UUITP-32/25

arXiv:2601.22922v1 [hep-th] 30 Jan 2026

结补空间上的开弦

Sachin Chauhan [*1,3]，Tobias Ekholm [†1,2]，以及 Pietro Longhi [‡1,2,3]

[1]乌普萨拉大学几何与物理中心，*Box516*，*751 20*乌普萨拉，瑞典[2] 乌普萨拉大学数学系，*Box 480*，*75106* 乌普萨拉，瑞典[3]乌普萨拉大学物理与天文学系，*Box 516*，*751 20* 乌普萨拉，瑞典[4]米塔-莱夫勒研究所，*Aurav 17*，*182 60* 尤尔斯霍姆，瑞典

摘要

利用以 skein 为值的全纯曲线计数技术，我们为三维球面余切丛及解消合流形中的纤维化纽结的拉格朗日纽结补空间（即在补空间上绕行的拉格朗日 A-膜的 A模型开拓扑弦）的 skein值配分函数给出一个流环公式。对于环面纽结，我们证明余切丛中的配分函数局域化在两个或三个全纯环带上，并为解消合流形中的配分函数给出相应的广义箭图结构。

我们将该公式与增广曲线联系起来；增广曲线是纽结接触同调代数的表示簇，而该代数由其 Legendrian 余法丛的 Reeb 弦生成，其微分由连接 Reeb 弦词之间的全纯圆盘给出。该曲线可量子化为一个关于纽结的对称着色 HOMFLYPT 多项式生成函数的 q-差分方程，或者从几何上说，量子化为纽结余法丛的 $U(1)$-配分函数的 q-差分方程。对于 $(2, 2p+1)$-环面纽结，我们证明，经过变量替换后，纽结补空间的配分函数也满足这个 q-差分方程。这为由量子化增广多项式定义的 D-模给出了另一个几何定义的坐标图。

*sachin.chauhan@math.uu.se
†tobias.ekholm@math.uu.se
‡pietro.longhi@physics.uu.se

目录

1 引言 3

2 背景 – 曲线计数与拓扑弦 6

2.1 缀 skein 值曲线计数.62.2 缎带值基本环带.72.3 拓扑弦振幅与纽结不变量.92.4 增广簇作为 A-膜模空间.10

3 纤维化纽结补空间上的 skein 值分拆函数 11

3.1 纤维化纽结与流圈.123.2 环面纽结补空间上的流圈.123.3 $(2, 2p+1)$-环面纽结补空间上的流圈.13

4 skein中的配分函数 15

4.1 $\mathfrak{gl}_1$-skein配分函数：纤维化纽结补空间.154.1.1 $\mathfrak{gl}_1$ 的skein M_K .164.1.2 配边.174.1.3 一般 $\mathfrak{gl}_1$-公式.174.2 $(2, 2p+1)$-环面纽结的显式公式.184.3 箭图结构.194.4 增广曲线与拉格朗日余边.21

5 增广曲线的量子化及其与M理论的联系 22

5.1 量子化方案.235.2 去紧化即热带化.235.3 局部开弦模空间.265.3.1 Seifert 全局坐标.265.3.2 分支的定义.275.3.3 分支上的坐标.275.3.4 大体积开弦坐标.285.4 量子化方案的一致性.295.5 热带增广曲线的例子.305.5.1 平凡结.305.5.2 约化三叶结.305.5.3 八字结.30

6 $(2,\ 1)$ 环面纽结——扭结平凡结31

6.1 余法丛分支.316.2 补空间分支.326.3 增广曲线.336.4 内部分支.34

7 （2，3）环面纽结——三叶结 **35**
7.1 余法丛分支.357.2 补空间分支.367.3 增广曲线.377.4 外部对角分支.387.5 内部对角分支.38

8 关于.....的评论 ^与 Z纽结补空间的-不变量4 **1**
8.1 几何分支上的曲线计数与陈-西蒙斯理论.418.2 用傅里叶-拉普拉斯变换方法计算 F_K .41

箭图链接配边算子 **43**
A.1 一般构造.43A.2 示例：连接基本圆盘.44

B 扭曲霍普夫链环以及$(2,\ 2p+1)$环面纽结的箭图 **45**

1 引言

拓扑 A模型是弦理论的一个 BPS扇区，对应于映射到某个凯勒靶空间 X 中的世界面。通过引入 A膜边界条件，可以丰富这一模型；世界面可以在此终止，因此所计数的是从某个带边界的黎曼曲面到 X 的映射，并要求边界映射到一个拉格朗日 A膜。

这一主题在物理学中至今已有相当悠久的历史，其中利用对偶（大 N、3d-3d 等）与镜像对称的组合进行了显式计算，参见例如 [1–4]。然而，直到最近，变形不变的开格罗莫夫-威滕理论的一般表述仍然缺失；直到 [5] 证明：如果按照全纯曲线在拉格朗日边界条件的 HOMFLYPT skein 模中的取值，对具有马斯洛夫数为零的拉格朗日边界的辛卡拉比-丘三维流形中的全纯曲线进行计数，那么曲线计数在变形下保持不变。缀 skein 值曲线计数恢复了开弦配分函数，并解释了其与纽结接触同调中的增广簇之间的联系 [6] 及其量子化（对应的量子曲线），以及 A-膜上高秩局部系统的相应现象，参见 [7–10]。

在本文中，我们研究纤维化纽结 K 在 T^*S^3中的拉格朗日纽结补空间 $M_K = S^3 \setminus K$，并在过渡到 X中的解消合流形后，研究丛 $\mathcal{O}(-1) \oplus \mathcal{O}(-1) \to \mathbb{C}P^1$的全空间。用物理学语言来说，这意味着我们研究 X 中的开弦 A-模型，其中一个 A-膜在弱弦耦合下支撑于 M_K上。

我们证明，开弦配分函数可以通过局部化论证求出。设 M_K上的 β 为一般的闭无零点1-形式。设 β的闭合流线集合为 $\mathcal{F}$。若 $\gamma \in \mathcal{F}$将 γ 的作用量定义为 $\mathfrak{a}(\gamma) = \int_\gamma \beta$，那么对于任意 $\mathfrak{a}_0 > 0$，子集 $\{\gamma \in \mathcal{F}:\ \mathfrak{a}(\gamma) < \mathfrak{a}_0\}$ 都是有限的。将 M_K 在 T^*S^3 中沿 β平移，得到 $T^*S^3 \setminus S^3$ 中的一个拉格朗日子流形；对于每个流圈 $\gamma \in \mathcal{F}$，我们关联一个（近似）全纯环带 $A(\gamma)$，它在 S^3 与 M_K之间延伸，位于 γ之上。我们用 $\partial A(\gamma)$表示 $A(\gamma)$的两个边界分支，它们是 M_K 中的 γ 的副本，并按照 $A(\gamma)$的边界定向，即方向相反

固定 S^3 和 M_K上的定向与自旋结构。沿 γ 的流的线性化回归映射，连同定向与自旋结构，共同决定全纯环带 $A(\gamma)$的类型。有关

有四种类型 内容请参见第 3.1节；每种类型还对应一个取值于 skein 的分拆函数 n

$$\Psi_{\mathrm{ann}}^{(\sigma,\epsilon)} \in \mathrm{Sk}(S^1 \times D^2)^{\otimes 2}, \quad (\sigma,\epsilon) = (\pm 1, \pm 1),$$

见（2.4）。

若 γ 是 M_K 中的一个流圈，且 $\eta \in \mathrm{Sk}(S^1 \times D^2)^{\otimes 2}$，我们将 $\iota_{\partial A(\gamma)}(\eta)$ 记作在 $M_K \sqcup S^3$ 中通过在 $\partial A(\gamma)$ 周围的管状邻域内插入 η 而得到的 skein 元素。

定理 1.1。 设 M_K 是一个纤维化纽结 K 的纽结补，并带有固定的定向和自旋结构。在 M_K 上选取一个一般的处处非零 *1*-形式，并令 $\mathcal{F}$ 表示流圈的集合。 M_K 的 ***skein*** 值配分函数为

$$\mathsf{Z}_{(T^*S^3,M_K)} = \prod_{\gamma\in\mathcal{F}} \iota_{\partial A(\gamma)}(\Psi_{\mathrm{ann}}^{(\sigma(\gamma),\epsilon(\gamma))}), \tag{1.1}$$

其中，乘积的含义很简单：考虑 $M_K \sqcup S^3$ 的 ***skein*** 中所有插入的并集。注意，$\mathsf{Z}_{(T^*S^3,M_K)}$ 按作用量自然地带有滤过，并且在任意给定的作用量以下，$\mathsf{Z}_{(X,M_K)}$ 是一个 ***skein*** 元素，可表示为有限个链环的线性组合。

此外， M_K 在 X 中的 ***skein*** 值配分函数，是通过取 S^3 中 ***skein*** 元素的 ***HOMFLYPT*** 多项式得到的；将 H_{S^3} 记作 ***HOMFLYPT*** 多项式：

$$\mathsf{Z}_{(X,M_K)} = (H_{S^3} \otimes 1) \circ \mathsf{Z}_{(T^*S^3,M_K)}.$$

从物理上看， M_K 对应于在 M_K 上具有任意秩的酉规范群的陈-西蒙斯理论的路径积分，其中威尔逊线插入来自开弦的边界。在这方面，整个配分函数组织成来自（广义）环带的贡献这一事实意味着， M_K 可提升至 M 理论，其中 M5 膜堆叠于 M_K 和 S^3 上，并且 M2膜缠绕环带。开弦自由能的整性结构及相应的箭图结构都可以从这一图景中推导出来，参见注释4.3。

如果我们将范围限制在 M_K上的 $\mathfrak{gl}_1$ skein内，配分函数便具有更具体的形式。 M_K 的正$\mathfrak{gl}_1$ skein是由 $K \subset S^3$的子午线 μ 生成的幂级数环。只有对称表示中的威尔逊线会作出贡献，而 μ对应于沿子午线缠绕的基本表示的期望值。我们将$\psi_{(X,M_K)}$ 写作 M_K 在 X中的 $\mathfrak{gl}_1$ 配分函数。对于$\boldsymbol{\gamma} = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_m\} \subset \mathcal{F}$，令 $d_{\boldsymbol{\gamma}} =(d_1, \ldots\ldots, d_m)$表示一个重数向量，其中重数 d_j 对应于流圈 γ_j。对于 β， $\gamma \in \mathcal{F}$，令 $\Gamma_{\beta\gamma}$ 表示链接矩阵，其元素为 M_K中 β 与 γ之间的链接数。（这里我们将链接数定义为交数 $\Gamma_{\beta\gamma} = \sigma \cdot \beta$，其中 σ 是一个定向2链，满足 $\partial\sigma = \beta -(k \cdot \mu)$，其中 $[\beta] = k[\mu] \in H_1(M_K)$，而 $k \cdot \mu$ 表示 ∂M_K中 μ 的 k 个平行副本。）

推论 1.2。 若 X 是 S^3 的余切丛或解消合流形，且 M_K 是纤维化纽结 K 的补空间，则

$$\psi_{(X,M_K)}(a,q,\mu) = \sum_{d_1,\ldots,d_m\geq 0} H_{(d_1)^\vee,\ldots,(d_m)^\vee}(a,q)\, q^{\boldsymbol{d}^t\cdot\Gamma\cdot\boldsymbol{d}} \prod_{j=1}^{m} (\sigma_j\epsilon_j q^{\beta_j}\mu^{m_j})^{d_j} \tag{1.2}$$

其中 $H_{(d_1)^\vee,\ldots,(d_m)^\vee}(a,q)$ 是链环的 ***HOMFLYPT*** 多项式（未归一化，包含分母），其分支为 $\gamma \subset S^3$，对应于表示 $(d_j)^\vee$ 中 $d_\gamma =(d_1, \ldots, d_m)$ 的所有非零项。这里，$((d_j)^\vee, \sigma_j, \epsilon_j)$ 在椭圆流环的情形下为 $((d_j)^t, -1, +1)$，在双曲流环的情形下为 $((d_j) +1, +1)$，在负双曲流环的情形下为 $((d_j) +1, -1)$。参见 ***(2.6)*** 和 ***(4.11)***。幂 β_j 对应于流圈 γ_j 的自链接数，而 m_j 是其同调类。

对于一般的纤维化纽结，1.1）和（1.2）都是非常复杂的表达式。事实上， [11] 表明，对于非环面纽结的二桥结，每种链环类型都会作为纽结补空间中的一个闭合流环出现；对于其他纤维化纽结，流环的同伦类集合也同样是无限的。从增广多项式及其量子化的角度来看，这一点很有意思：它们为（1.2）中的配分函数给出多项式递推关系，尽管其中包含来自任意纽结的 HOMFLYPT 多项式的贡献，这表明存在大量抵消。

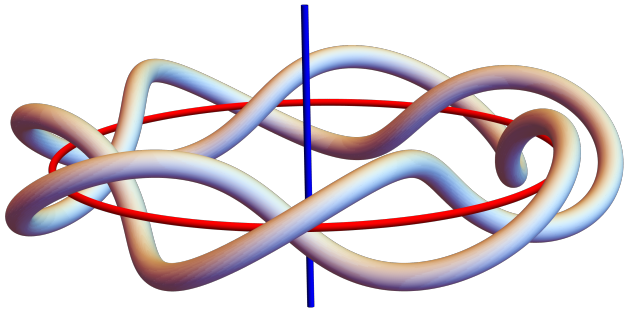


图 1：环面纽结 $T_{2,\ 2p+1}$ 其定向与原定向相反（负交叉），且 $p = 3$；图中还展示了由其流圈构成的霍普夫链环。

本文聚焦于较简单的负环面结情形，此时配分函数局域化在有限个流圈上。这为拉格朗日纽结补空间给出了明确的配分函数公式。对于负$(2,\ 2p+1)$环面结，参见命题 3.2；其中流圈之间还会发生进一步的抵消，剩余的圈构成一个霍普夫链环，见图1。由此可得纽结补空间配分函数的显式公式（4.13）。我们还将说明该公式如何导出配分函数的广义箭图形式（4.23），比较 [12, 13]。在第4.4节，我们利用显式公式给出$(2,\ 2p+1)$环面结的增广多项式的新推导，并验证所得的 $U(1)$-配分函数满足与纽结余法丛的开拓扑弦配分函数相同的递归关系（本质上相同，至多相差某个平移）。这为增广簇补空间分支上的波函数提供了直接的几何解释，该波函数与 Z-不变量有关， [14, 15], 参见第8节。

论文的组织结构

第 2 节汇集了有关缠结值曲线计数和开拓扑弦理论的实用背景材料。在第 3 节中，我们证明定理 1.1 ，并为其应用提供关键数据，即对一般环面纽结补空间上的流环作出明确描述。第 4 节详细介绍了纽结补空间配分函数的显式计算，并以 1.1 定理在 $(2, 2p+1)$-环面纽结情形中的完整应用为例。第 5 节讨论了由几何分支的曲线计数定义的增广簇的量子化方案。第 6 节和第 7节详细讨论了两个最简单的 $T_{2,2p+1}$ 纽结，分别对应于平凡结（$p = 0$）和三叶结（$p = 1$）。最后，第 8节讨论了我们的工作对 Z 纽结补空间不变量的意义。

2 背景——曲线计数与拓扑弦

本节简要回顾物理开放拓扑弦振幅与全纯曲线的几何计数之间的关系。我们先介绍几何学，然后给出物理学视角。在这一一般性讨论中，令 X 表示一个辛卡拉比-丘三维流形，并令 $L \subset X$ 表示一个马斯洛夫数为零的拉格朗日子流形。如果 X 是非紧的，我们假设它具有渐近接触边界 $Y = \partial X$；如果 L 是非紧的，则假设它具有渐近勒让德边界 $\Lambda = \partial L$、$\Lambda \subset Y$。

2.1 缀 skein 值曲线计数

从几何角度来看，我们考察全纯曲线的模空间 $\mathcal{M}$。全纯曲线是从带边界 ∂S 的黎曼曲面 S 映射到 (X, L) 的映射；对于 X上的近复结构 J，其微分处处为 J-复线性的：

$$u\colon (S, \partial S) \to (X, L), \quad \bar{\partial}_J u = \tfrac{1}{2}(du + J \circ du \circ j) = 0.$$

模空间 $\mathcal{M}$是通过将相差定义域上的全纯自同构前复合的解视为同一类而得到的。Calabi–Yau 条件和马斯洛零条件意味着，$\mathcal{M}$ 的形式维数等于零。如果 $L = \emptyset$ 定义格罗莫夫–威滕配分函数

$$Z_{\mathrm{GW}}(X) = \sum_{(u,S)\in\mathcal{M}} w(u,S) g_s^{-\chi(S)} t^{[u(S)]}, \tag{2.1}$$

其中，$w(u, S)$是 (u, S) 的有理（轨形）权重，$\chi(S)$是 S的欧拉示性数，而 $t^{[u(S)]}$是群环 $\mathbb{Q}[H_2(X)]$ 中由 $u(S)$表示的元素。为了使$\mathcal{M}$ 的形式维数等于其实际维数，必须在由添加结点曲线而紧化的所有复曲线的德利涅–芒福德空间上，对柯西–黎曼方程进行相容的微扰。构造这样的扰动方案是一项复杂的工作，目前已经发展出若干不同的方法，例如参见[16–18]。要说明计数与微扰的选择无关，可以观察到：在一族一般的 1 参数微扰下，解空间构成计数所涉及零维流形之间的一个定向一维配边，而这些零维流形正是该配边的边界。关键观察是，全纯曲线的格罗莫夫紧致性意味着，参数化模空间除去气泡现象（即曲线上形成结点）外是一个 1 维流形。结点形成的局部模型是 $\mathbb{C}^2$ 中由方程 $xy = \epsilon, \epsilon \in \mathbb{C}$ 给出的曲线族。这里的结点对应于 $\epsilon = 0$，因此它在模空间中具有实余维二，从而不会出现在一般的 1 参数族中。

现在转而考虑开曲线的情形。全纯曲线的模空间 $\mathcal{M}$的形式维数仍为零，因此，将同调替换为相对同调的（2.1）的直接类比是有意义的。然而，在开曲线情形下，它在形变中的行为有所不同。除上文讨论过的内部结点外，这里还有边界结点。边界结点分为两类：由 $xy = \epsilon$模型化的双曲型结点，以及由 $x^2 + y^2 = \epsilon$、$\epsilon \in \mathbb{R}$模型化的椭圆型结点。特别要注意，边界结点是余维一现象，因此在一般的单参数族中无法避开。在 [5] 中，人们发现，壁穿越现象可以对应于拉格朗日边界条件 L的 skein 模中的 HOMFLYPT skein 关系，$\mathrm{Sk}(L)$。这意味着，若按照曲线在 L 的 skein 模中的边界取值对曲线计数，则该计数在形变下保持不变。为使壁穿越模型适用，扰动必须相对于局部全纯面积足够小；这可通过保持零面积曲线不受扰动来实现。为了仍然

获得不变计数，必须排除零面积泡沫，而不能依赖通常的余维二论证；相关机制称为鬼泡沫审查，见 [19], 。其结果是得到一个形变不变量计数，它对零面积曲线采用非扰动方法，并具有如下形式

$$\mathsf{Z}_{(X,L)} = \sum_{(u,S)\in\mathcal{M}} w(u,S)\, t^{[u(S)]}\, z^{-\chi(S)}\, a^{\mathrm{lk}(u,L)}\, \langle u(\partial S)\rangle \;\in\; \mathrm{Sk}(L), \tag{2.2}$$

其中 skein 模为 L

$$\mathrm{Sk}(L) = \mathbb{Q}[a^{\pm}, z^{\pm}]\{\text{framed links in } L\}/\text{skein relations},$$

见 [5]。在 $L = \emptyset$ 的情况下，格罗莫夫-威滕计数可表示为

$$Z_{\mathrm{GW}}(X; g_s) = Z(X, \emptyset; z = e^{g_s/2} - e^{-g_s/2}),$$

见 [20]。

skein 计数视角还为合流形跃迁提供了如下几何机制。若 $L \subset T^*S^3$ 是一个拉格朗日子流形，满足 $L \cap S^3 = \emptyset$，那么我们可以考虑 skein 值曲线计数$Z(T^*S^3, L \cup S^3)$。随后，我们沿着 S^3 的管状邻域边界进行所谓的 SFT 拉伸，使复结构发生变形；该管状邻域相对于 L 与 S^3之间的距离而言非常小。一般来说，在无限 SFT 拉伸的极限下，全纯曲线会收敛为多个层级的全纯楼。这些全纯楼由 $\mathbb{R}\times\partial(T^*S^3)$ 中的全纯片段组成，它们在正、负无穷处通过 Reeb 轨道连接，并在 T^*S^3 中包含一个底层，其 Reeb 轨道仅出现在正端。在 S^3的情况下，负端的任何 Reeb 轨道都携带维数 ≤ -2，因此不可能存在底层；而在 L 与 S^3 之间拉伸的曲线会离开 S^3，最终完全位于 $\mathbb{R} \times \partial(T^*S^3)$ 中。因此，当拉伸充分大时，不再存在边界分支位于 S^3 上的曲线，而不变量曲线计数中 a的幂次的所有贡献都来自纤维球面的同调类。可以证明 [5]，当在通过移除零截面所得到的负端处粘接一个纤维球面为 $\mathbb{C}P^1$ 且面积足够小的解消合流形时，开放曲线计数不会改变。随后，依据变形不变性，它给出了任意面积下的曲线计数。这展示了合流形中的开放曲线计数与 Ooguri 和 Vafa 预言的 HOMFLYPT 多项式之间的关系 [4], ，见第 2.3 节。

2.2 缎带值基本环带

接下来，计算边界位于两个不同拉格朗日子流形上的零亏格曲线（及其全亏格多重覆盖）将十分重要。此时底层曲线是一个环带，我们需要考虑其所有多重覆盖的 skein 贡献。文献 [8] 通过为该贡献构造一个 skein 值递归并求解，确定了这一贡献。正如文中所述，配分函数的确切形式取决于定向和自旋结构的选择。这里，我们需要了解这种依赖关系的确切形式。

我们考虑 [8] 中所用的模型，并参阅该处下文所讨论的全纯曲线的细节。环境辛流形为$(T^*S^1) \times \mathbb{C}^2$。两个拉格朗日子流形分别是零截面 $L_0 = S^1 \times \mathbb{R}^2$，以及对 L_0作小平移与旋转后得到的 $L_1 = (S^1 \times \{\xi\}) \times e^{i\delta}\mathbb{R}^2$。在 L_0 上选取一个自旋结构和一个定向，并通过该小旋转将其传递到 L_1。递归关系随后由 $\partial\mathbb{C}^2 \approx S^3$中一维 Legendrian 霍普夫链环的全纯曲线所确定。对于 L_0 和 L_1，各有两个仅含一个正端点的圆盘，以及一个含一个正端点和两个负端点的圆盘，我们将后者称为三角形。

递归关系是通过找出所有可附着于这些三角形、且具有两个正穿孔的曲线而得到的。由此得到的琼斯多项式递归为，见 [10, 定理 6。2]

$$\mathsf{P}_{1,0}^{(L_0)} - \mathsf{P}_{0,0}^{(L_0)} + z\sum r(\mathsf{C}_k)\otimes \mathsf{C}_{-k} = 0, \tag{2.3}$$

其中，C_k 是实心环面中的曲线，其同调类为 k，并且具有 $k-1$ 个正交叉。

我们还考虑通过改变 L_0 上的定向和自旋结构，或改变 L_1上的定向和自旋结构而得到的其他类型的取值于琼斯多项式模的递归关系。改变其中一个拉格朗日子流形上的自旋结构，会使递归关系中的最后一项变为 $z\sum r(\mathsf{C}_k)\otimes \mathsf{C}_{-k} \mapsto z\sum(-1)^k r(\mathsf{C}_k)\otimes \mathsf{C}_{-k}$；接着，改变第二个拉格朗日子流形的定向，会使最后一项整体变号，并乘上 $r(\mathsf{C}_k)\mapsto r(\mathsf{C}_{-k})$。由此得到四个递归关系，其解取值于两个不交实心环面的 skein 模 $S^1\times D^2 \sqcup S^1\times D^2$，$\mathsf{Sk}(S^1\times D^2)^{\otimes 2}$:

$$\Psi_{\mathrm{ann}}^{(\sigma,\epsilon)} = \exp\left(\sigma\sum_{d\geq 1}\frac{\epsilon^d}{d}\mathsf{P}_d\otimes\mathsf{P}_{-d}\right), \tag{2.4}$$

其中，P_d 是$\mathsf{Sk}(S^1\times D^2)^{\pm}$的幂和生成元，在 $S^1\times D^2$ 的 HOMFLYPT skein 的正半部分或负半部分中，分别对应 $d>0$ 和 $d<0$，见 [21]；σ，$\epsilon\in\{-1,+1\}$ 是符号。这四种环带也可表示如下，见 [22]

$(\sigma,\ \epsilon)$	术语	取值于琼斯多项式模的配分函数
$(1,+1)$	玻色环带	$\sum_\lambda \mathsf{W}_{\lambda,\emptyset}\otimes\mathsf{W}_{\emptyset,\lambda}$
$(1,-1)$	费米环带	$\sum_\lambda(-1)^{\lvert\lambda\rvert}\mathsf{W}_{\lambda,\ \emptyset}\otimes\mathsf{W}_{\emptyset,\ \lambda}$
$(-1,\ +1)$	玻色反环带	$\sum_\lambda(-1)^{\lvert\lambda\rvert}\mathsf{W}_{\lambda,\emptyset}\otimes\mathsf{W}_{\emptyset,\lambda^t}$
$(-1,-1)$	费米反环带	$\sum_\lambda \mathsf{W}_{\lambda,\emptyset}\otimes\mathsf{W}_{\emptyset,\lambda^t}$

(2.5)

方程 (2.3) 的解是玻色反环带。反转一个拉格朗日子流形的定向对应于改变 σ，而改变自旋结构则对应于改变 ϵ。

在后续章节中，全纯环带将与流环相关联，即三维流形中与闭1-形式对偶的向量场的周期解。为了与上文研究的模型环带建立联系，取 L_0 作为流环所在的流形，并取 L_1 作为 T^*L_0中该闭1-形式小倍数的图像。于是，全纯环带可由这样一个环带很好地近似：沿闭1-形式将流环在 L_0 中平移后得到的环带。该环带的定向边界分支分别沿着流环在 L_0 中的部分，以及其在 L_1中的反向部分。

此类流环及其相关的环带已在 [23]中得到研究。一般流环分为三种不同类型，其区分依据是 $1-\psi$的行为，其中 ψ 是沿流环的回归映射的线性化：若两个特征值都在单位圆内或都在单位圆外，则为椭圆型；否则为双曲型或负双曲型。正双曲型与负双曲型的区别在于$\det(1-\psi)$的符号；从更几何的角度来说，区别在于回归映射是否交换两条稳定方向和两条不稳定方向（分别对应不交换与交换）。要从一种类型过渡到另一种类型，需要进行与自旋结构变化相对应的平凡化变换。对于我们的研究，确定哪些类型的环带对应哪些流环至关重要。为此请注意，模型环带拉格朗日子流形的正面表明，它对应于椭圆流环。如上所述，直接计算递归关系可知，相应的配分函数是玻色反环带的配分函数，见（2.3）。如[23], 所示，改变拉格朗日子流形的定向会使椭圆流环与双曲流环相互转变。因此，我们得到以下对应表，其中 o 和 s 分别表示拉格朗日子流形的定向和自旋结构

使用到基底的投影进行比较。

流圈	$(o,\ s)=(o,\ s)$	$(o,s)=(-o,s)$	$(o,s)=(o,-s)$	$(o,\ s)=(-o,\ -s)$
椭圆型	反玻色子	玻色	反费米子	费米
双曲型	玻色	反玻色子	费米	反费米子
负双曲	费米	反费米子	玻色	反玻色子

(2.6)

2.3 拓扑弦振幅与纽结不变量

量子纽结不变量（如着色HOMFLYPT 多项式）等同于 $SU(N)_k$陈-西蒙斯理论中打结威尔逊线的期望值。陈-西蒙斯理论为规范/弦对偶提供了一个典型例子：在三维流形 M上的真空配分函数和威尔逊环可观测量，可分别对偶地解释为 A-模型中的开拓扑弦振幅，其所在空间为T^*M [25]。

这种对偶性带来如下结论：由于拓扑 A模型对复结构的变化不敏感，其振幅不依赖于 M的大小；而 [26] 中有人提出， T^*S^3 上的开A模型与解消合流形上的闭弦对偶：将 S^3 收缩至零大小，并对由此产生的合流形奇点进行小解消，其中一条中心CP^1 对应于跃迁前与 S^3 链接的纤维 S^2。所得几何具有 B场通量 $t = iNg_s = \frac{2\pi i N}{N+k}$，它与 S^3上陈-西蒙斯理论的 't Hooft 耦合相一致。文献 [4]中找到了威尔逊环可观测量的对偶：链环 $K \subset S^3$ 的着色HOMFLYPT 多项式，对应于解消合流形 X 中满足边界条件位于拓扑为 $S^1 \times D^2$的拉格朗日纽结余法丛 L_K 上的弦的开弦振幅。

这种后续对偶性的数学表述在第2.1节中有所描述。它与开弦振幅的联系如下。通过一组位于 X 上的膜经几何跃迁（大 N 极限）得到的解消合流形中的开弦配分函数，其中 N 膜位于 S^3上，且 M 膜位于 L_K，其形式为

$$\psi_{(X,L_K)} = \sum_{\lambda} c_\lambda(a, g_s) s_\lambda(x_1, \ldots, x_M), \tag{2.7}$$

并且可由 skein值配分函数如下得到。

的拓扑是 L_K，其 HOMFLYPT skein $S^1 \times D^2$为，其具有基$\mathrm{Sk}(S^1 \times D^2)$ $\{\mathrm{W}_{\lambda,\ \mu}\}$ 由分拆对 λ 和 μ 标记，且它们是子午线算子 [21]的特征向量。终止于 、由从 经跃迁得到的全纯曲线仅沿负方向绕行 L_K 。因此，它们的边界取值于负子空间 $\mathrm{Sk}(S^1 \times D^2)$$\mathrm{Sk}(S^1 \times D^2)$ 中；该子空间由相对于正向 $S^1 \times \{0\}$具有非正同调类的曲线生成。子模 $\mathrm{Sk}(S^1 \times D^2)$的一个基由 $\{\mathrm{W}_\lambda\}$给出，其中 $\mathrm{W}_\lambda := \mathrm{W}_{\emptyset,\ \lambda^t}$。因此，

$$\mathrm{Z}_{L_K} = \sum_{\lambda} c_\lambda(a, z) \overline{\mathrm{W}}_\lambda, \tag{2.8}$$

其中，根据 Ooguri-Vafa 猜想的 skein 证明可知， $c_\lambda(a,\ z) = H_\lambda(K)$ 是 K 的 λ 着色HOMFLYPT 多项式（采用未约化归一化）。为得到开弦配分函数，我们作变量替换： $z = q - q^{-1}$ 与开弦参数之间的关系为 $q = e^{g_s/2}, a = e^t = q^N, a_{L_K} = q^M$， 以及 $\mathrm{W}_\lambda = s_{\lambda^t}(x_1,\ \ldots\ldots,\ x_M)$。这里，舒尔函数 $s_\lambda(x_1,\ \ldots\ldots,\ x_M)$ 给出了边界条件的坐标，这些边界条件对应于一组缠绕 L_K的 M 膜。

注 2.1（由椭圆流环得到的环带）。 我们此处所用的实心环面坐标约定与先前所用者略有不同。我们使用适配于通过小平移对邻近拉格朗日子流形进行等同的坐标。

在先前的工作中，标准约定是，交$L_K \cap S^3$ 中一个环带的环带分配函数为 $\sum_\lambda \mathsf{W}_{\lambda,\,\emptyset} \otimes \mathsf{W}_{\lambda,\,\emptyset}$。如第 2.2 节所解释的，在适配坐标下，我们得到的则是“反玻色子环带”

$$\Psi_{\mathrm{ann}}^{(-1,+1)} = \sum_{\lambda} (-1)^{|\lambda|} \mathsf{W}_{\lambda,\emptyset}^{(S^3)} \otimes \mathsf{W}_{\emptyset,\lambda^t}^{(L_K)}, \tag{2.9}$$

我们看到，标准约定可由适配坐标通过反转中心 S^1 的定向并反转 L_K的定向得到。

2.4 增广簇作为 A-膜模空间

本节将考察增广簇及其与 A-膜物理模空间的关系。增广簇中某些渐近区域对应于开弦模空间中的“大体积”分支；人们认为这些区域编码了边界位于 T^*S^3 中的拉格朗日子流形 L 上的全纯圆盘计数（通常并非所有渐近区域都具有这种解释）。这里我们将讨论不同分支量子化之间的相容性。

我们回顾增广簇的定义。纽结$K \subset S^3$ 的Legendrian 余法丛 $\Lambda_K \subset ST^*S^3$ 是其拉格朗日法丛 $L_K \subset T^*S^3$的理想边界。纽结接触同调是切卡诺夫-埃利亚什贝格微分分次代数 $CE^*(\Lambda_K)$，其生成元为Reeb弦，微分则对边界位于$\mathbb{R} \times \Lambda_K$ [27]上的$\mathbb{R} \times ST^*S^3$ 族带穿孔全纯圆盘进行计数。切卡诺夫-埃利亚什贝格微分分次代数的系数取自$\mathbb{C}[x^{\pm}, y^{\pm}]$，并将其视为 Λ_K第一同调的群环。 K 的增广簇是 $CE^*(\Lambda_K)$的表示簇。它由增广多项式 $A_K(x,y) = 0$定义。若 L 是解消合流形中 Λ_K 的拉格朗日填充，那么 L 的圆盘势给出增广曲线的一个局部分支。例如，余法丛 L_K 在拓扑上填充了 y-圈；若 $W_K(x)$是 L_K 的圆盘势，那么

$$A_K(x, e^{\frac{\partial W_K}{\partial \log x}}) = 0.$$

圆盘势是 $U(1)$-skein 值配分函数的半经典极限。从这一视角来看，人们预期存在一个算子值提升 $\hat{} A_K(\hat{} x, \hat{} y)$，它会湮灭 $U(1)$-配分函数

$$Z_{L_K}^{U(1)} = \sum_d H_{(d)}(K; (a,q)) x^d,$$

其系数是 K 的对称着色 HOMFLYPT 多项式。文献 [28] 证明了，每个纽结都存在这样的算子多项式。

从物理学的角度来看，自然可以将增广簇视为 A-膜的模空间，具体如下。在开弦模数的大体积极限下，也就是说，在所有开弦瞬子的面积都很大的情况下，拉格朗日子流形 [25] 上的拉格朗日子流形 A-膜可用局部系统建模。余法丛拉格朗日子流形 L_K 上的 A-膜属于这一类。当局部系统为阿贝尔（秩 1）时，这类膜形成复一参数族，在局部由 L_K 的实值模数和局部系统的周期模数控制（回顾 $b_1(L_K) = 1$）。

改变几何模量会改变曲线的面积，而改变周期模数则会改变它们的边界整体化。在大体积区域内进行小幅微扰，不会改变整体配分函数，这是因为配分函数在形变下具有拓扑不变性。然而，膜模量发生有限变化时，可能会探测到模空间中的某些区域；在那里，世界面瞬子的面积较小，且以拉格朗日环上的局部系统来描述膜的方式不那么准确。

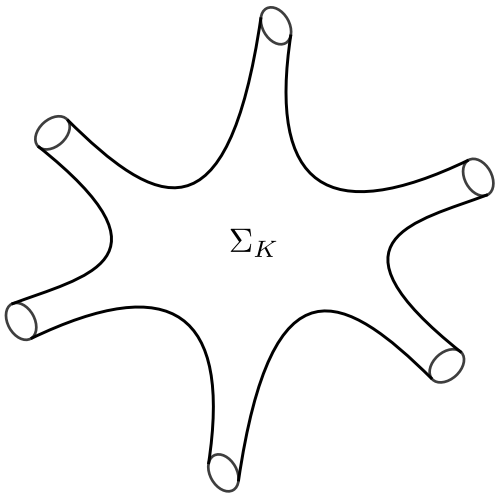


图 2：增广曲线具有多个与穿孔相对应的大体积区域。

关于秩为 1 的余法丛膜模空间的全局描述 A-膜在 [6], 中被提出，并将其认定为纽结接触同调的增广簇 [27]。增广曲线有若干渐近区域，对应于 $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$ 中的穿孔，见图 2。在下文第 5.3 节定义的恰当开弦模中，这些渐近区域分别对应一个大体积相。虽然尚不清楚每个渐近区域是否都能解释为几何 A-膜（即某个带有局部系统的拉格朗日子流形）模空间的一个图册，但仍然可以定义与每个渐近区域相关的曲线计数的形式对应物 [10,29]。

对于秩一局部系统，在标记为 α 的大体积相中的全属曲线计数通过开弦配分函数 ψ_α 定义了 A_K 的某种 ˆ量子化，即一个 q-差分算子$A_{K,\ \alpha} \in \mathbf{Z}[\hat{}x,\ \ \hat{}y,\ \ a]$，其特征为

$$\hat{A}_{K,\alpha} \cdot \psi_\alpha = 0\,. \tag{2.10}$$

A_K 的量子化可能取决于分支 α 的选择，如 [10]所示。这种依赖性很弱，对应于辅助几何数据的变化。下文研究与纽结补相对应的增广簇的分支时，我们将看到与此相应的情形。

3 纤维化纽结补空间上的 skein 值配分函数

本节首先证明定理 1.1 ，该定理用流环来表示纤维化纽结补空间的 skein 值配分函数。随后，我们确定环面结补空间的流环。

3.1 纤维化纽结与流环

设 $K \subset S^3$ 是一个纤维化纽结。这意味着存在一个纤维化 $\pi\colon S^3 \setminus K \to S^1$。设 θ 是 S^1 上的一个坐标，并令 $\alpha = \pi^* d\theta$，则 α 是 1-形式，在 $S^3 \setminus K$ 上处处不为零。经过小幅扰动后，α 具有一组离散的流圈，并且在任意给定作用量以下只有有限多个。此外，这些流圈具有如下泛性。回顾流圈与全纯环带之间的对应关系，参见 2.6。

定理 *1.1* 的证明。令 α 表示用于平移 $K \subset S^3$ 在 T^*S^3 中的补空间的一般位置 1-形式，并考虑缩放后的 1-形式 $\epsilon\alpha$。考虑 T^*S^3 中的全纯曲线，其边界位于 $S^3 \cup M_K$，且边界 γ 位于 M_K，满足 $\int_\gamma \alpha < \mathfrak{a}$ 对某个 $\mathfrak{a} > 0$ 成立。

我们使用流图与全纯曲线之间的对应关系。首先，[30, 引理 A。3] 表明，任意作用量为 $\leq \epsilon\mathfrak{a}$ 的全纯曲线序列都会收敛到一个流图。其次，由于 $M_K \subset T^*S^3$ 是 S^3 上的图像（且只有一层），有限能量流图只能是流环。因此，所有全纯曲线都是基本环带的多重覆盖。此外，根据 [23, 引理 3。5] 横截流环对应于横截环带。在以其边界的管状邻域为管状邻域的实心环面之 skein 中，刚性环带的所有多重覆盖所作的贡献已在 [8], 中计算；另见 [10, 第 6 节。2]定理得证。

□

由于 S^3 的 skein 模等于 $\mathbb{Q}[a^{\pm}, q^{\pm}]$，我们可以将 S^3 定理 1.1中的链环分支替换为多项式。这便得到 M_K 的 skein 值曲线计数配分函数的如下表达式。令 $\mathsf{W}_\lambda^{(\gamma)} \in \mathsf{Sk}(M_K)$ 表示将 $\mathsf{W}_\lambda \in \mathsf{Sk}(S^1 \times D^2)$ 插入流圈 $\gamma \subset M_K$ 的邻域中，令 $\mathsf{W}^{(\gamma_1)}{}_{\lambda_1} \cdots \mathsf{W}^{(\gamma_m)}{}_{\lambda_m}$ 表示沿所有流圈同时进行的插入。skein 值配分函数由以下显式公式给出

$$\begin{aligned} \Psi_{(T^*S^3, M_K)}(a, q, \mu) &= \prod_{\gamma \in \Gamma} \iota_{\partial A(\gamma)}(\Psi_{\mathrm{ann}}^{(\sigma(\gamma), \epsilon(\gamma))}) \\ &= \sum_{\lambda_1, \ldots, \lambda_m} \prod_{j=1}^{m} (\epsilon_j \, \sigma_j)^{|\lambda_j|} \, H_{\lambda_1^\vee, \ldots, \lambda_m^\vee}(a, q) \, \mathsf{W}_{\lambda_1}^{(\gamma_1)} \ldots \mathsf{W}_{\lambda_m}^{(\gamma_m)} \end{aligned} \tag{3.1}$$

其中，$\lambda_j^\vee$ 是由第 j 个环带的类型决定的分拆，而该类型又由流圈的类型决定。

3.2 环面纽结补空间上的流环

令 $(p,\ q)$ 为互素整数，并考虑一个 $T_{p,\ q}$ 环面纽结。补空间 $S^3 \setminus T_{p,\ q}$ 具有一个众所周知的 Seifert 纤维化，我们将利用它来寻找流圈。要了解这个 Seifert 纤维化，考虑霍普夫纤维化 $\pi\colon\ S^3 \to S^2$，以及 S^2 上由纬线圆构成、并在极点处退化的奇异叶状结构。纬线叶状结构的原像是 S^3 上由环面构成的叶状结构，其中有两条构成霍普夫链环的分支的一维叶，它们是极点的原像。每个环面都由 $T_{p,\ q}$ 环面纽结叶化，其叶空间为 S^1；纤维极限为一条曲线，它绕霍普夫链环的一个分支 p 圈，绕另一个分支 q 圈。移除一个 $T_{p,\ q}$-纤维的邻域后，我们发现补空间纤维化在一个带有两个奇异纤维的圆盘上。

命题 3.1。 设 $K = T_{p,\ q}$。在 $M_K = S^3 \setminus K$ 上的补空间中，存在一个处处非零的 *1*-形式，$(p,\ q)$-环面纽结恰有三个基本流圈：环面纽结的两条辫轴以及环面纽结本身。对于 S^3 的自旋结构与定向在 M_K 上的拉回，辫轴的流圈均为椭圆型并支撑反玻色环带，而环面纽结的流圈为双曲型并支撑玻色环带，见 (2.6)。

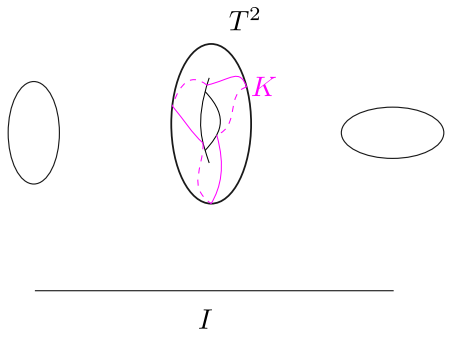
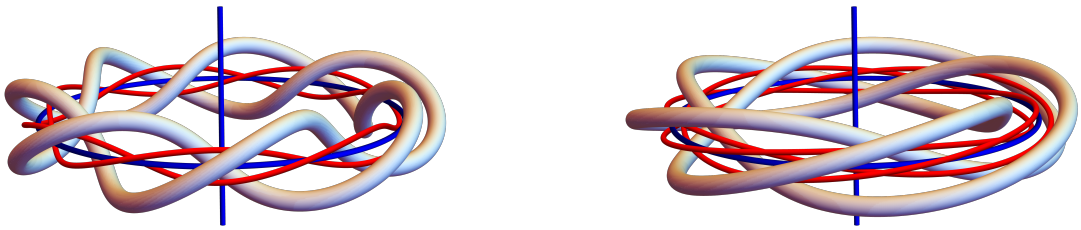


图 3：三维球面的二维环面纤维化，其中包含一个环面纽结。

证明。 用基底上的一个莫尔斯函数沿纤维扰动纤维化 $M_K \to D^2$ 对应的 1-形式。该莫尔斯函数在两个奇异纤维处各有一个极小值，在一般纤维处有一个鞍点，并且沿边界的梯度向外。临界点对应于流圈。流圈的特征显而易见。

□



(a) (b)

图 4：环面结补空间的示例，分别为$T_{2,\ 7}$ 和 $T_{3,\ 5}$，以及对应的莫尔斯流环。蓝色流环是莫尔斯函数的椭圆型临界点（极小值），红色流环是双曲型临界点（鞍点）。

3.3 (2, $2p+1$)-环面纽结补空间上的流环

对于 (2, $2p+1$)-环面纽结，流环结构可以进一步简化如下。

命题 3.2. 设 $K = T_{(2,2p+1)}$。则 M_K 存在一个具有两个基本流圈的 *1*-形式：一个次数为2 的椭圆流环，以及一个次数为 $2p+1$的负双曲型流环。相应的环带为：次数为2 的流环对应一个玻色反环带，$2p+1$) 流环对应一个费米环带，二者构成一个负霍普夫链环。

证明。 我们使用命题 3.1中所述的扰动莫尔斯函数。塞弗特曲面 Σ 是一个分支覆盖，其次数为 $2(2p+1)$-覆盖 π: $\Sigma \to D$ 圆盘 D 有两个分歧点 ζ_1，其分歧指数为 2，另有 ζ_2 个指数为 $2p+1$ 的分歧点。前者在 Σ 上提升为 $2p+1$ 个塞弗特曲面与图 4 中的水平椭圆型流环的交，而后者提升为 2 个与垂直椭圆型流环的交。定义在 Σ 上的莫尔斯函数是由定义在 D 上的莫尔斯函数拉回而得，后者在 ζ_1 和 ζ_2处有两个极小值，并有一个鞍点

位于正则点 ζ。临界点的原像（即拉回函数的临界点）记作如下：

$$\begin{aligned}\pi^{-1}(\zeta_1) &= \{\zeta_1^{(1)}, \zeta_1^{(2)}, \ldots, \zeta_1^{(2p)}, \zeta_1^{(2p+1)}\},\\ \pi^{-1}(\zeta_2) &= \{\zeta_2^{(1)}, \zeta_2^{(2)}\},\\ \pi^{-1}(\zeta) &= \{\zeta^{(1)}, \zeta^{(2)}, \ldots, \zeta^{(2p+1)}, \zeta^{(2p+2)}, \ldots, \zeta^{(4p+2)}\}.\end{aligned} \tag{3.2}$$

让我们将鞍点 ζ 移得非常靠近 ζ_1。那么，小圆盘 Δ 在 ζ_1 周围的原像由$2p+1$ 个小圆盘 $\Delta^{(k)} \subset \Sigma$、$k = 1$、.....、 $2p+1$组成，我们选择记号使得

$$\{\zeta_1^{(k)}, \zeta^{(k)}, \zeta^{(k+2p+1)}\} \subset \Delta^{(k)}, \tag{3.3}$$

使得回归映射将 $\Delta^{(k)}$ 映到 $\Delta^{(k+1)}$，其中 $\mathbf{1}$ 与 $2p+2$ 视为同一对象；并且使得 $\zeta^{(k)}$ 的不稳定流形有一条流线与 $\zeta_1^{(k)}$ 相连，另一条与 $\zeta_2^{(1)}$ 相连； $\zeta^{(k+2p+1)}$ 的不稳定流形也有一条流线与 $\zeta_1^{(k)}$ 相连，但另一条与 $\zeta_2^{(2)}$ 相连。注意，按照这种记号， π^{-1}（ζ）上的回归映射为

$$\zeta^{(k)} \mapsto \begin{cases}\zeta^{(k+1+2p+1)}, & \text{if } 1 \le k < 2p+1,\\ \zeta^{(2p+2)}, & \text{if } k = 2p+1,\\ \zeta^{(k+1-(2p+1))} & \text{if } 2p+2 \le k < 4p+2,\\ \zeta^{(1)}, & \text{if } k = 4p+2.\end{cases} \tag{3.4}$$

注意，沿着 Σ 穿过边界 $\partial\Delta^{(k)}$ 的流的分支有四个一般位置相切点。因此，我们可以重新定义 $\Delta^{(k)}$ 内部的流，使其成为一个位于中心的单一鞍点 $\zeta^{(k)}$，其不稳定流形分支分别连接到 $\zeta_2^{(1)}$ 和 $\zeta_2^{(2)}$。于是，回归映射将 $\zeta^{(k)}$ 映到 $\zeta^{(k+1)}$，并将流线$\zeta^{(k)} \to \zeta_2^{(1)}$ （分别为 $\zeta^{(k)} \to \zeta_2^{(2)}$ ）映到流线 $\zeta^{(k+1)} \to \zeta_2^{(2)}$ （分别映到 $\zeta^{(k+1)} \to \zeta_2^{(1)}$ ）。

由此得到的流仅有两个流环。其中一个是原来的二度椭圆流环，其对应的反玻色环带对应于 ζ_2。另一个是度数为 $2p+1$ 的流环，对应于一个仍位于 ζ的鞍点。由于回归映射会置换其稳定（或不稳定）流形，因此这是一个负双曲型流环。因此，根据（2.6），对应的环带是费米环带。

□

命题 3.2 关于 $T_{2,\ 7}$ 中的流环示例如图 5所示。

注记 3.3 （流环的并合现象）。 命题 3.2 的证明表明，一般而言，证明中那种一个双曲流环绕椭圆流环两圈的情形，与单个负双曲型流环变形等价。译成全纯环带的语言，这意味着：若定向和自旋结构一致，那么一个反玻色环带与一个绕其两圈的玻色环带，等价于一个绕行一圈的费米环带。改变定向和自旋结构后，对其他环带也有类似关系。反转定向可得：一个玻色环带与一个绕行两圈的反玻色环带，等价于一个费米反环带。改变自旋结构可得：一个费米反环带与一个绕行两圈的费米环带，等价于一个玻色环带。同时改变定向和自旋结构可得：一个费米环带与一个绕行两圈的费米反环带，等价于一个反玻色环带。

注 3.4。 可以使用亚历山大多项式的流环公式，参见例如 *[23]*, ，可知 $(2, 2p+1)$- 环面纽结是唯一在其补空间中仅有两个流环的环面纽结。

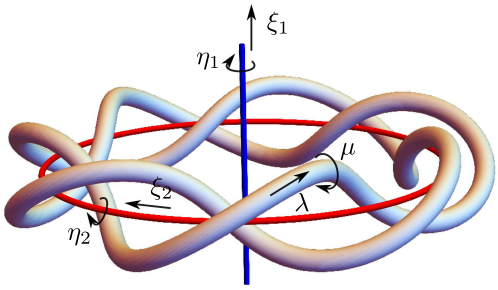


图 5： $T_{2,7}$ 环面纽结的环流线，其中 α 经命题 3.2中所述的简化后形成一个负霍普夫链环。蓝线对应椭圆流环，红线对应双曲流环。注意，此处 M_K 的定向与 S^3的定向一致。特别地，边界环面上 (λ, μ) 的定向给出了一个指向 M_K外部的法向量。

回想一下，$T_{q,p}$ 环面纽结的亚历山大多项式为（这里通过除以一个整体$(t-1)$ 因子来进行归一化）。

$$\Delta(t) = \frac{(t^{pq}-1)}{(t^p-1)(t^q-1)}, \tag{3.5}$$

分母中的因子对应于次数为 p 和 q 的两个玻色子环带，而分子中的因子对应于次数为 pq的玻色反环带。这里采用的约定与我们之前的讨论相比，对其中一个拉格朗日子流形改变了定向；根据 (2.6)，这会使环带与反环带互换。

对于 $(p,q) = (2, 2p+1)$，多项式可化简为

$$\Delta(t) = \frac{(t^{2(2p+1)}-1)}{(t^2-1)(t^{2p+1}-1)} = \frac{(t^{(2p+1)}+1)}{(t^2-1)}, \tag{3.6}$$

其贡献来自次数为 2 的椭圆流环，以及次数为 $2p+1$的负双曲型流环，如命题 3.2所示。

其他 (p,q) 环面纽结也可以进行类似的化简。不过，由于这些情况都不只有两个因子，因此可知其他情况下必定有两个以上的流环。

4 $\mathfrak{gl}_1$-skein 中的配分函数

本节将第 3 节的结果特化到 $\mathfrak{gl}_1$-skein，并获得环面结补空间的显式公式。对于 $(2,\ 2p+1)$ 环面纽结，我们还进一步得到配分函数的类箭图展开，并利用流环的几何学以一种新方式推导增广多项式。

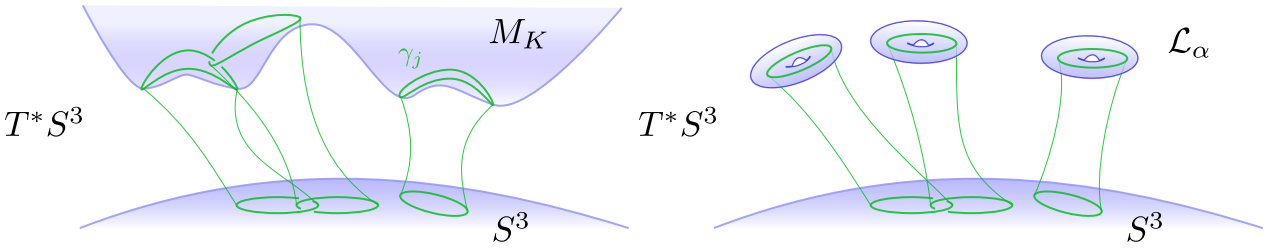
4.1 纤维化结的补空间 $\mathfrak{gl}_1$-skein 配分函数

本节证明推论 1.2。在进入实际证明之前，我们先回顾 $\mathfrak{gl}_1$-纽结补空间的 skein 的一般性质。

计算 (1.1) 还需要两个步骤。首先，我们将 $(S^1 \times D^2)_j$ 与 N_j 在 γ_j中的 M_K邻域对应起来。这些邻域的补空间由此给出一个（辛）配边 $\mathcal{L}_\alpha \approx M_K \setminus (\cup_j N_j)$，其满足

$$\partial_+ \mathcal{L}_\alpha = \Lambda_K, \quad \partial_- \mathcal{L}_\alpha = \cup_j \partial N_j \,, \tag{4.1}$$

比较图6a 和6b。其次，对于一般纽结 K，要找到其 HOMFLYPT skein 模的一个表示是一项繁复的任务；M_K 为了得到可直接计算的结果，我们将其特化为 $\mathfrak{gl}_1$ˆskein。在这里，我们需要计算由配边 $\mathcal{L}_\alpha$所诱导的 $\mathfrak{gl}_1$-skein 算子 $\mathcal{O}$。



(a) (b)

图 6：左：M_K 的推离，其中全纯环带延伸至零截面。右：γ_1的链环余法丛的推离，…，γ_k，其中全纯环带延伸至零截面。

4.1.1 $\mathfrak{gl}_1$ 的 M_K skein

$\mathfrak{gl}_1$的 M_K -skein 编码了“同调与链接数”，其定义为

$$\mathrm{Sk}_{\mathfrak{gl}_1}(M_K) \simeq \mathbb{Q}[q^{\pm}] \otimes H_1(M_K;\mathbb{Q}) \approx \mathbb{Q}[q^{\pm}] \otimes \mathbb{Q}[\mu^{\pm}] \,, \tag{4.2}$$

其中 μ 是与链接纽结 K的子午线圈相对应的同调生成元，见图7；链接数的定义见推论1.2 。 $\mathfrak{gl}_1$-skein 代数与 $\Lambda_K = \partial M_K \approx T^2$ 相关，是由 $\mu^{\pm}$ 和 $\lambda^{\pm}$ 生成的量子环面代数，其对易关系为

$$\hat{\lambda}\hat{\mu} = q^{-2}\hat{\mu}\hat{\lambda} \,, \tag{4.3}$$

其中 λ 是该纽结的经线。这些算子对应于补空间分支的适配坐标的量子化

$$\mu := x_m = y \,, \qquad \lambda := y_m = x^{-1} \,, \tag{4.4}$$

先前在塞弗特框架中定义。

若 $N \subset M_K$ 是实心环面且 $\gamma \subset M_K$ 是链环，则由于 skein 关系是局部的， M_K 的 $\mathfrak{gl}_1$-skein 中对 γ的求值经由 N的 $\mathfrak{gl}_1$-skein 分解。

对于 N 的 skein 的标准基 W_λ，除对称分拆$\lambda = (d)$外，W_λ 在 $\mathfrak{gl}_1$-skein 中映射为 0；对于这些对称分拆，它映射为相应的同调生成元 ξ 的幂

$$\mathsf{W}_\lambda \mapsto \begin{cases} \xi^d & \lambda = (d) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \tag{4.5}$$

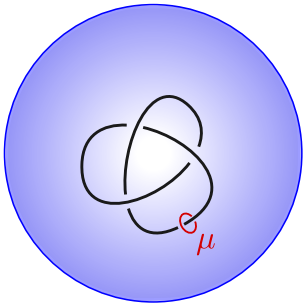


图7： $K = 3_1$ 的 $\mathrm{Sk}_{\mathfrak{gl}_1}(M_K)$ 的生成元。

连接两个实心环面的基本环带所作的贡献 N_1 和 N_2 的同调生成元$W^{(k)} = \xi_k$对于 $k = 1,\ 2$，可由将式（2.5）特化到 $\mathfrak{gl}_1$ skein

$(\sigma,\ \epsilon)$	术语	$\mathfrak{gl}_1$ 配分函数 $\psi_{\text{ann}}^{(\sigma,\epsilon)}$
$(1,\ +1)$	玻色环带	$\frac{1}{1-\xi_1\,\xi_2^{-1}}$
$(1,\ -1)$	费米环带	$\frac{1}{1+\xi_1\,\xi_2^{-1}}$
$(-1,\ +1)$	玻色反环带	$1-\xi_1\,\xi_2^{-1}$
$(-1,\ -1)$	费米反环带	$1+\xi_1\,\xi_2^{-1}$

(4.6)

4.1.2 配边

接下来，我们考虑包含多个实心环面的情形，在它们之间延伸着类型为 $(\sigma_j,\ \epsilon_j)$ 的基本环带 $N_j \subset M_K$ 和 $T_j \subset S^3$，并在两端终止于流圈 γ_j。T_j 中的边界分支给出 HOM-FLYPT 多项式。M_K 中的边界分支可以用$\mathfrak{gl}_1$-skein 的生成元 μ表示为：

$$\mathsf{W}_{(d_j)}^{(\gamma_j)} \ \mapsto\ (q^{\beta_j}\mu^{m_j})^{d_j}\,, \tag{4.7}$$

其中 $(\beta_j,\ m_j) \in \mathbb{Z} \times\mathbb{Z}$ 由曲线 $\mathsf{W}^{(\gamma_j)}(1)$ 在 M_K 中的框架和同调类决定

.

当包含多个流圈时，$\gamma_j \subset N_j$ 威尔逊线之间还存在相互链接数，γ_j。这些由配边的拓扑决定，$\mathcal{L}_\alpha$ 见(4.1)，其在 $\mathfrak{gl}_1$-分拆中的作用，是将普通的（非链接）乘积分区函数乘以某个幂次的 q，该幂次由总链接数决定，[13,31]

$$\mathsf{W}_{(d_1)}^{(\gamma_1)}\dots\mathsf{W}_{(d_m)}^{(\gamma_m)} \ \mapsto\ q^{\boldsymbol{d}^t\cdot\Gamma\cdot\boldsymbol{d}}\prod_{j=1}^{m}(q^{\beta_j}\mu^{m_j})^{d_j} \tag{4.8}$$

这里 $\Gamma \in \mathbb{Z}^{m\times m}$ 是一个对称二次型

$$\Gamma_{ij} = \Gamma_{ji} = \mathrm{lk}(\gamma_i,\gamma_j)\,, \tag{4.9}$$

参见推论1.2 关于链接数的定义。

4.1.3 一般的 $\mathfrak{gl}_1$-公式

汇总上述观察结果，得到缠结值曲线计数公式（3.1）的如下特化形式。

推论1.2的证明。 第 4.1.1 节和 4.1.2 节根据（ M_K 在 $\mathfrak{gl}_1$（M_K）中的曲线计数求值得到如下公式（1.1）

$$\psi_{M_K}(a,q,\mu)=\sum_{d_1,\dots,d_m\geq 0} H_{(d_1)^\vee,\dots,(d_m)^\vee}(a,q)\,q^{\boldsymbol{d}^t\cdot\Gamma\cdot\boldsymbol{d}}\prod_{j=1}^{m}(\epsilon_j\,\sigma_j\,q^{\beta_j}\,\mu^{m_j})^{d_j} \tag{4.10}$$

其中，链环 $\gamma_1\ldots,\ \gamma_m$ 的 HOMFLYPT 多项式依据流圈的类型，沿第 j 个分量以对称分拆或反对称分拆着色

环带类型	$(\sigma_j,\ \epsilon_j)$	$(d_j)^\vee$
玻色环带	$(+1,\ +1)$	(d_j)
费米环带	$(+1,\ -1)$	(d_j)
玻色反环带	$(-1,\ +1)$	$(d_j)^t=(1)^{d_j}$
费米反环带	$(-1,\ -1)$	$(d_j)^t=(1)^{d_j}$

(4.11)

将反环带赋予椭圆流环的方式可由第 2.2 节推出，需谨记我们匹配的是 S^3 和 M_K的定向与自旋结构。

□

ˆ推论 1.2 的配分函数确定了增广曲线的一种量子化 A_{M_K}，其对应于补空间分支；要求它消去式（4.10）。

ˆ**注 4.1**。 事实上，量子曲线 A_{M_K} 可以由消去链环 $\{\gamma_1,\dots,\gamma_m\}$ 的余法丛 配分函数的量子算子得到，也就是说，由编码 $H_{(d_1)^\vee,\dots,(d_m)^\vee}(a,q)$ 递归关系的算子方程得到。推导过程涉及引入由链接数导致的修正，然后在 $\partial\mathcal{L}_\alpha$的 $\mathfrak{gl}_1$-*skein*中消去变量。引入链接数的配边算子见附录A。下面以 $T_{2,\ 2p+1}$ 环面纽结为例，简要说明这一过程的经典版本。

4.2 $(2,\ 2p+1)$-环面纽结的显式公式

回忆命题3.2，$(2,\ 2p+1)$-环面纽结的补空间上存在一个1-形式，该形式仅有两个构成负霍普夫链环的简单流环。特别地，我们找到一个支撑类为 μ^2 的玻色反环带的椭圆流环，以及一个支撑类为 μ^{2p+1}的费米环带的负双曲型流环。因此，根据（4.6），（4.10）中的相应绕数和符号为

$$m_1=2,\quad m_2=2p+1,\quad \sigma_1=-1,\quad \sigma_2=1,\quad \epsilon_1=+1,\quad \epsilon_2=-1. \tag{4.12}$$

这将得到该一般公式的如下特化形式

命题4.2。 纽结 $\mathfrak{gl}_1$-补空间 $M_{T_{(2,2p+1)}}$ 的 $\mathfrak{gl}_1$-分拆为$(2,\ 2p+1)$-环面纽结为

$$\psi_{(X,M_K)}=\sum_{n_1,n_2\geq 0} H_{(1)^{n_1},(n_2)}(a,q)\,q^{\Gamma_{11}n_1^2+\Gamma_{22}n_2^2+2\Gamma_{12}\,n_1n_2}\,(-q^{\beta_1}\,\mu^2)^{n_1}(-q^{\beta_2}\,\mu^{2p+1})^{n_2}. \tag{4.13}$$

其中 $H_{(1)^{n_1},\ (n_2)}(a,\ q)$ 表示 S^3 中表示$((n_1)^t,\ (n_2))$下负霍普夫链环的*HOMFLYPT* 多项式，

$$\Gamma=\begin{pmatrix}0 & -1\\ -1 & -2p-1\end{pmatrix}, \tag{4.14}$$

且 β_1 且 $\beta_2\,\boldsymbol{d}$ 取决于基底 μ 的选择。注意，在换基后，$\mu\mapsto q^s\mu$、β_1 和 β_2 满足

$$\beta_1\mapsto\beta_1+2s,\quad \beta_2\mapsto\beta_2+(2p+1)s\,. \tag{4.15}$$

存在一个关于 M_K 的 4-链，以及一个基底元素 μ，使得

$$\beta_1 = 1\,, \qquad \beta_2 = 2p+2\,. \tag{4.16}$$

证明。 命题 3.2 给出了构成负霍普夫链环的两个流圈。接下来只需确定链接矩阵 Γ 以及 q基本环带的幂。

考虑由 γ_k 围成的平面圆盘 D_k。该圆盘与 $T_{2,\,2p+1}$ 横截相交：当$k=1$时交于 2 个点，当 $k=2$时交于 $2p+1$ 个点。若取 $T_{2,\,2p+1}$ 的标准子午线作为 $M_{T_{2,\,2p+1}}$ 的 $\mathfrak{gl}_1$-skein 的生成元，那么这些圆盘表明 γ_1 属于类 μ^2，而 γ_2 属于类 μ^{2p+1}。

圆盘 D_1 和 D_2 也分别与 γ_2 和 γ_1 相交，交点符号为 -1。这里需要注意，M_K 和 S^3 上的定向一致至关重要，因此霍普夫链环在两者中的签名均为 -1。由此得到 Γ 中的非对角元素。为了确定 Γ 的对角元素以及环带的 q-次幂，我们必须指定一个 4-链。

我们取一个 4-链，它是由平移映射 $S^3 \setminus K \to M_K$ 作用于平移向量场的像 ξ 所给出的 4-链的小扰动。我们取扰动向量场为塞弗特曲面上梯度莫尔斯函数的一个小平移，使一个临界点稍微偏离流圈。若 v是扰动向量场，$\xi' = \xi + v$，且 C 是 ξ' 的 4-链，那么 $C \cap S^3 = \gamma_1' \cup \gamma_2'$，其中 γ_1 和 γ_2是 γ_1 和 γ_2 的邻近平行曲线，位于 v的临界点所在的位置。

接下来注意到，圆盘 D_2 的内法向量沿着 γ_1 与 ξ' 同伦，因此由 ξ' 框架化的 γ_1代表 M_K的 $\mathfrak{gl}_1$-skein 中的 μ。于是环带贡献 $q\mu$，其中 q 的幂由 $\mathrm{lk}(\gamma_1,\ \gamma_1' \cup \gamma_2') = 1$决定，即 $\beta_1 = 1$。

相比之下，D_2 的内法向量相对于 ξ 旋转。每当内法向量与 $\pm v$ 平行时，便与 C 产生局部交点，从而给出贡献 q^{2p+1}；再计入来自 $\mathrm{lk}(\gamma_2, \gamma_1' \cup \gamma_2')$ 的贡献，$=1$ 给出 $\beta_2 = 2p+2$。

Γ 的对角元的计算由同样的计算得出：我们需要计算经 ξ' 平移后的 γ_j 与变形曲面 D_j 的交。除 S^3 中的链接数外，这与上述计算相同；按我们所选的定向，得到 $\Gamma_{11} = 0$ 和 $\Gamma_{22} = -2p-1$。

□

4.3 箭图结构

秩-1 纽结余法丛上全纯曲线的计数 A-膜在许多例子中已知具有箭图结构 [12]。具体而言，这意味着（2.7）的秩-1 特化取如下形式

$$\psi_{(X,L_K)}(x,a,q) = \sum_{d_1,\dots,d_m} q^{C_{ij}d_id_j} \prod_{j=1}^{m} \frac{x_j^{d_j}}{(q^2;q^2)_{d_j}} \tag{4.17}$$

其中，$C_{ij} = C_{ji}$是一个元素为整数的对称矩阵，而 $x_j = (-1)^{C_{jj}} q^{q_j} a^{a_j} x^{k_j}$由某些整数 q_j，a_j，k_j确定，这些整数是结-箭图对应数据的一部分。

在 [13,31] 中，已经证明箭图结构将 ψ_{L_K} 表示为一个取值于$\mathrm{Sk}_{\mathfrak{gl}_1}(L_K)$的配分函数，其中包含 m 形式基本圆盘 $\{D_1,\dots,D_m\}$，其边界具有链接数

$$\mathrm{lk}(\partial D_i, \partial D_j) = C_{ij}\,. \tag{4.18}$$

每个圆盘的贡献由多重覆盖公式给出

$$\psi_{\mathrm{disk}}(X_k) = (X_k;q^2)_\infty^{-1} = \exp\left(\sum_{d\geq 1} \frac{X_k^d}{d(1-q^{2d})}\right)\,, \qquad X_k = (-1)^{C_{jj}} q^{C_{jj}-1} \hat{x}_j \prod_k \hat{y}_k^{C_{jk}}\,, \tag{4.19}$$

其中$\hat{y}_j\hat{x}_i = q^{2\delta_{ij}}\hat{x}_i\hat{y}_j$是 L_K中基本圆盘 ∂D_j 的管状邻域上和乐的量子环面代数。配分函数可据此写成如下形式

$$\psi_{(X,L_K)} = \langle \psi_{\text{disk}}(X_m)\dots\psi_{\text{disk}}(X_1)\rangle_{\text{Sk}_{\mathfrak{gl}_1}(L_K)} \tag{4.20}$$

其中，在 skein 中的求值 L_K 取值为 $\langle \hat{x}_k\rangle = x_k$。我们指出，在大多数例子中，基本圆盘是形式上的，并不对应实际的全纯圆盘。（(4.20) 中的记号与 [31,式 (6.9)]略有不同。 X_k 的含义稍有不同，这会改变对易关系，但配分函数仍以相同方式得到，相关讨论见 [32]。此外，此处的“正规序”仅对应于在 $\mathfrak{gl}_1$ 的 skein 中求值 L_K。）

除了解消合流形中的纽结 conormal 背景，还在其他情境中发现了 $\mathfrak{gl}_1$ skein 值曲线计数的箭图描述，包括对应于增广簇其他分支的拉格朗日子流形 A-膜 [29], , 以及某些环面Calabi-Yau三维流形中的环面膜 [33]。近期结果综述见 [34] 。

这里我们不仅使用基本圆盘，还使用基本环带。我们考虑也包括环带的广义箭图，其 $\mathfrak{gl}_1$ 取值于琼斯多项式模的配分函数见（4.6）。

霍普夫链环的 HOMFLYPT 多项式$H_{(1)^{n_1},\ (n_2)}$（a，q）是众所周知的；我们在附录 B 中表明，它们具有一个箭图描述，涉及六条基本曲线：每个余法丛上有两个圆盘，以及一条连接两个余法丛分支的环带和反环带。总体链接矩阵为

$$C_{\widetilde{\text{Hopf}}} = \left(\begin{array}{cc|cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \tag{4.21}$$

其中，前两行（列）分别对应霍普夫余法丛第一（第二）个分支上的圆盘，最后两行（列）对应环带和反环带。霍普夫链环余法丛到补空间的配边 M_K 将圆盘和环带的边界映射到同调类 μ^2 和 μ^{2p+1}中的流线。此外，它还通过 Γ （见4.14）进一步修改了六条基本曲线之间的链接数；详情参见附录 B。总体而言，这为（2，$2p+1$）-环面纽结的纽结补上的曲线计数给出了一个箭图描述，其中包含六条基本曲线（四个圆盘、一条环带和一条反环带），其链接数如下

$$C_{M_K} = \left(\begin{array}{cc|cc|cc} 1 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ \hline -1 & -1 & -2p-1 & -2p-1 & -2p-2 & -2p-3 \\ -1 & -1 & -2p-1 & -2p & -2p-2 & -2p-3 \\ \hline -1 & -1 & -2p-2 & -2p-2 & -2p-3 & -2p-3 \\ 0 & 0 & -2p-3 & -2p-3 & -2p-3 & -2p-3 \end{array}\right) \tag{4.22}$$

对于$T_{2,\ 2p+1}$ 纽结补的开弦配分函数，在命题3.2 中随后可表示为如下箭图式配分函数

$$\begin{aligned}\psi_{(X,M_K)} = \sum_{d_1,d_2,d_3,d_4,d_5\geq 0}\sum_{d_6=0}^{1} & q^{\boldsymbol{d}^t\cdot C_{M_K}\cdot\boldsymbol{d}}\, q^{\beta_1(d_1+d_2+d_5+d_6)+\beta_2(d_3+d_4+d_5+d_6)} \\ & \times \frac{(-\mu^2)^{d_1}}{(q^2;q^2)_{d_1}}\frac{(a^2q\mu^2)^{d_2}}{(q^2;q^2)_{d_2}}\frac{(-q\mu^{2p+1})^{d_3}}{(q^2;q^2)_{d_3}}\frac{(a^2\mu^{2p+1})^{d_4}}{(q^2;q^2)_{d_4}}(-a^2\mu^{2p+3})^{d_5}(\mu^{2p+3})^{d_6}\end{aligned} \tag{4.23}$$

其中 $\boldsymbol{d}^t = (d_1, \ldots, d_6)$ 为箭图荷向量，且 β_i 由 (4.16) 给出。

注 4.3 （关于箭图以及 $(2, 2p+1)$ 环面纽结补空间中 M2 膜计数的整性）。 我们的结果直接表明，$(2, 2p+1)$ 环面纽结的结补空间上的曲线计数由箭图结构组织。我们回顾一下，对称箭图的配分函数可分解为取整数值的动机 *Donaldson-Thomas* 不变量 *[35,36]*。因此，我们的箭图公式 (4.23) 意味着边界位于包裹纽结补空间拉格朗日子流形的单个 *M5* 膜上的 *M2* 膜计数具有整性 M_K。在 *[37]* 双曲型纽结补空间上的复 *Chern-Simons* 配分函数也曾被猜想具有类似的整性结构。我们认为这一猜想与我们的结论有关，探索这种联系将会很有意义。我们的结论是猜想中的结-箭图对应的对应物 *[12]*，后者涉及结余法丛拉格朗日子流形上的曲线计数。关于结余法丛的相应整性结构早在很久以前就在 *[4,38,39]*中被猜想。

4.4 增广曲线与拉格朗日子流形配边

配边（4.1）给出了如下计算 $(2, 2p+1)$-环面纽结增广曲线的新方法。扭转霍普夫链环的增广簇是 $(\mathbb{C}^*)^4$, 中的一个二维子簇，其一个分支由以下函数的零点集描述:

$$\begin{aligned} B_1(\xi_i, \eta_i) &= 1 - \eta_1 - \xi_1\eta_1 + a^2\xi_1 \\ B_2(\xi_i, \eta_i) &= 1 - \eta_2 - \xi_2 + a^2\xi_2\eta_2 \end{aligned} \tag{4.24}$$

其中 ξ_i 表示经线， η_i 表示霍普夫链环各分支上的子午线，见图 5。由于 $\mathcal{L}_\alpha$中不存在边界位于其中的全纯圆盘，因此，霍普夫链环其中一个分支附近圆盘的边界链可以延拓为 M_K中的边界链。根据其链接数，它与另一个霍普夫链环分支的中心曲线相交。这导致增广方程作如下修改，参见（B.4），

$$\tilde{B}_k(\xi_i, \eta_i) := B_k(\xi_i \prod_j \eta_j^{\Gamma_{ij}}, \eta_i) = 0\,, \qquad k = 1, 2\,. \tag{4.25}$$

Then

$$\begin{aligned} \tilde{B}_1 &= 1 - \eta_1 - \xi_1\eta_1\eta_2^{-1} + a^2\xi_1\eta_2^{-1} \\ \tilde{B}_2 &= 1 - \eta_2 - \xi_2\eta_1^{-1}\eta_2^{-(2p+1)} + a^2\xi_2\eta_1^{-1}\eta_2^{-2p} \end{aligned} \tag{4.26}$$

（这些关系可以相当直接地进行量子提升，讨论见附录 A ，并说明它们与量子配边算子的$\hat{}$关系 $\mathcal{O}$。）现在，对变量进行特化

$$\xi_i = \epsilon_i\sigma_i\mu^{m_i} = -\mu^{m_i} \tag{4.27}$$

其中我们使用了 σ_i 和 ϵ_i 在（4.12）中给出的结果，得到（ λ^{-1} 中的负幂似乎是为了保持辛结构的整体符号，并且源于沿着 K 以及沿着 Hopf 链环的边界具有不同的定向，见图5。）

$$\log\lambda^{-1} = \frac{\partial W_{M_K}}{\partial \log\mu} = \sum_{j=1}^{2} \frac{\partial \tilde{W}}{\partial \log\xi_i} \frac{\partial \log\xi_i}{\partial \log\mu}\Big|_{\xi_i = -\mu^{m_i}} = \log\eta_1^{m_1}\eta_2^{m_2}\Big|_{\xi_i = -\mu^{m_i}} \tag{4.28}$$

其中 W_{M_K} 是 M_K 的圆盘势，由（4.13）的首阶渐近给出

$$\lim_{q\to 1}(q^2 - 1)\log\psi_{(X, M_K)} \tag{4.29}$$

且 $\tilde{W}$ 是超势，其临界轨迹由 $\{\tilde{B}_k = 0\}$ 定义，这意味着 $\log \eta_i = \partial^{\partial W}{}_{\log \xi_i}$。绕数为 $m_1 = 2$, —— $m_2 = 2p+1$。

通过研究从 M_K 中移除霍普夫链环的一个邻域后得到的同调生成元，也可以理解关系式 (4.27)；见图 5 和图 8。类似地，沿着图 5 所示的 K 经线绕行一周，并注意到它沿负方向绕 η_1 两圈、也沿负方向绕 η_2 $2p+1$ 圈，即可看出 (4.28)。综合方程 (4.26)、(4.27) 和 (4.28)，可得 λ 与 μ 之间的一个关系式，其中 $A_K(\lambda, \mu)$ 是其因子之一。第 6.3 节和第 7.3 节将对此作图示说明。

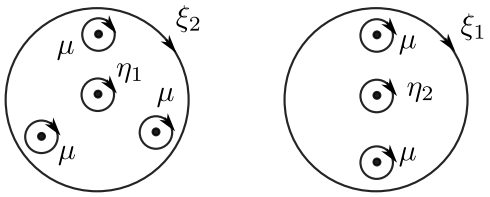


图 8：(4.27) 和 (4.28) 在 $p = 1$情形下的示意图。若通过令 $\mu = 1$移除三叶结，则可得到 $\xi_1 = \eta_2$ 和 $\xi_2 = \eta_1$ （相差符号），这与负霍普夫链环补空间的情形相符，见 [10, 第 7.2 节。1]。另一方面，将霍普夫经线和乐 $\eta_2 = \eta_1 = 1$平凡化可得$\xi_1 = \mu^2$, $\xi_2 = \mu^3$ （相差符号）。

5 增广曲线的量子化与 M 理论的联系

关于纤维化结补空间上的开弦配分函数的知识，使我们能够具体研究增广簇的量子化。任意纽结的增广曲线都有两个标准分支：余法丛分支和补空间分支。余法丛分支的开弦配分函数由 HOMFLYPT 多项式的生成级数给出；而对于纤维化纽结，补空间分支的开弦配分函数由 (1.1) 给出。这两个配分函数各自都被经典增广曲线的一种特定量子化所湮灭。本节将探讨这些量子化是否一致。

受物理学启发，我们提出增广曲线各相的一般定义：将拓扑弦理论提升至 M 理论，并令 M 圆的半径趋于无穷大，会得到增广曲线的热带极限，从而为膜定义出自然的“相”。其中包括补空间相和余法丛相，以及一些无法直接作出几何解释的其他相（除非 $a = 1$，参见 [40]）。尽管如此，对于每一种相，我们都在纽结的勒让德环面的量子环面上定义了局部正则坐标，并提出一种量子化方案，用以定义形式计数；这些计数直接对应于具有拉格朗日子流形填充的各相所对应的 $\mathfrak{gl}_1$-skein 曲线计数。

5.1 量子化方案

镜像曲线的量子化通常可以视为构造一个与辛流形中某个拉格朗日子流形相关联的 D-模。这一问题已从物理学／弦理论的角度发展出多种研究方法，例如参见 [37, 41–46]。

这里我们考虑以这种方式对纽结的增广曲线进行量子化的问题。这意味着，我们希望将由二元多项式 $A(x,\ y)$（依赖于额外参数 a）定义的 $(\mathbb{C}^*)^2$ 中的一个拉格朗日子流形提升为 T^2 的 $\mathfrak{gl}_1$ skein 模的一个元素

$$A(x,y) \quad \to \quad \hat{A}(\hat{x},\hat{y}) \ \in \ \mathrm{Sk}_{\mathfrak{gl}_1}(T^2)\,. \tag{5.1}$$

从物理角度看，增广曲线的量子化有望得到一个 D-模，其中涉及一系列对偶 [42] 之后相交膜上出现的曲线费米子；从数学角度看，高亏格结接触同调也有望得到一个 D-模 [7], 。关于这两种框架之间的关系，文献 [6] 中已有讨论。为一般纽结构造 D-模的一种方法，是将用于生成增广多项式的消元理论推广为 T^2 的 $\mathfrak{gl}_1$-skein 中的消元理论。不过，目前尚无这样的普遍结果。另一种方法是在增广曲线上使用费米子，这需要考虑一般纽结的增广曲线所具有的奇点；而在这方面，同样缺乏普遍结果。

经典增广曲线的部分已知可参数化带有秩一局部系统的拉格朗日子流形的模空间 L_α，这些子流形填充了解消合流形中的 Legendrian 纽结余法丛。拓扑弦理论（或等价地，skein 值曲线计数）为每个这样的拉格朗日子流形赋予一个配分函数，其取值于 $\mathfrak{gl}_1$ skein 模

$$\psi_\alpha \ \in \ \mathrm{Sk}_{\mathfrak{gl}_1}(L_\alpha)\,. \tag{5.2}$$

在局部坐标（定义如下）中，每个 ψ_α 定义一个 D-模，相应的理想由湮灭 ψ_α的算子组成。下文将检验对应于不同拉格朗日子流形（例如拓扑不同的子流形）空间的这类 D-模是否相容，也就是说，它们是否生成了“相同”的ˆ理想 $A = 0$。

注 5.1。 如上所述，当高亏格纽结接触同调 *[7],* 的消元过程可行时，可根据无穷远处的数据构造一个普适ˆ ˆ 算子 A，该算子将湮灭所有 ψ_α。事实证明， A 并非ˆ 完全独立于分支。文献 *[10]* 指出， A 取决于与不同分支上的拉格朗日填充相关的辅助几何数据。

5.2 去紧化是热带化

纽结的增广曲线是一个代数簇 $\Sigma_K \subset (\mathbb{C}^*)^2$。类似的曲线在物理学中作为三维 $\mathcal{N} = 2$ 量子场论 T_{3d} 在 $S^1 \times \mathbb{R}^2$ [4, 6, 47], 上的真空模空间出现，该理论还允许若干其他对偶描述。一般而言，存在一个 $SL(2,\mathbb{Z})$对偶群，作用于具有 $U(1)$规范群的三维 $\mathcal{N} = 2$ 量子场论，其中 $SL(2,\mathbb{Z})$的标准生成元 S与 T分别对应于规范一个 $U(1)$味对称性，以及平移陈-西蒙斯能级 [48, 49]。另一种专属于增广曲线的对偶来自M 理论。三维-三维对应通过考虑单张M5 膜的扭曲紧化，给出了 T_{3d} 的一种实现（推广到一叠M5膜会产生取值于skein的增广曲线 [5]）。在三维流形 M_α 乘 $S^1 \times_q \mathbb{R}^2$上。我们用$T_\alpha$ 表示阿贝尔六维(2,0)理论在 M_α上的扭曲紧化，可能由额外的

数据（例如，编码同一三维流形 M_α上平坦联络的拓扑不等价类之选择的数据）。 Σ_K 的不同“分支”（精确定义将在下文给出）对应于 T_{3d}的不同3d-3d 实现，它们由对偶网络相联系，如图9所示。

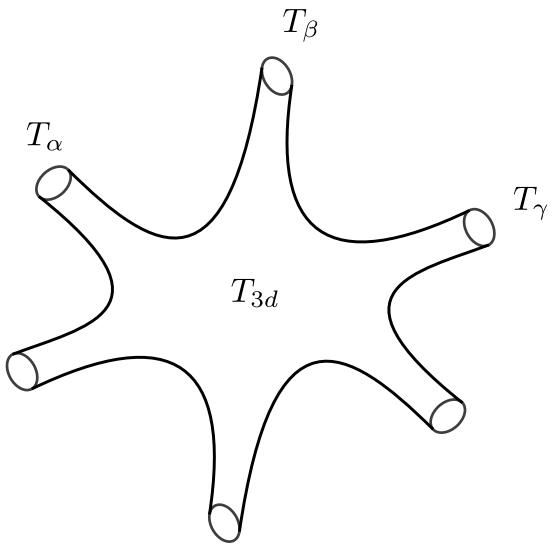


图 9：与 Σ_K 的分支相关的 T_{3d} on $S^1 \times \mathbb{R}^2$ 的对偶拉格朗日描述。

在所考虑的所有例子中， Σ_K 的每个分支都会导出一个拉格朗日描述， T_α 它是由对称箭图 Q编码的阿贝尔陈-西蒙斯物质理论，见 [13]。从给定拉格朗日描述 T_α的角度来看， Σ_K 的分支对应于三维 $\mathcal{N} = 2$ 量子场论的库仑真空、希格斯真空或拓扑真空。联系不同拉格朗日描述 $T_\alpha \simeq T_\beta$ 的对偶会互换这些解释，例如将 T_α 的希格斯真空识别为 T_β的拓扑真空，等等。

相位（及对偶）的几何解释并不那么清晰。一些分支 T_α 与一个三维流形 M_α相关联，但 M_α 的拓扑并非固定不变，并且对于 $\alpha \neq \beta$而言，可能随分支 $M_\alpha \not\approx M_\beta$而变化。这意味着量子场论对偶会转化为三维流形的拓扑跃迁。其他分支 T_β 则没有基于三维流形的、广为理解的几何解释。

对于确实可以作三维流形解释的分支 T_α ，如果 $b_1 \equiv (L_\alpha) = 1$，柱状区域 $\mathbb{C}^*_\alpha \subset \Sigma_K$ 可以视为带有秩一阿贝尔局部系统的拉格朗日子流形 L_α 的模空间 $\mathbb{R}^{b_1} \times (S^1)^{b_1}$ 。当这样的补丁 $\mathbb{C}^*_\alpha$ 和 $\mathbb{C}^*_\beta$ 在 Σ_K 中重叠时，它们便同时具有双重解释，即分别作为 L_α 和 L_β 的模空间。

M_α 在光滑模空间 Σ 上的拓扑变化，在弦理论和 M 理论中是开放 M2 膜以 M5 膜 [2]为端点所产生的效应。从量子场论的角度看，绕着 L与圆的乘积中的一个圈的 M2 膜会降为 BPS 涡旋。（事实上，不同分支之间的跃迁通常被确定为（在适当的拉格朗日描述中）FI 参数消失的点。此时，涡旋对配分函数的贡献形式上发散。与之对偶、通过粒子-涡旋对偶相关联的另一种拉格朗日描述（ S 变换）更适合描述这种情况下的局域动力学。）紧化在 $S^1 \times \mathbb{R}^2$ 上的三维理论 T_{3d}可视为定义在 $\mathbb{R}^2$, 上的二维 (2，2) 理论 T_{2d}，其场与经规范和味

味 S^1-和乐复化后的三维场的傅里叶模

$$S^1 \text{ reduction:} \quad T_{3d}^{\mathbb{R}^3} \to T_{3d}^{S^1\times\mathbb{R}^2} \approx T_{2d}\,. \tag{5.3}$$

复化的（Fayet-Iliopoulos）耦合和（矢量多重态标量）期望值，为 $\mathbb{C}^*\times\mathbb{C}^*$ 上的局部坐标，其中 Σ_K 描绘了给定耦合 x 下的真空空间 $y(x)$。

从 S^1 紧致化的角度来看， Σ_K 表现为一个（对偶）圆纤维化，其底空间是 T_{3d} 在 $\mathbb{R}^3$上的模空间。模空间的奇点处，某些 BPS 态会变为无质量；这些奇点在 $T^{S^1\times_{\mathbb{R}_{3d}}}{}^2$ 中被平滑化，因为世界线绕行 S^1 的 BPS粒子会对低能有效作用量产生有限尺寸修正 [50]。每种对偶框架 T_α 都对应一种不同的圆纤维化，这反映了三维对偶从 $T_{3d}^{\mathbb{R}^3}$ 下降为二维对偶到 $T^{S^1\times_{\mathbb{R}_{3d}}{}^2}\approx T_{2d}$ [51] 的不同方式。

接下来我们考察与热带几何的联系。将 R 的半径 S^1 取至无穷大 $R\to\infty$，会使 $\mathbb{R}^3$ 变为 $\mathbb{R}^2\times S^1$，从而迫使三维量子场论的所有 S^1-和乐变为平凡。在 3d-3d 对偶一侧，这会关闭 M_α上平坦联络的模空间，因为 M5 膜上的二形式无法再沿着 S^1 约化为联络一形式。由于和乐被冻结为零，只有底层三维流形 L_α 的几何模空间发生变化，真空空间的维数也仅剩一半。此外，从动力学角度来看， $R\to\infty$ 极限会抑制有限质量 BPS 态对低能有效作用量的贡献，这些 BPS 态来自 M2 膜，负责平滑圆柱区域之间的连接。因此，在该极限下，真空空间预计会变得奇异。取 $R\to\infty$的结果在数学上可表示为取热带极限

$$S^1 \text{ decompactification:} \quad \Sigma_K \to \Sigma_K^{\mathrm{Trop}}\,. \tag{5.4}$$

示例见图10，参见 [31,第 5 节。3] 以了解更多详情。

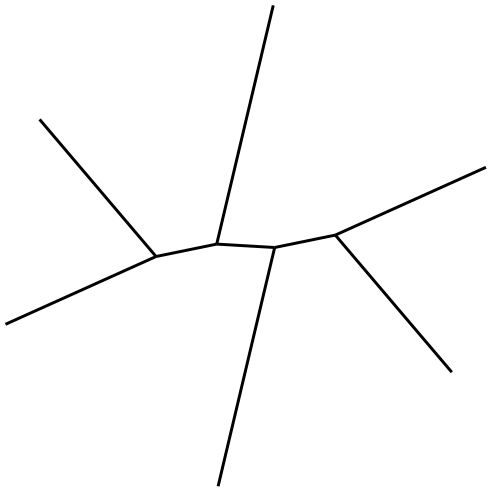


图10：图 $R\to\infty$ 中曲线的极限9，热带曲线 Σ_K^{Trop} 。

一般而言，增广曲线的热带极限

$$\Sigma_K \subset (\mathbb{C}^*)^2: \qquad \sum_{i,j\in\mathbb{Z}} c_{i,j} a^{v_{i,j}} x^i y^j = 0 \tag{5.5}$$

其中 a，x，$y \in \mathbb{C}^*$，$v_{i,j} \in \mathbb{Z}$，以及 $c_{i,j} \in \mathbb{Z}$，定义为分段线性函数图像中的边的集合；关于热带几何的概念，参见例如 [52]。

$$\Sigma_K^{\mathrm{Trop}} \subset \mathbb{R}^2: \qquad \mathrm{Max}\{v_{i,j} * \log|a| + i * \log|x| + j * \log|y| : \forall i,j \in \mathbb{Z}\}. \tag{5.6}$$

我们指出，在热带极限下，数值系数会被 $R \to \infty$ 抑制；然而，闭弦模空间（如 a）会保留下来，并变为实数值（例如环境坐标 x，y）。这是因为 Kähler模空间经 B 场复化；该场源自 M 理论三形式的圆约化，而在去紧化极限下，这种复化会被关闭。

热带曲线既有连接两个顶点的内部边，也有仅连接一个顶点的外部边。作为分层空间，热带曲线由边之间的关联关系刻画。随着连续模空间变化，这种结构保持分段常数；对于 Σ_K，其中包括 $|a|$ 解消合流形中 $\mathbb{P}^1$ 的（指数化）体积。然而，在由 $|a| = 1$定义的实余维 1 轨迹上，热带曲线的结构可能发生显著变化。这会产生热带增广曲线的两个不同相位，分别对应于 $|a| < 1$ 和 $|a| > 1$，每个相位都有其自身的一组边和顶点。此外，在 $|a| \to 0$ 或 $|a| \to \infty$ 的极限下，所有内部分支都会变为外部边。我们在第 5.5 节通过几个例子说明这些现象。

5.3 局部开弦模空间

开弦配分函数（开曲线计数）涉及开弦模空间的选择，用以测量全纯曲线的面积。也就是说，开拓扑弦的分拆（或其对数，即自由能）函数应表示为世界面瞬子的（指数化、复化）面积的形式幂级数 $\xi^\beta = e^{-\mathrm{area}_{\mathbb{C}}(\beta)}$。这里 $\beta \in H_2(X, L)$ 是曲线的相对同调类，并且$|\xi^\beta| < 1$ 对于所有 β都包含在单位圆盘内。众所周知，由于框架的选择，此类参数化并不唯一 [2]。

5.3.1 Seifert全局坐标。

现在考虑纽结 K 的增广曲线 $\Sigma_K \subset (\mathbb{C}^*)^2$。在 $(\mathbb{C}^*)^2$ 上存在一组规范坐标选择 (x, y)，它与 Σ_K 的两条外部边相关联；Σ_K 对应于 Legendrian余法向环面 $\Lambda_K \subset U^*S^3$ 的余法向拉格朗日填充，以及补空间填充 $M_K \approx S^3 \setminus K$。

经典增广簇的余法丛分支编码了在纽结的余法丛拉格朗日子流形 L_K上（从 S^3处移开）的边界圆盘在解消合流形 $X = \mathcal{O}(-1) \oplus \mathcal{O}(-1)$中的全纯圆盘。对于纤维化纽结，补空间分支同样编码了边界位于 M_K 上的全纯圆盘计数（关于非纤维化情形的讨论，见 [53]）。

$(\mathbb{C}^*)^2$ 上的坐标为 y，对应于 Λ_K中的子午线，即在 L_K中围成边界的圈；以及x，对应于经线，即在 M_K 中围成边界的圈，从而给出塞弗特框架。在这些坐标下，增广曲线的余法丛分支渐近于一个位于 $(x, y) = (0, 1)$ 处的穿孔，而补空间分支渐近于 $(x, y) = (1, 0)$。

5.3.2 分支的定义

增广曲线的一个分支对应于一对（e，v），其中 e 是附着于顶点 v的热带图的一条边。于是，分支集合为 {（e_α，v_α）}$_\alpha$，即满足 $v_\alpha \in \partial e_\alpha$的边与顶点对。每条内部边定义两个分支，而每条外部边定义一个分支。

热带图的任意边 e 由向量$(r_1, r_2) \in \mathbb{Z}^2/\mathbb{Z}_2$刻画。或者，我们为每条边指定

$$\text{slope}: \ \frac{r_2}{r_1}, \qquad \text{orbifold index}: \ \gcd(|r_1|, |r_2|)\,. \tag{5.7}$$

与余法丛分支相关联的边的类型为(1,0)，而补空间分支的边的类型为(0,1)，二者的轨形指标均为1。其他边的(r_1, r_2)类型可通过在每个顶点处求解平衡条件来确定（所有边的定向均流向该顶点，并要求入射边之和 $\sum_i (r_{1,i}, r_{2,i}) = (0,0)$）。

5.3.3 分支上的坐标

我们为每个分支(e_α, v_α)指定局部坐标，使得 v_α 位于(1,1)。若边 e_α的类型为(r_1, r_2)，则我们定义本原向量(r_1', r_2')，其中

$$r_i' := \sigma_\alpha \frac{r_i}{\gcd(|r_1|, |r_2|)} \tag{5.8}$$

其中选取 $\sigma_\alpha = \pm 1$，使得(r_1', r_2')指向 v_α。然后，该分支的经线与子午线坐标定义如下

$$\begin{aligned} x_\alpha &= \xi_x\, x^{s_1'} y^{s_2'}\,, \\ y_\alpha &= \xi_y\, x^{-r_2'} y^{r_1'}\,, \end{aligned} \tag{5.9}$$

其中 s_1', s_2' 为满足下列条件的互素整数

$$r_1' s_1' + r_2' s_2' = 1 \tag{5.10}$$

并且 $\xi_x, \xi_y \in \mathbb{C}^*$ 是归一化系数，其选取确保 v_α 位于$(|x_\alpha|, |y_\alpha|) = (1,1)$。注意，该定义并不能唯一确定$s_1', s_2'$，而是保留了改变框架的自由度

$$(s_1', s_2') \sim (s_1' - f r_2', s_2' + f r_1')\,, \quad f \in \mathbb{Z}\,. \tag{5.11}$$

特别地，对于塞弗特框架中的余法丛 $\alpha = l$ 与补空间 $\alpha = m$ 这两条分支，我们有

$$\begin{cases} x_l = x \\ y_l = y \end{cases} \qquad \begin{cases} x_m = y \\ y_m = x^{-1} \end{cases} \tag{5.12}$$

它们之间通过 $S \in SL(2,\ \mathbb{Z})$ 建立联系这一点，是塞弗特框架的一项特殊性质。改变余法丛分支的框架，即取 $x \to x(-y)^f$，会使任何非水平分支发生“倾斜”。这尤其适用于补空间分支，示例见图11。整数 f，经归一化后使 $f = 0$ 对应塞弗特框架，与 $K \subset S^3$的自链接数相对应，其定义是通过框架向量场所对应的推离得到的。

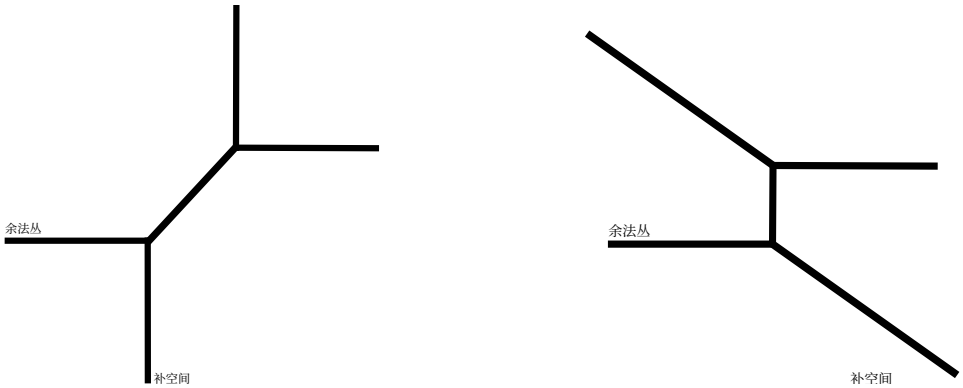


图 11：左：Seifert 框架下的热带图。右：选择不同的（余法丛）框架会改变补空间分支的斜率。

5.3.4 大体积开放弦坐标。

若 $(x_\alpha,\ y_\alpha)$ 是外部分支上的坐标，随着世界面瞬子的面积变大（因此$x_\alpha \sim e^{-\text{area}} \to 0$），它们对子午线全纯的贡献必定为平凡，因此 $y_\alpha \sim e^{\oint_{\text{子午线}} \nabla} \to 1$。对于内部分支，经过适当重标度闭弦模空间后，极限的处理方式相同；这种重标度实际上会将内部边解紧化为一条半无限的外部边。

注意，$|x_\alpha| < 1$ (v_α 位于 $x_\alpha = 1$，且（5.8）中的符号使得 $|x_\alpha|$ 沿着边 e_α递减）。对于内部分支，$|x_\alpha|$ 也有下界，即内部边 $\ell(e_\alpha)$ 的长度$_{e_\alpha}\ e^{-\ell(e_\alpha)}$ 。$< |x_\alpha| < 1$由（5.6）可得 $\ell(e_\alpha) = 2k \log|a|$，其中某个 $k \in \mathbb{Q}$，这里 a 是解消合流形的闭弦模量。

考虑到这一点，开弦配分函数可以整理成幂级数：

- 在外部分支上：

$$\psi_\alpha = \sum_{m,n\geq 0} c_{m,n}(q) a^{2m} x_\alpha^n \,. \tag{5.13}$$

- 在内部分支上：

$$\psi_\alpha = \sum_{l,m,n\geq 0} c_{l,m,n}(q) a^{2m} x_\alpha^n (a^{2k} x_\alpha^{-1})^l \,. \tag{5.14}$$

在这两种情况下，展开参数都位于单位圆盘内。

注5.2 (无理开格罗莫夫-维滕不变量**)。** 形式圆盘势（及其高亏格对应物）有时会出现无理系数，也就是说，形式圆盘势具有如下形式

$$W_\alpha^{\text{formal}} = \sum_{l,m,n\geq 0} w_{l,m,n} a^{2m} x_\alpha^n a^{2k} (x_\alpha^{-1})^l \quad \textit{with} \quad w_{l,m,n} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \,. \tag{5.15}$$

参见第7.5节。在下面的例子中，此类现象出现在轨形指标为 > 1的分支上，而引入轨形的一般解消可恢复曲线计数的有理性。因此，此处的无理开格罗莫夫-维滕不变量可理解为有理曲线计数的轨形极限，其中无穷贡献塔在该极限中被一并求和。

5.4 量子化方案的一致性

回顾第5.1 节中增广曲线的量子化 $A_K(x,\ y)\ =0$。在本节中，我们将给出一般公式，用以检验量子化$\hat{}$ A_K（$\hat{}x,\ \hat{}y$）在坐标（$\mathbb{C}^*$）$_\alpha$ 之间沿 Σ_K如何变换。

考虑一个分支 T_α 的 Σ_K，其局部坐标为 $(x_\alpha,\ y_\alpha)$，位于 $(\mathbb{C}^*)^2$。利用（5.9）中的坐标变换，我们得到一个局部方程

$$A_{K,\alpha}(x_\alpha, y_\alpha) = \sum_{i,j} c_{i,j}^{(\alpha)}(a)\, x_\alpha^i y_\alpha^j = 0. \tag{5.16}$$

关于 Σ_K。现进一步假设我们将波函数 $\psi_\alpha(x_\alpha)$ 沿 T_α 纽结。则 $\psi_\alpha(x_\alpha)$ 定义了 $A_{K,\ \alpha}$ 的一个量子化：

$$\hat{A}_{K,\alpha} = \sum_{i,j} c_{i,j}^{(\alpha)}(q,a)\, \hat{x}_\alpha^i \hat{y}_\alpha^j \qquad \in \mathrm{Sk}_{\mathfrak{gl}_1}(T^2) \tag{5.17}$$

其中 $\hat{}x_\alpha$，$\hat{}y_\alpha$ 是量子环面代数的生成元，$\hat{}y_\alpha\hat{}x_\alpha = q^2\hat{}x_\alpha\hat{}y_\alpha$ 通过如下要求将 $(\mathbb{C}^*)^2$，上函数的泊松代数量子化：

$$\hat{A}_{K,\alpha}\psi_\alpha = 0. \tag{5.18}$$

系数 $c_i^{(\alpha)}{}_{,\ j}(q,\ a)$ 是 q，a 中的多项式，具有整数系数，其经典极限为增广曲线（5.5）：

$$\lim_{q\to 1} c_{i,j}^{(\alpha)}(q,a) = c_{i,j}(a)\,. \tag{5.19}$$

由于坐标 $(x_\alpha,\ y_\alpha)$ 对应于 Λ_K 上交数为 1 的曲线，存在一个到 Seifert 坐标 $(x,\ y)$ 的 $SL(2,\ \mathbb{Z})$ 变换，并且我们在 $\mathfrak{gl}_1$ 量子环面代数上得到一个坐标变换

$$\begin{aligned} \hat{x}_\alpha &= \tilde{\xi}_x\, \hat{x}^{s_1'} \hat{y}^{s_2'}\,, \\ \hat{y}_\alpha &= \tilde{\xi}_y\, \hat{x}^{-r_2'} \hat{y}^{r_1'}\,, \end{aligned} \tag{5.20}$$

$\tilde{}$ $\hat{}$ 与 $\lim_{q\to 1}\xi_i = \xi_i$ in（5.9）中的结果。这使我们能够用全局量子环面变量 $\hat{}x, \hat{}y$ 表示 $A_{K,\alpha}$，尤其能够比较 $\alpha \neq \beta$ 对应的 $\hat{}A_{K,\alpha}(\hat{}x,\hat{}y)$ 与 $\hat{}A_{K,\beta}(\hat{}x, \hat{}y)$。正如我们将看到的，不同分支上的量子化通常会给出不同的算子，但这些差异可以得到理解，并且在适当意义下，这些算子应视为等价。

$\hat{}$**注 5.3**。在先前的工作中，某一分支的 A_K 的量子化算子 A_K 被原样用于所有其他分支，而相应的配分函数 ψ_α 则通过求解相应的（适配的）q-差分方程得到。这里我们明确掌握了两个分支上的配分函数，并发现这类计算有时需要在分支之间进行额外的坐标变换（递推关系也如此）。

对于 Σ_K 的余法丛分支，配分函数由以对称分拆着色的 HOMFLYPT 多项式给出

$$\psi_{L_K} = \sum_{n\geq 0} H_{(n)}(a,q)\,(x_l)^n\,. \tag{5.21}$$

$\hat{}$相应的量子化$A_{K,\ l}$ 因此与量子结不变量文献中通常研究的量子曲线相一致 [28, 54]。关于其他拉格朗日子流形$\hat{}$填充，已知的曲线计数较少。我们的主要定理1.1 给出了 ψ_{M_K}，相应地给出了$A_{K,\ m}$ 对于环面纽结。

5.5 热带增广曲线示例

本节将给出增广曲线热带极限的示例。

5.5.1 平凡结

增广曲线及其热带化为

$$\Sigma_{0_1}: \qquad 1-x-y+a^2xy=0 \tag{5.22}$$

$$\Sigma_{0_1}^{\mathrm{Trop}}: \qquad \mathrm{Max}\{0,u,v,t+u+v\} \tag{5.23}$$

其中 $u=\log|x|$, $v=\log|y|$ 和 $t=\log|a^2|$。热带图如图12

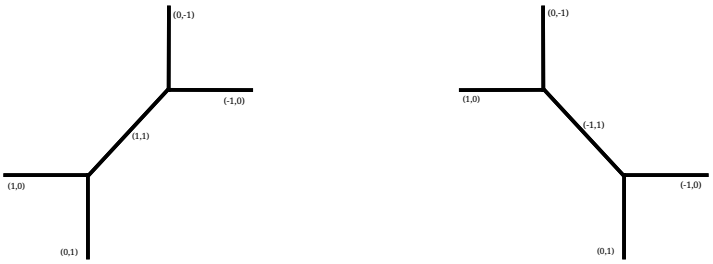


图12：平凡结的热带增广曲线。左图对应 $|a|<1$，右图对应 $|a|>1$。

5.5.2 约化三叶结

三叶结的约化增广曲线为（例如参见 [55]），

$$\Sigma_{3_1}: \qquad 1-x-y+xy-2xy^2+2a^2xy^2+a^2xy^3-x^2y^3-a^4xy^4+a^2x^2y^4=0.$$

相应的热带图为

$$\Sigma_{3_1}^{\mathrm{Trop}}: \qquad \mathrm{Max}\{0,u,v,u+v,u+2v,t+u+2v,t+u+3v,2u+3v,2t+u+4v,t+2u+4v\},$$

其中 $u=\log|x|$, $v=\log|y|$ 和 $t=\log|a^2|$。其分支和相位如图 13所示。

5.5.3 八字结

八字结的增广曲线为（例如参见 [56]），

$$\Sigma_{4_1}: \qquad x-x^2-2a^2xy+2x^2y-a^4y^2+x^3y^2+a^4y^3-a^2x^3y^3+2a^4xy^4-2a^4x^2y^4-a^6xy^5+a^4x^2y^5.$$

热带曲线为

$$\begin{aligned}\Sigma_{4_1}^{\mathrm{Trop}}: \qquad \mathrm{Max}\{&u,2u,t+u+v,2u+v,2t+2v,\\ &3u+2v,2t+3v,t+3u+3v,2t+u+4v,2t+2u+4v,3t+u+5v,2t+2u+5v\},\end{aligned}$$

其中 $u=\log|x|$、$v=\log|y|$ 和 $t=\log|a^2|$。其分支和相位如图 14所示。

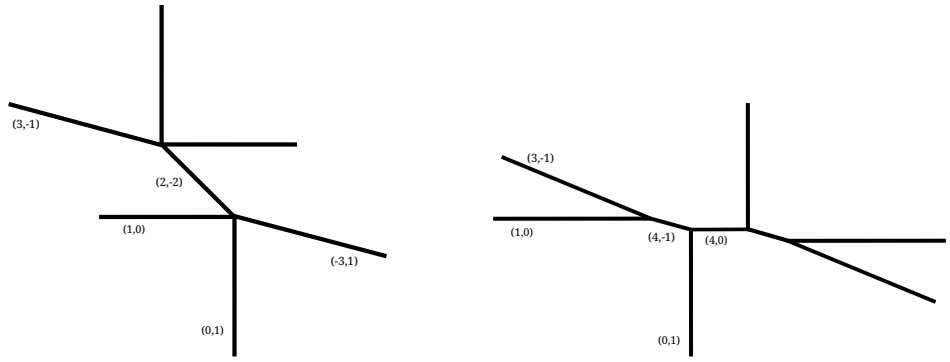


图13：三叶结的热带增广曲线。左图对应于 $|a|<1$，右图对应于 $|a|>1$。

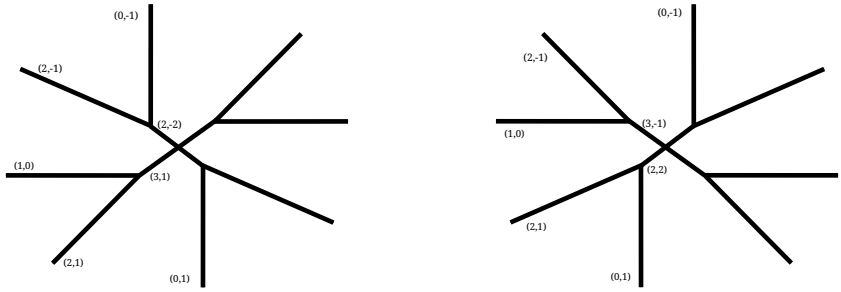


图14：4_1 纽结的热带增广曲线。左图显示 $|a|<1$，右图显示 $|a|>1$。

6 $(2,\ 1)$ 环面纽结——扭结平凡结

在本节中，我们以最简单的 $(2,2p+1)$-环面纽结为例说明我们的公式，设定 $p=0$，这给出了扭结平凡结。

未扭结平凡结在塞弗特框架和第 5.3.1 节定义的全局塞弗特坐标中的增广多项式为

$$A_{U,l}=1-y-x+a^2xy\,. \tag{6.1}$$

在对数坐标 $u=\log|x|$ 和 $v=\log|y|$ 中，热带增广曲线为

$$\Sigma_{0_1}^{\mathrm{Trop}}:\quad \mathrm{Max}\{0,u,v,2\log|a|+u+v\}. \tag{6.2}$$

如图 12 所示，余法丛分支标记为 $(1,\ 0)$，补空间分支标记为 $(0,\ 1)$。

6.1 余法丛分支

在余法丛分支上，$(x_l,y_l)=(x,y)$。余法丛配分函数是对称着色 HOMFLYPT 多项式的生成级数。回顾一下，对于一般的分拆 ν，未扭转平凡结的带色 HOMFLYPT 多项式为

$$H_\nu(a,q)=\prod_{\square\in\nu}\frac{aq^{c(\square)}-a^{-1}q^{-c(\square)}}{q^{h(\square)}-q^{-h(\square)}} \tag{6.3}$$

其中 $c(\square)$ 和 $h(\square)$ 分别表示杨图中一个方格的内容和钩长，该杨图表示分拆 λ。取对称分拆时，得到 $H_{(r)}(a, q) = a^{-r}q^r(a^2; q^2)_r/(q^2; q^2)_r$。将平凡结扭转为正扭转或负扭转，相当于将 $H_{(r)}$ 按 $a^{\pm 1}$ 重新缩放，由此得到以下余法丛配分函数

$$\psi_{L_{U^\pm}}(x, q, a) = \sum_{r\geq 0} \frac{(a^2; q^2)_r}{(q^2; q^2)_r} (a^{-1\pm 1}x)^r = \frac{(a^{1\pm 1}x; q^2)_\infty}{(a^{-1\pm 1}x; q^2)_\infty} \tag{6.4}$$

为方便起见，我们将 x 按 q^{-1} 重新缩放，并吸收因子 q^r。这定义了平凡结增广曲线的以下量子化

$$\hat{A}_{U^\pm,l} = 1 - \hat{y} - a^{-1\pm 1}\hat{x} + a^{1\pm 1}\hat{x}\hat{y}\,. \tag{6.5}$$

注意，选择正扭转对应于第 5.3.1 节中定义的塞弗特全局坐标。遵循我们的一般框架，我们将转而关注负扭转平凡结。然而，由于 $y \to 0$ 会给出$x \to a^2$，所得曲线并未用塞弗特全局坐标表示。因此，对 x 按 a^2重新缩放即可得到塞弗特坐标，这实际上给出了与正扭转时相同的曲线。因此，尽管我们研究的是负扭转平凡结，所选的坐标仍会迫使我们在两种情形下都考虑曲线$A_{U+,\ l}$。

我们回顾一下，余法丛配分函数有一种箭图表示，其中包含一个圆盘和一个反圆盘（带框架圆盘），二者之间没有链接数 [12]

$$\psi_{L_{U^\pm}}(x, q, a) = \sum_{d_1,d_2\geq 0} q^{d_1^2} \frac{(-a^{1\pm 1}q^{-1}x)^{d_1}}{(q^2; q^2)_{d_1}} \frac{(a^{-1\pm 1}x)^{d_2}}{(q^2; q^2)_{d_2}} \tag{6.6}$$

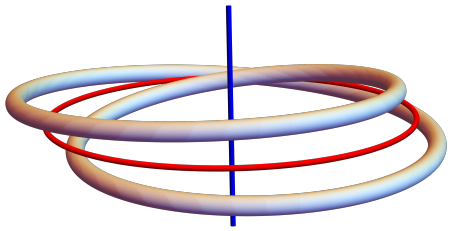


图 15：平凡结-Hopf 配边（负扭转）。

6.2 补空间分支

从上述讨论可知，在正扭转和负扭转之间切换，相当于对 x 进行缩放。在处理补空间时，这种缩放变得无关紧要，因为我们在第 5.3.1 节定义 Seifert 全局坐标时，无论如何都要求 $x \to 1$ 为 $y \to 0$。因此，在两种情况下，适当的缩放都会得到相同的经典增广曲线和相同的局部坐标。不失一般性，以下我们仅讨论正扭转。

扭结平凡结勒让德子流形与霍普夫链环勒让德子流形之间的配边如图 15 所示。我们考虑将配分函数（4.13）特化到 $p=0$。这给出

$$\begin{aligned}\psi_{M_U} &= \sum_{n_1,n_2\geq 0} H_{(1)^{n_1},(n_2)}(a,q)\, q^{-n_2^2-2\,n_1 n_2}\,(-q\,\mu^2)^{n_1}(-q^2\,\mu)^{n_2}\\ &\overset{(4.23)}{=} \sum_{d_1,d_2,d_3,d_4,d_5\geq 0}\sum_{d_6=0}^{1} q^{d_1^2-d_3^2-3d_5^2-2d_3d_1-2d_4d_1-2d_5d_1-3d_6^2-2d_2d_3-2d_2d_4-2d_3d_4-2d_2d_5-4d_3d_5-4d_4d_5-6d_3d_6-6d_4d_6-6d_5d_6}\\ &\qquad\times \frac{(-q\mu)^{2d_1}}{(q^2;q^2)_{d_1}}\frac{(a^2q^2\mu^2)^{d_2}}{(q^2;q^2)_{d_2}}\frac{(-q^3\mu)^{d_3}}{(q^2;q^2)_{d_3}}\frac{(a^2q^2\mu)^{d_4}}{(q^2;q^2)_{d_4}}(-a^2q^3\mu^3)^{d_5}(q^3\mu^3)^{d_6}\,.\end{aligned} \tag{6.7}$$

我们通过数值计算发现，这可以化为更简单的形式

$$\psi_{M_U} = \frac{(q^2y;q^2)_\infty}{(q^2a^2y;q^2)_\infty}\,, \tag{6.8}$$

此外，它还有一种基于圆盘和反圆盘的简单箭图描述

$$\psi_{M_U} = \sum_{d_1,d_2\geq 0} q^{d_2^2}\frac{(q^2a^2y)^{d_1}}{(q^2;q^2)_{d_1}}\frac{(-qy)^{d_2}}{(q^2;q^2)_{d_2}}\,. \tag{6.9}$$

从这些表达式可以很容易看出，我们得到了平凡结补空间的（6.1）的如下量子化： M_U

$$\hat{A}_{U,m} = 1-\hat{y}-\hat{x}+q^2a^2\hat{x}\hat{y}\,. \tag{6.10}$$

将其与余法丛量子曲线进行比较，我们发现，对于平凡结，在变量替换 $a\to aq$ 之后，增广曲线的补空间分支量子化与余法丛分支量子化一致

$$\hat{A}_{U,m}(\hat{x},\hat{y},a) = \hat{A}_{U,l}(\hat{x},\hat{y},qa)\,. \tag{6.11}$$

请注意，这与 $\mathfrak{gl}_1$ 第 6 节中得到的余法丛和平凡结补空间的 skein 值平凡结递归的 [10, skein3] 特化相容。将此公式提升到世界面 skein 模时，需要平移 $a^2\to a^2a_Ma_L$，这对应于这样一个事实：任何与 S^3 相交的曲线也会与 L 和 M相交，因为它们的连通和与 S^3同胚，而且我们计数的是与零截面 M 非常接近的曲线。

相应地，我们还发现，我们的结果与 [53,方程 (54)], 中计算出的 $F_K(a,\ q,\ x)$ 不变量一致，只需作如下变量对应

$$\psi_{M_U}(a,q,y) = F_K(a^2q^2,q^2,y)\,. \tag{6.12}$$

注 *6.1*（膜重组带来的 q-平移）。*(6.11)* 中的 $a\to aq$ 有其几何来源。它是将补空间拉格朗日子流形视为对 T^*S^3 的余法丛和零截面进行手术后得到的结果，见 *[10]*。回想一下， a 的幂计数的是与 T^*S^3 中 S^3 的 *4*-链的交；而在 L 上的 $\mathfrak{gl}_1$-*skein* 中，与 L 上的 *4*-链的交会产生 q 的幂（在 *skein* 的 $\mathfrak{gl}_N$-特殊化中为 $a=q^N$）， 平移 $a\to qa$ 对应于 M_K 的 *4*-链是 L_K 和 S^3 的 *4*-链之和的一个平滑化。

6.3 增广曲线

我们按照第4.4节，说明由到霍普夫链环的配边导出增广曲线的新推导。

扭曲霍普夫链环增广簇被配边修改为（4.26），在此情形下其取值为

$$\begin{aligned}\tilde{B}_1 &= 1-\eta_1-\xi_1\eta_1\eta_2^{-1}+a^2\xi_1\eta_2^{-1}\\ \tilde{B}_2 &= 1-\eta_2-\xi_2\eta_1^{-1}\eta_2^{-1}+a^2\xi_2\eta_1^{-1}\end{aligned} \tag{6.13}$$

而平凡结的勒让德子环面 holonomy 坐标 $(\lambda,\ \mu)$ 通过将 (4.27) 和 (4.28) 特化，与霍普夫 holonomy 相关

$$\xi_1=-\mu^2\,,\qquad \xi_2=-\mu\,,\qquad \lambda^{-1}=\eta_1^2\eta_2\,. \tag{6.14}$$

综合起来，这些将其约化为 $(\mathbb{C}^*)^2$ 的一个子簇，其坐标为 $\lambda,\ \mu$ 并且包含 (6.1) 作为因子

$$(1-\mu-\lambda+a^2\lambda\mu)(\dots)=0\,. \tag{6.15}$$

6.4 内部分支

图12所示的内部对角边属于类型 $(r_1,r_2)=(1,1)\sim(-1,-1)$。与这条边相关联的分支有两个：一个对应于左下顶点（位于 $x=y=1$），另一个对应于右上顶点（位于 $x=y=a^{-2}$）。对于前者，我们将 $(r_1',r_2')=(-1,-1)$ 识别为相同，并选取 $s_1'=-1, s_2'=0$。由 (5.9) 可推得，合适的局部坐标为

$$x_\alpha=x^{-1}\,,\qquad y_\alpha=-xy^{-1}\,. \tag{6.16}$$

要量子化这一分支，我们只要求配分函数具有箭图描述。箭图矩阵可以从圆盘势中推导出来。为此，我们将经典曲线写成局部坐标形式

$$A_{U,\alpha}=1-y_\alpha+x_\alpha y_\alpha-a^2x_\alpha^{-1} \tag{6.17}$$

由此得到

$$W^{U,\alpha}=\int\log y_\alpha\,d\log x_\alpha=\mathrm{Li}_2(x)+\mathrm{Li}_2(a^2x^{-1})\,. \tag{6.18}$$

同一圆盘势也可由下列箭图配分函数的半经典极限给出

$$\psi_{\text{diagonal}}=\sum_{d_1,d_2\geq0}q^{d_1^2+d_2^2}\frac{(-q^{\beta_1}x_\alpha)^{d_1}}{(q^2;q^2)_{d_1}}\frac{(-a^2q^{\beta_2}x_\alpha^{-1})^{d_2}}{(q^2;q^2)_{d_2}}=(q^{\beta_1+1}x_\alpha;q^2)_\infty(q^{\beta_2+1}a^2x_\alpha^{-1};q^2)_\infty\,, \tag{6.19}$$

其中 β_1,β_2 个待确定的未知量（其中一个可以通过重新缩放 x_α 吸收）。注意到 th at

$$\hat{y}_\alpha\cdot\psi_\alpha=\frac{1-q^{\beta_2-1}a^2x_\alpha^{-1}}{1-q^{\beta_1+1}x_\alpha}\psi_\alpha, \tag{6.20}$$

我们推导出所研究分支上的量子曲线为

$$\hat{A}_{U,\alpha}=1-\hat{y}_\alpha-q^{\beta_2-1}a^2\hat{x}_\alpha^{-1}+q^{\beta_1+1}\hat{x}_\alpha\hat{y}_\alpha. \tag{6.21}$$

和之前一样，我们可以将其中一个 β_i 吸收到 x的重新缩放中。另一个则保留为未定参数。

7 (2,3) 环面纽结——三叶结

接下来我们考虑负三叶纽结 3_1, ，其对应于 $p = 1$，见图16。负三叶纽结在塞弗特框架下的完整增广曲线已知为，参见例如 [55, 第 5] 节（其中的对应关系为 $\lambda = x$、$\mu = ya^2$、$U = a^2$）。

$$1 - y - x + xy - 2xy^2 + 2a^2xy^2 + a^2xy^3 - a^4xy^4 - x^2y^3 + a^2x^2y^4 = 0. \tag{7.1}$$

注意，x, y 是按照我们对 Seifert 全局坐标的定义进行归一化的。我们通过引入一个额外的分支来定义曲线 A_{3_1}，如下所示

$$A_{3_1} = (1 - a^2y^2)\left(1 - y - x + xy - 2xy^2 + 2a^2xy^2 + a^2xy^3 - a^4xy^4 - x^2y^3 + a^2x^2y^4\right), \tag{7.2}$$

这是因为量子曲线必然会包含这些额外项，我们很快就会看到。

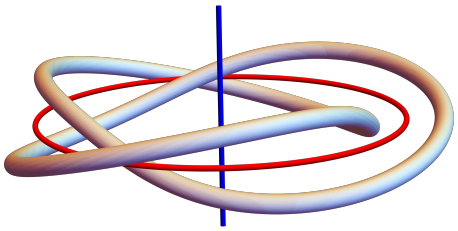


图 16：负三叶结。

I在对数坐标 $u = \log|x|$ 和 $v = \log|y|$中，热带曲线表示为

$$\Sigma^{\mathrm{Trop}}_{3_1}\colon \mathrm{Max}\{0, u, v, u{+}v, u{+}2v, 2\log\ a{+}u{+}2v, 2\log\ a{+}u{+}3v, 2u{+}3v, 4\log\ a{+}u{+}4v, 2\log\ a{+}2u{+}4v\}. \tag{7.3}$$

相应的图示于图13。现在有三种类型的外部边：对应于余法向填充的水平边、对应于补空间填充的竖直边，以及一种新型的对角边；在极限 $a = 1$ 下，它们对应于补空间分支上的非平凡平坦联络，见 [40]。另请注意，内部边的数量会根据$|a| < 1$或 $|a| > 1$而变化。

7.1 余法丛分支

在黑板框架下, 负三叶结的对称着色 HOMFLYPT 多项式 are

$$H^{\mathrm{bb}}_{(r)}(a, q) = q^{-3r^2}\left(\frac{q^2}{a^2}\right)^r \frac{(a^2;q^2)_r}{(q^2;q^2)_r}\left[\sum_{k=0}^{r} \frac{(q^2;q^2)_r}{(q^2;q^2)_k(q^2;q^2)_{r-k}} q^{2k(r+1)}(a^2q^{-2};q^2)_k\right] \tag{7.4}$$

我们将在塞弗特框架下进行计算，这相当于将 H_r 乘以 $q^{3r(r-1)}$。为方便起见，我们再引入一个线性重标度 by$(qa^2)^r$

$$H_{(r)}(a, q) := q^{3r(r-1)}\left(qa^2\right)^r H^{\mathrm{bb}}_{(r)}(a, q) \tag{7.5}$$

配分函数是对称着色（未约化）HOMFLYPT 多项式的生成级数

$$\begin{aligned}\psi_{L_K}(x,q,a) &= \sum_{r\geq 0} H_{(r)}(a,q)x^r \\ &= \sum_{r\geq 0}\frac{(a^2;q^2)_r}{(q^2;q^2)_r}\left[\sum_{k=0}^{r}\frac{(q^2;q^2)_r}{(q^2;q^2)_k(q^2;q^2)_{r-k}}q^{2k(r+1)}(a^2q^{-2};q^2)_k\right]x^r\,.\end{aligned} \tag{7.6}$$

它被增广曲线的以下量子化所湮灭

$$\begin{aligned}\hat{A}_{L_K} &= 1-\hat{y}-\frac{a^2\hat{y}^2}{q^6}+\frac{a^2\hat{y}^3}{q^6} \\ &\quad+\hat{x}\left(a^6\hat{y}^6-a^4\left(q^2+1+q^{-2}\right)\hat{y}^4-a^4q^2\hat{y}^5+a^2\left(q^2+q^4\right)\hat{y}^4+a^2\left(q^2+1+q^{-2}\right)\hat{y}^2-\left(q^2+q^4\right)\hat{y}^2+q^2\hat{y}-1\right) \\ &\quad+\hat{x}^2\left(-q^8\hat{y}^3+a^2q^8\hat{y}^4+a^2q^{14}\hat{y}^5-a^4q^{14}\hat{y}^6\right)\end{aligned} \tag{7.7}$$

注意，在经典极限下，这条曲线还原为经典曲线（7.2），其中包含了增广曲线（7.1）之外的其他因子。余法丛配分函数具有一种涉及六个圆盘的箭图表示 [12]

$$\psi_{L_K}(x,q,a)=\sum_{d_1,\ldots,d_6\geq 0} q^{(C_{L_{3_1}})_{ij}d_id_j}\prod_{i=1}^{6}\frac{x_i^{d_i}}{(q^2;q^2)_{d_i}} \tag{7.8}$$

其箭图邻接矩阵为

$$C_{L_{3_1}}=\begin{pmatrix}0&0&1&2&1&2\\0&1&1&2&1&2\\1&1&2&2&2&3\\2&2&2&3&2&3\\1&1&2&2&3&3\\2&2&3&3&3&4\end{pmatrix} \tag{7.9}$$

变量为

$$x_1=x\,,\quad x_2=-\frac{a^2}{q}x\,,\quad x_3=q^2x\,,\quad x_4=-a^2qx\,,\quad x_5=-\frac{a^2}{q}x\,,\quad x_6=\frac{a^4}{q^2}\,. \tag{7.10}$$

7.2 补空间分支

全纯曲线的配分函数由（4.13）在 $p=1$ 处取特化得到

$$\psi_{M_{3_1}}=\sum_{n_1,n_2\geq 0}H_{(1)^{n_1},(n_2)}(a,q)\,q^{-3n_2^2-2\,n_1n_2}\,(-q\,\mu^2)^{n_1}(-q^4\,\mu^3)^{n_2}\,. \tag{7.11}$$

相应的箭图描述由（4.23）给出。基本曲线包括两个绕纽结子午线两圈的圆盘、两个绕子午线三圈的圆盘，以及一个环带和一个反环带，其边界总共绕行五圈。因此，以箭图表示给出的补空间分支配分函数为

$$\psi_{M_{3_1}}=\sum_{d_1,\ldots,d_5\geq 0}\sum_{d_6=0}^{1}q^{(C_{M_{3_1}})_{ij}d_id_j}\frac{\prod_{i=1}^{6}y_i^{d_i}}{\prod_{i=1}^{4}(q^2;q^2)_{d_i}} \tag{7.12}$$

其箭图邻接矩阵为

$$C_{M_{3_1}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -3 & -3 & -4 & -5 \\ -1 & -1 & -3 & -2 & -4 & -5 \\ -1 & -1 & -4 & -4 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & -5 & -5 & -5 & -5 \end{pmatrix} \tag{7.13}$$

以及变量

$$y_1 = -qy^2\,, \quad y_2 = a^2q^2y^2\,, \quad y_3 = -q^5y^3\,, \quad y_4 = a^2q^4y^3\,, \quad y_5 = -a^2q^5y^5\,, \quad y_6 = q^5y^5\,. \tag{7.14}$$

配分函数确定了对 A_{3_1} 的如下量子化（除去对 μ 重新缩放的自由度）：

$$\begin{aligned} \hat{A}_{M_K} = & \frac{(\hat{y}-1)\left(a^2\hat{y}^2-q^4\right)}{q^4} \\ & + \left(-\frac{a^2\hat{y}^2\left(a^2\hat{y}^3+\left(a^2-1\right)\hat{y}^2-1\right)}{q^4} - \frac{\left(a^2-1\right)\hat{y}^2\left(a^2\hat{y}^2-1\right)}{q^2} + \left(a^2-1\right)\hat{y}^2 + \frac{a^4\hat{y}^4\left(a^2\hat{y}^2-1\right)}{q^6} + \hat{y} - 1\right)\hat{x} \\ & + \frac{\hat{y}^3\left(a^2\hat{y}^2-1\right)\left(q^2-a^2\hat{y}\right)}{q^6}\hat{x}^2 \end{aligned} \tag{7.15}$$

其中算子 $\hat{}x$、$\hat{}y$ 的作用方式为

$$\hat{x}f(y) = f(q^{-2}y)\,, \qquad \hat{y}f(y) = yf(y)\,. \tag{7.16}$$

比较余法丛和补空间递归算子，即方程（7.7）和（7.15），可见$\hat{}$ $\hat{}$ A_{M_K} 由 A_{L_K} 通过同时重新缩放$\hat{}x$ 和 a

$$\hat{A}_{M_{3_1}}(\hat{x},\hat{y},a) = \hat{A}_{L_{3_1}}(\hat{x},\hat{y},qa)\,. \tag{7.17}$$

我们注意到 a 发生了 q的平移，这与平凡结的情形（6.11）相同。其起源可通过膜重组来理解，详见注释 6.1。

7.3 增广曲线

在讨论其他分支之前，我们先暂停一下，说明如何通过第 4.4 节的配边论证，从扭曲霍普夫链环的增广曲线得到三叶结的增广曲线。对于 $p = 1$扭曲霍普夫链环的增广簇（4.26），其描述为

$$\begin{aligned} \tilde{B}_1 &= 1 - \eta_1 - \xi_1\eta_1\eta_2^{-1} + a^2\xi_1\eta_2^{-1} \\ \tilde{B}_2 &= 1 - \eta_2 - \xi_2\eta_1^{-1}\eta_2^{-3} + a^2\xi_2\eta_1^{-1}\eta_2^{-2} \end{aligned} \tag{7.18}$$

而平凡结的勒让德子环面和乐所对应的坐标 $(\lambda,\ \mu)$ 现在可通过对（4.27）–（4.28）进行特化，与霍普夫和乐建立联系

$$\xi_1 = -\mu^2\,, \qquad \xi_2 = -\mu^3\,, \qquad \lambda^{-1} = \eta_1^2\eta_2^3\,. \tag{7.19}$$

综合起来，这些 归结为 $(\mathbb{C}^*)^2$ 的一个子簇，其坐标为 λ，μ 其中包含 7.1 作为因子

$$(1-\mu-\lambda+\lambda\mu-2\lambda\mu^2+2a^2\lambda\mu^2+a^2\lambda\mu^3-a^4\lambda\mu^4-\lambda^2\mu^3+a^2\lambda^2\mu^4)(\dots) = 0\,. \tag{7.20}$$

7.4 外部对角分支

现在考虑对角分支，它对应于图 13 中热带图右下方的外部对角腿。这里，我们无法将其几何解释为 A-膜的模空间，也无法直接计算配分函数 ψ_δ。我们可以如下推导可能的配分函数：

我们首先计算经典局部坐标 (x_δ, y_δ)。从 $(x, y) = (x_m, y_m)$ 出发，我们将框架变换为 $x = x'(-y')^{-3}$，$y = y'$。此时，对角分支的斜率变为 (0, 1)，我们可以识别出 $x_m = y'$, $y_m = (x')^{-1}$。在量子层面，框架变换由 $\hat{x} = (-q^{-1}\hat{y}')^{-3}\hat{x}'$, $\hat{y} = \hat{y}'$ 实现，而傅里叶变换为 $\hat{x}'' = \hat{y}'$, $\hat{y}'' = (\hat{x}')^{-1}$。最后，我们定义 $\hat{x}_\delta = \hat{x}''$ 和 $\hat{y}_\delta = q^{-5}\hat{y}''$。将它们应用于补量子曲线 (7.15)

$$\hat{A}_{M_K} = f_0(a, q, \hat{y}) + f_1(a, q, \hat{y})\hat{x} + f_2(a, q, \hat{y})\hat{x}^2 \tag{7.21}$$

我们得到

$$\begin{aligned}\hat{A}_\delta &= f_2(a, q, q^4\hat{x}_\alpha)q^{-8}\hat{x}_\alpha^{-3} + f_1(a, q, q^4\hat{x}_\alpha)\hat{y}_\alpha + f_0(a, q, q^4\hat{x}_\alpha)q^{14}\hat{x}_\alpha^3\hat{y}_\alpha^2 \\ &= 1 - a^2q^2\hat{x}_\alpha - a^2q^8\hat{x}_\alpha^2 + a^4q^{10}\hat{x}_\alpha^3 \\ &+ \left[a^6q^{18}\hat{x}_\alpha^6 - a^4q^{16}\hat{x}_\alpha^5 - a^4\left(q^4 + q^2 + 1\right)q^{10}\hat{x}_\alpha^4 + a^2\left(q^4 + q^2 + 1\right)q^4\hat{x}_\alpha^2\right. \\ &+ a^2\left(q^6 + q^4\right)q^8\hat{x}_\alpha^4 + q^4\hat{x}_\alpha - \left.\left(q^2 + 1\right)q^6\hat{x}_\alpha^2 - 1\right]\hat{y}_\alpha \\ &+ \left(-a^2q^{22}\hat{x}_\alpha^6 + a^2q^{18}\hat{x}_\alpha^5 + q^{18}\hat{x}_\alpha^4 - q^{14}\hat{x}_\alpha^3\right)\hat{y}_\alpha^2\end{aligned} \tag{7.22}$$

其中，$\hat{x}_\delta$, $\hat{y}_\delta$ 表示适用于对角分支的量子环面生成元。

被这条曲线消去的配分函数具有如下箭图结构

$$\psi_{\text{diagonal}}(x_\alpha) = \sum_{d_1,\ldots,d_5\geq 0} q^{(C_{\text{diagonal}})_{ij}d_id_j}\prod_{i=1}^{5}\frac{x_i^{d_i}}{(q^2;q^2)_{d_i}} \tag{7.23}$$

其中箭图邻接矩阵为

$$C_{\text{diagonal}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{7.24}$$

箭图变量为

$$x_1 = a^2q^2x_\alpha\,, \quad x_2 = -q^3x_\alpha\,, \quad x_3 = q^4x_\alpha^2\,, \quad x_4 = q^2x_\alpha\,, \quad x_5 = -qx_\alpha\,. \tag{7.25}$$

该箭图形式上对应于五个基本圆盘，其中四个在 x_α 中的次数为 1，另一个（第三个）在同调生成元变量 x_α 中的次数为 2。圆盘 3 与其他圆盘的链接数不是 2 的整数倍，这表明其两条局部边界股（形式上）分开。还值得注意的是，圆盘 4 和 5 构成一对准消去对：它们本可完全消去，唯一的例外是圆盘 4 与圆盘 1 链接一次，而圆盘 5 没有与圆盘 1 链接。

7.5 内部对角分支

最后，我们考虑图 13 中热带图的内部对角边 $|a| < 1$。事实上，我们将限制在通过令 $a = 0$ 代入（7.2）得到的极值曲线，它给出

$$1 - y - x + xy - 2xy^2 - x^2y^3 = 0\,, \tag{7.26}$$

其热带极限由下式描述

$$\text{Max}\{0, u, v, u+v, u+2v, 2u+3v\}. \tag{7.27}$$

热带图示意图见图17，其中内部对角边现在是左上方的外部对角边，其类型为$(r_1, r_2) = (2, -2)$。因此，这是一个阶数为的轨形边2。

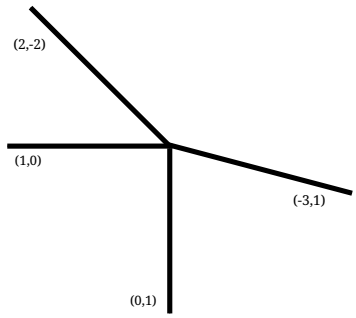


图17：极端极限下三叶结的热带曲线

经典局部坐标由 5.9 式中 $(r_1', r_2') = (1, -1)$ 和 $(s_1', s_2') = (0, -1)$ 得到，因此有

$$x_\alpha = y^{-1}, \qquad y_\alpha = -xy. \tag{7.28}$$

用这些坐标表示，经典（极值）曲线的形式如下

$$(1-y_\alpha)^2 = x_\alpha(1-y_\alpha+x_\alpha y_\alpha). \tag{7.29}$$

由 7.29 式计算得到的圆盘势为

$$\begin{aligned} W_\pm(x_\alpha) &= \int \log y_\alpha \, d\log x_\alpha \\ &= \frac{1}{2}\left(-1 \pm \sqrt{5}\right) x_\alpha + \frac{1}{40}\left(-5 \pm 3\sqrt{5}\right) x_\alpha^2 + \frac{1}{450}\left(-25 \pm 11\sqrt{5}\right) x_\alpha^3 + O\left(x_\alpha^4\right). \end{aligned} \tag{7.30}$$

这些表达式有两个有趣的性质，二者都源于内部分支的轨形指标为 2。一方面，记 $y_\pm(x_\alpha)$ 为 7.29 式的两个根，它们的乘积为

$$y_+ y_- = 1 - x_\alpha \tag{7.31}$$

因此

$$W_+ + W_- = -\text{Li}_2(x_\alpha). \tag{7.32}$$

另一方面，轨形势 $W_\pm$ 的系数是无理数。这与通常（开）格罗莫夫-维滕理论的预期形成对比，正如注 5.2 所预示的那样。

T为探究无理性的起源，我们考虑一个由.....定义的单参数变形。 y

$$(1-y_\alpha)^2 = x_\alpha(1-y_\alpha+\beta x_\alpha y_\alpha), \tag{7.33}$$

其热带化为

$$\text{Max}\{0, u, v, u+v, 2v, 2u+v+\log\beta\}. \tag{7.34}$$

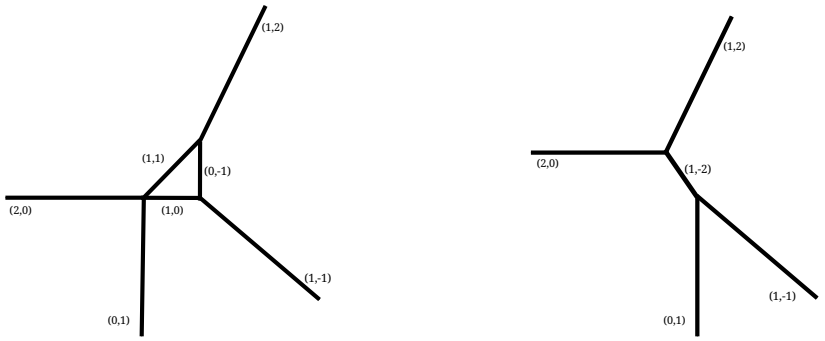


图18：（7.34）的热带图。水平分支是内部对角$(2,\ -2)$ 分支，属于图17中的外部三叶结热带图。左侧：带有 $\beta<1$的变形。右侧： $\beta>1$。

该热带簇的热带图如图18所示。接下来我们考虑 β 圆盘势的变形

$$W_{\pm}=\frac{1}{2}\left(-1\mp\sqrt{1+4\beta}\right)x_{\alpha}+\left(\frac{\mp(1+2\beta)-\sqrt{1+4\beta}}{8\sqrt{1+4\beta}}\right)x_{\alpha}^{2}$$

$$+\left(\frac{\mp(-1-6\beta-6\beta^{2}+2\beta^{3})-\sqrt{1+4\beta}-4\beta\sqrt{1+4\beta}}{18(1+4\beta)^{3/2}}\right)x_{\alpha}^{3}+\mathcal{O}(x_{\alpha})^{4}\,.$$

这仍然是模空间的无理函数。然而，若将 β 视为闭弦参数，则在 $\beta=0$ 附近相应的大体积展开具有有理系数

$$\begin{aligned}W_{+}=&\left(-1-\beta+\beta^{2}-2\beta^{3}+5\beta^{4}-14\beta^{5}+42\beta^{6}-132\beta^{7}+429\beta^{8}-1430\beta^{9}+4862\beta^{10}+O\left(\beta^{11}\right)\right)x_{\alpha}\\&+\left(-\frac{1}{4}-\frac{\beta^{2}}{4}+\beta^{3}-\frac{15\beta^{4}}{4}+14\beta^{5}-\frac{105\beta^{6}}{2}+198\beta^{7}-\frac{3003\beta^{8}}{4}+2860\beta^{9}-\frac{21879\beta^{10}}{2}+O\left(\beta^{11}\right)\right)x_{\alpha}^{2}\\&+\left(-\frac{1}{9}-\frac{\beta^{3}}{9}+\beta^{4}-6\beta^{5}+\frac{280\beta^{6}}{9}-150\beta^{7}+693\beta^{8}-\frac{28028\beta^{9}}{9}+13728\beta^{10}+O\left(\beta^{11}\right)\right)x_{\alpha}^{3}\\&+O(x_{\alpha}^{4})\end{aligned}\tag{7.35}$$

并且 W_{-} 仍由（7.32）给出。

利用圆盘势的这些有理值系数，我们得到如下开弦解释。注意到 W_{+} 具有箭图描述及相应的配分函数

$$\psi_{\text{internal}}^{a=0}=\sum_{d_{1},d_{2},d_{3}\geq0}q^{2d_{2}^{2}-d_{3}^{2}+2d_{1}d_{3}}\frac{(q^{\delta_{1}}x_{\alpha})^{d_{1}}}{(q^{2};q^{2})_{r_{1}}}\frac{(q^{\delta_{2}}\beta)^{d_{2}}}{(q^{2};q^{2})_{d_{2}}}\frac{(-q^{\delta_{3}}\beta)^{d_{3}}}{(q^{2};q^{2})_{d_{3}}}\tag{7.36}$$

其中 δ_{i} 是三个基本圆盘的 q荷，无法由圆盘势确定。该箭图由三个彼此没有任何链接数的圆盘组成。其中两个圆盘不依赖于 x_{α}，因此 x_{α}^{r} 的系数对应于 β的无穷幂级数。

在量子层面，配分函数被以下算子湮灭

$$\hat{A}_{\text{internal}}^{a=0}=1-(1+q^{-2})\hat{y}_{\alpha}+q^{-2}\hat{y}_{\alpha}^{2}-q^{\delta_{1}}\hat{x}_{\alpha}(1-\hat{y}_{\alpha}+q^{1+\delta_{1}+\delta_{3}}\hat{x}_{\alpha}\hat{y}_{\alpha})\tag{7.37}$$

请注意，这对任意的 δ_1、δ_2、δ_3 都成立。此外，它不依赖于 δ_2。事实上，仅凭这一点无法完全确定配分函数，还需要施加闭弦模空间 q-差分方程，即涉及 β 平移的适当 q-差分方程。

8 关于结补空间的 Z-不变量关系的评论

在本节结尾，我们简要讨论与结补空间 Z 不变量相关的研究，并特别关注后者关于在 M_K上进行曲线计数的猜想性解释。

8.1 几何分支上的曲线计数与陈-西蒙斯理论

任意纤维化纽结的增广曲线都至少有两个“几何”分支，即可被几何地解释为某个拉格朗日子流形 A膜的模空间的片段：余法丛分支以余法丛拉格朗日子流形 L_K 为参数，补空间分支则以纽结补空间拉格朗日子流形 M_K为参数。

$\mathfrak{gl}_1$-skein值配分函数 ψ_α 对解消合流形中边界位于相应拉格朗日子流形 L_α 上的全纯曲线进行计数。此外，由于合流形跃迁下的不变性，它也等同于 T^*S^3中的开弦配分函数

$$\psi_\alpha = \psi_{\text{top}}(L_\alpha, T^*S^3)\,. \tag{8.1}$$

当 L_α 是纽结补空间拉格朗日子流形 M_K时，配分函数ψ_{M_K} 统计背景为 M_K 中的 $N = \log_q a$ 个零截面上的膜S^3上单个膜边界上的世界面瞬子。此外，根据 [25]的拓扑规范/弦对偶，ψ_{M_K} 对应于以下配分函数：$U(1)$ 在 M_K 上的陈-西蒙斯量子场论，其威尔逊线插入与世界面边界相对应。

在 M_K 上的陈-西蒙斯理论，在构造用于结补空间的三变量级数 $F_K(a,\ q,\ y)$中发挥着重要作用。该级数最初由 $a = q^2$ 于 [15]作为具有边界 [14,57,58],的流形的 $\widehat{Z}$ 不变量引入，后来在 [29,53,59–62]中推广到任意 N。

8.2 用傅里叶-拉普拉斯变换方法计算 F_K

文献中采用的 F_K 工作定义（经过适当归一化）是对余法丛配分函数（5.21）作傅里叶-拉普拉斯变换

$$\psi_{L_K}(a,q,x) \overset{\text{Fourier}}{\longleftrightarrow} F_K(a,q,y)\,. \tag{8.2}$$

通常通过将 $H_{(r)}(a,q)$ 写成关于 a, q, q^{2r} 的函数，并替换 $q^{2r} \to y$来定义。按照构造，所得的关于 y 的幂级数被余法丛量子曲线所消去

$$\hat{A}_{\text{conormal}} \cdot F_K(a,q,y) = 0\,, \tag{8.3}$$

但须注意，$\mathfrak{gl}_1$ 环面 skein 纽结代数通过傅里叶对偶表示作用

$$\hat{x} f(y) = f(q^{-2}y)\,, \qquad \hat{y}\, f(y) = y\, f(y)\,. \tag{8.4}$$

对 Z 的几何解释曾在 [14, 第 2 节9], 中被猜想提出：它应与三维流形在其自身余切空间中的开格罗莫夫-维滕不变量的配分函数相关

丛 $M \subset T^*M$。如果我们取 $M = M_K$，但用 T^*S^3 替换 T^*M，并将 $M_K \subset S^3$ 视为一个子流形，就得到如下对 F_K的猜想性解释

$$F_K \stackrel{?}{=} \psi_{\text{top}}(M_K, T^*S^3)\,. \tag{8.5}$$

根据（8.1），当 $F_K = \psi_{M_K}$ 时，该猜想成立。此外，由于（8.3），当补空间分支和余法丛分支上的世界面量子化曲线一致时，这一结论也成立

$$\hat{A}_l \doteq \hat{A}_m\,. \tag{8.6}$$

这里 $\doteq$ 表示在世界面 skein 理论的背景下相差某些 q 平移后的相等 [10], ，例如备注 6.1 中遇到的情形。因此，第 5.4 节讨论的量子化的整体一致性问题，直接关系到如何为 F_K 不变量提供计数几何解释。

我们对平凡结和三叶结的结果，以及更一般地，$T_{2,\ 2p+1}$ 环面纽结的结果表明，（8.5）经过微调后确实成立。接下来我们将讨论这些调整。

第一处调整涉及通过对着色HOMFLYPT生成级数施行傅里叶-拉普拉斯变换来定义 F_K 的通常方式。请注意，这一过程取决于余法丛分支所选的框架。改变框架会使 $x \to x\,(-y)^{\,f}$，从而改变 $H_{(r)}$ 作为 q^r 的函数。从热带图的角度看，改变框架可以将任意一条非水平边（即类型为 $(r_1,\ r_2)$ 且 $r_2 \neq 0$ 的边）变为垂直边（即类型为 $(0,\ r_2)$ 的边），只需适当选择 f，见图 11。由于垂直分支的概念取决于框架，通过傅里叶-拉普拉斯变换定义 F_K（该变换将水平分支与垂直分支联系起来）也取决于框架。如第 5.3 节所述，塞弗特框架确保补空间分支是垂直的，因此为通过对HOMFLYPT生成级数施行傅里叶-拉普拉斯变换来计算 F_K 提供了恰当的框架。

接下来，我们讨论三叶结补空间上的曲线计数配分函数（7.12）与F_{3_1} 在 [53, 第 5 节2]中计算的不变量之间的比较。这两者显然不同。这种差异部分源于上文讨论的原因。另一个重要区别在于， [53] 使用了 [54, 式（2.24）], 中的量子曲线；该曲线（在令 $t = -1$之后）适用于 HOMFLYPT 多项式的约化归一化。在经典层面，我们的曲线（7.2）与 [54] 中的曲线之间的关系可通过代入 $x \to (1-ax)\,(1-x)^{-1}a^{-1}y$、$y \to a^{-1}x^{-1}$ 和 $a \to a^{1/2}$，再乘以整体因子 $a^4x^6\,(x-1)\,(1-ax)^{-1}\,(1-ax^2)^{-1}$得到。实际上，这给出了 [54, 式（2.25）] 中的曲线，其中 $t = -1$。对 x变量进行代换时出现的有理因子，实现了从未约化归一化到约化归一化的转换。全纯曲线的配分函数$\psi_{m_{3_1}}$ 对应于被未约化曲线湮灭的生成级数，而 F_{3_1} 在 [53]中计算得到的函数则被约化曲线湮灭。

类似的评注也可应用于曲线计数配分函数之间的比较，该配分函数定义在$T_{2,\ 2p+1}$ 环面纽结（4.23），以及 F_K 不变量，其计算见于 [53,式 (78)]。

致谢

S.C. 的研究工作得到了项目“弦理论与枚举几何中的结不变量拟阵结构”的支持，该项目由 Vergstiftelsenand 和瑞典研究委员会（VR 2022-06593）资助，并通过乌普萨拉大学几何与物理卓越中心提供支持。T.E. 得到了克努特和爱丽丝·瓦伦堡基金会、KAW2020.0307 瓦伦堡学者项目、瑞典研究委员会 VR 2022-06593、乌普萨拉大学几何与物理卓越中心以及项目资助 VR 2024-04417 的支持。P.L. 的研究工作得到了克努特和爱丽丝·瓦伦堡基金会、KAW2020.0307 瓦伦堡学者项目以及瑞典研究委员会 VR 2022-06593 和乌普萨拉大学几何与物理卓越中心的支持。S.C. 感谢 Lukas Nakamura 的讨论。

一个箭图链接数配边算子

ˆ 在本附录中，我们将概述配边算子 $\mathcal{O}$，它将由两个箭图编码的曲线计数联系起来；这两个箭图具有相同的一组基本曲线，但其边界之间的链接数不同。

A.1 一般构造

我们考虑一个具有 Q 个 K 顶点和邻接矩阵 C的箭图。其分拆函数定义了由 K 个实心环面组成的集合的 skein 模中的一个元素

$$Z = \sum_{\boldsymbol{d}\in\mathbb{Z}_{\geq 0}^{\times K}} q^{\boldsymbol{d}^t\cdot C\cdot \boldsymbol{d}} \prod_{i=1}^{K} \frac{x_i^{d_i}}{(q^2;q^2)_{d_i}} \quad \in \quad \mathrm{Sk}_{\mathfrak{gl}_1}(\bigsqcup_{j=1}^{K} S^1\times D^2). \tag{A.1}$$

ˆ 我们希望构造一个配边算子 $\mathcal{O}$ ，将 Q 与另一个箭图 Q'联系起来；后者具有相同的基本曲线集合，但矩阵 C'不同

$$Z = \hat{\mathcal{O}}\cdot Z' \tag{A.2}$$

这里两者 Z， Z' 属于 $\mathrm{Sk}_{\mathfrak{gl}_1}(\bigsqcup_{j=1}^{K} S^1\times D^2)$，而ˆ$\mathcal{O}$ 属于相应的 skein 代数

$$\hat{\mathcal{O}} \in \mathrm{Sk}_{\mathfrak{gl}_1}(\bigsqcup_{i=1}^{K} T^2)\,. \tag{A.3}$$

系统构造 ˆ$\mathcal{O}$ 可通过回顾如下事实得到： Z （以及类似地 Z'）可表示为 $\mathfrak{gl}_1$ 纽结代数中的算子，该代数定义在 $\bigsqcup_{i=1}^{K} T^2$ 上，如下 [31]。引入经线与子午线的基

$$\hat{x}_i, \hat{y}_i \in \mathrm{Sk}_{\mathfrak{gl}_1}(\bigsqcup_{i=1}^{K} T^2) \tag{A.4}$$

满足量子环面代数关系

$$\hat{y}_i\hat{x}_j = q^{2\delta_{ij}}\hat{x}_j\hat{y}_i \qquad [\hat{x}_i,\hat{x}_j] = [\hat{y}_i,\hat{y}_j] = 0 \qquad i,j\in\{1,\dots,K\}\,. \tag{A.5}$$

定义变量

$$X_i = (-1)^{C_{ii}} q^{C_{ii}-1}\hat{x}_i\hat{y}_i^{C_{ii}} \prod_{j<i}\hat{y}_j^{C_{ij}} \tag{A.6}$$

以及算子

$$\hat{\psi} := (qX_K;q^2)_\infty^{-1}\dots(qX_1;q^2)_\infty^{-1}. \tag{A.7}$$

ˆ配分函数通过用 ψ 作用在$\bigsqcup_{i=1}^{K}(S^1\times D^2)$的 skein 模的（归一化）真空态上得到，或等价地通过正规序（参见 [31]）

$$Z = :\hat{\psi}: \tag{A.8}$$

如果将 $\bigsqcup_{i=1}^{K}(S^1\times D^2)$ 的不同分支嵌入同一个三维流形中，例如余法实心环面 [13], ，那么这一点便有了几何解释： $S^1\times D^2$ 个分支的经线 ˆ 彼此之间的链接数由箭图矩阵 C 编码。此时，算子 ψ 可视为在空纽结中插入 K 个基本全纯圆盘的多重覆盖；它逐个基本曲线地构造配分函数，并通过量子环面代数关系将由箭图邻接矩阵 C 编码的链接数据纳入考量。

ˆ**备注 A.1.** 此处对 ψ 的定义可直接推广到带有圆盘、环带及其他类型生成元的广义箭图，这些生成元与顶点相关联；只需将各因子 $(qX;q^2)_\infty^{-1}$替换为相应曲线的多重覆盖配分函数即可。例如，各类环带的多重覆盖配分函数见 (4.6)。

ˆ ˆ设 ψ和 ψ' 分别是对应于 Q, Q'的算子。从 (A.7) 可清楚看出，它们都是可逆的。我们将配边算子定义为

$$\hat{\mathcal{O}} := \hat{\psi} \cdot (\hat{\psi}')^{-1} \,. \tag{A.9}$$

ˆ ˆ ˆ ˆˆ根据定义，它将 ψ' 变为 ψ，即 $\psi = \mathcal{O} \cdot \psi'$；经过正规序排列（或作用于真空缠结元素）后，便得到所需性质 (A.2)。

配边算子的一个有趣应用是，它能将一个箭图的递归关系映射为另一个箭图的递归关系

$$\hat{A} \cdot \psi = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \hat{A}' \cdot \psi' = 0 \tag{A.10}$$

其中 ˆ$A, \hat{A}' \in \mathsf{Sk}(\bigsqcup_{j=1}^K T^2)$ 和

$$\hat{A}' = \hat{A} \cdot \hat{\mathcal{O}} \,. \tag{A.11}$$

A.2 示例：基本圆盘的链接数

作为配边的一个简单示例，我们考虑两个基本圆盘的连接操作。考虑一个具有两个顶点且邻接矩阵为

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} . \tag{A.12}$$

配分函数及相应的递归关系为

$$\psi = (x_1;q^2)^{-1}(x_2;q^2)^{-1} \qquad \begin{cases} \hat{A}_1 = 1 - \hat{y}_1 - \hat{x}_1 = 0 \\ \hat{A}_2 = 1 - \hat{y}_2 - \hat{x}_2 = 0 \end{cases} \tag{A.13}$$

我们将构造通向具有相连顶点的箭图的配边

$$C' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{A.14}$$

其配分函数及递归关系为

$$\psi' = (x_1;q^2)_\infty^{-1}(x_2;q^2)_\infty^{-1}(x_1x_2;q^2)_\infty \qquad \begin{cases} \hat{A}'_1 = 1 - \hat{y}_1 - \hat{x}_1\hat{y}_2 = 0 \\ \hat{A}'_2 = 1 - \hat{y}_2 - \hat{x}_2\hat{y}_1 = 0 \end{cases} \tag{A.15}$$

我们将算子值箭图配分函数定义如下

$$\hat{\psi} = (\hat{x}_2;q^2)_\infty^{-1}(\hat{x}_1;q^2)_\infty^{-1} \qquad \hat{\psi}' = (\hat{x}_2\hat{y}_1;q^2)_\infty^{-1}(\hat{x}_1;q^2)_\infty^{-1} \tag{A.16}$$

使得它们的正规序表达式分别还原为 ψ, ψ'。接着

$$\hat{\mathcal{O}} := \hat{\psi} \cdot (\hat{\psi}')^{-1} = (\hat{x}_2;q^2)_\infty^{-1}(\hat{x}_2\hat{y}_1;q^2)_\infty \tag{A.17}$$

接下来我们可以计算

$$\begin{aligned}\hat{A}_1\cdot\hat{\mathcal{O}} &= (1-\hat{y}_1-\hat{x}_1)\cdot(\hat{x}_2;q^2)_\infty^{-1}(\hat{x}_2\hat{y}_1;q^2)_\infty\\ &= \mathcal{O}\cdot(1-\hat{y}_1)-\hat{x}_1\cdot(\hat{x}_2;q^2)_\infty^{-1}(\hat{x}_2\hat{y}_1;q^2)_\infty\\ &= \mathcal{O}\cdot(1-\hat{y}_1)-(\hat{x}_2;q^2)_\infty^{-1}(q^{-2}\hat{x}_2\hat{y}_1;q^2)_\infty\cdot\hat{x}_1\\ &= \mathcal{O}\cdot(1-\hat{y}_1-(1-q^{-2}\hat{x}_2\hat{y}_1)\hat{x}_1)\\ &= \mathcal{O}\cdot(1-\hat{y}_1-\hat{x}_1(1-\hat{x}_2\hat{y}_1))\qquad(\text{use }\hat{A}_2')\\ &= \mathcal{O}\cdot(1-\hat{y}_1-\hat{x}_1\hat{y}_2)\\ &= \mathcal{O}\cdot\hat{A}_1'\end{aligned}\tag{A.18}$$

ˆ 该式在由 ψ'生成的理想中成立。类似的计算给出

$$\hat{A}_2\cdot\hat{\mathcal{O}}=\hat{\mathcal{O}}\cdot\hat{A}_2'\tag{A.19}$$

B 扭曲霍普夫链环以及$(2,2p+1)$-环面纽结的箭图

HOMFLYPT 多项式 $H_{(1)^{n_1},(n_2)}(a,q)$，（负）霍普夫链环的这些多项式是众所周知的。这里我们借助每个余法丛上的两个圆盘，以及在它们之间延伸并与这些圆盘相链接的两个环带，给出其箭图描述。我们得到的箭图与 [10, 猜想 2.3]中所描述的猜想箭图相关，但并不等价。差异源于将一个环带扭转为一个反环带。

我们验证了数 值上，（扭曲）霍普夫链环配分函数具有如下箭图结构 .

$$\begin{aligned}Z_{\widetilde{\text{Hopf}}}(a,q) &:= \sum_{n_1,n_2} H_{(1)^{n_1},(n_2)}(a,q)\xi_1^{n_1}\xi_2^{n_2}\\ &= \sum_{n_1,n_2}\left\{\sum_{k=0}^{1}\left[\sum_{j=0}^{\text{Max}[n_1,n_2]-k}\frac{(-1)^{n_1-k}a^{2(n_1-k)}q^{-2j-2k(n_2+1)+2kn_1+n_1+n_2}(a^{-2};q^2)_{n_1-j-k}(a^2;q^2)_{n_2-j-k}}{(q^2;q^2)_{n_1-j-k}(q^2;q^2)_{n_2-j-k}}\right]\right\}\xi_1^{n_1}\xi_2^{n_2}\\ &= \sum_{d_1,d_2,d_3,d_4,d_5\geq 0}\sum_{d_6=0}^{1} q^{d_1^2+d_4^2+2(d_1+d_2)d_6-2(d_3+d_4)d_6}\frac{\xi_1^{d_1}}{(q^2;q^2)_{d_1}}\frac{(-a^2q\xi_1)^{d_2}}{(q^2;q^2)_{d_2}}\frac{(q\xi_2)^{d_3}}{(q^2;q^2)_{d_3}}\frac{(-a^2\xi_2)^{d_4}}{(q^2;q^2)_{d_4}}(-a^2\xi_1\xi_2)^{d_5}(\xi_1\xi_2)^{d_6}\end{aligned}\tag{B.1}$$

这里我们通过引入一个整体因子$H_{(1)^{n_1},\ (n_2)}$ 对其进行了重新缩放，使得只出现 $a^{n_1+n_2}$ 的正幂 $a_\circ$ 这里 ξ_j 对于 $j=1,\ 2$ 对应于 skein 模$\text{Sk}_{\mathfrak{gl}_1}(S^1\times D^2)_j$的纵向生成元，见图5。这是一个广义箭图配分函数，其中箭图的前两个顶点对应第一个余法丛上的平凡结圆盘-反圆盘对，第三和第四个顶点对应第二个余法丛上的平凡结圆盘-反圆盘对，最后两个顶点则分别对应一个环带和一个反环带。这个表达式还编码了每条基本曲线的 $(a,\ q)$次数，以及编码每个余法丛分支上链接数的箭图矩阵

$$C_{\widetilde{\text{Hopf}}}=\left(\begin{array}{cc|cc|cc}1&0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0&1\\\hline 0&0&0&0&0&-1\\0&0&0&1&0&-1\\\hline 0&0&0&0&0&0\\1&1&-1&-1&0&0\end{array}\right)\tag{B.2}$$

将该表达式用于$H_{(1)^{n_1},\ (n_2)}(a,\ q)$，并代入（4.13），即可得到关于 M_K上曲线计数的广义箭图描述。事实上，注意到引入量子环面的对偶变量后

$$\hat{\eta}_i\hat{\xi}_j = q^{2\delta_{ij}}\hat{\xi}_j\hat{\eta}_i\,, \tag{B.3}$$

对应于图中和乐的量子化5，我们可以写出

$$\begin{aligned} &H_{(1)^{n_1},(n_2)}(a,q)\, q^{\Gamma_{11}n_1^2+\Gamma_{22}n_2^2+2\Gamma_{12}\,n_1n_2}\,\xi_1^{n_1}\xi_2^{n_2} \\ =&H_{(1)^{n_1},(n_2)}(a,q)\, q^{\Gamma_{11}n_1+\Gamma_{22}n_2}\ :(\xi_1\hat{\eta}_1^{\Gamma_{11}}\hat{\eta}_2^{\Gamma_{12}})^{n_1}(\xi_2\hat{\eta}_1^{\Gamma_{12}}\hat{\eta}_2^{\Gamma_{22}})^{n_2}: \end{aligned} \tag{B.4}$$

其中 $:\ldots:$ 表示正规序。这使我们能够将 $\mathcal{L}_\alpha$ 中的基本曲线的链接矩阵（由 (B.2) 给出）与 M_K 中的基本曲线的链接矩阵联系起来，如下所示 [31]

$$\begin{aligned} C_{M_K} &= C_{\widetilde{\text{Hopf}}} + \left(\begin{array}{c|c|c} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} & \Gamma_{11}+\Gamma_{12} \\ \hline \Gamma_{12} & \Gamma_{22} & \Gamma_{22}+\Gamma_{12} \\ \hline \Gamma_{11}+\Gamma_{12} & \Gamma_{22}+\Gamma_{12} & \Gamma_{11}+\Gamma_{22}+2\Gamma_{12} \end{array}\right) \\ &= \left(\begin{array}{cc|cc|cc} 1 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ \hline -1 & -1 & -2p-1 & -2p-1 & -2p-2 & -2p-3 \\ -1 & -1 & -2p-1 & -2p & -2p-2 & -2p-3 \\ \hline -1 & -1 & -2p-2 & -2p-2 & -2p-3 & -2p-3 \\ 0 & 0 & -2p-3 & -2p-3 & -2p-3 & -2p-3 \end{array}\right). \end{aligned} \tag{B.5}$$

参考文献

[1] Mina Aganagic 和 Cumrun Vafa。镜像对称、D膜与全纯圆盘计数。2000年。[2] Mina Aganagic、Albrecht Klemm 和 Cumrun Vafa。圆盘瞬子、镜像对称与对偶性网络。*Z. Naturforsch. A*，57：1–28，2002年。[3] Mina Aganagic、Albrecht Klemm、Marcos Marino 和 Cumrun Vafa。拓扑顶点。*Commun.Math.Phys.*，254：425–478，2005年。[4] Hirosi Ooguri 和 Cumrun Vafa。纽结不变量与拓扑弦。*Nucl.Phys.*，B577：419–438，2000年。[5] Tobias Ekholm 和 Vivek Shende。膜上的缀结。1 2019年。[6] Mina Aganagic、Tobias Ekholm、Lenhard Ng 和 Cumrun Vafa。拓扑弦、D模型与纽结接触同调。*Adv. Theor. Math.Phys.*，18(4)：827–956，2014年。[7] Tobias Ekholm 和 Lenhard Ng。高亏格结接触同调与带色HOMFLY-PT多项式的递归。*Adv. Theor.Math.Phys.*，24(8)：2067–2145，2020年。[8] Tobias Ekholm 和 Vivek Shende。着色HOMFLYPT计数全纯曲线。1 2021年。[9] Tobias Ekholm 和 Vivek Shende。全纯曲线的缀结递归与解结不变量。12 2020 年。[10] Tobias Ekholm 、 Pietro Longhi 和 Lukas Nakamura。世界面缀结D模与霍普夫链环余法丛的拉格朗日填充上的基本曲线。7 2024年。[11] Robert Ghrist 和 Eiko Kin。横截于结与链环纤维化的流线。*PacificJ.Math.*，217(1)：61–86，2004年。[12] Piotr Kucharski、Markus Reineke、Marko Stosic 和 Piotr Sułkowski。结-箭图对应。*Adv. Theor. Math. Phys.*，23(7)：1849–1902，2019年。[13] Tobias Ekholm、Piotr Kucharski 和 Pietro Longhi。结-箭图对应的物理学与几何学。*Commun. Math. Phys.*，379(2)：361–415，2020年。[14] Sergei Gukov、Du Pei、Pavel Putrov 和 Cumrun Vafa。BPS谱与三维流形不变量。*J. KnotTheor.Ramifications*，29(02)：2040003，2020年。[15] Sergei Gukov 和 Ciprian Manolescu。关于结补空间的二元级数。*Quantum Topology*，12(1)：1–109，2021年。[16] Helmut Hofer、Krzysztof Wysocki 和 Eduard Zehnder。多重折叠与*Fredholm*理论，第72卷，收录于数学及其边缘领域成果。第三辑：现代数学综述系列 *[*数学及相关领域成果。第三辑：现代数学综述系列*]*。Springer，Cham， [2021] ©2021年。[17] Kenji Fukaya、Yong-Geun Oh、Hiroshi Ohta 和 Kaoru Ono。*Kuranishi*结构与虚基本链。Springer数学专著。Springer，新加坡， [2020] ©2020年。

[18] John Pardon. 关于伪全纯曲线模空间上虚拟基本循环的一种代数方法。《几何与拓扑》，20(2):779–1034，2016年。[19] Tobias Ekholm 和 Vivek Shende。鬼泡沫审查。*arXiv* 预印本：*2212.05835*，2022年。[20] Tobias Ekholm 和 Vivek Shende。裸曲线计数，2025年。[21] Hugh Morton 和 Peter Samuelson。环面上的 HOMFLYPT skein 代数与椭圆Hall代数。《杜克数学杂志》，166(5):801 – 854，2017年。[22] Lukas Nakamura。实心环面 HOMFLY-PT skein 中的递归关系与BPS展开。*arXiv* 预印本：*2401.10730*，2024年。[23] Luís Diogo 和 Tobias Ekholm。增广、环带与亚历山大多项式。*J. DifferentialGeom.*，129(3):541–616，2025年。[24] Edward Witten。量子场论与Jones多项式。*Comm. Math.Phys.*，121(3):351–399，1989年。[25] Edward Witten。作为弦理论的Chern-Simons规范理论。*Prog. Math.*，133:637–678，1995年。[26] Rajesh Gopakumar 和 Cumrun Vafa。论规范理论/几何对应。*Adv. Theor.Math.Phys.*，3:1415–1443，1999年。[27] Tobias Ekholm、John B Etnyre、Lenhard Ng 和 Michael G Sullivan。纽结接触同调。*Geometry&Topology*，17(2):975–1112，2013年。[28] Stavros Garoufalidis、Aaron D. Lauda 和 Thang T. Q. Lê。带色HOMFLYPT函数是 q-全纯的。*Duke Math. J.*，167(3):397–447，2018年。[29] Tobias Ekholm、Angus Gruen、Sergei Gukov、Piotr Kucharski、Sunghyuk Park、Marko Stoši´c 和 Piotr Sułkowski。结补空间的分支、箭图与理想。《几何物理学杂志》，177:104520，2022年。[30] Tobias Ekholm、Pietro Longhi、Sunghyuk Park 和 Vivek Shende。来自曲线计数的skein迹。2025年10月。[31] Tobias Ekholm、Piotr Kucharski 和 Pietro Longhi。多重覆盖 skein、箭图与三维 $\mathcal{N}=2$ 对偶。*JHEP*，02:018，2020年。[32] Piotr Kucharski、Pietro Longhi、Dmitry Noshchenko、Sunghyuk Park 和 Piotr Sułkowski。三维和四维中的箭图与BPS态。2025年8月。[33] Miłosz Panfil 和 Piotr Sułkowski。拓扑弦、条带与箭图。*JHEP*，01:124，2019年。[34] Piotr Kucharski 和 Dmitry Noshchenko。结-箭图对应：简要综述。2025年5月。[35] Maxim Kontsevich 和 Yan Soibelman。上同调Hall代数、指数Hodge结构与动机 Donaldson-Thomas 不变量。*Commun.Num. Theor. Phys.*，5:231–352，2011年。[36] Alexander I Efimov。对称箭图的上同调Hall代数。*Compositio Mathematica*，148(4):1133–1146，2012年。[37] Marcos Mariño 和 Claudia Rella。复Chern-Simons理论中波函数的结构。*SIGMA*，22:002，2026年。

[38] J. M. F. Labastida 和 Marcos Marino。环面纽结与拓扑弦的多项式不变量。*Commun. Math.Phys.*，217:423–449，2001年。[39] J. M. F. Labastida、Marcos Marino 和 Cumrun Vafa。大N下的纽结、链环与膜。*JHEP*，11:007，2000年。[40] Christopher R. Cornwell。KCH表示、增广与 *A*-多项式。*J. SymplecticGeom.*，15(4):983–1017，2017年。[41] Bertrand Eynard 和 Nicolas Orantin。代数曲线不变量与拓扑展开。*Com-mun.Num. Theor. Phys.*，1:347–452，2007年。[42] Robbert Dijkgraaf、Lotte Hollands、Piotr Sulkowski 和 Cumrun Vafa。超对称规范理论、相交膜与自由费米子。*JHEP*，02:106，2008年。[43] Sergei Gukov 和 Edward Witten。膜与量子化。*Adv.Theor.Math.Phys.*，13(5):1445–1518，2009年。[44] Tudor Dimofte。Chern-Simons理论中的量子黎曼曲面。*Adv.Theor. Math. Phys.*，17(3):479–599，2013年。[45] Sergei Gukov 和 Piotr Sulkowski。A多项式、B模型与量子化。*JHEP*，02:070，2012年。[46] Alba Grassi、Yasuyuki Hatsuda 和 Marcos Marino。来自量子力学的拓扑弦。*Annales Henri Poincare*，17(11):3177–3235，2016年。[47] Tudor Dimofte、Sergei Gukov 和 Lotte Hollands。涡旋计数与拉格朗日三维流形。*Lett.Math.Phys.*，98:225–287，2011年。[48] Edward Witten。阿贝尔对称性三维共形场论上的 SL(2,Z) 作用。载于《从场到弦：理论物理巡礼：纪念伊恩·科根会议》，第1173–1200页，2003年7月。[49] Tudor Dimofte、Davide Gaiotto 和 Sergei Gukov。由三维流形标记的规范理论。*Commun. Math.Phys.*，325:367–419，2014年。[50] Ofer Aharony、Amihay Hanany、Kenneth A. Intriligator、N. Seiberg 和 M. J. Strassler。三维N=2超对称规范理论的若干方面。*Nucl.Phys.*，B499:67–99，1997年。[51] Ofer Aharony、Shlomo S. Razamat 和 Brian Willett。从三维对偶到二维对偶。*JHEP*，11:090，2017年。[52] Erwan Brugallé、Ilia Itenberg、Grigory Mikhalkin 和 Kristin Shaw。热带几何简明导论。*arXiv* 预印本：*1502.05950*，2015年。[53] Tobias Ekholm、Angus Gruen、Sergei Gukov、Piotr Kucharski、Sunghyuk Park 和 Piotr Sułkowski。 *Z*大N：从曲线计数到量子模性。*Commun. Math. Phys.*，396(1):143–186，2022年。[54] H. Fuji、S. Gukov 和 P. Sułkowski。纽结的超A多项式与BPS态。*NuclearPhysics B*，867:506–546，2013年2月。[55] Lenhard Ng。纽结接触同调的拓扑学导论。载于接触与辛拓扑，第485–530页。Springer，2014年。

[56] Jie Gu、Hans Jockers、Albrecht Klemm 和 Masoud Soroush。由增广簇上的拓扑递归得到的纽结不变量。《数学物理通讯》，336(2):987–1051，2015年。[57] Sergei Gukov、Marcos Marino 和 Pavel Putrov。复Chern-Simons理论中的复苏。2016年5月。[58] Sergei Gukov、Pavel Putrov 和 Cumrun Vafa。五膜与三维流形同调。*JHEP*，07:071，2017年。ˆ[59] Sunghyuk Park。高秩 Z 与 F_K。*SIGMA*，16:044，2020年。[60] Sunghyuk Park。用于结补空间的 large color R-矩阵与奇异恒等式。《结理论及其分支》，29(14):2050097，2020年。[61] Piotr Kucharski。三维流形的箭图：对应关系、BPS态与三维 $\mathcal{N}$ = 2理论。*JHEP*，09:075，2020年。[62] Sunghyuk Park。反转态和、反转 Habiro 级数与不定 theta 函数。2021年6月。