为**切触同胚**。接触流形 (M, H) 的对称和无穷小对称定义显而易见。(M, H) 的无穷小对称也称为**切触向量场**。(M, H) 的切触向量场所成的李代数记作 $\mathfrak{X}(M, H)$。

定理 2.4 (达布引理)。 每个维数为 $2n+1$ 的接触流形都局部切触同胚于 $(\mathbb{R}^{2n+1}, H_{can})$。

正如我们在引言中提到的，接触流形可从多个方面理解为辛流形的奇数维类比。下文将讨论其中一些原因。实际上，第 3–5 节旨在为 Arnol'd 在引言中的陈述 (1.1) 赋予严谨的概念意义。

3. Jacobi Brackets and the Gauge Algebroid

我们首先说明，接触流形上自然附带着一个李代数，它在辛几何中所起的作用类似于（哈密顿）函数的泊松代数。我们先从一个

引理 3.1. 设(M, H) 是一个接触流形，且 θ_H: $TM \to L = TM/H$ 是相应的投影。其限制

$$\theta_H : \mathfrak{X}(M, H) \to \Gamma(L) \tag{3.1}$$

是一个向量空间同构（将切触向量场映射到法丛的截面L）。

证明。回顾一下，曲率形式 κ_H： $\wedge^2 H \to L$是非退化的。因此，它确定了（互为逆映射的）向量丛同构

$$\kappa_\flat : H \to H^* \otimes L, \quad \kappa^\sharp : H^* \otimes L \to H,$$

通过令 $\kappa_\flat(Y) := \kappa_H(Y, -)$。现在，设 $X \in \mathfrak{X}(M, H)$ 满足 $\theta_H(X) = 0$。这意味着 $X \in \Gamma(H)$，并且我们可以计算 $\kappa_\flat(X)$。对每一个 $Z \in \Gamma(H)$，我们有

$$\kappa_\flat(X)(Z) = \kappa_H(X, Z) = \theta_H([X, Z]) = 0,$$

其中我们用到了 $[X, Z] \in \Gamma(H)$（因为 X 是切触向量场，且 Z 是H的截面）。因此 $\kappa_\flat(X) = 0$，故 $X = 0$。这表明线性映射 (3.1) 是单射。关于满射性，设 $\lambda \in \Gamma(L)$。任取满足 $\theta_H(X) = \lambda$的向量场 $X \in \mathfrak{X}(M)$，并考虑映射

$$\varphi_X : \Gamma(H) \to \Gamma(L), \quad Y \mapsto \theta_H([X, Y]).$$

容易看出 φ_X 是 $C^\infty(M)$-线性的，因此它来自一个向量丛映射 $\varphi_X : H \to L$，即 $H^* \otimes L$ 的一个截面 φ_X。应用 $\kappa^\sharp$，我们得到一个向量场 $Y = \kappa^\sharp(\varphi_X) \in \Gamma(H)$。令 $X_\lambda = X - Y$。显然 $\theta_H(X_\lambda) = \lambda$。为了完成证明，只需证明 $X_\lambda \in \mathfrak{X}(M, H)$。换言之，我们必须证明，对每一个 $Z \in \Gamma(H)$，交换子 $[X_\lambda, Z]$ 仍在 H 中，即 $\theta_H([X_\lambda, Z]) = 0$。于是，计算

$$\theta_H([X_\lambda, Z]) = \theta_H([X, Z]) - \theta_H([Y, Z]) = \varphi_X(Z) - \kappa_H(Y, Z) = 0. \tag{3.2}$$

证明至此结束。 □

与截面 $\lambda \in \Gamma(L)$ 对应的切触向量场 X_λ 有时称为带有哈密顿截面 λ的**哈密顿向量场**。利用同构$\mathfrak{X}(M,\ H) \cong \Gamma(L)$，我们可以将李括号从 $\mathfrak{X}(M,\ H)$ 转移到 $\Gamma(L)$ 上。由此，我们在 $\Gamma(L)$ 上得到一个李括号 $\{-, -\}$。换言之

$$\{\lambda, \mu\} = \theta_H([X_\lambda, X_\mu])$$

或者，等价地，

$$X_{\{\lambda,\mu\}} = [X_\lambda, X_\mu]$$

对所有 $\lambda,\ \mu \in \Gamma(L)$。容易看出，李括号 $\{-, -\}$ 具有以下性质 y

$$\{\lambda, f\mu\} = X_\lambda(f)\mu + f\{\lambda, \mu\}$$

对所有 $f \in C^\infty(M)$ 以及所有 $\lambda,\ \mu \in \Gamma(L)$。括号 $\{-, -\}$ 称为接触流形 $(M,\ H)$ 的**Jacobi 括号**。

定义 3.2. 向量丛 $E \to M$ 的**导子** 是一个 $\mathbb{R}$-线性算子 $D : \Gamma(E) \to \Gamma(E)$，满足以下莱布尼茨法则：

$$D(fe) = X(f)e + fD(e),$$

对于某个必然唯一的向量场 $X \in \mathfrak{X}(M)$、所有 $f \in C^\infty(M)$ 以及所有 $e \in \Gamma(E)$。向量场 X 也记作 $\sigma(D)$，并称为 D 的**符号** 。

根据这一定义，Jacobi 括号 $\{-,-\}$ 对其中一个自变量、因而对两个自变量都是导子。对于每个截面 $\lambda \in \Gamma(L)$，导子 $\{\lambda,-\}$ 的符号是哈密顿向量场 X_λ。

向量丛 $E \to M$ 的导子是李代数丛 $\mathsf{D}E \Rightarrow M$ 的截面，有时称为 E 的**规范代数丛**或 **Atiyah 代数丛**。导子的李括号就是交换子，而锚映射 $\mathsf{D}E \to TM$ 是符号。

注 3.3。当 $E = L$ 是线丛时，任意一阶线性微分算子$\Gamma(L) \to \Gamma(L)$ 都是导子。因此在这种情况下，$\mathsf{D}L$ 是一阶喷射丛 J^1L 经 L 扭曲后的对偶模：

$$\mathsf{D}L \cong \mathrm{Hom}(\mathsf{J}^1L, L)$$

并且，对偶地，

$$\mathsf{J}^1L \cong \mathrm{Hom}(\mathsf{D}L, L).$$

例如，接触流形上的 Jacobi 括号 $\{-,-\}\colon \Gamma(L) \times \Gamma(L) \to \Gamma(L)$ 可视为一个反对称一阶双微分算子，或者等价地，视为一阶喷射丛 J^1L 上取值于 L 的 2-形式。我们将后一个 2-形式记作

$$J : \wedge^2 \mathsf{J}^1L \to L,$$

有时也称它为**Jacobi 张量**（因为它在辛几何中发挥着与泊松张量类似的作用）。

4. Atiyah Forms and the Dictionary

本节将利用上一节所述的规范代数丛，把接触结构改写成更接近辛几何的形式。为此，我们先讨论规范代数丛的一些基本性质。设 $E \to M$ 是一个向量丛，$\mathsf{D}E \Rightarrow M$ 是它的规范代数丛。我们首先注意到，$\mathsf{D}E$ 自然作用于 E：导子对 E 的截面的作用就是典范作用。$\mathsf{D}E$ 上的李代数丛结构与其对 E 的作用共同定义了一个作用于分次向量空间上的类 de Rham 微分 d_{D}

$$\Omega^\bullet_{\mathsf{D}} := \Gamma(\wedge^\bullet(\mathsf{D}E)^* \otimes E)$$

由 E值的、定义在 $\mathsf{D}E$上的交替形式构成。 k形式的微分

$$\omega : \wedge^k \mathsf{D}E \to E$$

定义如下：

$$\begin{aligned} d_{\mathsf{D}}\omega(D_1, \dots, D_{k+1}) = &\sum_{i=1}^{k+1} (-1)^{i+1} D_i(\omega(\dots, \hat{D}_i, \dots)) \\ &+ \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \omega([D_i, D_j], \dots, \hat{D}_i, \dots, \hat{D}_j, \dots) \end{aligned}$$

对所有 $D_1, \dots, D_{k+1} \in \Gamma(\mathsf{D}E)$，其中，按照惯例，带帽符号“ ˆ_”表示省略。上链复形 $(\Omega^\bullet_{\mathsf{D}}, d_{\mathsf{D}})$ 实际上是无挠的。注意到恒等映射 $\mathbb{I}\colon \Gamma(E) \to \Gamma(E)$ 是一个导子，即可看出这一点。直接计算可得，内积

$$\iota_{\mathbb{I}} : \Omega^\bullet_{\mathsf{D}} \to \Omega^{\bullet-1}_{\mathsf{D}}, \quad \omega \mapsto \iota_{\mathbb{I}}\omega = \omega(\mathbb{I}, -, \dots, -)$$

是 $(\Omega^\bullet_{\mathsf{D}}, d_{\mathsf{D}})$ 的一个收缩同伦。

现在，设 $E = L$ 是一个线丛。在这种情况下，$(\Omega^\bullet_{\mathsf{D}},\ d_{\mathsf{D}})$ 中的上链称为**Atiyah 形式**（在 E 上）。定义辛*Atiyah*形式是合理的。

定义 4.1. 一个**辛 Atiyah 形式**（或**结构**）在 L上是一个 Atiyah 2-形式$\omega:\ \wedge^2\mathsf{D}L \to L$，满足

(1) ω 是 d_{D}-闭的：$d_{\mathsf{D}}\omega = 0$；并且 (2) ω 是**非退化**的：内积 $\omega_\flat: \Gamma(\mathsf{D}L) \to \Gamma(\mathrm{Hom}(\mathsf{D}L,\ L)) = \Gamma(\mathsf{J}^1L), D \mapsto \iota_D\omega = \omega(D,\ -)$ 是一个同构。

配备辛 Atiyah 形式的线丛称为**辛 Atiyah 丛**。给定辛 Atiyah 丛 $(L_1,\ \omega_1)$，$(L_2,\ \omega_2)$，一个**辛Atiyah态射**$(L_1,\ \omega_1) \to (L_2,\ \omega_2)$ 是一个向量丛同构 $L_1 \cong L_2$，它将 ω_1 与 ω_2 对应起来。

定理 4.2。 接触流形与切触同胚范畴等价于辛 *Atiyah* 丛与辛*Atiyah*态射范畴。

证明（略述）。

从接触流形到辛 Atiyah 丛。 设 (M, H) 是一个接触流形。记 $L = TM/H$ 为法丛。我们将在 L 上构造一个辛 Atiyah 形式。投影 $\theta_H: TM \to L$ 可与符号映射 $\sigma: \mathsf{D}L \to TM$ 复合，得到一个 Atiyah 1-形式 $\Theta = \theta_H \circ \sigma$。取其微分，得到一个 d_{D}-闭的 Atiyah 2-形式 $\omega = d_{\mathsf{D}}\Theta$。$H$ 的极大非可积性现在转化为 ω 非退化，因此 ω 是 L 上的辛 Atiyah 形式，如所求。

从辛 Atiyah 丛到接触流形。 设 $(L \to M, \omega)$ 是一个辛 Atiyah 丛。由于 $d_{\mathsf{D}}\omega = 0$，且与恒等导子 $\mathbb{I}: \Gamma(L) \to \Gamma(L)$ 的内积是上链复形 $(\Omega^\bullet_{\mathsf{D}}, d_{\mathsf{D}})$ 的收缩同伦，我们得到 $\Theta := \iota_{\mathbb{I}}\omega$ 是 ω 的原函数，即 $\omega = d_{\mathsf{D}}\Theta$。由斜对称性，$\Theta(\mathbb{I}) = 0$。但是（在这个线丛情形下），导子 $\mathbb{I}$ 生成符号映射 $\sigma: \mathsf{D}L \to TM$ 的核，因此 Θ 下降为一个 L-值一形式 $\theta: TM \to L$（满足 $\Theta = \theta \circ \sigma$ 的唯一一形式）。令 $H = \ker\theta$。ω 的非退化性现在转化为 H 是一个接触结构。□

作为辛 Atiyah 丛语言的第一个应用，我们不加证明地陈述以下命题

命题 4.3. 设(M, H) 是一个接触流形，且$(L \to M, \omega)$ 是相应的辛 *Atiyah* 丛。其 *Jacobi* 张量

$$J: \wedge^2\mathsf{J}^1L \to L$$

是(M, H) 的辛 *Atiyah* 形式的逆

$$\omega: \wedge^2\mathsf{D}L \to L.$$

定理 4.2 指出，接触结构本质上与辛Atiyah形式相同。此外，结合命题 4.3，它提出了以下元数学原理，从更具概念性的框架阐释 Arnol'd 的论述：

原理 4.4 (辛到接触字典)。 辛几何（及相关几何）中的每一种自然构造／陈述，都可以转化为接触几何（及相关几何）中的类似构造／陈述。通过以下替换即可完成这种转化（这些替换构成了**辛到接触字典**）：

$$\begin{aligned} C^\infty(M) &\rightsquigarrow \Gamma(L) \\ TM &\rightsquigarrow \mathsf{D}L \\ T^*M &\rightsquigarrow \mathsf{J}^1L \end{aligned} \quad .$$

若将辛到接触字典应用于辛结构本身的定义，我们便得到辛 Atiyah 丛的定义，从而展示该字典在最简单情形下如何运作。在第 6–8 节中，我们将给出该字典的更多应用。

5. Homogeneous Symplectic Structures

辛到接触字典还有另一个常常有用的版本[7, 19, 25, 13] ，我们现在来讨论。我们已经知道，带有线丛同构的线丛在该字典中起着重要作用。在某些情形下，最好考虑更一般的态射，即仅逐纤维可逆的线丛映射。我们有如下简单的

命题 5.1. 线丛与逐纤维可逆的线丛映射所构成的范畴，等价于主 $\mathbb{R}^*$-丛与主丛映射所构成的范畴（此处 $\mathbb{R}^*$ 为非零实数的乘法李群）。

证明。这种等价性由以下显然的构造实现。对于每个线$\widetilde{\text{丛}}$ $L \to M$，我们考虑主 $\mathbb{R}^*$-丛 $\mathring{L} := L^* \smallsetminus 0$ （其中 $\mathbb{R}^*$-作用由逐纤维的标量乘法给出）。反过来，对于一个主 $\mathbb{R}^*$-丛 $P \to M$ ，我们考虑与 $\mathbb{R}^*$ 在一维向量空间 $\mathbb{R}$ 上的标准作用相对应的关联线丛。至于这些函子如何作用于态射，则留给读者验证。□

$\widetilde{\text{在}}$下文中，主 $\mathbb{R}^*$-丛 $\mathring{L}$ 也将被称为一个**齐次流形**。 $\mathbb{R}^*$-作用也记作 h。采用这一术语/记号，是因为$\widetilde{\text{这}}$样 h 便可以讨论 L上的齐次函数。也就是说，光滑函数$\widetilde{f} \in C^\infty(L)$ 若满足以下条件，则称其为**次数为** p 的齐次函数：

$$h_t^* f = t^p f, \quad \text{for all } t \in \mathbb{R}^*.$$

命题 5.1 表明，任何涉及线丛的自然构造都可以改写为使用齐次流形的形式。作为第一个例子，给定一个线丛$\widetilde{}$ $L \to M$ 及其相应的齐次流形 $\mathring{L}$，记 $\pi : \mathring{L} \to M$ 为投影，$\widetilde{}$并注意到截面 $\lambda \in \Gamma(L)$ 可以视为 L上的一个光滑函数，记作 $\widetilde{\lambda}$，定义为

$$\widetilde{\lambda}(\varepsilon) := \langle \varepsilon, \lambda_x \rangle,$$

~对所有 $\varepsilon \in L$，其中 $x = \pi(\varepsilon)$ 且 $\langle -, - \rangle : L^* \times_M L \to \mathbb{R}$ 是对偶配对。赋值~ $\lambda \mapsto \lambda$ 是 L 的截面与次数为~ ~1 的齐次函数之间的双射。类似地，对于 L的每个导子 D，都存在唯一的 L 上的向量场 D，使得

$$\widetilde{D(\lambda)} = \widetilde{D}\widetilde{\lambda},$$

~对所有 $\lambda \in \Gamma(L)$ 均成立。向量场 D 是 *0* 次齐次的，其含义是

$$h_t^* \widetilde{D} = \widetilde{D}, \quad \text{for all } t \in \mathbb{R}^*,$$

~并且映射 $D \mapsto D$ 是 L 的导子与 L上 0 次齐次向量~场之间的双射。最后，对于每个 Atiyah k-形式 $\omega \in \Omega^\bullet_{\mathsf{D}}$，都存在唯一的~微分 k-形式 $\widetilde{\omega}$，使得它定义在 L上，并且

$$\widetilde{\omega}(\widetilde{D}_1, \ldots, \widetilde{D}_k) = \omega(\widetilde{D_1, \ldots, D_k}),$$

对所有 D_1、.....、 $D_k \in \Gamma(\mathsf{D}L)$ 均成立。 k-形式 $\widetilde{\omega}$ 是 *1* 次齐次的，即

$$h_t^* \widetilde{\omega} = t\widetilde{\omega}, \quad \text{for all } t \in \mathbb{R}^*,$$

并且映射 $\omega \mapsto \widetilde{\omega}$ 是定义在 L 上的 Atiyah 形式与 L上 1 次齐次~微分形式之间的双射。现在我们可以陈述本节的主要结果了。我们先从一个

~**定义 5.2.** 齐次流形 L~上的**齐次辛结构**是定义在 L 上的辛形式 $\widetilde{\omega}$，并且其次数为 1。配备齐次辛结构的齐次流形称为**齐次辛流形**。

定理 5.3. 接触流形与切触同胚构成的范畴，等价于齐次辛流形与 $\mathbb{R}^*$-等变辛同胚构成的范畴。

证明（略述，另见 [7]）。

从接触流形到齐次辛流形。设(M, H)是一个接触流形，(L, ω)是相应的辛 Atiyah 丛。辛 Atiyah 结构~ ω 确定了 L上的一个次数为 1 的齐次 2-形式 $\widetilde{\omega}$。容易验证 $d\widetilde{\omega} = d_{\mathsf{D}}\omega = 0$, 即 $\widetilde{\omega}$ 是一个闭 2-形式。最后，由于 ω 非退化，~$\widetilde{\omega}$ 也非退化。换言之，它是 L上的一个齐次辛结构。

从齐次辛流形到接触流形。齐次辛结构 $\widetilde{\omega}$ 源自 L 上的 Atiyah 2-形式 ω。由于 $\widetilde{\omega}$ 是辛的， ω 也同样是辛的，即 (L, ω) 是一个辛 Atiyah 丛。最后，(L, ω) 对应于一个接触流形 (M, H)。□

~与接触流形 (M, H) 相关联的齐次辛流形 $(L, \widetilde{\omega})$ 有时称为 (M, H) 的**辛化**（或**辛锥**）。

~**命题 5.4**。 设 (M, H) 是一个接触流形，且 $(L, \widetilde{\omega})$ 是其辛化。*Jacobi* 括号

$$\{-, -\} : \Gamma(L) \times \Gamma(L) \to \Gamma(L)$$

$\widetilde{}$和 (M, H) 的泊松括号 $\{-,-\}_{\widetilde{\omega}}$和 $(L, \widetilde{\omega})$ 之间通过以下公式相关联

$$\{\widetilde{\lambda}, \tilde{\mu}\}_{\widetilde{\omega}} = \widetilde{\{\lambda, \mu\}}, \quad for\ all\ \lambda, \mu \in \Gamma(L).$$

等价地，*Jacobi* 张量

$$J : \wedge^2 \mathsf{J}^1 L \to L$$

与泊松张量

$$\widetilde{J} = \widetilde{\omega}^{-1} \in \Gamma(\wedge^2 T\widetilde{L})$$

满足以下关系

$$\langle \widetilde{J}, \widetilde{\psi} \wedge \widetilde{\chi} \rangle = \widetilde{\langle J, \psi \wedge \chi \rangle}, \quad for\ all\ \psi, \chi \in \Gamma(\mathsf{J}^1 L) = \Omega^1_{\mathsf{D}}.$$

定理 5.3 表明，接触结构本质上与齐次辛结构相同。此外，结合命题 5.4，它提出了以下新

原理 5.5 (辛到接触词典 2)。 辛几何（及相关几何）中的每一种自然构造／陈述，都可以转译为接触几何（及相关几何）中的类似构造／陈述。转译方法是将普通流形替换为齐次流形，并赋予其恰当的齐次性。

若将辛到接触词典 2 应用于辛流形本身的定义，我们便得到齐次辛流形的定义。词典 2 相对于词典 1 的优势在于，它使你处理的是通常结构（向量场、微分形式等），而非它们的 Atiyah 类比对象（导子、Atiyah 形式等）。词典 2 的劣势在于，必须针对每一种情形分别猜测正确的齐次性（尽管两部词典之间显而易见的关系在大多数情形下都能使人做出正确猜测）。

6. Jacobi bundles

我们在本节开头将辛到接触字典应用于泊松结构。我们首先采用该字典的第 1 版。若如此，我们便得到*Jacobi* 结构。

定义 6.1. 一个**Jacobi 丛** 是配备了**Jacobi 括号**的线丛 $L \to M$，即一个李括号

$$\{-,-\} : \Gamma(L) \times \Gamma(L) \to \Gamma(L)$$

它在每个自变量上还是一个导子。一个**雅可比流形** 是配备了 Jacobi 丛的流形。Jacobi 丛 $(L_1, \{-,-\}_1)$ 与 $(L_2, \{-,-\}_2)$ 之间的**雅可比映射** 是一个纤维逐点可逆线丛映射 F: $L_1 \to L_2$，使得对所有 $\lambda, \lambda' \in \Gamma(L_2)$ 都有 $\{F^*\lambda, F^*\lambda'\}_1 = F^*\{\lambda, \lambda'\}_2$。

采用字典 2 版本，我们得到的答案基本相同。更准确地说，如果将字典 2 应用于泊松流形，我们得到的就是齐次泊松流形。

定义 6.2. 一个**齐次泊松流形**是一个齐次流形 L 配备了一个**齐次泊松括号**，即一个泊松括号

$$\{-,-\}_{\widetilde{L}} : C^\infty(\widetilde{L}) \times C^\infty(\widetilde{L}) \to C^\infty(\widetilde{L})$$

其还具有 -1 次齐性:

$$h_t^*\{-,-\}_{\widetilde{L}} = t^{-1}\{-,-\}_{\widetilde{L}}, \quad \text{for all } t \in \mathbb{R}^*,$$

或者等价地， $\{-,-\}_{\widetilde{L}}$ 保持次数为 1 的齐次函数。

注意，定义 6.2 中关于 $\{-,-\}_{\widetilde{L}}$ 的齐次性条件实际上是一种有根据的猜测。例如，它受到以下内容的启发

定理 6.3。 雅可比流形与雅可比映射的范畴等价于齐次泊松流形与 $\mathbb{R}^*$-等变泊松映射的范畴。

证明（概要）。 我们不讨论态射。设 $L \to M$ 是一个线丛。对于每个 $\widetilde{\ }$ 上的雅可比结构 $\{-,-\}$，存在唯一的泊松结构 $\{-,-\}_{\widetilde{L}}$，使得

$$\{\widetilde{\lambda},\widetilde{\mu}\}_{\widetilde{L}} = \widetilde{\{\lambda,\mu\}}, \quad \text{for all } \lambda,\mu \in \Gamma(L).$$

泊松括号 $\{-,-\}_{\widetilde{L}}$ 是次数为 -1的齐次括号，而对应关系 $\{-,-\} \mapsto \{-,-\}_{\widetilde{L}}$ 建立了 L 上的雅可比结构与 L上次数为 -1 的齐次泊松$\widetilde{\ }$括号之间的双射。□

与雅可比流形对应的齐次泊松流形有时称为 **泊松化**。

雅可比流形的原始定义可追溯到 Kirillov 的研究，以及 Lichnerowicz 在20世纪70年代末独立开展的研究 [14, 15]。尽管雅可比结构和泊松结构（以其当时的形式）几乎同时被提出，数学界对 Poisson 几何的关注远多于对 Jacobi 几何的关注。为展示 Jacobi 几何广泛的应用领域，我们现在列举一些例子。接触几何 / Jacobi 几何也应用于含时力学和耗散系统力学 [6, 13] ，但我们不对此展开讨论。

例 6.4. 设 $(M, L, \{-,-\})$ 是一个雅可比流形。若 $L = \mathbb{R}_M := M \times \mathbb{R} \to M$ 是平凡线丛，则 $\Gamma(L) \cong C^\infty(M)$，且 Jacobi 括号 $\{-,-\}$ 必然具有如下形式

$$\{f,g\} = \Lambda(df,dg) + E(f)g - E(g)f \tag{6.1}$$

对于某个双向量 $\Lambda \in \Gamma(\wedge^2 TM)$ 和某个向量场 $E \in \mathfrak{X}(M)$，使得

$$[\Lambda,\Lambda] = 2E \wedge \Lambda, \quad \text{and} \quad [E,\Lambda] = 0, \tag{6.2}$$

其中 $[-,-]$ 是多向量的肖滕-尼延豪斯括号。反之，给定满足 (6.2) 的双向量 Λ 和向量场 E，由 (6.1) 给出的括号是 $\mathbb{R}_M$ 上的 Jacobi 括号。

例 6.5。 设 (M, H) 是一个接触流形，(L, ω) 是与之关联的辛 Atiyah 丛，且 $\{-,-\}$ 是由 H 诱导的 Jacobi 括号。那么， $\{-,-\}$ 是定义 6.1 意义下的 Jacobi 括号。反之，设 $(L, \{-,-\})$ 是一个 Jacobi 丛。与第 3.3 节完全相同，括号 $\{-,-\}$ 等价于一个 Jacobi 张量：

$$J : \wedge^2 J^1 L \to L.$$

容易看出，$(L, \{-,-\})$ 是接触流形 (M, H) 的 Jacobi 丛，当且仅当 J 非退化；此时，$J = \omega^{-1}$ 其中 ω 是由 H确定的辛 Atiyah 结构。特别地，$(M, L, \{-,-\})$ 的泊松化与 (M, H) 辛化所关联的泊松结构一致。

例 6.6。 设 (M, ω, η) 是一个局部共形辛 (lcs) 流形。回忆一下，这意味着 ω 是 M上的非退化 2-形式，而 η 是一个闭 1-形式，满足$d\omega = \eta \wedge \omega$。其括号为

$$\{f, g\} = \omega^{-1}(df - f\eta, dg - g\eta), \quad f, g \in C^\infty(M), \tag{6.3}$$

是 $\mathbb{R}_M$上的 Jacobi 括号。这个例子还有一个稍微更内在的版本，见 [22,附录 A]。具体而言，设 $L \to M$ 是一个线丛。 L 上的**lcs 结构** 是一个对 (ω, ∇)，由一个非退化的 L-值 2-形式 $\omega \in \Omega^2(M, L)$ 和 L中的一个平坦联络 ∇ 组成，满足 $d^\nabla \omega = 0$，其中 d^∇ 是联络微分。其括号为

$$\{\lambda, \mu\} = \omega^{-1}(d^\nabla \lambda, d^\nabla \mu), \quad \lambda, \mu \in \Gamma(L), \tag{6.4}$$

是 L 上的 Jacobi 括号。当 $L = \mathbb{R}_M$ 时， ω 是普通 2-形式，而 ∇ 完全由其联络 1-形式 η 确定。实际上， $\mathbb{R}_M$ 上的 lcs 结构与普通 lcs 结构相同，在这种情况下，公式 (6.3) 和 (6.4) 一致。

例 6.7. 设 $\mathfrak{g}$ 是一个（实的、有限维）李代数。其对偶 $\mathfrak{g}^*$ 配备了通常的李–泊松结构 $\widetilde{\{-,-\}}_{\mathfrak{g}^*}$。去心对偶 $L := \mathfrak{g}^* \smallsetminus 0$ 实际上是一个齐次泊松流形 $\widetilde{}$。也就是说，通常的非零实数标量乘法赋予 L 一个主 $\mathbb{R}^*$ 丛结构，其底空间为射影化对偶 $P(\mathfrak{g}^*)$；受限的李–泊松结构的次数为 -1，因而是齐次的。注意，与齐次流形 L 对应的线丛 $\widetilde{}$ 是典范丛在射影空间 $P(\mathfrak{g}^*)$ 上的对偶 $\mathcal{O}(-1) \to P(\mathfrak{g}^*)$。由此可知，任意（实的、有限维）李代数的射影化对偶上的典范丛的对偶是一个 Jacobi 丛。

例 6.8。 设 $\mathfrak{g}$ 是一个（实的、有限维）李代数， $\varphi \in \mathfrak{g}^*$ 是一个 1-余循环，即 φ 在换位子子代数 $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \subseteq \mathfrak{g}$ 上为零。那么 $\mathfrak{g}^*$ 可以赋予雅可比流形结构，其中 $L = \mathbb{R}_{\mathfrak{g}^*}$ 是平凡线丛，Jacobi 括号为

$$\{-,-\} : C^\infty(\mathfrak{g}^*) \times C^\infty(\mathfrak{g}^*) \to C^\infty(\mathfrak{g}^*)$$

由以下条件唯一确定：

$$\begin{aligned} \{\ell_v, \ell_w\} &= \ell_{[v,w]}, \\ \{\ell_v, c\} &= \varphi(v)c, \\ \{c, c'\} &= 0, \end{aligned}$$

对所有 $v, w \in \mathfrak{g}$ 和 c, c' 常数，其中，对 $v \in \mathfrak{g}$，我们用 ℓ_v 表示相应的定义在 $\mathfrak{g}^*$ 上的线性函数。

后两个例子可以推广到李代数丛。

例 6.9. b-接触结构是轻度奇异的接触结构，最近 Miranda 和 Oms 对其进行了研究 [17] (另见 [9])。具体而言， b-接触流形是一个 $(2n+1)$ 维的雅可比流形 $(M, L, \{-,-\})$，其 Jacobi 张量 J处处非退化，唯有在某个超曲面 $Z \subseteq M$ 上例外，并且在该处满足某种横截性条件。特别地， $M \smallsetminus Z$ 是一个接触流形（但接触结构沿着 Z存在“奇异性”）。

7. Odd Complex Structures

有趣的是，辛到接触字典也可以应用于一些表面上与辛几何相去甚远的情形。本节将其应用于复流形。我们从采用词典 1 开始。在这种情况下，我们得到如下

定义 7.1. 一个**复 Atiyah 丛** 是一个（实）线丛 $L \to M$，配备有**复 Atiyah 结构**，即一个纤维复结构

$$K : \mathsf{D}L \to \mathsf{D}L$$

在规范代数丛 $\mathsf{D}L \Rightarrow M$ 上满足一个附加的可积条件，即 K 的**李代数丛 Nijenhuis 挠率** $N_K : \wedge^2 \mathsf{D}L \to \mathsf{D}L$ 为零。这里

$$N_K(D_1, D_2) := [KD_1, KD_2] - [D_1, D_2] - K[KD_1, D_2] - K[D_1, KD_2],$$

对所有 D_1， $D_2 \in \Gamma(\mathsf{D}L)$。配备复 Atiyah 丛的流形是一个**奇复流形**。

采用词典 2，我们得到本质上相同的答案。更精确地说，若将词典 2 应用于复流形，我们得到齐次复流形。

定义 7.2. 一个**齐次复流形**是一个齐次流形 L，配备 $\widetilde{\ }$ 有**齐次复结构**，即一个普通复结构 K： $TL \to TL$，它还是次数为 0 的齐次结构:

$$h_t^* \widetilde{K} = \widetilde{K}, \quad \text{for all } t \in \mathbb{R}^*.$$

“奇复流形”这一术语源于这样一个事实：奇复流形必定是奇数维的。它们可以视为复流形（其实维数必定为偶数）的奇维类比物。我们有如下

定理 7.3。 奇复流形及奇全纯映射所构成的范畴，等价于齐次复流形及其间 $\mathbb{R}^*$-等变全纯映射所构成的范畴。

证明（略述）。设 $L \to M$ 是一个线丛。对于每个 L 上的复 Atiyah 结构 K，都存在唯一的 L 上的复结构 K，使得

$$\widetilde{KD} = \widetilde{K}\widetilde{D}, \quad \text{for all } D \in \Gamma(\mathsf{D}L).$$

~ ~复结构 K 是 0 次齐次的，而赋值 $K \mapsto K$ 建立了 L 上的复 Atiyah 结构与 L 上的 0 次齐次复结构 ~ 之间的一一对应。□

~ ~与奇复流形（M， L， K）对应的齐次复流形（L， K）称为（M， L， K）的**复锥**。

例 7.4。考虑圆柱 $M = \mathbb{R} \times \mathbb{C}^n$。平凡实线丛 $\mathbb{R}_M$ 具有一个典范的复 Atiyah 结构。具体而言，记（$z^i = x^i + \sqrt{-1}y^i$）为 $\mathbb{C}^n$ 上的标准复坐标，记 u为 M的 $\mathbb{R}$因子上的标准坐标。模 $\mathbf{D}\mathbb{R}_M$ 由恒等导子 $\mathbb{I}$ 和通常的偏导数张成

$$\frac{\partial}{\partial u}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^i}, \ldots, \frac{\partial}{\partial y^i}, \ldots$$

以及 re 上存在唯一的复 Atiyah 结构 $K_{can} : \mathbf{D}\mathbb{R}_M \to \mathbf{D}\mathbb{R}_M$，使得它在 $\mathbb{R}_M$ 上满足 tha t

$$K_{can}\mathbb{I} = \frac{\partial}{\partial u} \quad \text{and} \quad K_{can}\frac{\partial}{\partial x^i} = \frac{\partial}{\partial y^i}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

~ （M， $\mathbb{R}_M$， K_{can}）的复锥是复流形 ~ $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$ 中的开子集 M：$w \neq 0$，其复坐标为（$w = u + \sqrt{-1}v$， z^i）。M 上的齐次结构定义为 h_t（u， v， z^i）:=（u， tv， z^i）。

定理 7.5 (奇 Newlander-Nirenberg 定理 [18, 附录 A])。每个奇复流形局部上都具有($M = \mathbb{R} \times \mathbb{C}^n, \mathbb{R}_M, K_{can}$)的形式。

奇复流形在度量接触几何文献中早已出现，但名称不同：正规几乎接触流形 [4](请注意，不同论文中几乎接触结构 这一术语可能指代截然不同的对象)。回顾一下，**几乎接触流形** 是一个配备了**几乎接触结构**的流形 M，也就是说，它是由一个三元组 (Φ, ξ, η) 构成的，其中包括一个 $(1,1)$ 阶张量 Φ：$TM \to TM$、一个向量场$\xi \in \mathfrak{X}(M)$，以及一个一形式 $\eta \in \Omega^1(M)$，满足

$$\Phi^2 = -1 + \eta \otimes \xi, \quad \Phi(\xi) = 0, \quad \Phi^*(\eta) = 0, \quad \text{and} \quad \eta(\xi) = 1.$$

几乎接触流形在文献中被引入，作为几乎复流形的奇数维类比。事实上，一个几乎接触结构 (Φ, ξ, η) 在平凡线丛的规范代数丛 $\mathbf{D}\mathbb{R}_M$ 上定义了一个纤维复结构 $K_{(\Phi,\xi,\eta)}$，如下所示。$\mathbb{R}_M$ 的一个导子可视为一对 (X, r)，其中 X 是一个向量场，而 r是 M上的光滑函数。我们定义

$$K_{(\Phi,\xi,\eta)}(X, r) = \big(\Phi(X) - r\xi, \eta(X)\big).$$

纤维复结构 $K_{(\Phi,\xi,\eta)}$ 是复 Atiyah 结构（即其李代数丛 Nijenhuis 挠率消失），当且仅当 (Φ, ξ, η) 是一种正规几乎接触结构，即

$$N_\Phi + d\eta \otimes \xi = 0, \quad d\eta(\Phi -, -) + d\eta(-, \Phi -) = 0, \quad \mathcal{L}_\xi \Phi = 0, \quad \text{and} \quad \mathcal{L}_\xi \eta = 0.$$

此外，每个奇复流形（M， L， K）在局部上都具有这种形式，差别至多在于线丛同构。我们认为，奇复流形在概念上更适合作为

复流形的奇数维类比物（而且简单得多），比正规几乎接触流形更合适。

8. Homogeneous G-Structures

上一节中的例子表明，各种几何结构都可以通过辛到接触字典（版本 1 或版本 2）进行转换。因此，自然会想到，这本字典能否应用于一般的 G-结构。 [19] 对此问题给出了答案，也是本节的参考文献。事实证明，对于 G-结构，字典的第二个版本更为合适。大致而言，最终结论是：对于任意 G，我们都可以对一个 G-结构施加一系列齐次性条件，每个条件都会提供一种不同的字典 [19]。本节将按以下顺序展开。我们首先分析 $\mathbf{Sp}(q,\ \mathbb{R})$ 这一情形，即辛群。在此情形下， G- 结构就是几乎辛结构。但齐次辛流形本质上与接触流形相同。我们用纯粹的 G-结构语言来表述齐次性，然后将其公理化，从而得到一个适用于每个 G的一般定义。

设 $G \subseteq \mathbf{GL}(n,\mathbb{R})$ 为一般线性群的一个李子群，并设 N 为一个 n 维流形。回想，N 上的 G-结构是标架丛 $\mathbf{Fr}(N) \to N$ 的一个 G-约化，即一个 G-不变子丛 $P \subseteq \mathbf{Fr}(N)$，使得 $P \to N$ 在限制后的 G-作用下成为一个主 G-丛。我们所有的作用都将是右作用；$\mathbf{Fr}(N)$ 中位于点 $x \in N$ 之上的一点是一个线性同构 $\mathbb{R}^n \to T_xN$，并且 $\mathbf{GL}(n,\mathbb{R})$ 通过前复合作用于 $\mathbf{Fr}(N)$：对所有 $g \in GL(n,\mathbb{R})$ 以及所有标架 $\psi\colon\ \mathbb{R}^n \to T_xN$，作用 $\psi \cdot g$ 是标架 $\psi \circ g$，其中我们将 g 解释为一个线性同构 $g\colon\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$。现在，设 $n = 2k$，并设 $G = \mathbf{Sp}(k,\mathbb{R}) \subseteq GL(n,\mathbb{R})$ 为辛群。在这种情况下， G-结构$P \subseteq \mathbf{Fr}(N)$ 总是N 上某个几乎辛结构（即一个非退化 2-形式）的辛标架空间。反之，任何几乎辛结构的辛标架空间总是一个 $\mathbf{Sp}(k,\mathbb{R})$-结构。对于几乎复结构（此时 G 为复群）、黎曼结构（G为正交群）等，情况以类似的方式成立。

~回到 $G = \mathbf{Sp}(k,\mathbb{R})$ 的情形。假设 $N = L$ 是流形 M（维数为 $2k-1$）上的齐次流形，并且 $\widetilde{\omega}$ 是 N上的齐次辛结构。我们知道， $\widetilde{\omega}$对应于 M上的接触结构 H。固定一点 $x \in M$，并为 H 选取达布坐标 (x^i, u, p_i)。截面

$$\lambda := \frac{\partial}{\partial u} \bmod H \in \Gamma(L)$$

of 法丛 $L = TM/H$ 是一个局部生成元。现在很容易看出

$$\left(x^i, -\widetilde{\lambda}p_i, u, \widetilde{\lambda}\right)$$

是 $\widetilde{\omega}$ 的达布坐标，因此

$$\Psi = \left(\frac{\partial}{\partial x^i}, -\frac{\partial}{\partial \widetilde{\lambda}p_i}, \frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial \widetilde{\lambda}}\right) \tag{8.1}$$

是对应于 $\widetilde{\omega}$ 的 Sp($k,\mathbb{R}$)-结构 P 的截面。该截面满足以下齐次性：图表

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{2k+2} & \xrightarrow{\Psi_\varepsilon} & T_\varepsilon\widetilde{L} \\ {\scriptstyle A(t)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle d_\varepsilon h_t} \\ \mathbb{R}^{2k+2} & \xrightarrow{\Psi_{t\varepsilon}} & T_{t\varepsilon}\widetilde{L} \end{array}$$

对所有 $\varepsilon\in L$ 和所有 $t\in\mathbb{R}^*$ 均可交换，其中

$$A(t)=\begin{pmatrix} t\mathbb{I} & 0 \\ 0 & \mathbb{I}\end{pmatrix}. \tag{8.2}$$

不难验证，映射 $A:\mathbb{R}^*\to$ GL($n,\mathbb{R}$) 的取值属于 GL($n,\mathbb{R}$) 中 Sp($k,\mathbb{R}$) 的正规化子，并且 Sp($k,\mathbb{R}$)-结构 P 在 $\mathbb{R}^*$-作用 h^A 下保持不变，该作用定义在Fr(L) 上，具体为

$$h^A:\mathbb{R}^*\times \mathrm{Fr}(\widetilde{L})\to \mathrm{Fr}(\widetilde{L}),\quad h^A_t(\psi):=dh_t\circ\psi\circ A(t)^{-1}.$$

现在，我们的策略是将最后的观察作为公理。因此，设 L 为一个齐性流形（维数为 n），并设 Ψ 为标架丛 Fr(L) 的一个截面。显然，对于每个 $t\in\mathbb{R}^*$ 和 $\varepsilon\in L$，都存在唯一的可逆矩阵 $A_\Psi(t,\varepsilon)\in$ GL($n,\mathbb{R}$)，使得

$$d_\varepsilon h_t\circ\Psi_\varepsilon=\Psi_{t\varepsilon}\circ A_\Psi(t,\varepsilon).$$

命题 / 定义 8.1. 若标架丛 Fr(L) 的一个截面 Ψ 满足矩阵值映射 $A_\Psi=A_\Psi(t,\ \varepsilon)$ 与 ε 无关，则称该截面是**齐次的**。此时，$A_\Psi:\mathbb{R}^*\to$ GL($n,\ \mathbb{R}$) 是一个李群同态，称为 Ψ 的**次数**。

例 8.2. 坐标标架 (8.1) 是齐次的，其次数为 A，由 (8.2) 给出。

命题 / 定义 8.3. 设 $P\subseteq$ Fr(L) 是连通流形 M 上齐次流形 $\sim L$ 的一个 G-结构。以下条件等价：

(1) 在每个点附近，局部存在一个齐次截面 $\Psi_0\in\Gamma(P)$，使得 $A_{\Psi_0}:\mathbb{R}^*\to$ GL($n,\ \mathbb{R}$) 的取值落在 G 在 GL($n,\ \mathbb{R}$) 中的正规化子 $N(G)\subseteq$ GL($n,\ \mathbb{R}$) 中；(2) 在每个点附近，局部存在一个齐次截面 $\Psi_0\in\Gamma(P)$，使得 P 在 $\mathbb{R}^*$ 对 Fr($\widetilde{L}$) 的诱导作用 $h^{A_{\Psi_0}}$ 下保持不变；(3) 在每个点附近，局部存在一个齐次截面 $\Psi\in\Gamma(P)$，并且对于所有此类 Ψ，同态 $A_\Psi:\mathbb{R}^*\to$ GL($n,\ \mathbb{R}$) 的取值落在 $N(G)$ 中；(4) 在每个点附近，局部存在一个齐次截面 $\Psi\in\Gamma(P)$，并且对于所有此类 Ψ，G-结构 P 在 h^{A_Ψ} 下保持不变。

如果上述条件之一（因而全部条件）成立，我们就称 P 为一个**齐性G-结构**。此时，其复合

$$\alpha:\mathbb{R}^*\xrightarrow{A_\Psi} N(G)\to N(G)/G$$

与局部齐次截面 $\Psi\in\Gamma(P)$ 无关，称其为 P 的 **次数** 。我们还称 P 是 **α-齐次的**。

因此，给定李子群 $G \subseteq \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$，为了讨论齐次 G-结构，我们需要先对可能的次数进行分类，计算正规化子 $N(G)$ 和同态 $\alpha : \mathbb{R}^* \to N(G)/G$。本节最后通过三个例子来说明这一点。

例 8.4。令 $G = \mathrm{Sp}(k,\mathbb{R})$ 为辛群。在这种情况下，存在一个典范同构 $N(G)/G = N(\mathrm{Sp}(k,\mathbb{R}))/\mathrm{Sp}(k,\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^*$，并且有两个主要同态 $\alpha\colon \mathbb{R}^* \to N(\mathrm{Sp}(k,\mathbb{R}))/\mathrm{Sp}(k,\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^*$，即恒等同态 id 和平凡（常值）同态 1。可以证明，具有次数为 $\alpha = \mathrm{id}$ 的齐次 $\mathrm{Sp}(k,\mathbb{R})$-结构 P 的齐次流形，等价于带有一对 (H,Υ) 的流形 M，其中 H 是 M 上的超平面分布，而 Υ 是取值于 $L = TM/H$ 的 2-形式，定义在 M 上，并且 $\kappa_H - \Upsilon$ 非退化 [19, 节 5]。此外， P 是可积的 G-结构，当且仅当 $\Upsilon = 0$，因此 H 是接触结构。当 $\alpha = 1$ 时，我们得到一类称为（几乎）余辛结构的几何结构 [19, 第 6 节1]（例如，参见 [8] 中关于余辛几何的综述）。值得注意的是，余辛几何同样是辛几何在奇数维情形下的类比；事实上，存在一个与本文讨论的辛到接触字典非常相似的辛几何到余辛几何词典。

例 8.5. 令 $G = \mathrm{GL}(k,\mathbb{C}) \subseteq \mathrm{GL}(2k,\mathbb{R})$ 为复一般线性群（视为实一般线性群的李子群）。在这种情况下，存在一个典范同构$N(G)/G = N(\mathrm{GL}(k,\mathbb{C}))/\mathrm{GL}(k,\mathbb{C}) \cong \mathbb{Z}_2$。考虑常值同态 $0 : \mathbb{R}^* \to \mathbb{Z}_2$。可以证明，具有次数为 $\alpha = 0$ 的齐次 $\mathrm{GL}(k,\mathbb{C})$- 结构 P 的齐次流形，等价于近复 Atiyah 丛 (M,L,K) [19, 第 6 节2]。此外， P 是可积的 G-结构，当且仅当 K 是复结构。

例 8.6. 令 $G = \mathrm{O}(n,\mathbb{R})$ 为正交群。在这种情况下，存在一个典范同构 $N(G)/G = N(\mathrm{O}(n,\mathbb{R}))/\mathrm{O}(n,\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^*_+$，即正实数的乘法群。考虑同态 $\alpha : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*, r \mapsto |r|^{1/2}$。可以证明，具有次数为 α 的齐次 $\mathrm{O}(n,\mathbb{R})$-结构 P 的齐次流形，等价于配备了黎曼度量 g 和一形式 $\eta \in \Omega^1(M)$ [19, 第 6 节 3] 的流形 M。此外， P 是可积的 G- 结构，当且仅当 g,η 满足适当的偏微分方程组。当 $\eta = 0$ 时，该方程组归结为 g 具有等于 $1/4$ 的恒定截面曲率。

References

[1] Angulo C., Salazar M. A., 和 Sepe D.，乘法 Gray 稳定性，《*Journal of Symplectic Geometry*》**22**（2024年），153–195。arXiv:2109.08542 [math.SG].[2]Arnol'd V. I.，接触几何与波传播，《*Enseignement Mathématique*》**34**，日内瓦大学，日内瓦，1989年。[3] Blaga A.、Tortorella A. G. 和 Vizman C.，接触对偶对，《国际数学研究通知》**2020**（2020年），8818–8877。arXiv:1903.05250 [math.DG].[4] BlairD.E.，《接触流形与辛流形的黎曼几何》，《数学进展》**203**，Birkh¨auser Boston, Ltd.，波士顿（马萨诸塞州），2010年。[5] Boyer C. P. 和 Galicki K.，《Sasakian 几何》，牛津数学专著，牛津大学出版社，牛津，2008年。

[6] Bravetti A.、Cruz H.、Tapias D.，《接触哈密顿力学》，《物理学年鉴》376（2017），17–39。arXiv:1604.08266 [math-ph].[7] Bruce A. J.、Grabowska K. 和 Grabowski J.，关于接触几何与 Jacobi 几何的评述，SIGMA 13（2017），059，共22页。arXiv:1507.05405 [math.DG].[8] Cappelletti-Montano B.、De Nicola A.、Yudin I.，《数学物理评论》25（2103），1343002，共55页。arXiv:1305.3704 [math.DG].[9] Cardona R. 和 Oms C.，b-接触结构的存在性与分类，arXiv:2207.12055[math.SG].[10] Crainic M. 和 Salazar M. A.，雅可比结构与 Spencer 算子，《纯粹与应用数学杂志》103（2015），504–521。arXiv:1309.6156 [math.DG].[11] Crainic M. 和 Zhu C.，雅可比结构与泊松结构的可积性，《傅里叶研究所年刊》57（2007），1181–1216。arXiv:math/0403268 [math.DG].[12] Geiges H.，《接触拓扑导论》，剑桥高等数学研究丛书109，剑桥大学出版社，剑桥，2008年。[13] Grabowska K.、Grabowski J.，接触哈密顿力学：Tulczyjew 三元组，《理论与数学物理进展》28（2024年），599–654。arXiv:2209.03154 [math.SG].[14] Kirillov A.，局部李代数，《俄罗斯数学评论》31（1976），57–76。[15] Lichnerowicz A.，《Jacobi 流形及其相关李代数》，《纯粹与应用数学杂志》57（1978），453–488。[16] Marle C. M.，关于雅可比流形与 Jacobi 丛，载于：《辛几何、群胚与可积系统》（加利福尼亚州伯克利，1989），数学科学研究所出版物20，施普林格，纽约，1991年，第227–246页。[17] Miranda E. 和 Oms C.，带奇点的接触结构：从局部到整体，《几何与物理杂志》2023，104957，共22页。arXiv:1806.05638 [math.SG].[18] Schnitzer J. 和 Vitagliano L.，广义接触丛的局部结构，《国际数学研究通知》2020（2020），6871–6925。arXiv:1711.08310 [math.DG].[19] Tortorella A. G.、Yudilevich O. 和 Vitagliano L.，齐次 G-结构，《纯粹与应用数学年刊》199（2020年），2357–2380。arXiv:1907.06449 [math.DG].[20] Vitagliano L.，偏微分方程解的特征曲线、双特征曲线与几何奇点，《国际几何方法与现代物理杂志》11（2014），1460039。arXiv:1311.3477 [math.DG].[21] Vitagliano L.，多接触几何中的 L_∞-代数，《微分几何及其应用》39（2015），147–165。arXiv:1311.2751 [math.DG].[22] Vitagliano L.，$\mathbb{N}Q$-流形上的向量丛值微分形式，《太平洋数学杂志》283（2016），449–482。arXiv:1406.6256 [math.DG].[23] Vitagliano L. 和 Wade A.，广义接触丛，《巴黎科学院院刊》，I辑354（2016），313–317。arXiv:1507.03973 [math.DG].[24] Vitagliano L.，Dirac-Jacobi 丛，《Journal of Symplectic Geometry》16（2018），485–561。arXiv:1502.05420[math.DG].[25] Vitagliano L. 和 Wade A.，全纯 Jacobi 流形与全纯接触群胚，《数学杂志》294（2020），1181–1225。arXiv:1710.03300。

DipMat, Università degli Studi di Salerno, via Giovanni Paolo II n°123, 84084 Fisciano(SA), Italy.电子邮箱地址: fpugliese@unisa.itDipMat, Università degli Studi di Salerno, via Giovanni Paolo II n°123, 84084 Fisciano(SA), Italy.电子邮箱地址: sparano@unisa.itDipMat, Università degli Studi di Salerno, via Giovanni Paolo II n°123, 84084 Fisciano(SA), Italy.电子邮箱地址: lvitagliano@unisa.it