arXiv:2601.22968v1 [math.AT] 30 Jan 2026

∞-群胚上的多项式函子与多项式余单子

KUN CHEN

Abstract. 我们证明，Gepner-Haugseng-Kock 在 $\mathcal{S}$ GHK [中定义的∞-群胚 22],范畴上的单变量多项式函子，恰好是由∞-群胚索引的可表余层的余极限。这使我们能够确立 ∞-范畴$Poly_{\mathcal{S}}$的若干范畴性质，与普通范畴 $Poly$的情形相平行。我们定义多项式余单子的概念，其幺半结构由多项式的复合诱导，并描述一种构造，以探索多项式余单子与完全塞加尔空间之间的联系。该构造在一定程度上推广了 Ahman-Uustalu 定理证明中给出的经典构造。

Contents

1. 引言 1 2. 双重极限与余极限 3 3. 多项式函子 5 4. 完备性与余完备性 8 5. 多项式的复合 11 6. 幺半∞-范畴与余单子 14 7. 多项式余单子上的构造 16 参考文献 22

1. Introduction

1.1. **背景与动机**。 在普通范畴论中，多项式函子 是代数中通常的多项式概念的一种范畴化。在应用范畴论中，集合上的单变量多项式函子范畴，记作 $Poly$，已在离散动力系统（[Spi20]）、数据库理论（[SGF25]）、信息论（[Spi22b]）和人工智能（[Spi21]）等领域获得了显著应用。范畴 $Poly$ 具有多种形式性质，从计算视角来看颇为有趣。关于 $Poly$的标准参考资料，可参阅专著 [NS23] 或综述 [Spi22a]。给出定义时，我们通常将多项式函子 $p \in Poly$ 写作一个余积

$$p = \sum_{b \in B} y^{p[b]}. \tag{1.1}$$

这里 $p[b]$是一个由另一集合 B参数化的集合族。变量 y 被视为一个集合，而非通常多项式概念中的数，并且 $y^{p[b]}$

被理解为 Set 上的自函子，它是集合 $p[b]$ 的余 Yoneda 嵌入。

警告 1.2. 多项式函子与通常的多项式概念并不完全对应，这与有限集范畴将 N 范畴化的情况不同，因为我们允许例如 $p = \mathbb{Q}y^{\mathbb{R}}$ 作为多项式函子。即使集合 $p[b]$ 和 B 都是有限的，这也对应于具有自然数系数的多项式。

鉴于普通范畴 $Poly$ 中已发现的丰富理论，我们有理由期待无穷范畴推广可能会很有意义。在这种推广中，Set 的基础性作用由 ∞-群胚的 ∞-范畴$\mathcal{S}$ 取代。本文旨在迈出第一步，研究无穷群胚上的多项式函子的∞-范畴 $Poly_{\mathcal{S}}$，并将 $Poly$ 中的一些已知结果带入 $Poly_{\mathcal{S}}$ 的世界。

与我们的工作相关的是，在 [GHK22，第 2], 节中，作者给出了关于 $\mathcal{S}$ 上（多变量）多项式函子的定义，我们将在定义 3.1 中回顾该定义。不过，出于我们工作的动机，采用模仿式（1.1）的定义更为理想。这里回顾如下：

Set 上的多项式函子是可表余层的余积。

如果将余积解释为沿离散图表取余极限，那么这类多项式函子的资料可与一个函子 $p : B \to$Set 对应，其中 $B \in$ Set。受这一观察启发，我们不禁想提出另一种定义：

$\mathcal{S}$ 上的多项式函子是以 ∞-群胚为指标的可表余层的余极限。

事实上，我们的首个主要结果表明，我们的定义确实与 Gepner-Haugseng-Kock 的定义一致。基于上述定义来探讨 $Poly_{\mathcal{S}}$ 理论，本文得以推导出一些与 $Poly$ 情形类似的结果。我们证明， ∞-范畴 $Poly_{\mathcal{S}}$ 是双完备的。我们给出两个多项式复合为一个多项式的显式公式，并证明 $Poly_{\mathcal{S}}$ 具有由复合积诱导的闭幺半无穷结构。此外，我们还要研究这一幺半结构中的余幺半对象（其一般定义将在定义 6.3 中给出）。此研究受到关于 $Poly$ 的一个优美定理的启发；该定理最初由 Ahman 和 Uustalu 在计算机科学研究中发现（[AU16]），其大意如下：

Set 上的多项式余单子与（小）范畴相同。

关于精确表述和概述，请参见第7.1节。更一般地，在[SS23]中证明了，在一般的局部笛卡尔闭范畴 $\mathcal{E}$ 上，多项式余单子恰好就是 $\mathcal{E}$中的内范畴对象。沿着这一思路，我们或许可以推测， $Poly_{\mathcal{S}}$ 中的余幺半对象恰好对应于 ∞中的内 $\mathcal{S}$-范畴；众所周知，根据**Lur09a**[，推论 4.3，它们是完备 Segal 空间。16]也就是说：

$\mathcal{S}$ 上的多项式余单子与完备 *Segal* 空间相同。

目前尚无精确表述，但我们将在猜想7.2中提出一个猜想，并讨论一个相关的部分结果。具体而言，在第7.3 节中，我们证明每个 $Poly_{\mathcal{S}}$ 中的余幺半对象都会自然地产生一个满足 Segal 类条件的增广余单纯空间。需要指出的是，这一构造的主要组成部分是一个函子（构造7.6），它与单纯对象的$d\acute{}ecalage$ 过程显著相似。

本文的组织结构如下。第 2 节为预备内容，我们汇集了一些对后续论述有用的技术引理。第 3 节中，我们

介绍了关于 $\mathcal{S}$ 上多项式函子的主要形式化，定义了这类对象的 ∞-范畴 $Poly_{\mathcal{S}}$，并描述了 $Poly_{\mathcal{S}}$ 中的映射空间。我们在第 4 节证明，多项式的任意（小）极限和余极限仍是多项式。我们在第 5 节证明，任意多项式的复合仍是多项式。第 6 节探讨一般情况下的幺半和余幺半 ∞-结构，以及 $Poly_{\mathcal{S}}$ 的情形。最后，我们在第 7 节尝试推广 Ahman-Uustalu 定理。

1.2. 记号与约定。本文中，$\mathcal{S}$ 表示拓扑空间的 ∞-范畴，不过我们常将 $\mathcal{S}$ 中的对象称为 ∞-群胚（[Lur25，注 5.5.1.9]）。基空间为 ∞的 B -范畴上的直化与非直化函子分别记为 St_B 和 Un_B；当基空间 B明确时，下标可能省略。极限与余极限分别记作 $\lim\longleftarrow$ 和 $\lim\longrightarrow$。在 ∞-范畴 $\mathcal{C}$中，我们用 $Map_{\mathcal{C}}(-,-)$表示映射空间。我们用 Cat_∞ 表示由小的（∞,1）-范畴构成的（∞,1）-范畴。为方便读者，本文数次出现的逗号范畴 $\mathcal{S}_{/\mathcal{S}}$ 在命题 2.7 之前介绍。

稍微宽泛地使用术语时，我们常说“$p:\ E\to B$ 是一个多项式函子”（在丛图景中），或“$p\colon\ B\to\mathcal{S}$ 是一个多项式函子”（在图表图景中）。在直化-反直化等价下，我们将不加区分地使用相同的记号 p。在这两种情形下，位置$b\in B$ 处的方向空间记为 $p[b]$。对于多项式函子之间的态射 φ，我们总是用φ_1 和 $\varphi^\sharp$ 分别表示位置和方向上的对应态射。

1.3. **致谢**。作者谨向导师 Guozhen Wang 致谢，感谢他分享在 ∞-范畴论方面的见解，并审阅本文初稿。作者还要感谢 David Spivak 的宝贵交流和评论。

2. Double limits and colimits

本节汇集了一些关于某些极限与余极限可交换性的初步结果。这些结果大多广为人知，但在文献中很难找到确切出处。本文中，我们只考虑以一个 ∞-群胚为指标、取值于 ∞-群胚范畴的极限和余极限。一个关键要素是直化-反直化等价：

$$St_B : \mathcal{S}_{/B} \simeq Fun(B,\mathcal{S}) : Un_B. \tag{2.1}$$

更具体地说，

- 非直化由 $\mathcal{S}_{*/}\to\mathcal{S}$ 在Cat_∞ ([BS16，定理 1。4]) 的拉回所诱导。这里 $\mathcal{S}_{*/}$ 是以终对象 $*\in\mathcal{S}$为对象的下范畴。
- 直化（至少在对象层面）由取纤维诱导：给定 $(E\xrightarrow{p}B)\ \in\mathcal{S}_{/B}$，作为一个 $\mathcal{S}$值函子，$St_B(p)$ 将 $b\in B$ 映至 $\{b\}\times_B E$ 在 $\mathcal{S}$中的（同伦）拉回。相应的态射作用构造为 协变传输，见 [Lur25，第 5.2 节。2]。

下述定理将在本文中反复用到。它实际上是核心结果，使我们能够将多项式函子从集合的情形推广到 ∞-群胚的情形。

定理 2.2. 对于 $B\in\mathcal{S}$，给定一个函子 $p:\ B\to\mathcal{S}$，将其视为以 B 为指标的图表，令 $E\to B$ 为 p 的非直化 $Un_B(p)$。

- 该图表的余极限与非直化的全空间在同伦等价意义下重合（[Lur25，命题 7.4.3。1]）：

$$\varinjlim(p)\simeq E. \tag{2.3}$$

- 该图表的极限与非直化的截面空间在同伦等价意义下重合（[Lur25，命题 7.4.1。6]）：

$$\varprojlim(p)\simeq Map_{\mathcal{S}_{/B}}(B,E). \tag{2.4}$$

推论 2.5。 在上面的定理中，取 p 在某个 $B'\in\mathcal{S}$上为常值可得

$$\varinjlim_{B} B'\simeq B\times B',\quad \varprojlim_{B} B'\simeq Map_{\mathcal{S}_{/B}}(B,B\times B')\simeq Map_{\mathcal{S}}(B,B'). \tag{2.6}$$

令 $\mathcal{S}_{/\mathcal{S}}\subset(\mathsf{Cat}_\infty)_{/\mathcal{S}}$ 表示 Cat_∞ 关于包含函子 $\iota:\ \mathcal{S}\to\mathsf{Cat}_\infty$ 和 $\mathcal{S}\in\mathsf{Cat}_\infty$的逗号范畴。我们将其视为由 ∞-群组索引的 ∞-群组图表范畴，因此取余极限可得函子$c:\ \mathcal{S}_{/\mathcal{S}}\to\mathcal{S}$。由于遗忘函子 $(\mathsf{Cat}_\infty)_{/\mathcal{S}}\to\mathsf{Cat}_\infty$ 创建余极限（[Lur25，命题 7.1.4.20]），$(\mathsf{Cat}_\infty)_{/\mathcal{S}}$ 是余完备的。由于 ι 保余极限（作为左伴随，参见[Lur25，例 6.2.2.24]），我们推得遗忘函子 $\mathcal{S}_{/\mathcal{S}}\to\mathcal{S}$ 再次创建余极限，因此 $\mathcal{S}_{/\mathcal{S}}$ 是余完备的。

命题 2.7。 在上述记号下，对于任意 $B\in\mathcal{S}$ 以及任意函子$f:\ B\to\mathcal{S}_{/\mathcal{S}}$，我们有

$$\varinjlim_{B}(c\circ f)\simeq c(\varinjlim_{B}(f)). \tag{2.8}$$

证明。对于 $b\in B$，设 $f(b):\ B_b\to\mathcal{S}$ 是一个图表。由余极限的泛性质，每个 $f(b)$ 都可分解为一个函子 q，其定义域为 $E:=\varinjlim_{b\in B}B_b$，陪域为 $\mathcal{S}$。由于$\mathcal{S}_{/\mathcal{S}}\to\mathcal{S}$ 创建余极限，这个函子 $q:\ E\to\mathcal{S}$与 $\varinjlim_B(f)$ 一致。记 $Un(q):=(X\to E)$，则由式 (2.3) 得到 $X\simeq c(\varinjlim_B(f))$。记 $Un(f(b)):=(X_b\to B_b)$，则 $\varinjlim_{b\in B}X_b\simeq\varinjlim_B(c\circ f)$。由于 $\mathcal{S}$是局部笛卡尔闭的，$\mathcal{S}$ 中的每个拉回都作为左伴随保持余极限。因此，由式 (2.3) 可推出 $X_b\simeq B_b\times_E X$。于是我们有一个交换图表

$$\begin{array}{ccccc} X_b & \longrightarrow & B_b & \longrightarrow & \{b\} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ X & \longrightarrow & E & \longrightarrow & B \end{array} \tag{2.9}$$

其中左方和右方的方块都是笛卡尔的。根据粘贴律，$X_b\simeq\{b\}\times_B X$。再次根据式（2.3），我们得出 $X\simeq$ 极限$_{b\in B}X_b$。□

注记 2.10。在记号 $q:E\to\mathcal{S}$ 下，我们可以用二重余极限来重新表述这个命题：

$$\varinjlim_{E}(q)\simeq\varinjlim_{B}\varinjlim_{B_b}(q|_{B_b}). \tag{2.11}$$

命题 2.12。 对于 $B, B' \in \mathcal{S}$，给定一个函子 $m:\ B\times B' \to \mathcal{S}$，令 $X \to B\times B'$ 为 m 的非直化，则有

$$\varinjlim_{B}\varinjlim_{B'} m(b,b') \simeq \varinjlim_{B'}\varinjlim_{B} m(b,b') \simeq X \tag{2.13}$$

$$\varprojlim_{B}\varinjlim_{B'} m(b,b') \simeq \varinjlim_{f\in Fun(B,B')}\varprojlim_{B} m(b,f(b)) \simeq Maps_{\mathcal{S}_{/B}}(B,X) \tag{2.14}$$

其中在最后一个等式中，我们将 X 视为 $X^{Un(\xrightarrow{m} B\times B' \xrightarrow{proj_B} B)}$ 中的元素。

证明。 对于第一个等式，众所周知，余极限总是与余极限交换。剩下需要证明的是，二重余极限与 X相同，即在$B\times B'$上的余极限。这正是式（2.11）中令 $B_b = B'$ 为常值所得的结果。

对于最后一个等式，由第一个等式和式（2.4）立即得到 $\varinjlim_{B}\varprojlim_{B'} m(b,\ b') \simeq Maps_{\mathcal{S}_{/B}}(B,\ X)$。还需要证明另一半。注意，$Fun(B,\ B')$可以与映射空间 $Maps_{\mathcal{S}_{/B}}(B,\ B\times B')$识别。我们有两个笛卡尔图

(2.15)

$$\begin{array}{ccc} \varinjlim_B m(b,f(b)) & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle Un(m)} \\ B & \xrightarrow{f} & B\times B' \end{array} \qquad \Longrightarrow_{Maps_{\mathcal{S}_{/B}}(B,-)} \qquad \begin{array}{ccc} \varprojlim_B m(b,f(b)) & \longrightarrow & Maps_{\mathcal{S}_{/B}}(B,X) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \{f\} & \longrightarrow & Maps_{\mathcal{S}_{/B}}(B,B\times B') \end{array}$$

通过保持极限的函子连接 $Maps_{\mathcal{S}_{/B}}(B,\ -)$。由右侧的笛卡尔交换方块和等式 (2.3)，我们得出 $\varinjlim_{f}\varprojlim_{B}{}^{m}(b,\ f(b)) \simeq Maps_{\mathcal{S}_{/B}}(B,\ X)$。 □

注 2.16。 最后一个等式可以看作是经典事实的类似表述：Set 是一个分配范畴，也就是说，乘积对余积满足分配律。

3. Polynomial functors

3.1. 主要定义。 由于 $\mathcal{S}$ 是局部笛卡尔闭的，对于 $\mathcal{S}$中的任意态射 $p : E \to B$，拉回函子 $p^* : \mathcal{S}_{/B} \to \mathcal{S}_{/E}$ 存在一个右伴随，称为依赖积 p_*。我们陈述关于 $\mathcal{S}$上的多项式函子的第一个定义。

定义 3.1。 ([GHK22，定义 2.1。1]称关于 $\mathcal{S}$ 的自函子为多项式函子，如果存在某个态射 $p:\ E \to B$ 属于 $\mathcal{S}$，使其在自然等价意义下可分解为

$$\mathcal{S} \xrightarrow{\times E} \mathcal{S}_{/E} \xrightarrow{p_*} \mathcal{S}_{/B} \xrightarrow{forget} \mathcal{S}. \tag{3.2}$$

备注 3.3。 这段内容是对 Set 上多项式函子定义的逐字改编，见 [GK13，第 1 节。4]。如果读者想知道这样的定义如何体现通常意义上的多项式，请参见 [Web15，第 1] 节。不要将其与 Goodwillie 微积分中的同名概念混淆；后者一般不是自函子。

根据直化-反直化等价，$E \to B$ 在 $\mathcal{S}$ 中的态射可以等价地视为一个从 B 到 $\mathcal{S}$ 的图表。在这一形式体系中，我们有如下相容性结果。

定理 3.4。 设 $B \xrightarrow{p} \mathcal{S},\ b \mapsto p[b]$ 是一个图表，记$(E \xrightarrow{q} B) := Un(p)$。那么在 $\mathcal{S}_{/B}$ 中存在一个关于 $X \in \mathcal{S}$自然的等价：

$$q_*(X \times E) \simeq \varinjlim_{B} Maps(p[b], X), \quad \forall X \in \mathcal{S}. \tag{3.5}$$

证明。 在直化-反直化等价下，我们有两对伴随，如下方交换图表所示：

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S}_{/B} & \xrightarrow{\simeq} & Fun(B, \mathcal{S}) \\ {\scriptstyle q^* \dashv q_*}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle q_! \dashv Ran_q} \\ \mathcal{S}_{/E} & \xrightarrow{\simeq} & Fun(E, \mathcal{S}) \end{array}. \tag{3.6}$$

这里， $q_!$ 是沿 q的前复合；根据等式（2.3）以及 $\mathcal{S}$ 中的拉回保余极限这一事实，它对应于交换图表中的 q^*。由此可知，沿 Ran_q 的右 Kan 延拓 q 补全了 q_*的另一交换图表。只需证明 Fun（B，$\mathcal{S}$）中的等价。注意，St_E（$X \times E$）是 X 上的常值图表，为简便起见，我们记作 X。根据 [Lur25，命题 7.3.5，1], 该 Kan 延拓可计算为

$$Ran_q(X)(b) \simeq \varprojlim_{b \to q(e)} X, \quad \forall b \in B. \tag{3.7}$$

这里，极限取遍逗号范畴 $b \downarrow q$，相对于 $\{b\} \hookrightarrow B \xleftarrow{q} E$而言。注意，每个态射 $b \to q$（e）在 $e \in E$处都存在笛卡尔提升。笛卡尔态射的泛性质表明，子范畴 $p[b] \subset b \downarrow q$是余反射的；进而由 ∞-范畴版本的 Quillen 定理 A 可知，$p[b] \hookrightarrow b \downarrow q$ 是左共终的（见 [Lur25，例 7.2.38]），因此极限可缩减为取遍 $p[b]$:

$$Ran_q(X)(b) \simeq \varprojlim_{p[b]} X \simeq Maps(p[b], X), \quad \forall b \in B. \tag{3.8}$$

这里我们用到了推论 2.5。因此，通过回到 $\mathcal{S}_{/B}$，我们得出结论。 □

注 3.9。 令 $y\colon \mathcal{S}^{op} \to Fun(\mathcal{S}, \mathcal{S})$ 表示余 Yoneda 嵌入，那么$y \circ p^{op}$ 是一个由 B^{op} 索引的可表余层图表。然而，作为一个 ∞-群胚， B^{op} 与 B 自然等价，因此在上述陈述中我们只写 $\varinjlim_B$。写作 $\varinjlim_B Maps(p[b], X)$ 时，我们已隐含地使用了这样一个事实：余层的余极限和极限是逐点计算的。上述定理保证了下面的第二种定义与第一种定义等价；本文将采用第二种定义。

定义 3.10。 称 $\mathcal{S}$ 上的自函子为多项式函子，若存在某个 $B \in \mathcal{S}$，使得它在自然等价意义下可写为一个由 B 索引的可表余层的余极限。

注记 3.11。 若 $p \in Fun(\mathcal{S}, \mathcal{S})$ 是一个多项式函子， p则可在等价意义下确定相应的图表 $B \to \mathcal{S}$。事实上，根据推论 2.5， $B \simeq p(*)$ 是 p 在终对象处的求值。我们称 B 为 **位置空间** p。函子 $B \to \mathcal{S}$ 的唯一性是 Yoneda 引理的推论；在下一小节讨论映射空间之后，这一点将显而易见。

我们总结一下这种情况：谈到 $\mathcal{S}$ 上的多项式函子时，有两种不同但等价的图景需要牢记：

- 多项式函子的丛图景。多项式函子由 $E \xrightarrow{p} B$ 中的一个态射给出。经过纤维化替换后，我们总可以假设 p 是一个 Kan 纤维化，因此有了“丛图景”这一术语。我们有时将 E 和 B 分别称为“全空间”和“底空间”。对于 $b \in B$，我们将 $p^{-1}(b) := \{b\} \times_B E$ 称为 p 在 b 处的**方向空间**。
- 这图表图景。多项式函子的资料由一个函子$B \xrightarrow{p} \mathcal{S}$给出。求值 $p(b)$ 是 $b \in B$ 处的方向空间。为了避免与前一幅图中的情形混淆，我们将始终用 $p[b]$ 表示方向空间。

当 E 和 B 是集合时，在 $Poly$ 中我们可以在这两幅图景之间来回转换，这一点相当显然。对于 ∞-群胚，这种等价依赖于直化-反直化等价这一非平凡的黑箱。

3.2. **映射空间**。

记号 3.12。 函子 ∞-范畴 $Fun(\mathcal{S}, \mathcal{S})$ 中由所有多项式函子张成的满子范畴记作 $Poly_{\mathcal{S}}$。

我们希望刻画两个多项式函子之间的映射空间，并描述其在位置和方向上的相应作用。

引理 3.13. 对于 $B \in \mathcal{S}$ 和 X、$Y \in \mathcal{S}_{/B}$，将 $b \in B$ 处的纤维分别记为 X_b 和Y_b，则

$$Map_{\mathcal{S}_{/B}}(X, Y) \simeq \varprojlim_{B} Map_{\mathcal{S}}(X_b, Y_b). \tag{3.14}$$

证明。 这是式（2.4）的一个变体。滥用记号，我们将 X、Y 视为Fun（B, $\mathcal{S}$）中的元素。回顾 ∞-范畴映射空间的定义：

$$Map_{\mathcal{S}}(X_b, Y_b) \simeq X_b \times_{\mathcal{S}} Fun(\Delta^1, \mathcal{S}) \times_{\mathcal{S}} Y_b. \tag{3.15}$$

注意，这是关于$\Lambda^2_2 \coprod_{1\sim 0} \Lambda^2_2$的一个极限。另一方面，

$$Map_{Fun(B,\mathcal{S})}(X, Y) \simeq X \times_{Fun(B,\mathcal{S})} Fun(B \times \Delta^1, \mathcal{S}) \times_{Fun(B,\mathcal{S})} Y. \tag{3.16}$$

我们由关于 $B \times (\Lambda^2_2 \coprod_{1\sim 0} \Lambda^2_2)$ 的二重极限的可交换性得出结论。□

设 p、p' 为两个多项式函子，其位置空间分别为 B 和 B'。设 m 为如下定义的函子

$$B' \times B \simeq (B')^{op} \times B \xrightarrow{(p')^{op} \times p} \mathcal{S}^{op} \times \mathcal{S} \xrightarrow{Map_{\mathcal{S}}} \mathcal{S},\ (b', b) \mapsto Map_{\mathcal{S}}(p'[b'], p[b]). \tag{3.17}$$

定理 3.18. 考虑 $X^{Un(\xrightarrow{m} B' \times B \xrightarrow{proj_B} B)}$，则映射空间等价于 X 在 B上的截面空间：

$$Map_{Poly_{\mathcal{S}}}(p, p') \simeq Map_{\mathcal{S}_{/B}}(B, X). \tag{3.19}$$

证明。 由于 $p = \varinjlim_{B} Map_{\mathcal{S}}(p[b], -)$，根据余极限的泛性质：

$$Map_{Poly_{\mathcal{S}}}(p, p') \simeq \varprojlim_{B} Map_{Fun(\mathcal{S},\mathcal{S})}(Map_{\mathcal{S}}(p[b], -), p'). \tag{3.20}$$

根据 ∞-范畴的 Yoneda 引理，我们得到

$$Map_{Poly_{\mathcal{S}}}(p, p') \simeq \varprojlim_{B} p'(p[b]) \simeq \varprojlim_{B} \varinjlim_{B'} Map_{\mathcal{S}}(p'[b'], p[b]). \tag{3.21}$$

现在，结果可直接由式 (2.14) 得出。 □

注释 3.22. 上述证明并未依赖前一个引理。不过，我们希望更详细地确定 $Map_{\mathcal{S}_{/B}}(B,X)$ 中的点是什么。回顾式 (2.14) 的证明，在式 (2.15) 的右侧图表中，$Map_{\mathcal{S}_{/B}}(B,X)$ 配备了一个映射到 $Map_{\mathcal{S}}(B,B')$ 的纤维化，其在点 φ_1 处的纤维为 $\lim_{\longleftarrow B} Map_{\mathcal{S}}(p'[\varphi_1(b)], p[b])$。对于一个作为自然变换的态射 $\varphi\colon p\to p'$，在 $*\in\mathcal{S}$ 处求值会得到位置上的相应态射 $\varphi_1\colon B\to B'$。关于方向，根据前一个引理，在 φ_1 处的纤维恰为 $Map_{\mathcal{S}_{/B}}(E'\times_{B'}B, E)$，其中一点 $\varphi^\sharp$ 可视为一个由 $b\in B$ 索引的态射族 $\varphi^\sharp_b\colon p'[\varphi_1(b)]\to p[b]$。总之，$Poly_{\mathcal{S}}$ 中一个态射 φ 的数据由 φ_1 和 $\varphi^\sharp$ 组成，并使下方图表交换

$$\begin{array}{ccccc} E & \xleftarrow{\varphi^\sharp} & E'\times_{B'}B & \longrightarrow & E' \\ & \searrow^{p} & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p'} \\ & & B & \xrightarrow{\varphi_1} & B' \end{array}. \tag{3.23}$$

态射的复合方式显而易见：我们有

$$(\psi\circ\varphi)_1\simeq\psi_1\circ\varphi_1,\quad (\psi\circ\varphi)^\sharp\simeq\varphi_1^*(\psi^\sharp). \tag{3.24}$$

此外，用更简洁的方式来说，映射空间 $Map_{Poly_{\mathcal{S}}}(p,\ p')$ 应当与 Cat_∞ 中以下角填充问题的解空间等同，其中 Cat_∞ 被视为一个 $(\infty,2)$-范畴：

$$\begin{array}{ccc} & B' & \\ {\scriptstyle\varphi_1}\nearrow & \Downarrow{\scriptstyle\varphi^\sharp} & \searrow{\scriptstyle p'} \\ B & \xrightarrow[p]{} & \mathcal{S} \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccc} \Lambda^2_2 & \xrightarrow{(p,\ p')} & \mathsf{Cat}_\infty \\ \downarrow & \nearrow & \\ \Delta^2 & & \end{array}. \tag{3.25}$$

不过，由于作者对 $(\infty,2)$-范畴缺乏专门知识，未能将其精确表述。

例 3.26。对于任意 $B\in\mathcal{S}$，$\mathcal{S}\to\mathcal{S}$ 上的常值函子 B 是一个多项式函子，其对应的图表 $B\to\mathcal{S}$ 在初始对象 $\varnothing$ 上为常值。这将 $\mathcal{S}$ 嵌入为 $Poly_{\mathcal{S}}$ 的满子范畴。此外，该包含映射存在一个左伴随 $Poly_{\mathcal{S}}\to\mathcal{S}$，它是由恒等函子 $id_{\mathcal{S}}$ 诱导的余预层：事实上，我们有

$$Map_{Poly_{\mathcal{S}}}(id_{\mathcal{S}},p)\simeq B,\quad \forall(B\xrightarrow{p}\mathcal{S})\in Poly_{\mathcal{S}}. \tag{3.27}$$

同样，展开定义可知，由 $id_{\mathcal{S}}$ 诱导的预层就是全局截面函子：

$$Map_{Poly_{\mathcal{S}}}(p,id_{\mathcal{S}})\simeq Map_{\mathcal{S}_{/B}}(B,E)\simeq\varprojlim(p),\quad \forall(E\xrightarrow{p}B)\in Poly_{\mathcal{S}}. \tag{3.28}$$

4. Completeness and cocompleteness

4.1. **极限**。在 $Poly$ 的情形下，[NS23定理 533] 证明了，任意（小）多项式的极限仍是多项式，其位置空间（分别为方向空间）是相应位置空间（分别为方向空间）的极限（分别为余极限）。下述定理是 $Poly_{\mathcal{S}}$ 的对应结果。

定理 4.1。∞-范畴 $Poly_{\mathcal{S}}$ 是完备的。

证明。 设 I 是一个单纯集合，且 $p_i\colon B_i \to \mathcal{S}$ 是由 $i \in I$索引的一族多项式函子。取极限 $p := \lim\!\leftarrow_I p_i$ in $Fun(\mathcal{S},\mathcal{S})$，只需证明 p 是一个多项式函子。若此结论成立，由于 $Fun(\mathcal{S},\mathcal{S})$中的极限是逐点计算的， p 的位置空间必定是

$$p(*) \simeq \varprojlim_I p_i(*) \simeq \varprojlim_I B_i := B. \tag{4.2}$$

设 $q_i\colon B \to B_i$ $(i \in I)$ 为极限锥中的结构态射。对于任意 $b \in B$ 和 $X \in \mathcal{S}$，我们有

$$Map_{\mathcal{S}}(p_i[q_i(b)], X) \simeq \{q_i(b)\} \times_{B_i} p_i(X), \quad \forall i \in I. \tag{4.3}$$

注意， $* \xrightarrow{q_i(b)} B_i \xleftarrow{p_i(X\to *)} p_i(X)$ 可以视为一个图表 $I \times \Lambda^2_2 \to \mathcal{S}$；由此处二重极限的可交换性，我们得到一个等价

$$\{b\} \times_B p(X) \simeq \varprojlim_I Map_{\mathcal{S}}(p_i[q_i(b)], X) \simeq Map_{\mathcal{S}}(\varinjlim_I p_i[q_i(b)], X) \tag{4.4}$$

对 $b \in B$ 和 $X \in \mathcal{S}$ 自然。由此，根据直化-反直化等价，我们得出

$$p \simeq \varinjlim_B Map_{\mathcal{S}}(\varinjlim_I p_i[q_i(b)], -) \tag{4.5}$$

因此， p 是一个多项式函子。 □

例 4.6。 对于两个多项式函子 $p_i\colon B_i \to \mathcal{S}$ $(i = 1,2)$，它们的范畴论积由下式给出

$$B_1 \times B_2 \xrightarrow{p_1 \times p_2} \mathcal{S} \times \mathcal{S} \xrightarrow{\amalg} \mathcal{S}. \tag{4.7}$$

因此，在位置上它取积，在方向上它取余积。

注意 4.8。 顺便一提，根据上文构造极限的方式，我们可以看出包含映射$Poly_{\mathcal{S}} \hookrightarrow Fun(\mathcal{S},\mathcal{S})$保极限。换言之， $Poly_{\mathcal{S}}$中的极限也可以逐点计算，这可以看作 Yoneda 引理的推论：

$$(\varprojlim_I p_i)(X) \simeq \varprojlim_I p_i(X). \tag{4.9}$$

然而，对于余极限，这一点不再成立：一般而言

$$(\varinjlim_I p_i)(X) \not\simeq \varinjlim_I p_i(X) \tag{4.10}$$

在 $Poly_{\mathcal{S}}$中，包含映射 $Poly_{\mathcal{S}} \hookrightarrow Fun(\mathcal{S},\mathcal{S})$并不保余极限（否则所有自函子都会是多项式）。这种不对称可以视为我们如此区别处理极限和余极限情形的原因；后者要棘手得多，正如我们将在下一小节中很快看到的那样。

4.2. **余极限**。 对于多项式函子的余极限，其位置空间确实是位置空间的余极限（正如我们在例 3.26 中看到的，函子 $Poly_{\mathcal{S}} \to \mathcal{S}$ （取位置空间）是一个左伴随）。然而，我们不能再采用先在 $Fun(\mathcal{S},\mathcal{S})$ 中取余极限的策略，一般也无法非常明确地描述方向空间。我们需要援引 [Lur25，注记 7.6.6，10], 它将证明余完备性的目标归结为证明小余积和余等化子的存在性。第一部分相对容易，下面给出一个更强的结果。

定理 4.11。 由一个 ∞-群胚索引的多项式函子的余极限仍是一个多项式函子。

证明。 令 $B \in \mathcal{S}$ 和 $p_i : B_i \to \mathcal{S}$ 为一族以$i \in B$为指标的多项式函子。在这种情况下，我们可以先取余极限 $\mathbf{lim}\longrightarrow_B p_i$ 于 $Fun(\mathcal{S},\mathcal{S})$，然后证明它是一个多项式。为此，我们记 $E := \lim_{\longrightarrow B} B_i$，并令 $E \xrightarrow{p} \mathcal{S}$ 为 $B_i \xrightarrow{p_i} \mathcal{S}$ 在 $\mathcal{S}_{/\mathcal{S}}$[1]中的余极限。接着直接使用等式（2.11）：

$$(\varinjlim_B p_i)(X) \simeq \varinjlim_B \varinjlim_{B_i} Map_{\mathcal{S}}(p_i[b_i], X) \simeq \varinjlim_{e\in E} Map_{\mathcal{S}}(p(e), X),\ \forall X \in \mathcal{S}. \tag{4.12}$$

由此可得，该余极限是由图表$E \xrightarrow{p} \mathcal{S}$定义的多项式函子。□

推论 4.13。 ∞-范畴 $Poly_{\mathcal{S}}$ 具有所有小余积。

证明。 将集合J 视为离散空间，即可立即由上面的定理得出这一结论。事实上，在丛图景中， $E_j \xrightarrow{p_j} B_j(j \in J)$的余积就是 $\coprod_J E_j \xrightarrow{\coprod_J p_j} \coprod_J B_j$。

□

接下来，对于较难的部分——余等化子的存在性——在以下论证中，我们需要调用 $\mathcal{S}$ 中同伦极限和同伦余极限的显式点集模型。

定理 4.14. 对于任意一对平行态射 $f, g :\ p_1 \rightrightarrows p_2$，其中 $(E_i \xrightarrow{p_i} B_i) \in Poly_{\mathcal{S}}(i = 1, 2)$，其余等化子存在。

证明。 由于 p_1 是由可表余层构成的 ∞-群胚上的余极限，根据定理 4.11以及二重余极限的可交换性[2]，，为简化讨论，只需处理 p_1 自身由某个 $X \in \mathcal{S}$表示的情形。因此我们不妨假设 B_1 是平凡的，并且 p_1 只有一个方向空间，该方向空间为 X。在这种情况下，在位置 f_1 和 g_1 上分别取一个点 $x \in B_2$ 和 $y \in B_2$。根据本小节开头的讨论，余等化子的位置空间必定是位置空间的余等化子；在这种情况下，它是

$$B := coeq(f_1, g_1 : * \rightrightarrows B_2) \simeq B_2 \coprod_{0\sim x, 1\sim y} [0, 1] \tag{4.15}$$

通过同伦余等化子的显式模型。如果余等化子 $p := coeq(f,\ g : p_1 \rightrightarrows p_2)$ 存在，那么根据 Yoneda 引理， p 由以下性质唯一刻画： $\forall(E' \xrightarrow{p'} B') \in Poly_{\mathcal{S}}$，存在一个关于 p' 自然的等价：

$$Map_{Poly_{\mathcal{S}}}(p, p') \simeq eq(f_!, g_! : Map_{Poly_{\mathcal{S}}}(p_2, p') \rightrightarrows Map_{Poly_{\mathcal{S}}}(p_1, p')). \tag{4.16}$$

为简便起见，记 $A_i := Map_{Poly_{\mathcal{S}}}(p_i,\ p')\ (i = 1,\ 2)$，我们得到同伦等化子的显式模型

$$eq(f_!, g_! : A_2 \rightrightarrows A_1) \simeq A_2 \times_{A_1\times A_1} A_1^{[0,1]}. \tag{4.17}$$

展开这些概念后，这个空间中的一个点由以下数据组成：

---

[1]一般而言，如果 B只是一个单纯集合，则图表 $B \to Poly_{\mathcal{S}}$不会诱导出图表 $B \to \mathcal{S}_{/\mathcal{S}}$，这是由于式（$\infty$，2）中所指出的范畴论问题。3.25然而，当 B是一个（∞，0）-范畴时，情况确实如此。[2]我们在此使用的精确表述是 [Lur09b，引理 5.5.2。3]: 如果双重余极限中的一个存在，那么交换次序后，另一个也存在，并且与第一个相同。

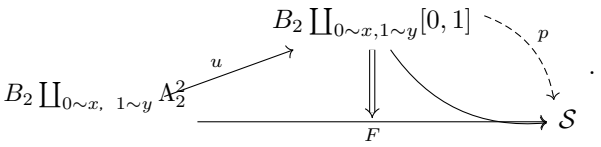
- 一个映射 $\psi : B \to B'$。
- 一个态射 $\varphi \in A_2$，使得 $\varphi_1 : B_2 \to B'$ 与 $\psi|_{B_2}$ 重合。
- 一个映射族 $h_t : p'[\psi(t)] \to X$，由 $t \in [0,1]$ 索引，且其两个端点 $h_0 = f^\sharp \circ \varphi_x^\sharp$ 和 $h_1 = g^\sharp \circ \varphi_y^\sharp$（回忆一下，根据 B 的构造，$\psi(0) = \varphi_1(x)$，而 $\psi(1) = \varphi_1(y)$）。

因此，目标是找到一个多项式函子 p，其位置空间为 B，使得$Map_{Poly_{\mathcal{S}}}(p,\ p'$与上文所述空间自然等价[3]。考虑单纯集合 $B_2 \coprod_{0\sim x,\ 1\sim y} \Lambda^2_2$。我们将其上的一个图表 F 定义在 $\mathcal{S}$ 中，方法如下：

- On B_2, $F|_{B_2}$ is given by $p_2 : B_2 \to \mathcal{S}$.
- On Λ^2_2, $F|_{\Lambda^2_2}$ is given by the diagram $p_2[x] \xrightarrow{f^\sharp} X \xleftarrow{g^\sharp} p_2[y]$.

现在我们可以将 p 取为 F 沿局部化映射 u 的右 Kan 延拓：$B_2 \coprod_{0\sim x,\ 1\sim y} \Lambda^2_2 \to B$：

(4.18)



然后，根据 Kan 延拓的泛性质，我们得出结论：p 正是所需的多项式函子。□

备注 4.19。我们的构造受到 [NS23 定理 5 的启发。43], 对于$Poly$的情形。例如，若我们用 y^X 表示由 X 按照 $Poly$中的约定所表示的多项式，那么给定空间之间的两个映射 $f^\sharp : A \to X$和 $g^\sharp : B \to X$，根据 Kan 延拓公式（[Lur25，命题 7.3.5。1]），相应的 $y^X \rightrightarrows y^A + y^B$ 余等化子为 $y^{A \times^h_X B}$，其中 $A \times^h_X B$ 是同伦拉回。

推论 4.20。∞-范畴 $Poly_{\mathcal{S}}$ 是余完备的。

5. Composition of polynomials

5.1。**复合积**。作为自函子，多项式函子可以复合。在经典情形下，这种复合 $Poly$ 可以轻易写成一个显式公式，它正是通常的多项式展开的代数规则的体现：对于每个 $p_1,\ p_2 \in Poly$ 我们有（[Spi22a，方程 21]）

$$p_1 \circ p_2 = \sum_{b_1 \in B_1} \Big(\sum_{b_2 \in B_2} y^{p_2[b_2]} \Big)^{p_1[b_1]} = \sum_{b_1 \in B_1,\, f : p_1[b_1] \to B_2} y^{\sum_{i \in p_1[b_1]} p_2[f(i)]}. \tag{5.1}$$

因此，$p_1 \circ p_2$ 的一个位置是一个映射 $f : p_1[b_1] \to B_2$，其中 b_1 是 p_1的某个位置，而 f 处的方向集是 p_2 沿着 f的拉回。在 [GHK22定理 2.1 中，8], 作者证明了，多项式函子在 $\mathcal{S}$ 上的复合仍然是多项式函子，并在其形式体系下给出了明确描述。由于本文采用了另一种形式体系，我们将在此重新证明这一结果，同样给出明确描述，从而清楚地展现它与上述等式的类比。

[3]这里很容易想到将 p 的全空间 E 视作沿映射 $f^\sharp : p_2[x] \to X$ 和 $g^\sharp : p_2[y] \to X$ 粘合 E_2 与 $X \times [0,1]$ 所得的空间。然而，问题在于，这样的 $E \to B$ 不是纤维化；即使将它替换为映射路径纤维化，得到的 p 仍然不对。对这个想法稍作修改，就得到下面的构造。

定理 5.2。 对于任意$(E_i \xrightarrow{p_i} B_i) \in Poly_{\mathcal{S}}(i = 1, 2)$, $p_1 \circ p_2 \in Fun(\mathcal{S}, \mathcal{S})$是一个多项式函子。

证明。 如果它是一个多项式函子，那么在 $*$ 处的求值必须生成它的位置空间，即

$$B := p_1(p_2(*)) \simeq p_1(B_2) \simeq \varinjlim_{B_1} Map_{\mathcal{S}}(p_1[b_1], B_2). \tag{5.3}$$

我们有一个由 $b_1 \in B_1$索引、取值于 $\mathcal{S}$ 的图表族，由以下函子的复合给出：

$$Map_{\mathcal{S}}(p_1[b_1], B_2) \to \mathcal{S}_{/B_2} \xrightarrow{p_2^*} \mathcal{S}_{/E_2} \xrightarrow{forget} \mathcal{S}. \tag{5.4}$$

这里，关于 b_1 的自然性由拉回的粘贴律推出。考虑 $\mathcal{S}_{/\mathcal{S}}$中的相应余极限，记作 $B \xrightarrow{p} \mathcal{S}$。我们断言， $p_1 \circ p_2$是多项式函子 p。目标是建立自然等价 $p_1(p_2(X)) \simeq p(X)$, $\forall X \in \mathcal{S}$。首先，由推论 2.5可得

$$p_1(p_2(X)) \simeq \varinjlim_{B_1} Map_{\mathcal{S}}(p_1[b_1], p_2(X)) \simeq \varinjlim_{B_1} \varprojlim_{p_1[b_1]} p_2(X). \tag{5.5}$$

根据等式（2.14），在上述余极限中有

$$\varprojlim_{p_1[b_1]} p_2(X) \simeq \varprojlim_{p_1[b_1]} \varinjlim_{B_2} Map_{\mathcal{S}}(p_2[b_2], X) \tag{5.6}$$

$$\simeq \varinjlim_{f: p_1[b_1] \to B_2} \varprojlim_{i \in p_1[b_1]} Map_{\mathcal{S}}(p_2[f(i)], X) \tag{5.7}$$

$$\simeq \varinjlim_{f: p_1[b_1] \to B_2} Map_{\mathcal{S}}(\varinjlim_{i \in p_1[b_1]} p_2[f(i)], X). \tag{5.8}$$

此外，在上述余极限中，由于 $\mathcal{S}$ 中的拉回保余极限，我们注意到

$$\varinjlim_{i \in p_1[b_1]} p_2[f(i)] \simeq \varinjlim(p_1[b_1] \xrightarrow{f} B_2 \xrightarrow{p_2} \mathcal{S}) \simeq f^*(E_2) \tag{5.9}$$

这恰好是根据我们的定义，在 f 处对 p 求值所得的 $p|_{Map_{\mathcal{S}}(p_1[b_1],\ B_2)}$。结合上述方程，最终得到

$$p_1(p_2(X)) \simeq \varinjlim_{B_1} \varinjlim_{f: p_1[b_1] \to B_2} Map_{\mathcal{S}}(p(f), X) \simeq \varinjlim_{b \in B} Map_{\mathcal{S}}(p[b], X) \simeq p(X). \tag{5.10}$$

这里，我们使用了式（2.11）来收缩二重余极限。 □

例 5.11。 对于 $(E \xrightarrow{p} B) \in Poly_{\mathcal{S}}$，令 $p_n : E_n \to B_n$ 表示 p 的 n 次复合 $p^{\circ n}$。位置空间由以下递推序列给出：

$$B_{n+1} \simeq p(B_n) \simeq \varinjlim_{B} Map_{\mathcal{S}}(p[b], B_n). \tag{5.12}$$

方向空间同样由递归确定：一旦全空间 E_n 已知， p_{n+1}在位置 $f \in Map_{\mathcal{S}}(p[b], B_n)$处的方向空间即为 $f^*(E_n)$。

5.2. **余闭包**。 下面的引理是为下一则定理做准备的，在普通范畴的情形中是众所周知的。

引理 5.13. 设 $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 是一个 ∞-函子，则沿 F 从 $Fun(\mathcal{C}, \mathcal{S})$ 到 $Fun(\mathcal{D}, \mathcal{S})$ 的左 *Kan* 延拓将可表对象映为可表对象：

$$Lan_F(Map_{\mathcal{C}}(c, -)) \simeq Map_{\mathcal{D}}(F(c), -), \quad \forall c \in \mathcal{C}. \tag{5.14}$$

证明. 由于 Lan_F 是 $F_!$: $Fun(\mathcal{D}, \mathcal{S}) \to Fun(\mathcal{C}, \mathcal{S})$ 的左伴随，因此存在一个等价

$$Map_{Fun(\mathcal{D},\mathcal{S})}(Lan_F(Map_{\mathcal{C}}(c, -))\ G) \simeq Map_{Fun(\mathcal{C},\mathcal{S})}(Map_{\mathcal{C}}(c, -)\ G \circ F) \tag{5.15}$$

在 $G \in Fun(\mathcal{D}, \mathcal{S})$ 中自然。由 Yoneda 引理可知，在 $Fun(\mathcal{D}, \mathcal{S})$ 中，我们有一个映射空间的自然等价

$$Map(Lan_F(Map_{\mathcal{C}}(c, -)), G) \simeq G(F(c)) \simeq Map(Map_{\mathcal{D}}(F(c), -), G). \tag{5.16}$$

因此，再由 Yoneda 引理可得 $Lan_F(Map_{\mathcal{C}}(c, -)) \simeq Map_{\mathcal{D}}(F(c)\ -)$。□

定理 5.17. 对于任意 $p \in Poly_{\mathcal{S}}$，由与 p 前复合所诱导的函子 $- \circ p$: $Poly_{\mathcal{S}} \to Poly_{\mathcal{S}}$ 存在一个左伴随，记作 $\left[\frac{p}{-}\right]$，其定义如下：

$$\begin{bmatrix} p \\ p_1 \end{bmatrix} := \varinjlim_{B_1} Map_{\mathcal{S}}(p(p_1[b_1]), -), \quad \forall (B_1 \xrightarrow{p_1} \mathcal{S}) \in Poly_{\mathcal{S}}. \tag{5.18}$$

证明. 由于在 $Fun(\mathcal{S}, \mathcal{S})$ 上有伴随 $Lan_p \dashv (- \circ p)$，且 $Poly_{\mathcal{S}} \subset Fun(\mathcal{S}, \mathcal{S})$ 是一个满子范畴，只需证明 $Poly_{\mathcal{S}}$ 在这两个函子下封闭，从而使伴随降至 $Poly_{\mathcal{S}}$。我们已在上一小节证明了 $- \circ p$ 的情形，剩下只需证明 $Lan_p(p_1)$ 是一个多项式，$\forall p_1 \in Poly_{\mathcal{S}}$。但这直接由上面的引理、定理 4.11，以及作为左伴随的 Lan_p 保持余极限这一事实推出。具体而言，由于 p_1 是可表对象 $Map_{\mathcal{S}}(p_1[b_1], -)$ 的余极限，我们得到公式

$$Lan_p(p_1) \simeq \varinjlim_{B_1} Lan_p(Map_{\mathcal{S}}(p_1[b_1], -)) \simeq \varinjlim_{B_1} Map_{\mathcal{S}}(p(p_1[b_1]), -) = \begin{bmatrix} p \\ p_1 \end{bmatrix} \tag{5.19}$$

根据上述引理。 □

注记 5.20。 这一结果是对 $\circ$ 在 $Poly$ ([Spi22a，公式 68]) 中余闭包公式的直接推广。或者，我们可以通过指定其单位来刻画这个伴随。根据余极限的泛性质和 Yoneda 引理，存在一个关于 p_1，$p_2 \in Poly_{\mathcal{S}}$自然的等价：

$$Map_{Poly_{\mathcal{S}}}(\begin{bmatrix} p \\ p_1 \end{bmatrix}, p_2) \simeq \varprojlim_{B_1} Map_{Poly_{\mathcal{S}}}(Map_{\mathcal{S}}(p(p_1[b_1]), -), p_2) \tag{5.21}$$

$$\simeq \varprojlim_{B_1} (p_2 \circ p)(p_1[b_1]) \tag{5.22}$$

$$\simeq \varprojlim_{B_1} Map_{Poly_{\mathcal{S}}}(Map_{\mathcal{S}}(p_1[b_1], -), p_2 \circ p) \tag{5.23}$$

$$\simeq Map_{Poly_{\mathcal{S}}}(p_1, p_2 \circ p). \tag{5.24}$$

这个等价由单位变换 $p_1 \to \left[\begin{smallmatrix} p \\ p_1 \end{smallmatrix}\right] \circ p$ 诱导，该变换由显然的映射定义

$$\varinjlim_{B_1} Map_{\mathcal{S}}(p_1[b_1], -) \xrightarrow{p} \varinjlim_{B_1} Map_{\mathcal{S}}(p(p_1[b_1]), p(-)). \tag{5.25}$$

此外， $Poly$中还有另外两种幺半群乘积，即范畴论积和所谓的狄利克雷积，二者都允许借助复合积通过显式构造得到闭包（见 [Spi22a，第 4]节）。我们预计，将这些结构推广到 $Poly_{\mathcal{S}}$的情形不会遇到障碍。不过，本文不再探讨这一方向。

6. Monoidal infinity categories and comonads

6.1. **重新审视幺半 ∞-结构**。 按照 Lurie 提出的标准定义，通常将幺半 ∞-范畴理解为满足 Segal 条件的余笛卡尔纤维化 $\mathcal{C}^{\otimes} \to \Delta^{op}$[4] （[Lur07，定义 1.1.2]），并且常常非正式地称 $\mathcal{C} := \mathcal{C}^{\otimes}_{[1]}$ 其表示在 $[1] \in \Delta^{op}$处的纤维是一个幺半 ∞-范畴。在这一形式体系下， $\mathcal{C}$ 中的幺半群乘积由 $[1] \cong \{0,2\} \hookrightarrow \{0,1,2\} = [2]$的余笛卡尔提升编码。中 $\mathcal{C}$ 幺半对象的概念定义于 [Lur07，定义 1.1.14], ，这大致仿照了普通幺半范畴中的幺半对象 C 可以等同于从平凡范畴出发的松幺半函子这一经典事实1到 C。

然而，在本论文中，我们关注的是余幺半对象，而这一概念并不那么容易在前述形式体系中编码。与通常的范畴情形一样，人们或许希望把 $\mathcal{C}$ 中的余幺半对象定义为从平凡范畴 **1** 到 $\mathcal{C}$的余松幺半函子，并进一步把余松幺半函子定义为对偶幺半范畴之间的松幺半函子。这在技术上并非错误，但正如 Lurie 在 [Lur07的注记 1.1.11], 中所指出的，在他的形式体系里，余松幺半（他称之为左幺半）函子这一概念没有简便的定义。我们在此说明关键问题：当 $\mathcal{C}^{\otimes} \to \Delta^{op}$ 表示一个幺半 ∞-结构时，对偶范畴 $\mathcal{C}^{op}$ 也继承幺半结构这一事实——在通常的范畴情形中相当平凡——如今变得非常棘手。朴素的尝试 $(\mathcal{C}^{op})^{\otimes} \simeq (\mathcal{C}^{\otimes})^{op}$ 预计并不正确：毕竟，并不存在余笛卡尔纤维化 $(\mathcal{C}^{\otimes})^{op} \to \Delta^{op}$的明显选择。事实上，对偶幺半结构的正确描述涉及对偶纤维化这一概念，其细节在 [BGN18]中得到了详尽阐述。在我们的论文中，我们不会、也不必深入对偶纤维化的显式构造。相反，我们将通过策略性地采用另一种形式体系来回避此处讨论的微妙问题，该形式体系可视为 Lurie 的定义的“对偶版本”：

定义 6.1。 [5]如果笛卡尔纤维化 $\mathcal{C}^{\otimes} \to \Delta$ 满足 Segal 条件，则称其为幺半 ∞-结构：记 $\mathcal{C}^{\otimes}_{[n]}$ 在 $[n] \in \Delta$处的纤维，则存在一个 ∞-范畴的等价

$$\mathcal{C}^{\otimes}_{[n]} \xrightarrow{\sim} \prod_{i=1}^{n} \mathcal{C}^{\otimes}_{\{i-1,i\}} \simeq (\mathcal{C}^{\otimes}_{[1]})^n \tag{6.2}$$

由脊包含到标准 n-单纯形所诱导，对每个 $n \in \mathbb{N}$ 都成立。为简便起见，我们常说 $\mathcal{C} := \mathcal{C}^{\otimes}_{[1]}$ 是一个幺半 ∞- 范畴。

[4]此处 Δ 表示单形范畴，通过取其神经将其视为一个 ∞-范畴。[5]作者最初从 [Tor25的注记 3 中获知这一定义。3]。

显然，这两个定义是等价的：事实上，在直化—非直化等价之下，两种形式体系中的数据都对应于一个“单纯形∞-范畴” $\Delta^{op} \to \mathrm{Cat}_\infty$，它将 $[n]$ 送到 $\mathcal{C}^n$，对所有 n 都成立。更具体地说，这两种形式体系之间的关系可阐明如下：

- 若 $\mathcal{C}$ 的幺半结构由余笛卡尔纤维化 $\mathcal{C}^\otimes \to \Delta^{op}$给出，则通过对偶，它也可由笛卡尔纤维化（$\mathcal{C}^\otimes$）$^\vee \to \Delta$给出（参见 [BGN18第1节中的表格1]），反之亦然。

- 另一方面，在取相反之后，若一个纤维化（余笛卡尔或笛卡尔）满足其中一个定义，则其相反纤维化满足另一个定义，反之亦然。也就是说，若 $\mathcal{C}$的幺半结构由一侧给出，则 $\mathcal{C}^{op}$ 的幺半结构更宜由另一侧给出。若坚持使用同一种形式体系，例如原来的那种，则 $\mathcal{C}$ 上的幺半结构 $\mathcal{C}^\otimes \to \Delta^{op}$ 在 $\mathcal{C}^{op}$上诱导出一个相反的幺半结构$((\mathcal{C}^\otimes)^\vee)^{op} \simeq (\mathcal{C}^{op})^\otimes \to \Delta^{op}$。

同样，原有的形式体系能够刻画松幺半函子的概念，却无法刻画余松幺半函子的概念；而在我们的形式体系中，我们可以轻松定义余松幺半函子，代价是无法定义松幺半函子，不过后者无论如何都与本文主题无关。

定义 6.3. 设 $\mathcal{C}^\otimes \to \Delta$ 是一个幺半 ∞-范畴。$\mathcal{C}$ 中的余幺半对象是一个从 $\mathbf{1}$ 到 $\mathcal{C}$ 的余松幺半函子，也就是说，是一个截面 $q : \Delta \to \mathcal{C}^\otimes$，使得每个凸态射 $\rho^i_n : [1] \cong \{i-1, i\} \hookrightarrow [n]$ ($1 \le i \le n$) 经 q 映射后都是一个笛卡尔态射。我们非正式地称 $q([1])$ 为余幺半对象。

6.2. 多项式余单子。现在我们将上一小节的讨论专门应用于 $Poly_{\mathcal{S}}$ 的情形。作为 $Fun(\mathcal{S},\mathcal{S})$ 的一个关于复合积封闭的满子范畴，$Poly_{\mathcal{S}}$ 继承了由 $\circ$([Lur07, 命题 1.3.1.1]) 诱导的 $Fun(\mathcal{S},\mathcal{S})$ 的幺半 ∞-结构，其中 $id_{\mathcal{S}}$ 是幺半单位。要证明 $Fun(\mathcal{S},\mathcal{S})$ 确实是一个幺半 ∞-范畴（[Lur07, 命题 3.1.2.1]）需要费些功夫，尽管至少在普通范畴情形下这看起来相当合理：首先，将 $Fun(\mathcal{S},\mathcal{S})$ 视为关于复合的单纯幺半群，我们可以对其应用分类空间函子 B（[Lur25, 构造 1.3.2.5]），得到一个函子 F: $\Delta^{op} \to \mathrm{Cat}_\infty$，它将 $[n]$ 映射到 $Fun(\mathcal{S},\mathcal{S})^n, \forall n \in \mathbf{N}$。这就是非直化之前得到的幺半结构。随后，Lurie 取 F 的加权神经，得到一个位于 Δ^{op} 上的余笛卡尔纤维化（[Lur25, 推论 5.3.3.16]）；而在我们的形式体系中，需要考虑由 F 分类的笛卡尔纤维化。就 $Poly_{\mathcal{S}}$ 的情形而言，结果是存在一个笛卡尔纤维化 $Poly^\otimes_{\mathcal{S}} \to \Delta$，使得

- 在 $[n] \in \Delta$ 处的纤维可识别为 $Poly^n_{\mathcal{S}}$，其对象是 n-元多项式函子组。

- 在 Δ 中的态射 f: $[n] \to [m]$ 上，$Poly^\otimes_{\mathcal{S}}$ 中的态射 $(p_1, \cdots, p_n) \to (p'_1, \cdots, p'_m)$ 由以下数据构成：对于每个 $1 \le i \le n$，一个态射

$$\varphi^i : p_i \to p'_{f(i-1)+1} \circ \cdots \circ p'_{f(i)} \tag{6.4}$$

在 $Poly_{\mathcal{S}}$ 中。当且仅当每个 φ^i 在 $Poly_{\mathcal{S}}$ 中都是等价时，这个态射才是笛卡尔的。例如，$Poly_{\mathcal{S}}$ 中的复合积由 $[1] \cong \{0,2\} \hookrightarrow \{0,1,2\} = [2]$ 的笛卡尔提升编码，而幺半单位 $id_{\mathcal{S}}$ 则由 $[1] \twoheadrightarrow [0]$ 的笛卡尔提升指定。

为了更详细地阐明 定义 6.3 在 $Poly_{\mathcal{S}}$ 中的情形，我们先回顾一下 $Poly$中的多项式余单子是什么。

定义 6.5。 Set 上的多项式余单子是一个对象 $p \in Poly$，它配备了一个从 p 到 $y := id_{\mathsf{Set}}$ 的余单位 ϵ，以及一个余乘法 $\delta\colon p \to p \circ p$，并满足以下相容条件：

- 单位律：下图在 $Poly$ 中交换。

$$\begin{array}{ccccc} y \circ p & \Longleftarrow & p & \Longrightarrow & p \circ y \\ & {\scriptstyle \epsilon\circ id}\nwarrow & \downarrow{\scriptstyle \delta} & \nearrow{\scriptstyle id\circ\epsilon} & \\ & & p \circ p & & \end{array} \tag{6.6}$$

- 结合律：下图在 $Poly$ 中交换。

$$\begin{array}{ccc} p & \xrightarrow{\delta} & p \circ p \\ {\scriptstyle \delta}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle id\circ\delta} \\ p \circ p & \xrightarrow[\delta\circ id]{} & p \circ p \circ p \end{array} \tag{6.7}$$

记号 6.8。 我们采用标准记号：在 Δ中，面映射 $d_i^n :[n-1] \to [n]$ 是其取值仅省略 $i\,(0 \le i \le n)$ 的映射；退化映射$s_i^n\colon [n+1] \to [n]$ 是其取值仅重复 i ($0 \le i \le n$) 的映射。为简洁起见，在不致混淆时，我们通常省略上标。

在 $\mathcal{S}$ 上，余幺半群结构由一个截面 $q\colon \Delta \to Poly_{\mathcal{S}}^{\otimes}$ 编码，其像 $p := q([1])$ 就是 $Poly_{\mathcal{S}}$ 中底层的多项式余单子。 $q(\rho_n^i)$ 是 ρ_n^i 的笛卡尔提升这一条件，所表达的无非是像 $q([n]) \in Poly_{\mathcal{S}}^n$恰好为 $(p, p, \cdots, p)$，对所有 n 都成立。为与上文的经典定义进行比较，我们注意到，余单位 $\epsilon\colon p \to id_{\mathcal{S}}$ 和余乘法 $\delta\colon p \to p \circ p$ 分别由 $q([1] \twoheadrightarrow [0])$ 和 $q([1] \xhookrightarrow{non\ convex} [2])$ 诱导。此外，单位律和结合律归结为以下图表的交换性

$$\begin{array}{ccc} [1] & \xhookrightarrow{d_1} & [2] \\ {\scriptstyle d_1}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle s_0} \\ [2] & \xrightarrow[s_1]{} & [1] \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} [1] & \xhookrightarrow{d_1} & [2] \\ {\scriptstyle d_1}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle d_1} \\ [2] & \xhookrightarrow[d_2]{} & [3] \end{array} \tag{6.9}$$

在 Δ 中。在经典定义中，只需检查有限个相容性条件，并在 $p \circ p \circ p$ 处终止。但在 ∞-范畴情形中，则存在涉及所有 $p^{\circ n}$ 的无穷多个高阶同伦相干结构；粗略地说，这些结构被存储在 Δ 中的组合结构里。

7. A construction on polynomial comonads

7.1. **Ahman-Uustalu 定理**。在讨论关于 $Poly_{\mathcal{S}}$ 的 Ahman-Uustalu 定理的一种可能推广之前，我们先回顾其经典背景。从 Set 上的一个多项式余单子 p: $E \to B$ 出发，可以按照下面所述的对应表，将 p 规范地构造为一个范畴 C:

- 对象 $=$ 位置： $Ob(C) = B$；箭头 $=$ 方向： $Mor(C) = E$。
- 映射 p: $E \to B$ 指定箭头的源对象。

- 位置上的余乘法 $\delta\colon p \to p \circ p$ 为每个 $b \in B$选取一个映射 $f_b\colon p[b] \to B$。两者共同诱导出映射 $q\colon E \to B$，用于指定目标对象。
- 对于每个 $b \in B$，方向上的余乘法 $\delta^\sharp_b$ 确定了一个元素$e \in p[b]$，对每个 $e_1 \in p[b]$ 和 $e_2 \in p[f_b(e_1)]$,，在范畴 C 中，这恰好就是复合 $e_2 \circ e_1$。箭头复合的结合律由 δ的结合律编码。
- 余单位 $\epsilon\colon p \to y$ 作为 p的整体截面，对每个 $b \in B$ 选取一个元素$id_b \in p[b]$,它是 b处的恒等态射。恒等态射满足由单位律编码的各种相容条件。

总之，通过上述过程，小范畴的整个结构可以重新打包，并作为等价数据存储在多项式的余幺半群结构中。具体陈述如下。

定理 7.1。在 $Poly$的余幺半对象范畴与由带反函子的范畴组成的小范畴（参见 [SGF25，定义 3.21]）的范畴之间，存在一个同构（而不只是等价）。

关于这一 [NS23，第 7] 章对该定理作了详尽阐述。此处，我们想对这种对应关系作非正式说明，以便为后续构造提供一些指引。如下面的图所示，在第一列中，p中的一个位置被画成一个点，并将其视为范畴C中的一个对象。很直观地说，这个点处的一个方向就是一条从该点出发的箭头，但其目标点暂时还未确定：

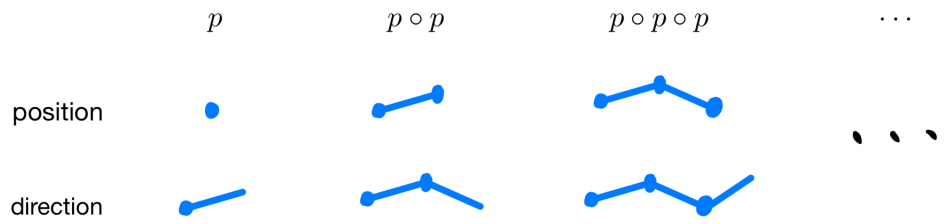


FIGURE 1. 多项式的自复合

转到第二列时，我们将 $p \circ p$ 中的位置视为“为这些箭头指定目标的所有可能方式”，而映射 δ_1 则从中选出 C里正确的那个。因此，严格来说，$p \circ p$ 上方一行所画的实际上表示“那些来自 B的位置”。要在这样一个位置处形成一个方向，我们在其上接一条新箭头，其目标目前仍未确定。这两条连续箭头如何收缩，记录在 $\delta^\sharp$中。接下来，第二列中缺失的目标将在 $p^{\circ 3}$ 中那些来自 B的位置上确定，并再展开一条悬空的箭头，如此继续。最终，整个范畴C 便由这一过程逐渐构造出来。

作为一种 ∞-范畴类比，遵循我们在引言截面中的讨论，我们可以提出如下猜想。

猜想 7.2. 给定一个 $\mathcal{S}$上的多项式余单子 p，存在一个关于 p 的典范构造，可以输出一个完备 *Segal* 空间。此外，在等价意义下，每个完备 *Segal* 空间都可由这样的构造得到。

在论文的其余部分，我们将关注从多项式余单子到 Segal 空间的一个方向。我们尚未完全成功，所能给出的最好结果如下，将在第 7.3 节中证明。

定理 7.3。若$(E \xrightarrow{p} B) \in Poly_{\mathcal{S}}$是一个余幺半对象，则存在一个增广余单纯空间 $X : \Delta_+ \to \mathcal{S}$，使得

$$X_{-1} \simeq B, \quad X_0 \simeq E, \quad X_1 \simeq E \times_B E, \quad \cdots, \quad X_n \simeq \underbrace{E \times_B E \cdots \times_B E}_{(n+1)\ copies\ of\ E}, \quad \cdots. \tag{7.4}$$

这里的极限取遍 $E \xrightarrow{q} B \xleftarrow{p} E \xrightarrow{q} B \cdots \xleftarrow{p} E$，其中态射 q由 δ_1 诱导，即位置上的余乘法。

备注 7.5。即使我们成功证明猜想 7.2，也不清楚如何像普通范畴情形那样将其提升为范畴等价。毕竟，我们还没有研究 ∞-范畴的反函子。我们注意到，通过余 Yoneda 嵌入，可表多项式余单子的对偶范畴与 A_∞-空间范畴等价。后者范畴已知可通过解环与小的带基点连通 ∞-范畴的 ∞-范畴等价。因此，我们猜想的等价应当涵盖这一结果，并在某种意义上成为它的多对象推广；这似乎是一项艰巨的任务。

7.2. **一个类似于 d´ecalage 的函子**。我们构造一个记作 e 的函子，它将在定理 7.3 的证明中发挥重要作用。我们将这一构造安排为一个独立的小节，因为作者推测它可能具有独立的研究价值。

构造 7.6. 考虑 $e\colon \Delta^{op} \to \Delta$ 定义如下

- 在对象上，$e([n-1]) = [n]$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$。
- 在态射上，对于一个态射 $[m-1] \to [n-1]$，它在 Δ^{op} 中表示为一个非严格递增映射 $f\colon \{1, \cdots, n\} \to \{1, \cdots, m\}$，其像 $e(f) : [m] \to [n]$ 是这样的映射：对于每个 $i = 0$、1、$\cdots$、m，将 i 映射到 $f^{-1}(\leq i)$[6] 中的最大元素。

命题 7.7. 在上述构造中，e是一个忠实函子，其像Δ 是由 Δ 定义的子范畴：

$$Ob(\tilde{\Delta}) = \{[n] | n \geq 1\},\ Mor(\tilde{\Delta}) = \{f : [m] \to [n] | f(0) = 0, f(m) = n\}. \tag{7.8}$$

证明。对于函子性，给定两个连续的非严格递增映射

$$\{1, \cdots, n\} \xrightarrow{f} \{1, \cdots, m\} \xrightarrow{g} \{1, \cdots, r\} \tag{7.9}$$

我们需要验证 $e(g \circ f) = e(f) \circ e(g) : [r] \to [n]$。对每个 $i \in [r]$，假设 $i \overset{e(g)}{\mapsto} j \overset{e(f)}{\mapsto} k$。根据 e 的定义，我们可以推出

$$g(j) \leq i < i+1 \leq g(j+1), \quad f(k) \leq j < j+1 \leq f(k+1). \tag{7.10}$$

由于 g 是保序的，上述两个不等式意味着

$$g(f(k)) \leq g(j) \leq i < i+1 \leq g(j+1) \leq g(f(k+1)). \tag{7.11}$$

因此，$k = e(g \circ f)(i)$。显然，e 也保持恒等态射，因此 e 是一个函子。注意，$e(f)$ 总是保持最小元素和极大元素。

[6]若 $f^{-1}(\leq i) = \varnothing$，则 $i \mapsto 0$。为了将这一特殊情形纳入其中，我们也可以在映射 f 中添加一个补充值 $f(0) = 0$ 。

˜反过来，给定这样一个映射 $f:[m]\to[n]$，它唯一确定一个映射 $f:\tilde{}$ $[m-1]\to[n-1]$，其属于 Δ^{op} 且满足 $e(f)=f$，如下所示：

$$\tilde{f}(i-1)+1,\cdots,\tilde{f}(i)\overset{f}{\mapsto}i,\quad\forall 1\le i\le m. \tag{7.12}$$

˜因此 e 是忠实的，并且其像为所需的 Δ 。

事实上，对于函子性，我们还有一种基于用面映射和退化映射描述构造7.6的替代证明（这或许是理解函子 e的更好方式）。注意， e 将 d_i^n 映射到 s_i^n ($\forall 0\le i\le n$)，并将s_{i-1}^{n-1} 映射到 d_i^{n+1} ($\forall 1\le i\le n$)。这些生成元之间的关系称为单纯形恒等式：

$$d_j^n d_i^{n-1}=d_i^n d_{j-1}^{n-1},\quad(i<j). \tag{7.13}$$

$$s_j^n d_i^{n+1}=d_i^n s_{j-1}^{n-1},\quad(i<j). \tag{7.14}$$

$$s_j^n d_i^{n+1}=id,\qquad(i=j,j+1). \tag{7.15}$$

$$s_j^n d_i^{n+1}=d_{i-1}^n s_j^{n-1},\quad(i>j+1). \tag{7.16}$$

$$s_j^{n-1}s_i^n=s_i^{n-1}s_{j+1}^n,\quad(i\le j). \tag{7.17}$$

随后，验证上面的第 i 个方程在 e 作用下被映射为第（$6-i$）个方程是繁琐但直接的，$\forall 1\le i\le 5$ （注意 e的逆变性）。因此，这些关系得以保持， e 是一个函子。□

给定一个单纯对象 X （在任意范畴中），稍微滥用记号6.8，我们仍使用 d_i 和 s_i 来表示 X中的面态射和退化态射：

$$X_0\underset{d_0,d_1}{\overset{s_0}{\rightleftarrows}}X_1\underset{d_0,d_1,d_2}{\overset{s_0,s_1}{\rightleftarrows}}X_2\underset{d_0,d_1,d_2,d_3}{\overset{s_0,s_1,s_2}{\rightleftarrows}}X_3\rightleftarrows\cdots. \tag{7.18}$$

通过与 e^{op} 预复合，我们得到一个余单纯形对象

$$X_1\underset{d_1}{\overset{s_0,s_1}{\rightleftarrows}}X_2\underset{d_1,d_2}{\overset{s_0,s_1,s_2}{\rightleftarrows}}X_3\rightleftarrows\cdots. \tag{7.19}$$

总而言之，每个单纯对象中都包含一个余单纯形对象，反之亦然，每个余单纯形对象中都包含一个单纯对象。

备注 7.20。 上文所述的这种移位效应，应当会让人想起 $d\acute{}ecalage$ 这一概念，它由 [Ill06] 引入。我们的函子 e舍弃所有外部面态射 d_0^n， d_n^n 并通过舍弃所有末端面态射和退化态射 s_n^n， d_n^n在单纯对象与余单纯形对象之间起到过渡作用；而单纯对象的 d´ecalage 会产生一个新的单纯对象，并与路径空间对象相关。据作者所知，我们的移位函子尚未在已发表的文献中明确提出，不过在 [Lur17 的构造 4.1.2 中可以看到似曾相识之处。9]: Lurie 所称的切割函子，在某种意义上是我们这一构造的逆。无论如何，函子 e 本身或许也值得研究，我们将留待未来探讨。

变体 7.21。 令 Δ_+ 表示增广单形范畴。我们可以将 e^{op} 扩展为函子 e_+ : $\Delta_+\to\Delta^{op}$，要求 e_+ 将初始对象$[-1]:=\varnothing\in\Delta_+$ 映至初始对象 $[0]\in\Delta^{op}$。为了强化我们的总结，现在可以说，每个单纯对象中都包含一个增广余单纯形对象。

7.3. **主要构造**。 我们回到猜想7.2。直观地说，给定一个在 $E \xrightarrow{p} B$ 上 $\mathcal{S}$的多项式余单子，我们可以预期存在一个单纯空间$\Delta^{op} \to \mathcal{S}$，它将 $[n]$ 映至 $E \times_B E \cdots \times_B E$（其中有 n 个 E的副本）。事实上，写出这里所有的面态射和退化态射并不难。但正如 [Lur25，警告 10.2.05], 所指出的，与 1-范畴情形不同，要确定一个单纯对象，仅仅指定态射生成元并不够；而这在处理 ∞-范畴时总是如此。我们必须找到一种巧妙的论证方法。另一个问题是，即使我们能构造出这样的 Segal 空间，也没有理由认为它是完备的。我们可能需要对它应用完备化函子（[Rez01，第 14]节），这似乎并不令人满意。

这里我们只给出一个部分结果：粗略地说，在与函子 e_+ 变体7.21进行前复合后，我们将构造这个猜想中的 Segal 空间。受第 7.1节图示的启发，并采用例 5.11 中的记号（因此特别是 $E_0 = B_0 = *$， $E_1 = E$以及 $B_1 = B$），我们将考虑以下空间

$$X_{n-1} := B \times_{B_n} E_n, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{7.22}$$

这里，态射 $B \to B_n$ 是 $p \to p^{\circ n}$的由$[1] \cong \{0, n\} \hookrightarrow [n]$诱导的位置态射。接下来，我们将通过证明空间 7.3，来证明定理 X_{-1}、 X_0和$\cdots$构成所需的增广余单纯空间。

证明。 我们将证明分为两部分。

(1) 第一部分中，我们将构造增广余单纯结构。令 $s : \Delta \to Poly_{\mathcal{S}}^{\otimes}$ 为定义 p 上余幺半结构的截面。考虑忠实函子 $e_+^{op} : \Delta_+^{op} \to \Delta$ 的像，记作 $\tilde{\Delta}_+$。那么 Δ_+ 就是命题 7.7 中的 Δ，再将终对象 $[0]$添加进去。考虑从幺半结构 $Poly_{\mathcal{S}}^{\otimes} \to \Delta$ 限制得到的笛卡尔纤维化 $Poly_{\mathcal{S}}^{\otimes} \to \tilde{\Delta}_+$。由于 $\tilde{\Delta}_+$ 有一个始对象 $[1]$，且$Poly_{\mathcal{S}}$ 恰好是其在该对象处的纤维，因此存在函子 f: $Poly_{\mathcal{S}}^{\otimes} \to Poly_{\mathcal{S}}$。具体而言，在 $[n]$ 处的纤维上，该函子 f 由 Δ_+ 中 $[1] \cong \{0, n\} \hookrightarrow [n]$ 的笛卡尔提升给出。将 f 与 Δ_+ 上受限截面 s 进行前复合，得到一个函子

$$\tilde{X} : \Delta_+^{op} \cong \tilde{\Delta}_+ \xrightarrow{s} \widetilde{Poly_{\mathcal{S}}^{\otimes}} \xrightarrow{f} Poly_{\mathcal{S}}. \tag{7.23}$$

最终，我们在 $Poly_{\mathcal{S}}$ 中得到一个增广单纯对象 X：

$$id_{\mathcal{S}} \underset{d_0}{\leftarrow} p \underset{d_0,d_1}{\overset{s_0}{\rightleftarrows}} p \circ p \underset{d_0,d_1,d_2}{\overset{s_0,s_1}{\rightleftarrows}} p \circ p \circ p \underset{d_0,d_1,d_2,d_3}{\overset{s_0,s_1,s_2}{\rightleftarrows}} p^{\circ 4} \rightleftarrows \cdots . \tag{7.24}$$

这里，所有面态射都由余单位 ϵ 诱导，所有退化态射都由余乘法 δ诱导；特别地，第一个 d_0 和 s_0 恰好就是 ϵ和 δ。接下来，考虑给定的态射φ: $p \to p'$在 $Poly_{\mathcal{S}}$中，所诱导的方向上的态射 $\varphi^\sharp$： $E' \times_{B'} B \to E$可视为 $\mathcal{S}_{/E}$ 中的一个对象。这定义了一个函子

$$g : (Poly_{\mathcal{S}})^{op}_{p/} \to \mathcal{S}_{/E}, \quad \varphi \mapsto \varphi^\sharp. \tag{7.25}$$

我们可以在映射空间上检验这里的函子性，这本质上就是等式（3.24）以及粘贴律：

$$Map_{p/}(p \xrightarrow{\varphi} p',\ p \xrightarrow{\psi} p'') \to Map_{/E}(E'' \times_{B''} B,\ E' \times_{B'} B) \tag{7.26}$$

$\Phi \mapsto \varphi_1^*(\Phi^\sharp)$。综合以上内容，我们最终构造出了一个函子

$$X : \Delta_+ \cong (\tilde{\Delta}_+)^{op}_{[1]/} \xrightarrow{\tilde{X}^{op}} (Poly_{\mathcal{S}})^{op}_{p/} \xrightarrow{g} \mathcal{S}_{/E} \xrightarrow{forget} \mathcal{S}. \tag{7.27}$$

展开这些概念可知，X 是如下的增广余单纯空间

$$B \underset{d_0}{\rightarrow} E \overset{s_0}{\underset{d_0,d_1}{\leftleftarrows}} B \times_{B_2} E_2 \overset{s_0,s_1}{\underset{d_0,d_1,d_2}{\leftleftarrows}} B \times_{B_3} E_3 \overset{s_0,s_1,s_2}{\underset{d_0,d_1,d_2,d_3}{\leftleftarrows}} B \times_{B_4} E_4 \rightleftarrows \cdots. \tag{7.28}$$

这里，第一个 d_0 是由余单位 ϵ 作为整体截面所诱导的。

（2）在第二部分中，我们将证明 Segal 类条件。首先定义另一个态射 $q : E \to B$ 除了 p。在等式（7.24）中，由于$s_0^0 \circ d_1^1 = id_{[0]}$，$p \circ p \xrightarrow{d_1} p \circ id_{\mathcal{S}} \simeq p$ 相对于 $\delta :\ p \to p \circ p$是一个收缩。因此

$$\delta_1 : B \to B_2 \simeq \varinjlim_{B} Map_{\mathcal{S}}(p[b], B) \tag{7.29}$$

是一个截面。根据等式（2.4），我们可以将 δ_1 视为中的一个点

$$\varprojlim_{B} Map_{\mathcal{S}}(p[b], B) \simeq Map_{\mathcal{S}}(\varinjlim_{B} p[b], B) \simeq Map_{\mathcal{S}}(E, B) \tag{7.30}$$

我们将其记为 q[7]。接下来，在第一部分中构造的增广余单纯空间 X 中，我们将证明

$$X_{n-1} \simeq B \times_{B_n} E_n \simeq \varprojlim(\underbrace{E \xrightarrow{q} B \xleftarrow{p} E \xrightarrow{q} B \cdots \xleftarrow{p} E}_{(n-1)\text{ copies of } q \text{ and } p}) \tag{7.31}$$

通过对 $n \in \mathbf{N}$ 进行归纳法证明。$n = 0,\ \mathbf{1}$ 的情形显然成立。剩下需要证明

$$X_n \simeq E \times_B X_{n-1} \simeq \varprojlim(E \xrightarrow{q} B \xleftarrow{f_n^*(p^{\circ n})} X_{n-1}) \tag{7.32}$$

f对于每个 $n \geq 2$, where $f_n : B \to B_n$ is th位置 itional morphism of $p \to p^{\circ n}$ 在式（7.24）中。但根据粘贴律，我们只需证明

$$X_n \simeq E \times_B (B \times_{B_n} E_n) \simeq E \times_{B_n} E_n \simeq \varprojlim(E \xrightarrow{f_n \circ q} B_n \xleftarrow{p^{\circ n}} E_n). \tag{7.33}$$

为此，我们先用简单的归纳法证明

$$f_{n+1} : B \to B_{n+1} \simeq \varinjlim_{B} Map_{\mathcal{S}}(p[b], B_n),\ \forall n \in \mathbb{N}^* \tag{7.34}$$

是由下式给出的一个截面

$$f_{n+1} : b \mapsto (p[b] \xrightarrow{f_n \circ \delta_1(b)} B_n). \tag{7.35}$$

基础情形 $n = 1$ 已经得到了证明，因为 $f_2 = \delta_1$。对于归纳步骤，我们注意到 f_{n+1} 可以写成一个复合

$$B \xrightarrow{\delta_1} B_2 \simeq \varinjlim_{B} Map_{\mathcal{S}}(p[b], B) \xrightarrow{\varinjlim_B (f_n \circ -)} B_{n+1} \simeq \varinjlim_{B} Map_{\mathcal{S}}(p[b], B_n) \tag{7.36}$$

---

[7]这里，若改用定义 3.1，映射 $q : E \to B$ 也可以如下刻画：由于 $B_2 \simeq p(B) \simeq p_*(B \times E)$，在伴随 $p^* \dashv p_*$下，映射 $\delta_1 :\ B \to p_*(B \times E)$ 上的 B 被映射为一个映射 $p^*(B) \simeq E \to B \times E$ 上的 E，这正是一个映射 $q :\ E \to B$。

其中第二个箭头是映射 $p(f_n)$： $B_2 \simeq p(B) \to B_{n+1} \simeq p(B_n)$。那么显然，$n+1$ 的情形可由 n的情形推出， $\forall n \in \mathbb{N}^*$。回到等式（7.33）的证明。由于 $\mathcal{S}$ 中的拉回保余极限，

$$E \times_{B_n} E_n \simeq \varinjlim(E \xrightarrow{q} B \xrightarrow{f_n} B_n \xrightarrow{p^{\circ n}} \mathcal{S}). \tag{7.37}$$

回顾 q的构造可知， $q|_{p[b]} = \delta_1(b)$， $\forall b \in B$。于是由等式（7.35可知，上方取余极限的图表限制在纤维 $p[b]$ 后变为

$$p[b] \xrightarrow{f_{n+1}(b)} B_n \xrightarrow{p^{\circ n}} \mathcal{S}, \quad \forall b \in B. \tag{7.38}$$

另一方面，我们有

$$X_n \simeq B \times_{B_{n+1}} E_{n+1} \simeq \varinjlim(B \xrightarrow{f_{n+1}} B_{n+1} \xrightarrow{p^{\circ(n+1)}} \mathcal{S}). \tag{7.39}$$

由于 $p^{\circ(n+1)} \simeq p \circ p^{\circ n}$，回顾多项式复合的显式描述可知，

$$p^{\circ(n+1)}[f_{n+1}(b)] \simeq \varinjlim_{p[b]}(p^{\circ n} \circ f_{n+1}(b)), \quad \forall b \in B. \tag{7.40}$$

比较上述四个等式，我们立即从等式（ $X_n \simeq E \times_{B_n} E_n$ 2.11）推出。

至此，我们完成了本节主定理的证明。 □

注记 7.41. 最后，我们通过评论一种可能改进结果的方法来结束本文。我们已经构造了一个函子 $\Delta_+ \to \mathcal{S}$ 见式（7.28），剩下的目标是将其扩展为一个函子 $\Delta^{op} \to \mathcal{S}$。这无法通过沿 e_+作 Kan 延拓来实现。相反，一个有希望的论证思路如下： Δ^{op} 有两个宽子范畴，其中一个是 $e_+(\Delta_+)$，另一个由所有凸态射张成。在后一个子范畴上构造一个函子到 $\mathcal{S}$并不困难，它还将 $[n]$ 映到 $E \times_B E \cdots \times_B E$。那么关键的观察是，这两个

$$\overbrace{\qquad\qquad}^{n \text{ copies of } E}$$

宽子范畴在此构成一个正交分解系统 ([Lur2, 第 9.3 节。8])，其对象为 Δ^{op}，并且应该可以通过某种方式将这两个函子拼接成 Δ^{op}上的一个函子，正如所期望的那样。不过，这个想法还需要进一步明确。

References

[AU16] Danel Ahman 和 Tarmo Uustalu。 *Directed Containers as Categories*。第 207 卷，第 89 98, 2016 2 – 页。 BGN [18] *Equalizing cartesian and cocartesian* Clark Barwick、Saul Glasman 和 Denis Nardin。 *fibrations Theory Appl. Categ* 33 4 67 94, 2018 。 , （）：–。[16] BS Clark Barwick 和 Jay Shah。 *Fibrations in infinity-category theory preprint*。 , 。 *arXiv:math/1607.04343v3* 2016 3 [22] GHK David Gepner、Rune Haugseng 和 Joachim Kock。 *Infinity-operads as analytic monads*。 *International Mathematics Research Notices* 2022 16 12516 12624, 2022 1, 2, 5, 11 , （）：–。 GK Nicola Gambino 和 [13] *Polynomial functors and polynomial monads* Joachim Kock。《》。载于*Mathematical proceedings of the cambridge philosophical society*, 第 154 卷，第 153–192 页。剑桥大学出版社，2013 年。5[06] ´ 239 2006 19 Ill Luc Illusie。《余切复形与变形 I》， [07] *Derived algebraic geometry II: noncommutative algebra* *preprint* 第 卷。施普林格， 。 Lur Jacob Lurie。《》。*arXiv:math/0702299v5* 2007 , 。 14, 15 [09] ∞ 2 Lur a Jacob Lurie。（, ） *-categories and the Goodwillie calculus I preprint*。 , 。 *arXiv:math/0905.0462v2* 2009 2

[Lur09b] Jacob Lurie。《高阶托扑斯理论》 *volume 170 of*《数学年刊研究》。普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，2009 10。Lur Jacob Lurie。《》。

[17] *Higher Algebra* *http://www.math.harvard.edu/ lurie/papers/HA.pdf*，2017 年。19

[25] *Kerodon* 2025 3, 4, 6, 9, 11, 15, 20, 22 Lur Jacob Lurie。《》。

[23] *http://kerodon.net/kerodon.pdf*，*Polynomial functors: A mathematical theory of interaction preprint arXiv:math/2312.00990v2* 2023 NS Nelson Niu 和 David I Spivak。《》。1, 8, 11, 17

[01] *A model for the homotopy theory of homotopy theory*，。Rez Charles Rezk。《》。*Transactions of the American Mathematical Society* 353 3 973 1007, 2001，（）：–。20

[25] SGF David I Spivak、Richard Garner 和 Aaron David Fairbanks。*Functorial aggregation*。《》。*Journal of Pure and Applied Algebra* 229 2 107883, 2025 1, 17，（）：。Spi [20] David I Spivak。*Poly: An abundant categorical setting for mode-dependent dynamics*。《》。*preprint arXiv:math/2005.01894v2*，2020 1。Spi David I Spivak。《》。载于

[21] *Learners' languages* *Proceedings of the 4th International Conference on Applied Category Theory* 14 28, 2021，第 – 页。1

[22] Spi a David I Spivak。*A summary of categorical structures in Poly preprint*。《》。*arXiv:math/2202.00534v14* 2022 1, 11, 13, 14

[22]，。Spi b David I Spivak。*Polynomial functors and Shannon entropy* *Proceedings of the 5th*。《》。载于，第 – 页。[SS23] Brandon T Shapiro *International Conference on Applied Category Theory* 331 343, 2022 1 和 David I Spivak。*Structures on categories of polynomials preprint*。《》。*arXiv:math/2305.00167v2* 2023

[25]，。Tor Takeshi Torii。*On duoidal infinity-categories Journal of Homotopy and Related Struc-*。《》。162, 2025 14，*tures* 20 1 125 [15]（）：–。Web Mark Weber。*Polynomials in categories with pullbacks*。《》。*Theory Appl. Categ*, 30(16):533– 598, 2015 年。5

Shanghai center for mathematical sciences, Fudan University,
2005 Songhu Road200438, Shanghai, China*Email address*: chenkun21@m.fudan.edu.cn