arXiv:2601.23070v1 [math.LO] 30 Jan 2026

关于丰满序数的一些笔记

Shuwei Wang

2026年1月30日

摘要

在本文中，我们尝试将在弱直觉主义公理集合论（如 IKP）中形式化处理 Paul Taylor 的丰满序数概念 [4]。我们将探讨丰满序数的基本性质，尤其是它们与 G¨odel 的可构造宇宙 L以及不可比较编码之间的关系。作为一个快速应用，我们将在文末解释如何从经典 $V \vDash$ ZFC 构造一个海廷值模型 $V^{\mathbb{H}}$，使得对于某个任意固定的 $x \in V$，有

$$V^{\mathbb{H}} \vDash \mathcal{P}(\check{x}) \in L.$$

1 引言

Paul Taylor 在 [4] 中引入了丰满序数这一概念，将其视为通常序数（传递序数）中的一个特殊子类；在直觉主义集合论中，这类序数具有更温和的性质。然而，他的工作立足于范畴论集合的背景，并未精确刻画构造这一概念需要多少一阶公理集合论（这似乎需要基于幂集算子的递归构造）。在本文中，我们将在包含强无穷公理的弱基理论 IKP 中，以形式化方式重新考察 Taylor 的想法，并在必要处明确加入额外公理。

首先，我们沿用 Taylor 的说法：若一个类 $\mathcal{O} \subseteq$Ord 满足，对于任意 $\alpha \in$Ord，$\alpha \in \mathcal{O}$ 当且仅当以下两项都成立，则称该类为丰满序数类：

- $\alpha \subseteq \mathcal{O}$,
- 对于任意 $\beta \in \alpha$，类 $\mathcal{P}(\beta) \cap \mathcal{O} \subseteq \alpha$。

严格来说，这并不是类 $\mathcal{O}$ 的定义，因为它是自指的，需要某种形式的递归定理，才能证明这样的类 $\mathcal{O}$ 确实可定义。但首先要注意，如果丰满序数类存在，它至多是唯一的：

命题 1.1。 假设 $\mathcal{O}_1$、$\mathcal{O}_2$ 都是如上所定义的“丰满序数类”，那么 $\mathcal{O}_1 = \mathcal{O}_2$。

证明。 我们将通过集合归纳证明，对于任意 $\alpha \in \mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$，这些类

$$\mathcal{P}(\alpha) \cap \mathcal{O}_1 = \mathcal{P}(\alpha) \cap \mathcal{O}_2.$$

首先，假设 $\alpha \in \mathcal{O}_1$，我们将首先利用归纳假设证明 $\mathcal{P}(\alpha) \cap \mathcal{O}_1 \subseteq \mathcal{P}(\alpha) \cap \mathcal{O}_2$。任取 $\beta \subseteq \alpha$ 使得 $\beta \in \mathcal{O}_1$，那么对于任意 $\gamma \in \beta \subseteq \alpha$，我们也有 $\gamma \in \mathcal{O}_1$。根据归纳假设，

$$\gamma \in \mathcal{P}(\gamma) \cap \mathcal{O}_1 = \mathcal{P}(\gamma) \cap \mathcal{O}_2,$$

也就是说，$\gamma \in \mathcal{O}_2$ 也成立。因此，$\beta \subseteq \mathcal{O}_2$。

此外，对于任意 $\gamma \in \beta \subseteq \alpha$，我们有 $\mathcal{P}(\gamma) \cap \mathcal{O}_1 \subseteq \beta$。因此，再次由归纳假设可得，

$$\mathcal{P}(\gamma) \cap \mathcal{O}_2 = \mathcal{P}(\gamma) \cap \mathcal{O}_1 \subseteq \beta.$$

因此，两个判据均已验证。根据 $\mathcal{O}_2$ 的定义，我们还必须有$\beta \in \mathcal{O}_2$。

现在，通过完全对称的论证，我们可以证明 $\alpha \in \mathcal{O}_2$ 蕴含 $\mathcal{P}(\alpha) \cap \mathcal{O}_2 \subseteq \mathcal{P}(\alpha) \cap \mathcal{O}_1$。注意，由于 $\alpha \in \mathcal{P}(\alpha)$，这足以得出结论：对于任意$\alpha \in \mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$，我们有

$$\alpha \in \mathcal{O}_1 \leftrightarrow \alpha \in \mathcal{O}_2.$$

换句话说，$\alpha \in \mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$ 同时蕴含 $\alpha \in \mathcal{O}_1$ 和 $\alpha \in \mathcal{O}_2$，因此 $\mathcal{P}(\alpha) \cap \mathcal{O}_1 = \mathcal{P}(\alpha) \cap \mathcal{O}_2$，如所需。

最后，只需注意到，在这一过程中我们已经证明了 $\mathcal{O}_1 = \mathcal{O}_2$。 □

现在，利用类似的递归，不难证明，在理论 IKP($\mathcal{P}$) 中存在这样一个类 $\mathcal{O}$，它是一个$\Sigma_1(\mathcal{P})$-类（除 IKP 的公理外，该理论还包含一个原始幂集算子 $\mathcal{P}$，可以出现在 Δ_0-分离和收集的子句中）。按照 Taylor 最初证明命题 [4, 4.3]，的构造，我们可以通过对 α 递归，定义类函数 $\vartheta_\alpha(\beta)$：它将两个参数 $\alpha \in \mathrm{Ord}$,$\beta \in \mathcal{P}(\alpha)$ 映射到真值集合 $\Omega = \mathcal{P}(1)$ 中的一个元素，定义如下：

$$\vartheta_\alpha(\beta) = \{\varnothing : \forall \gamma \in \beta\, (\varnothing \in \vartheta_\gamma(\gamma) \wedge \forall \delta \subseteq \gamma\, (\varnothing \in \vartheta_\gamma(\delta) \to \delta \in \beta))\}.$$

那么，$\mathcal{O} = \{\alpha \in \mathrm{Ord} : \vartheta_\alpha(\alpha) = 1\}$ 就是丰满序数类。

然而，为了研究丰满序数与哥德尔可构造宇宙 L 之间的相互作用，如果背景理论没有 Σ_1-分离，那么即使幂集公理在 V 中成立，它在 L 中也已知会失效（参见第 7 节），因此适配这一构造可能会很困难。

因此，在本文中，我们将首先提出一种不涉及幂集的替代定义，用以刻画丰满序数。我们的目标是证明，按上述方式刻画的丰满序数类在基理论 IKP 中已经存在。随后，我们将考察它的基本性质，其中有些性质对于更大的序数类 Ord 并不成立，尤其是与 L 相关的性质。例如，尽管尚不清楚任何直觉主义集合论（包括像 IZF 这样更强的理论）是否能够证明 L 包含所有序数，但证明 L 包含所有丰满序数则简单得多（在 IKP 中就能做到）。我们还将探讨如何结合丰满序数上的算术以及不可比较编码技术来发挥这一点的作用。

2 丰满性的形式化定义

为了准确把握丰满序数类的形式复杂度，我们现在选择写出该类的一个显式定义。我们记

$$\mathrm{relpl}_\alpha(\gamma) := \forall \delta \in \gamma \, \forall \varepsilon \in \alpha \, (\varepsilon \subseteq \delta \to \varepsilon \in \gamma)$$

并称 γ 相对于 α 是丰满的，只要这一条件成立。接着，我们定义 Ord 的以下子类：

$$\mathrm{PlOrd} = \{\alpha \in \mathrm{Ord} : \forall \beta \in \alpha \, \forall \gamma \subseteq \beta \, (\mathrm{relpl}_\alpha(\gamma) \to \gamma \in \alpha \wedge \forall \delta \in \alpha \, (\beta \in \delta \to \gamma \in \delta))\}.$$

我们观察到以下基本性质：

引理 2.1。 对于任意 $\alpha \in$PlOrd，若 $\beta \in \alpha$，则 $\mathrm{relpl}_\alpha(\beta)$ 成立。

证明。 我们对 β 使用集合归纳，证明若 $\beta \in \alpha$，则

$$\forall \gamma \in \alpha \, (\gamma \subseteq \beta \to \mathrm{relpl}_\alpha(\gamma))$$

成立。

取 γ，$\beta \in \alpha$ 使得 $\gamma \subseteq \beta$，并假设 $\delta \in \gamma$、$\varepsilon \in \alpha$ 和 $\varepsilon \subseteq \delta$。由此可得$\delta \in \beta$（根据传递性，也可得 $\delta \in \alpha$），因此根据归纳假设，relpl$_\alpha$(ε) 成立。我们知道 $\varepsilon \subseteq \delta$、$\gamma \in \alpha$ 和 $\delta \in \gamma$，因此假设 $\alpha \in$ PlOrd 必然意味着$\varepsilon \in \gamma$，这正是我们要得出 relpl$_\alpha$(γ) 成立所需的结论。

□

引理 2.2。 对于任意 $\alpha \in$ PlOrd，若 $\beta \subseteq \alpha$ 且 $\mathrm{relpl}_\alpha(\beta)$ 成立，则 $\beta \in$PlOrd。

证明。 首先注意到，$\beta \subseteq \alpha$ 与 relpl$_\alpha$(β) 蕴含 β 是传递的。任取$\gamma \in \beta$、$\delta \in \gamma$，我们知道 $\delta \in \alpha$，因为 $\alpha \in$ 属于序数类；又知道 $\delta \subseteq \gamma$，因为 $\gamma \in$属于序数类。由 relpl$_\alpha$(β) 可知，必有 $\delta \in \beta$。

现在假设 $\beta' \in \beta$, $\gamma \subseteq \beta'$，且 relpl$^\beta$(γ) 成立。对于任意满足 $\varepsilon \subseteq \delta$ 的 $\delta \in \gamma$ 和 $\varepsilon \in \alpha$，根据传递性，我们知道 $\delta \in \beta$，因此由 relpl$_\alpha$(β) 可知 $\varepsilon \in \beta$；再由 relpl$^\beta$(γ) 可知 $\varepsilon \in \gamma$。换言之，relpl$_\alpha$(γ) 成立。

根据假设 $\alpha \in$ 属于 PlOrd，我们可知 $\gamma \in \alpha$。又因为 $\beta' \in \beta$ 且 $\gamma \subseteq \beta'$，由 r elpl$_\alpha$(β) 可知 $\gamma \in \beta$。对于任意 $\delta \in \beta$，现在我们有 $\beta' \in \alpha$,$\gamma \subseteq \beta'$ 和 $\delta \in \alpha$，因此由 relpl$_\alpha$(γ) 可知 $\beta' \in \delta$ 蕴含 $\gamma \in \delta$。我们已经证明 $\beta \in$属于 PlOrd。

□

命题 2.3。 对于任意 $\alpha \in$ PlOrd，若 $\beta \in \alpha$，则 $\beta \in$PlOrd。

证明。 根据引理 2.1，我们有 relpl$_\alpha$(β)；根据传递性，我们还有 $\beta \subseteq \alpha$。因此，根据引理 2.2，我们有 $\beta \in$PlOrd。 □

引理 2.4。 对于任意 $\alpha, \beta \in$ PlOrd，若 $\beta \subseteq \alpha$，则relpl$_\alpha$(β) 成立。

证明。 假设 $\delta \in \beta$, $\varepsilon \in \alpha$ 和 $\varepsilon \subseteq \delta$。根据引理 2.1，我们知道 relpl$_\alpha$($\varepsilon$) 成立。由于 $\beta \subseteq \alpha$，很容易验证 relpl$^\beta$(ε) 也成立。于是，假设 $\beta \in$PlOrd 立即推出 $\varepsilon \in \beta$，这正是我们需要证明的。

□

命题 2.5。 对于任意 $\alpha, \gamma \in \mathrm{PlOrd}$，若 $\gamma \subseteq \beta$ 对某个 $\beta \in \alpha$ 成立，则 $\gamma \in \alpha$。

证明。 由于 $\alpha \in$ PlOrd，只需证明 $\mathrm{relpl}_\alpha(\gamma)$ 成立。根据，我们知道 $\gamma \subseteq \beta \subseteq \alpha$，由传递性可知，因此引理 2.4 足以完成证明。 □

命题 2.3 和命题 2.5 共同构成了这一断言的一个方向：PlOrd 确实是我们在第 1 节定义的丰满序数类。现在我们来证明，相同的判据也足以推出该结论：

命题 2.6。 对于任意集合 x，若以下两条均成立，则有 $x \in \mathrm{PlOrd}$：

- 对于任意 $\beta \in x$， $\beta \in$PlOrd；
- 对于任意 $\gamma \in \mathrm{PlOrd}$，若 $\gamma \subseteq \beta$ 对某个 $\beta \in x$ 成立，则 $\gamma \in x$。

证明。 第一条条件已确保 $x \subseteq$ 属于序数类。对于传递性，注意到对于任意 $\beta \in x$、 $\gamma \in \beta$，我们知道 $\gamma \subseteq \beta$，因为 $\beta \in$ 属于序数类，并且 $\gamma \in$ 属于 PlOrd（由命题 2.3 可知），因此第二条条件也蕴含 $\gamma \in x$。

现在假设 $\beta \in x$、 $\gamma \subseteq \beta$，且 $\mathrm{relpl}_x(\gamma)$ 成立。由传递性可知 $\beta \subseteq x$，根据定义可立即推出 $\mathrm{relpl}_\beta(\gamma)$ 也成立。这里 $\beta \in$属于 PlOrd，因此根据引理 2.2， $\gamma \in$ 属于 PlOrd，故我们的假设已足以确保 $\gamma \in x$。

此外，对于任意 $\delta \in x$，假设 $\beta \in \delta$。注意，我们还有 $\mathrm{relpl}_\delta(\gamma)$，且 $\delta \in$ 属于 PlOrd，因此可立即推出 $\gamma \in \delta$ 也成立。 □

由此我们终于可以得出结论：PlOrd 确实是丰满序数类。这验证了丰满序数的概念在 IKP 中是 Π_1-可定义的；或者说，在 IKP($\mathcal{P}$) 中是 $\Delta_0(\mathcal{P})$-可定义的，其中幂集算子 $\mathcal{P}$ 存在，并被视为一个原始符号。

此外，注意到可以结合引理 2.2 和引理 2.4，证明对于任意 $\alpha \in$属于 PlOrd 以及任意 $\beta \subseteq \alpha$，

$$\beta \in \mathrm{PlOrd} \leftrightarrow \mathrm{relpl}_\alpha(\beta),$$

其中，等价关系右侧是一个 Δ_0-公式。因此，对于任意$\alpha \in$PlOrd，我们可以将其丰满后继 定义为

$$\alpha^{\mathrm{pl}+} = \{\beta \in \mathcal{P}(\alpha) : \mathrm{relpl}_\alpha(\beta)\} = \mathcal{P}(\alpha) \cap \mathrm{PlOrd}$$

若其作为集合存在；并且我们知道，在 IKP 中，只要幂集 $\mathcal{P}(\alpha)$ 存在，丰满后继 $\alpha^{\mathrm{pl}+}$ 也由 Δ_0-分离公理存在。（我们仍使用标准记号$\alpha^+ = \alpha \cup \{\alpha\}$ 表示任意 $\alpha \in$ 序数类的瘦后继。）

引理 2.7。 对于任意 $\alpha \in$PlOrd，若 $\alpha^{\mathrm{pl}+}$ 存在，则 $\alpha^{\mathrm{pl}+} \in \mathrm{PlOrd}$。

证明。 我们只需验证命题 2.6 中的两个条件：对于任意 $\beta \in \alpha^{\mathrm{pl}+}$，根据定义有 $\beta \in$ PlOrd；对于任意 $\gamma \in$PlOrd，若对某个 $\beta \in \alpha^{\mathrm{pl}+}$有 $\gamma \subseteq \beta$，则$\gamma \subseteq \alpha$，并且根据定义也有 $\gamma \in \alpha^{\mathrm{pl}+}$。 □

引理 2.8。 对于任意集合 $s \subseteq \mathrm{PlOrd}$，都有 $\bigcup s \in \mathrm{PlOrd}$。

证明。 我们检验命题 2.6 中的两个判据：对于任意 $\beta \in \bigcup s$，都有 $\beta \in \alpha$对于某个 $\alpha \in s \subseteq$ PlOrd。于是，根据命题 2.3， $\beta \in$ PlOrd。对于任意 $\gamma \in$ PlOrd，若$\gamma \subseteq \beta$ 对于某个 $\beta \in \bigcup s$，则同样有 $\beta \in \alpha$ 对于某个 $\alpha \in s \subseteq$ PlOrd，从而根据命题 2.5 可得 $\gamma \in \alpha \subseteq \bigcup s$ 。

□

3 可构造宇宙与内模型

在直觉主义语境中，可构造宇宙与通常的序数概念并不十分协调，因为那个古老的问题——能否在直觉主义集合论中证明 Ord $\subseteq L$ in——仍未解决。因此，从某种意义上说，可以认为直觉主义 L 可能无法成为宇宙 V的“内模型”。本节将转而展示，丰满可构造宇宙$L_{\mathrm{pl}} = \bigcup_{\alpha \in \mathrm{PlOrd}} L_\alpha$ 是 IKP 的一个模型，并且已经包含所有丰满序数。

3.1 无界公理

继续之前，必须注意，IKP 并不保证幂集的存在，因此也不保证丰满后继 $\alpha^{\mathrm{pl}+} = \mathcal{P}(\alpha) \cap$ PlOrd 的存在。因此，研究丰满序数时，或许需要转向更强的基理论。我们将在此处以及稍后的第 3.3 小节考察若干需要采纳的附加公理。

研究这些序数时，最自然的假设是无界公理 PlUb，即 PlOrd 类无界，也就是说

$$\forall \alpha \in \mathrm{PlOrd}\ \exists \beta \in \mathrm{PlOrd}\ \alpha \in \beta.$$

引理 3.1. 以下命题等价：

- PlUb；
- 对于任意 $\alpha \in$PlOrd， $\alpha^{\mathrm{pl}+}$ 都存在且是一个集合。

证明。 假设 α， $\beta \in$ PlOrd 且 $\alpha \in \beta$，那么对于任意 $\gamma \subseteq \alpha$，由命题 2.5$\gamma \in$PlOrd 蕴含 $\gamma \in \beta$。因此，

$$\alpha^{\mathrm{pl}+} = \{\gamma \in \beta : \gamma \subseteq \alpha \wedge \mathrm{relpl}_\alpha(\gamma)\}$$

由 Δ_0-分离公理可知这是一个集合。

逆向蕴含由定义知是平凡的 $\alpha \in \alpha^{\mathrm{pl}+}$ 。 □

我们立即看到，PlUb 独立于 IKP：

命题 3.2。 仅 IKP 并不能证明 PlUb。具体而言，我们有 $1 \in \mathrm{PlOrd}$，然而 $\mathrm{IKP} \nvdash 1^{\mathrm{pl}+}$ 存在。

证明。 我们首先注意到，任意 $\alpha \subseteq 1$ 都是一个丰满序数：显然 $\alpha \in$序数类；对于任意 $\beta \in \alpha$，我们有 $\beta = \varnothing$，因此对于任意 $\gamma \subseteq \beta$，显然 $\gamma = \beta$ ，从而 $\gamma \in \alpha$ 也成立。因此， $\mathcal{P}(1) \subseteq$ PlOrd。由此可知， $1^{\mathrm{pl}+}$（如果存在）恰好是 $\mathcal{P}(1) \cap$PlOrd $=\mathcal{P}(1)$。

通常会验证 IKP$\nvdash \mathcal{P}(1)$ 存在（作为一个集合）。 □

现在假设 PlUb，我们可以将丰满算子 $(-)^{\mathrm{pl}}$: 序数类 $\to$PlOrd 定义如下:

$$\alpha^{\mathrm{pl}} = \bigcup_{\beta\in\alpha} \left(\beta^{\mathrm{pl}}\right)^{\mathrm{pl}+}.$$

由引理 2.7 和引理 2.8 可知，这一定义良好，且对每个 $\alpha \in$Ord 都有 $\alpha^{\mathrm{pl}} \in$PlOrd。不过，我们注意到这个映射很可能不是单射。

命题 3.3。 以下命题等价:

- PlUb $+(-)_{\mathrm{pl}}$： Ord $\to$ PlOrd 是单射;
- 受限排中律公理，即 $\forall x\ \forall y\ (x \in y \vee \neg x \in y)$ 。

证明。 我们先证明较简单的反向蕴含。假设受限排中律成立，即对任意 Δ_0-公式也成立排中律，那么我们知道，序数三歧性的经典证明仍然适用。因此，对于满足 $\alpha \subseteq \beta$ 的任意序数 $\alpha,\ \beta \in$Ord，必有 $\alpha \in \beta \vee \alpha = \beta$。由此，每个序数都是丰满的，$\alpha^{\mathrm{pl}+} = \alpha^+$ 总是存在，而 $(-)^{\mathrm{pl}}$ 就是恒等映射。

对于正向推导，与命题 3.2 的证明一样，我们知道 PlUb 蕴含 $1^{\mathrm{pl}+} = \mathcal{P}(1)$ 存在。对于任意集合 $x,\ y$，考虑真值

$$\sigma_{x,y} = \{\varnothing : x \in y\} \in \mathcal{P}(1),$$

我们知道，当且仅当 $\forall x\ \forall y\ \sigma_{x,\ y} \in 2$，当且仅当[1] $\mathcal{P}(1) = 2$时，受限排中律成立。只需证明 $(-)^{\mathrm{pl}}$ 是单射蕴含 $\mathcal{P}(1) = 2$。

我们考察 2^{pl} 和 $\mathcal{P}(1)^{\mathrm{pl}}$。由于 $2 \subseteq \mathcal{P}(1)$，根据定义，我们有 $2^{\mathrm{pl}} \subseteq \mathcal{P}(1)^{\mathrm{pl}}$。另一方面，对于任意 $\alpha \in \mathcal{P}(1)^{\mathrm{pl}}$，存在 $\beta \subseteq 1$ 使得 $\alpha \in \left(\beta^{\mathrm{pl}}\right)^{\mathrm{pl}+}$，即$\alpha \subseteq \beta^{\mathrm{pl}} \subseteq 1^{\mathrm{pl}}$。由此可得 $\alpha \in \left(1^{\mathrm{pl}}\right)^{\mathrm{pl}+} \subseteq 2^{\mathrm{pl}}$。因此，我们有 $2^{\mathrm{pl}} = \mathcal{P}(1)^{\mathrm{pl}}$，而 $(-)^{\mathrm{pl}}$ 的单射性确实蕴含 $\mathcal{P}(1) = 2$，正如所需。 □

引理 3.4. 以下各项等价:

- PlUb $+$指数化;
- 每个集合都有幂集。

证明. 对于正向，我们再次只需从 PlUb 得到$1^{\mathrm{pl}+} = \mathcal{P}(1)$ 存在这一蕴涵。对任意集合 x，假设幂集指数 $x^{\mathcal{P}(1)}$ 存在，则我们有

$$\mathcal{P}(x) = \left\{\{y \in x : \varnothing \in f(y)\} : f \in x^{\mathcal{P}(1)}\right\}$$

由 Δ_0-替换。

反向是平凡的，因为对任意 $\alpha \in$PlOrd，若 $\mathcal{P}(\alpha)$ 是集合，则同样

$$\alpha^{\mathrm{pl}+} = \{\beta \in \mathcal{P}(\alpha) : \mathrm{relpl}_\alpha(\beta)\}$$

由 Δ_0-分离。 □

[1]这里的反向推导依赖于这样一个观察：对于任意的 $\alpha \in \mathcal{P}(1)$，$\sigma_{\varnothing,\ \alpha} = \alpha$。

3.2 丰满的可构造宇宙

我们遵循 Lubarsky [2] 中对直觉主义可构造宇宙的处理。设可构造宇宙 $L = \bigcup_{\alpha\in\text{序数类}} L_\alpha$ 由一个 Σ_1-公式递归地给出，通过

$$L_\alpha = \bigcup_{\beta\in\alpha} \mathrm{def}(L_\beta),$$

其中 $\mathrm{def}(X)$ 表示结构 $\langle X;\in\rangle$ 的一阶可定义子集的集合。每个 L_α 都是传递集。

我们注意到，证明对于任意 $\alpha\in\mathrm{Ord}$，$L_\alpha\cap\mathrm{Ord} = \alpha$ 都成立，需要用到序数三歧性，因此需要经典逻辑。正如 [2]，中所指出的，通常的直觉主义集合论能否证明 $\mathrm{Ord}\subseteq L$ 仍是一个悬而未决的问题。不过，我们看到，丰满序数的性质要简单得多，更容易刻画：

引理 3.5。对于任意 $\alpha\in\mathrm{PlOrd}$，我们有

$$\alpha = \{x\in L_\alpha : L_\alpha\vDash x\in\mathrm{PlOrd}\}\in\mathrm{def}(L_\alpha).$$

证明。我们将对 α 使用集合归纳法来证明这一点。固定某个 $\alpha\in\mathrm{PlOrd}$，则归纳假设表明，对于任意 $\beta\in\alpha$，

$$\beta = \{x\in L_\beta : L_\beta\vDash x\in\mathrm{PlOrd}\}\in\mathrm{def}(L_\beta),$$

因此立即得到 $\alpha\subseteq L_\alpha$。另外请注意，PlOrd 是一个 Π_1-类，并且在传递集/类上向下绝对，因此对于任意 $\beta\in\alpha$，既然 $\beta\in\mathrm{PlOrd}$，我们也必有 $L_\alpha\vDash\beta\in\mathrm{PlOrd}$。

尚需证明其逆命题：对任意满足 $L_\alpha\vDash x\in\mathrm{PlOrd}$ 的 $x\in L_\alpha$，我们要证明 $x\in\alpha$。必定存在某个 $\beta\in\alpha$，使得 $x\in\mathrm{def}(L_\beta)$。考虑任意 $y\in x$，我们注意到引理 2.1 与引理 2.2 除集合归纳公理外未使用其他假设，因此它们对任意传递集的相对化仍然成立，从而我们可以将命题 2.3 相对化：

$$L_\alpha\vDash\forall x\in\mathrm{PlOrd}\ \forall y\in x\ y\in\mathrm{PlOrd}.$$

此处，α 按定义是传递的，因此 $\beta\subseteq\alpha$ 且 $L_\beta\subseteq L_\alpha$。再次由向下绝对性，我们知道 $y\in L_\beta$ 满足 $L_\beta\vDash y\in\mathrm{PlOrd}$。由归纳假设，这意味着 $y\in\beta$，即 $x\subseteq\beta$。

最后，我们观察到引理 2.4 也可相对化到传递集 L_α，因此我们有 $L_\alpha\vDash\mathrm{relpl}^\beta(x)$。然而，$\mathrm{relpl}^\beta(x)$ 是一个 Δ_0-公式，因此它在原来的宇宙中也成立。于是，$x\in\mathrm{PlOrd}$，而 $\alpha\in\mathrm{PlOrd}$ 立即蕴含 $x\in a$。□

我们将丰满可构造宇宙记作 $L_{\mathrm{pl}} = \bigcup_{\alpha\in\mathrm{PlOrd}} L_\alpha$。

推论 3.6。假设 PlUb，则 $\mathrm{PlOrd} = \mathrm{PlOrd}^{L_{\mathrm{pl}}}$。

证明。对于任意 $\alpha\in\mathrm{PlOrd}$，根据引理 3.5，$\alpha\in\mathrm{def}(L_\alpha)$，因此 $\alpha\in L_\beta$ 对于任意满足 $\alpha\in\beta$ 的 $\beta\in\mathrm{PlOrd}$。根据向下绝对性，我们还有 $L_{\mathrm{pl}}\vDash\alpha\in\mathrm{PlOrd}$，因此 $\mathrm{PlOrd}\subseteq\mathrm{PlOrd}^{L_{\mathrm{pl}}}$。

另一方面，假设 $L_{\mathrm{pl}}\vDash x\in\mathrm{PlOrd}$。那么存在某个 $\alpha\in\mathrm{PlOrd}$，使得 $x\in L_\alpha$。根据向下绝对性，$L_\alpha\vDash x\in$ 也属于 PlOrd。然而，根据引理 3.5，这意味着 $x\in\alpha$，由此根据引理 2.1 可得 $x\in\mathrm{PlOrd}$。□

我们已经证明，L_{pl} 包含与 V相同的丰满序数。接下来，我们要验证它也是 IKP 的一个模型。首先要注意，我们无法证明 ω 是一个丰满序数。因此，为了证明 $\omega \in L_{\mathrm{pl}}$，我们需要下面这个有用的引理：

引理 3.7. 设 x 为任意满足 $\omega \subseteq x$ 的传递集，则

$$\omega = \left\{ y \in x : y \in \mathrm{Ord} \wedge \left(y = \varnothing \vee \exists z \in y \; y = z^+ \right) \wedge \forall z \in y \left(z = \varnothing \vee \exists t \in y \; z = t^+ \right) \right\}.$$

证明. 对于正向，我们容易通过对 ω 的归纳法证明，使得

$$\forall n \in \omega \left(n = \varnothing \vee \exists m \in n \; n = m^+ \right).$$

每个 $n \in \omega$ 还满足 $\forall m \in n (m = \varnothing \vee \exists k \in n \; m = k^+)$，这一点由传递性直接得出。

对于反向，我们可以通过对 y 的集合归纳证明，位于右侧集合中的每个 $y \in x$ 也属于 ω：我们知道要么 $y = \varnothing$，要么存在 $z \in y$ 使得 $y = z^+$，而前一种情形是平凡的。在后一种情形中，我们还知道要么 $z = \varnothing$，要么存在 $t \in y$ 使得 $z = t^+$。若该t 存在，则由后继 t^+ 的定义可得 $t \in z$，并且对任意 $s \in z$，由传递性我们还知道 $s \in y$，从而要么 $s = \varnothing$，要么存在 $r \in y$ 使得 $s = r^+$，其中由传递性我们容易验证亦有 $r \in z$。换言之，我们有

$$\left(z = \varnothing \vee \exists t \in z \; z = t^+ \right) \wedge \forall s \in z \left(s = \varnothing \vee \exists r \in z \; s = r^+ \right).$$

由归纳假设，我们必有 $z \in \omega$，因此 $y = z^+ \in \omega$ 也成立。 □

命题 3.8。 假设 PlUb，则 $L_{\mathrm{pl}} \vDash \mathrm{IKP} - \Delta_0\text{-收集} + \mathrm{PlUb}$。

证明。 首先，空集公理显然成立；外延公理和集合归纳也显然成立，因为 L_{pl} 是一个传递类。并集公理和 Δ_0-分离公理源于这样一个事实：Δ_0-可定义的任意子集 L_α 都属于 $\mathrm{def}(L_\alpha)$，因而 $L_{\alpha^{\mathrm{pl}+}}$，而根据 PlUb 假设，这一集合存在。同样，对于任意 $a \in L_\alpha$、$b \in L_\beta$，若 α，$\beta \in \mathrm{PlOrd}$，根据引理 2.8，我们知道 $\alpha \cup \beta \in \mathrm{PlOrd}$，且 $\{a, b\} \subseteq L_{\alpha \cup \beta}$。因此

$$\{a, b\} \in \mathrm{def}(L_{\alpha \cup \beta}) \subseteq L_{(\alpha \cup \beta)^{\mathrm{pl}+}}.$$

对于强无穷公理，我们将考虑一种特定的 Σ_1-表述

$$\exists \omega \left(\varnothing \in \omega \wedge \forall x \in \omega \; x^+ \in \omega \wedge \forall x \in \omega \left(x = \varnothing \vee \exists y \in \omega \; x = y^+ \right) \right).$$

这只是在断言存在一个满足某个 Δ_0-公式的集合 ω，而集合归纳公理足以证明以这种方式定义的 ω 是所有归纳集的唯一交集。因此，根据 Δ_0-公式的绝对性，只需证明 $\omega \in L_{\mathrm{pl}}$。

现在，每个 $n \in \omega$ 都是遗传有限的，因此可以由一个 Δ_0-公式唯一地定义。因此，对 ω 作简单的归纳法可得

$$\forall n \in \omega \; n \in \mathrm{def}(L_{n^{\mathrm{pl}}}),$$

即 $\omega \subseteq L_{\omega^{\mathrm{pl}}}$。根据引理 3.7，$\omega$ 可通过对任意传递超集作 Δ_0-分离来定义，因此 $\omega \in \mathrm{def}(L_{\omega^{\mathrm{pl}}}) \subseteq L_{(\omega^{\mathrm{pl}})^{\mathrm{pl}+}}$，这正是我们所要的。

最后，$L_{\mathrm{pl}} \vDash$PlUb 可直接由推论 3.6 得出：$\mathrm{PlOrd}^{L_{\mathrm{pl}}} = \mathrm{PlOrd}$。 □

3.3 界定公理

将 Δ_0-收集相对化到 L_{pl} 的困难在于，PlOrd 是一个 Π_1-类，因此前提 $\forall x \in a\ \exists y \in L_{\mathrm{pl}}\ \varphi(x, y)$（其中 $\varphi(x, y)$ 是 Δ_0）不是一个 Σ_1-公式。这自然促使我们考虑加入以下公理模式

$$\forall x \in a\ \exists \alpha \in \mathrm{PlOrd}\ \varphi(x, \alpha) \to \exists \alpha \in \mathrm{PlOrd}\ \forall x \in a\ \exists \beta \in \alpha\ \varphi(x, \beta),$$

当 φ 遍历所有 Γ-公式时，记作 PlBΓ，读作 “Γ丰满序数的 - 界定”。

引理 3.9. $\mathrm{PlB}\Delta_0$ 蕴含PlUb。

证明。 对任意 $\alpha \in$PlOrd，我们显然有 $\forall x \in \{\alpha\}\ \exists \beta \in$ PlOrd $x = \beta$。因此，根据 Δ_0-界定，必定存在 $\gamma \in$PlOrd，使得

$$\forall x \in \{\alpha\}\ \exists \beta \in \gamma\ x = \beta,$$

也就是说，$\alpha \in \gamma$ 如所需。 □

现在我们得到以下结论：

命题 3.10。 假设 $\mathrm{PlB}\Sigma_1$，则 $L_{\mathrm{pl}} \vDash \Sigma_1$-收集 $+ \mathrm{PlB}\Sigma_1$。

证明。 假设 $a \in L_{\mathrm{pl}}$，且我们有

$$\forall x \in a\ \exists y, z \in L_{\mathrm{pl}}\ \varphi(x, y, z),$$

其中 $\varphi(x,\ y,\ z)$ 是 Δ_0，因此是绝对的。这可以等价地写成

$$\forall x \in a\ \exists \alpha \in \mathrm{PlOrd}\ \exists y, z \in L_\alpha\ \varphi(x, y, z),$$

其中 L_α 是 Σ_1-可定义的，因此根据 PlBΣ_1，必定存在 $\alpha \in$ PlOrd，使得 $\forall x \in a\ \exists \beta \in \alpha\ \exists y,\ z \in L_\beta\ \varphi(x,\ y,\ z)$。由此可得

$$\forall x \in a\ \exists y \in L_\alpha\ \exists z \in L_{\mathrm{pl}}\ \varphi(x, y, z)$$

其中 $L_\alpha \in L_{\mathrm{pl}}$。因此得到 $L_{\mathrm{pl}} \vDash \Sigma_1$-收集。

$L_{\mathrm{pl}} \vDash \mathrm{PlB}\Sigma_1$ 可由完全类似的论证得到，只需让上面的 y 改为遍历 PlOrd，并利用以下事实：根据引理 3.9，PlUb 成立，因此根据推论 3.6，$\mathrm{PlOrd}^{L_{\mathrm{pl}}} =$PlOrd。 □

推论 3.11. 假设 $\mathrm{PlB}\Sigma_1$，那么 L_{pl} 是一个内模型（即它与 V 包含完全相同的丰满序数），满足

$$\mathrm{IKP} + \mathrm{PlB}\Sigma_1 + V = L_{\mathrm{pl}}.$$

证明。 这可由命题 3.8、命题 3.10 和推论 3.6 立即得出。 □

另请注意，$\mathrm{PlB}\Sigma_1$ 是 IKP($\mathcal{P}$) 的一个推论（由上文的引理 2.8 得出），因为 PlOrd 是一个 $\Delta_0(\mathcal{P})$-类，其中幂集算子被视为原始符号。然而，这并不意味着 IKP($\mathcal{P}$) 也能证明 L_{pl} 是一个内模型，因为幂集在这里是更棘手的障碍：我们从 [3, 定理 7.12]知道，即使 CZF($\mathcal{P}$) $\nvdash L \vDash$ 指数化，而我怀疑同样的情况也很容易适用于 L_{pl}。

4 丰满序数算术

4.1 序数算术的基本性质

现在我们在 IKP + PlBΣ_1 中工作。令 Σ^{pl} 为这样一类公式：无界 $\exists x$ 和 $\exists x \in \mathrm{PlOrd}$ 仅以严格正的方式出现，且 $\forall x$ 和 $\forall x \in \mathrm{PlOrd}$ 不出现。那么，PlBΣ_1 意味着每个 Σ^{pl}-公式都等价于 $\exists \alpha \in \mathrm{PlOrd}\ \varphi(\alpha)$，其中 φ 是 Σ_1；这是通过将 $x \in \mathrm{PlOrd}$ 的每个内部出现替换为 $\mathrm{relpl}_\alpha(x)$ 得到的。这意味着，在 IKP 中针对 Σ的递归所用的通常证明，也适用于该系统中的 Σ^{pl}-公式。

因此，按照 Taylor [4]，的第 7 节，我们可以定义丰满序数上的通常算术运算：

$$\begin{aligned}
\alpha + \beta &= \alpha \cup \bigcup_{\gamma \in \beta} (\alpha + \gamma)^{\mathrm{pl}+}, \\
\alpha \cdot \beta &= \bigcup_{\gamma \in \beta} (\alpha \cdot \gamma + \alpha), \\
\alpha^\beta &= 1 \cup \bigcup_{\gamma \in \beta} (\alpha^\gamma \cdot \alpha).
\end{aligned}$$

由于初始步骤定义为 $\alpha + 1 = \alpha^{\mathrm{pl}+}$，这将产生与通常序数算术不同的结果。为避免歧义，本文中我们只使用丰满序数算术，因此不再费心处处添加标记来区分它们与通常的序数算术运算。另请注意，对于以下内容，$\beta \in \mathrm{Ord}$ 已足够：

引理 4.1. 对于任意 $\alpha \in \mathrm{PlOrd}$、$\beta \in$ 序数类，有 $\alpha + \beta, \alpha \cdot \beta, \alpha^\beta \in \mathrm{PlOrd}$。

证明。 由关于 β 的归纳法可得，使用引理 2.7 和引理 2.8。 □

此外，当 $\beta \in \mathrm{PlOrd}$ 时，我们可以验证以下算术基本性质成立。请注意，这里许多简短的证明专门针对丰满序数，在直觉主义语境下并不适用于更大的序数类 Ord：

引理 4.2. 对于任意 $\alpha, \beta, \gamma \in \mathrm{PlOrd}$，$\alpha + \beta \subseteq \alpha + \gamma$ 蕴含 $\beta \subseteq \gamma$。换言之，由 $\beta \mapsto \alpha + \beta$ 给出的类函数 $F_\alpha : \mathrm{PlOrd} \to \mathrm{PlOrd}$ 是单射。

证明。 我们对 γ 使用归纳法来证明这一点。任取 $\delta \in \beta$，则 $\alpha + \delta \in (\alpha + \delta)^{\mathrm{pl}+} \subseteq \alpha + \beta$。根据定义，$\alpha \subseteq \alpha + \delta$，因此 $\alpha + \delta \in \alpha$ 会由丰满性推出 $\alpha \in \alpha$，从而导致矛盾。因此，必定存在某个 $\varepsilon \in \gamma$，使得 $\alpha + \delta \in (\alpha + \varepsilon)^{\mathrm{pl}+}$。这意味着 $\alpha + \delta \subseteq \alpha + \varepsilon$，于是由归纳假设可得 $\delta \subseteq \varepsilon$。由于 $\gamma \in \mathrm{PlOrd}$，我们必有 $\delta \in \gamma$。 □

引理 4.3。 对于任意 $\alpha, \beta, \beta', \gamma \in \mathrm{PlOrd}$，若 $\gamma \in \alpha$，则 $\alpha \cdot \beta \subseteq \alpha \cdot \beta' + \gamma$ 蕴含 $\beta \subseteq \beta'$。

证明。 我们通过对 β' 进行归纳法来证明这一点。考虑任意一个 $\delta \in \beta$，我们知道 $\alpha \cdot \delta + \gamma \in (\alpha \cdot \delta + \gamma)^{\mathrm{pl}+} \subseteq \alpha \cdot \delta + \alpha$。因此 $\alpha \cdot \delta + \gamma \in \alpha \cdot \beta \subseteq \alpha \cdot \beta' + \gamma$。

现在，只需在此处对 γ 再进行一次归纳法，证明 $\alpha\cdot\delta+\gamma\in\alpha\cdot\beta'+\gamma$ 蕴含 $\delta\in\beta'$（对于上文固定的 β'）。根据丰满序数加法的定义，我们必有 $\alpha\cdot\delta+\gamma\in\alpha\cdot\beta'$，或者对于某个 $\gamma'\in\gamma$，有 $\alpha\cdot\delta+\gamma\in(\alpha\cdot\beta'+\gamma')^{\mathrm{pl}+}$。

在第一种情况下，必定存在 $\varepsilon\in\beta'$ 使得 $\alpha\cdot\delta+\gamma\in\alpha\cdot\varepsilon+\alpha$，也就是说，存在 $\gamma'\in\alpha$ 使得 $\alpha\cdot\delta+\gamma\in(\alpha\cdot\varepsilon+\gamma')^{\mathrm{pl}+}$，因此 $\alpha\cdot\delta\subseteq\alpha\cdot\delta+\gamma\subseteq\alpha\cdot\varepsilon+\gamma'$。根据外层归纳的归纳假设，$\delta\subseteq\varepsilon$，故由丰满性可得 $\delta\in\beta'$。

在第二种情况下，必有 $\alpha\cdot\delta+\gamma'\in(\alpha\cdot\delta+\gamma')^{\mathrm{pl}+}\subseteq\alpha\cdot\delta+\gamma\subseteq\alpha\cdot\beta'+\gamma'$，因此根据内层归纳的归纳假设可得 $\delta\in\beta'$。 □

推论 4.4。对于任意 $\alpha,\beta\in\mathrm{PlOrd}$，由$\langle\gamma,\delta\rangle\mapsto\alpha\cdot\delta+\gamma$ 给出的函数 f：$\alpha\times\beta\to\alpha\cdot\beta$ 是单射。

证明。我们首先检查 f 确实在陪域 $\alpha\cdot\beta$上定义良好：对于任意 $\gamma\in\alpha$，$\delta\in\beta$，我们看到 $\alpha\cdot\delta+\gamma\in(\alpha\cdot\delta+\gamma)^{\mathrm{pl}+}\subseteq\alpha\cdot\delta+\alpha\subseteq\alpha\cdot\beta$。

现在，假设 $f(\gamma,\delta)=f(\gamma',\delta')$。注意到我们有 $\alpha\cdot\delta\subseteq f(\gamma,\delta)=\alpha\cdot\delta'+\gamma'$，因此根据引理 4.3 有 $\delta\subseteq\delta'$。同样地，我们也有 $\delta'\subseteq\delta$，即 $\delta=\delta'$。这意味着 $\alpha\cdot\delta=\alpha\cdot\delta'$，进而根据引理 4.2 还有 $\gamma=\gamma'$。 □

现在我们已经具备直觉主义地证明以下断言所需的基础：

定理 4.5。存在定义域为 PlOrd 的类函数 Θ、I，使得对于任意$\alpha\in\mathrm{PlOrd}$，都有 $\Theta(\alpha)\in\mathrm{PlOrd}$，且 $I(\alpha)\subseteq\Theta(\alpha)\times L_\alpha$是从 $\Theta(\alpha)$ 的一个子集到 L_α上的满射。

证明。我们通过 Σ^{pl}-递归同时定义 Θ 和 I。固定某个 $\alpha\in\mathbf{PlOrd}$，记 $\gamma=\bigcup_{\beta\in\alpha}\Theta(\beta)$，并令

$$\Theta(\alpha)=\alpha\cdot\omega^{\mathrm{pl}}\cdot\gamma^{\omega}.$$

那么，$I(\alpha)$将恰好包含那些 $\langle\delta,\ x\rangle\in\Theta(\alpha)\times L_\alpha$，使得存在 $\beta\in\alpha$、公式 φ 以及 $\varepsilon_1,\ \ldots\ldots,\ \varepsilon_n\in\mathrm{dom}(I(\beta))\subseteq\Theta(\beta)$，满足

- $\delta=\sum_{i=1}^{n}\alpha\cdot\omega_{\mathrm{pl}}\cdot\gamma^{n-i}\cdot\varepsilon_i+\alpha\cdot q^{\mathrm{pl}}+\beta$，其中 $q\in\omega$ 是 φ的哥德尔编号；
- $x=\{z\in L_\beta:\varphi(z,I(\beta)(\varepsilon_1),\ldots,I(\beta)(\varepsilon_n))\}\in\mathrm{def}(L_\beta)$.

反复应用推论 4.4 可立即得出：若 $\langle\delta,\ x\rangle$，$\langle\delta',\ x'\rangle\in I(\alpha)$且 $\delta=\delta'$，那么 x 和 x' 恰好由相同的参数定义，因此 $I(\alpha)$确实是良定义函数。其余所需性质均可直接验证。

□

4.2 强不可比较性与编码

我们称两个丰满序数 $\alpha,\ \beta\in\mathbf{PlOrd}$ 强不可比较 [2]，如果两者都不是对方的子集，即

$$\neg\alpha\subseteq\beta\wedge\neg\beta\subseteq\alpha,$$

[2]形容词“强”用于将这一概念与弱不可比较性区分开来，即 $\neg\alpha\in\beta^{+}\wedge\neg\beta\in\alpha^{+}$；后者在其他语境中很有用（参见）。[5]

本文的讨论只涉及强不可比较性。

这等价于说 $\alpha \notin \beta^{\mathrm{pl}+} \wedge \beta \notin \alpha^{\mathrm{pl}+}$。此外，设 $f\colon s \to \mathrm{PlOrd}$ 是定义域 s 上的任意函数，我们称 f 是两两（强）不可比较的，如果满足以下条件：

$$\forall \gamma, \gamma' \in s \left(f\left(\gamma'\right) \subseteq f(\gamma) \to \gamma = \gamma' \right).$$

现在，上一节中的算术性质为我们提供了一种便捷的方法，用丰满序数上的两两不可比函数进行编码。更具体地说，我们证明：

命题 4.6. 丰满序数上的任意两两不可比函数都可以用单个丰满序数编码。换言之，对于任意 $\alpha, \beta \in \mathrm{PlOrd}$，若 $f\colon s \to \beta$在定义域 $s \subseteq \alpha$上两两不可比，则存在某个 $\sigma \in \mathrm{PlOrd}$ 及公式 $\varphi(x, y; \alpha, \beta, \sigma)$，使得

$$(\gamma \in s \wedge f(\gamma) = \delta) \leftrightarrow \varphi(\gamma, \delta; \alpha, \beta, \sigma).$$

证明。我们取

$$\sigma = \bigcup_{\gamma \in s} (\alpha \cdot f(\gamma) + \gamma)^{\mathrm{pl}+},$$

并将 $\varphi(x, y; \alpha, \beta, \sigma)$ 定义为公式

$$x \in \alpha \wedge y \in \beta \wedge \exists \tau \in \sigma \left(\tau = \alpha \cdot y + x \wedge \forall \tau' \in \sigma \left(\tau \subseteq \tau' \to \tau = \tau' \right) \right).$$

对于正向蕴含，我们检验对任意 $\gamma \in s$，确有 $\alpha \cdot f(\gamma) + \gamma \in \sigma$。此外，对任意 $\tau \in \sigma$，必存在 $\gamma' \in s$，使得 $\tau \subseteq \alpha \cdot f(\gamma') + \gamma'$。现在，若 $\alpha \cdot f(\gamma) + \gamma \subseteq \tau$，即

$$\alpha \cdot f(\gamma) \subseteq \alpha \cdot f(\gamma) + \gamma \subseteq \tau \subseteq \alpha \cdot f\left(\gamma'\right) + \gamma',$$

那么根据引理 4.3，我们还必须有 $f(\gamma) \subseteq f(\gamma')$，而由两两不可比可推出 $\gamma = \gamma'$。于是显然有 $\tau = \alpha \cdot f(\gamma) + \gamma$。

对于反向证明，假设 $\varphi(\gamma, \delta; \alpha, \beta, \sigma)$ 成立。那么必有$\alpha \cdot \delta + \gamma \in \sigma$，即对于某个 $\gamma' \in s$，$\alpha \cdot \delta + \gamma \subseteq \alpha \cdot f(\gamma') + \gamma'$，这也根据 φ 中的约定推出 $\alpha \cdot \delta + \gamma = \alpha \cdot f(\gamma') + \gamma'$。又由于 $\gamma, \delta \in$ 属于 PlOrd 且 $\gamma \in \alpha$，由推论 4.4 可得 $\delta = f(\gamma')$，并且 $\gamma = \gamma'$。因此，如所需，我们有 $\gamma \in s \wedge \delta = f(\gamma)$。 □

Si由于根据引理 3.5，丰满序数总是在 L_{pl} 中，我们可以证明以下结果：

定理 4.7。 假设 $s \subseteq \mathrm{PlOrd}$ 和 $f\colon s \to$PlOrd 两两不可比较，则 $\mathcal{P}(s) \subseteq L_{\mathrm{pl}}$。

证明。 令 $\alpha = \bigcup_{\beta \in s} \beta^{\mathrm{pl}+}$ 使得 $s \subseteq \alpha$，并令 $x \subseteq s$ 为任意子集。我们考虑

$$\sigma_x = \bigcup_{\beta \in x} f(\beta)^{\mathrm{pl}+},$$

那么 σ_x 是一个丰满序数，因此根据 $\sigma_x \in L_{\mathrm{pl}}$ 引理 3.5。于是我们可以定义集合

$$s_x = \{\beta \in \alpha : \beta \in s \wedge f(\beta) \in \sigma_x\},$$

由于条件 $\beta \in s \wedge f(\beta) \in \sigma_x$ 可以通过 Δ_0-公式 $\varphi(x, y)$ 表述为$\exists \gamma \in \sigma_x\, \varphi(\beta, \gamma)$（但包含通过 Σ^{pl}-递归定义的函数），且其中的参数由命题 4.6 给出的丰满参数构成，因此该集合属于 L_{pl}。显然，对于任意 $\beta \in x$，都有 $f(\beta) \in \sigma_x$，从而 $\beta \in s_x$。另一方面，对于任意 $\beta \in s_x$，我们有 $\beta \in s$ 以及某个 $\gamma \in x$，使得 $f(\beta) \in f(\gamma)^{\mathrm{pl}+}$，即 $f(\beta) \subseteq f(\gamma)$，因此根据不可比性可得 $\beta = \gamma \in x$。所以，我们确实有 $x = s_x \in L_{\mathrm{pl}}$。□

推论 4.8. 假设对于任意 $\alpha \in \mathrm{PlOrd}$，都存在一个两两不可比函数 $f\colon \alpha \to \mathrm{PlOrd}$，那么我们有 $V = L_{\mathrm{pl}}$。

证明。 由集合归纳，只需证明对于任意集合 $x \subseteq L_{\mathrm{pl}}$，我们也有$x \in L_{\mathrm{pl}}$。现在，由 $\mathrm{PlB}\Sigma_1$，我们可以找到某个 $\alpha \in \mathrm{PlOrd}$，使得 $x \subseteq L_\alpha$。考虑定理 4.5 中给出的丰满序数 $\Theta(\alpha)$，那么定理 4.7 蕴含 $\mathcal{P}(\Theta(\alpha)) \subseteq L_{\mathrm{pl}}$。具体而言，以下集合

$$\sigma = \{\beta \in \Theta(\alpha) : \exists y \in x\, \langle \beta, y\rangle \in I(\alpha)\} \in L_{\mathrm{pl}}.$$

现在，我们在 L_{pl} 内进行推理；根据推论 3.11，它是 $\mathrm{IKP} + \mathrm{PlB}\Sigma_1$ 的一个模型，并且可以通过 Σ^{pl}-递归构造相同的 $I(\alpha)$。由此可得

$$s = \{I(\alpha)(\beta) : \beta \in \sigma\} \in L_{\mathrm{pl}}.$$

对于任意 $y \in x$，存在 $\beta \in \Theta(\alpha)$，使得 $I(\alpha)(\beta) = y$；根据定理 4.5 中的规定以及 $\beta \in \sigma$ 的定义，故 $x \subseteq s$。另一方面，由于$I(\alpha)$是一个函数，对于任意 $\beta \in \sigma$，根据 σ 的定义，有 $I(\alpha)(\beta) \in x$。因此，确实有$x = s \in L_{\mathrm{pl}}$。

□

5 强迫模型中的一项应用

定理 5.6 和推论 4.8 是一个例子，说明在与L相关的各种情形中，丰满序数及其算术可能比序数类 Ord 上全体序数的对应物更为有用。作为比较，第 4.2 小节中的不可比现象可以在任意（非丰满）序数中以少得多的努力显现出来（参见 [5]），但由于序数类 $\mathrm{Ord} \subseteq L$ 是否仍是直觉主义集合论中的一个未决问题，因此很难将带有序数参数的可定义性与 L中的可定义性联系起来。

在这最后一节中，我们将看到一个更为具体的例子：我们利用引理 3.5 以及第 4.2 小节中所考虑的一个显式编码函数，在直觉主义语境中把大量“非构造集合”自动编码到 L 中。我们将在更强的经典理论 ZFC 中工作，并通过海廷强迫把任意经典集合 x（及其所有子集）放入 L。

5.1 广义康托空间上的海廷强迫

在 ZFC 中，设 κ 为任意无限基数，并考虑由基本开集生成的 2^κ 上的广义康托拓扑

$$U_f = \{g \in 2^\kappa : f \subseteq g\}$$

对任意 f：满足 $\alpha \in \kappa$的 $\alpha \to 2$。根据 Bell [1, 第 0], 章，该拓扑的开集构成一个完备海廷代数，我们将其记为 $\mathbb{H}_\kappa$。

对于任意 α，$\beta \in \kappa$ 和 f： $\alpha \to 2$，我们选取空间 2^κ 中的一个元素来编码有序对 $\langle \beta, f \rangle$；记作 $f \oplus \beta$： $\kappa \to 2$，其定义如下：

$$(f \oplus \beta)(\gamma) = \begin{cases} f(\gamma) & \text{if } \gamma \in \alpha, \\ 1 & \text{if } \gamma = \alpha \text{ or } \gamma = \alpha + 1 + \beta, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

对于任意 $\alpha \in \kappa$，我们记

$$D_\alpha = \{f \oplus \alpha : \beta \in \kappa, f : \beta \to 2\} \subseteq 2^\kappa,$$

显然，这在 2^κ 中是稠密的。注意：

引理 5.1。对于任意 $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \kappa$ 和 f_1： $\alpha_1 \to 2$，f_2： $\alpha_2 \to 2$，我们有

$$f_1 \oplus \beta_1 = f_2 \oplus \beta_2 \to (\beta_1 = \beta_2 \wedge f_1 = f_2).$$

换言之，对于不同的 $\alpha \in \kappa$，稠密集 D_α 彼此不相交。

证明。根据 $\oplus$ 的定义，使得 $(f_1 \oplus \beta_1)(\gamma) = 1$ 成立的最后一个 $\gamma \in \kappa$ 是 $\gamma = \alpha_1 + 1 + \beta_1$，倒数第二个是 $\gamma = \alpha_1$。对于 $f_2 \oplus \beta_2$ 也同样成立，因此我们知道

$$\alpha_1 = \alpha_2 \quad \text{and} \quad \alpha_1 + 1 + \beta_1 = \alpha_2 + 1 + \beta_2.$$

由此可立即得出 $\beta_1 = \beta_2$，以及 $f_1 = f_2$。 □

利用选择公理，我们可以固定一个序数 λ，以及一个双射 ρ: $\lambda \to 2^{<\kappa}$，其映到由所有函数 f: $\alpha \to 2, \alpha \in \kappa$ 构成的集合，并且保持这些函数的定义域上按包含关系排列的良序；也就是说，对任意 α，$\beta \in \lambda$,

$$\alpha \in \beta \to \mathrm{dom}(\rho(\alpha)) \subseteq \mathrm{dom}(\rho(\beta)).$$

对于任意 $\alpha \in \kappa$，令 $\rho \oplus \alpha$ 表示映射 $\beta \mapsto \rho(\beta) \oplus \alpha$，它是一个双射 $\lambda \to D_\alpha$。我们观察到：

引理 5.2. 对于任意 $\alpha \in \kappa, \beta \in \lambda$，其像

$$(\rho \oplus \alpha)\text{“}\beta = \{\rho(\gamma) \oplus \alpha : \gamma \in \beta\}$$

是闭的。

证明。令 $\sigma = \mathrm{dom}(\rho(\beta)) + 1 + \alpha$。根据我们对 ρ 的约定，对于任意 $\gamma \in \beta$，都有 $\mathrm{dom}(\rho(\gamma)) \subseteq \mathrm{dom}(\rho(\beta))$，因此对于任意 $f \in (\rho \oplus \alpha)\text{“}\beta$，可得 $f(\gamma) = 0$，对任意$\gamma > \sigma$均成立。只需证明，任何具有此性质的 $S \subseteq 2^\kappa$ 都是闭的。

我们考虑任意一个 $g \in 2^\kappa \setminus S$；有两种情况：要么存在某个$\gamma > \sigma$ 使得 $g(\gamma) = 1$，要么不存在这样的 γ。在第一种情况下，显然 $g \in U_{g\restriction(\gamma+1)}$和 $U_{g\restriction(\gamma+1)} \cap S = \varnothing$。在第二种情况下，由于 $g \notin S$，对于每个 $f \in S$，必定存在某个 $\gamma \leq \sigma$使得 $f(\gamma) \neq g(\gamma)$。因此 $g \in U_{g\restriction(\sigma+1)}$和 $U_{g\restriction(\sigma+1)} \cap S = \varnothing$。所以$S$ 是闭的。 □

现在，和 Bell [1, 第 8], 章一样，我们考虑在名的类上进行海廷强迫

$$V_\alpha^{\mathbb{H}_\kappa} = \left\{ f : f \text{ is a partial function} \bigcup_{\beta\in\alpha} V_\beta^{\mathbb{H}_\kappa} \rightharpoonup \mathbb{H}_\kappa \right\},$$

最后，$V^{\mathbb{H}_\kappa} = \bigcup_{\alpha\in\text{序数类}} V_\alpha^{\mathbb{H}_\kappa}$。公式的赋值记作 $[\![\varphi]\!] \in \mathbb{H}_\kappa$（其定义是标准的，这里从略），并且我们写作 $V^{\mathbb{H}_\kappa} \vDash \varphi$当

$$[\![\varphi]\!] = \mathbf{1}_{\mathbb{H}_\kappa} = 2^\kappa.$$

自然地，$V^{\mathbb{H}_\kappa} \vDash$ 直觉主义策梅洛-弗兰克尔集合论。

根据引理 5.2，我们可以考虑这些名

$$\dot\lambda_\alpha = \left\{ \left\langle \check\beta, 2^\kappa \setminus (\rho \oplus \alpha)\text{“}\beta \right\rangle : \beta \in \lambda \right\}$$

对于任意 $\alpha \in \kappa$。我们验证

引理 5.3。对于任意 $\alpha \in \kappa$, $V^{\mathbb{H}_\kappa} \vDash \dot\lambda_\alpha \in$ 序数类 $\wedge\, \dot\lambda_\alpha \subseteq \check{}\lambda$。此外，对于任意 $\alpha \neq \beta \in \kappa$,

$$V^{\mathbb{H}_\kappa} \vDash \neg \dot\lambda_\alpha \subseteq \dot\lambda_\beta.$$

证明。显然可验证 $\left[\!\left[\dot\lambda_\alpha \subseteq \check{}\lambda \right]\!\right] = \mathbf{1}_{\mathbb{H}_\kappa}$，由此立即可得 $V^{\mathbb{H}_\kappa} \vDash \forall\beta \in \lambda_\alpha\ \beta$ 是传递的。还需验证

$$\begin{aligned}\left[\!\left[\forall\beta \in \dot\lambda_\alpha\ \forall\gamma \in \beta\ \gamma \in \dot\lambda_\alpha\right]\!\right] &= \bigwedge_{\beta\in\lambda} \left(2^\kappa \setminus (\rho\oplus\alpha)\text{“}\beta \Rightarrow \bigwedge_{\gamma\in\beta} \left[\!\left[\check\gamma \in \dot\lambda_\alpha\right]\!\right] \right) \\ &= \bigwedge_{\beta\in\lambda} \left(2^\kappa \setminus (\rho\oplus\alpha)\text{“}\beta \Rightarrow \bigwedge_{\gamma\in\beta} (2^\kappa \setminus (\rho\oplus\alpha)\text{“}\gamma) \right) = \mathbf{1}_{\mathbb{H}_\kappa},\end{aligned}$$

因为 $(\rho\oplus\alpha)\text{“}\gamma \subseteq (\rho\oplus\alpha)\text{“}\beta$ 对于 $\gamma \in \beta$。

另一方面，对于任意 $\alpha \neq \beta \in \kappa$，我们有

$$\begin{aligned}\left[\!\left[\dot\lambda_\alpha \subseteq \dot\lambda_\beta\right]\!\right] &= \bigwedge_{\gamma\in\lambda} (2^\kappa \setminus (\rho\oplus\alpha)\text{“}\gamma \Rightarrow 2^\kappa \setminus (\rho\oplus\beta)\text{“}\gamma) \\ &= \bigwedge_{\gamma\in\lambda} (2^\kappa \setminus (\rho\oplus\beta)\text{“}\gamma) = (2^\kappa \setminus D_\beta)^\circ = \mathbf{0}_{\mathbb{H}_\kappa},\end{aligned}$$

其中我们利用了这一事实：根据引理 5.1，$(\rho\oplus\alpha)\text{“}\gamma$ 和 $(\rho\oplus\beta)\text{“}\gamma$ 不相交，因此$2^\kappa \setminus (\rho\oplus\alpha)\text{“}\gamma \Rightarrow 2^\kappa \setminus (\rho\oplus\beta)\text{“}\gamma = 2^\kappa \setminus (\rho\oplus\beta)\text{“}\gamma$。 □

最后，我们将这些组合成典范名称

$$\dot\Lambda = \left\{ \left\langle \check\alpha, \dot\lambda_\alpha \right\rangle^\bullet : \alpha \in \kappa \right\}^\bullet,$$

使得 $V^{\mathbb{H}_\kappa}$ 认为 $\dot\Lambda$ 是一个函数 $\check{}\kappa \to$ 序数类，它将每个 $\check{}\alpha$ 映射到 $\dot\lambda_\alpha$。显然可得

推论 5.4。 $V^{\mathbb{H}_\kappa} \vDash \forall\alpha,\ \beta \in \check{}\kappa \left(\dot\Lambda(\alpha) \subseteq \dot\Lambda(\beta) \to \alpha = \beta \right)$。

5.2 瘦序数与不可比编码

在上述过程中，我们构造了特定的强迫名称，因此自然会在此处使用 $\check{}$ 来处理经典序数，例如 λ 及其子集，但这些显然并不丰满。不过，我们可以说，序数 $\alpha \in \mathrm{Ord}$ 若满足对于任意 $\beta, \gamma \in \alpha$，则称其为瘦的 。

$$\gamma \subseteq \beta \to (\gamma \in \beta \vee \gamma = \beta)\,.$$

容易验证，强迫模型 $V^{\mathbb{H}_\kappa}$ 承认任何经典的$\check{\lambda}$ 是瘦的。换言之，推论 5.4 涉及一个函数 $\dot{\Lambda}:\ \check{\kappa} \to$ 序数类 $\cap\, \mathcal{P}\big(\check{\lambda}\big)$ ，针对 $V^{\mathbb{H}_\kappa}$中的某些瘦序数$\check{\kappa},\check{\lambda} \in$ 序数类。

从这里开始，我们将完全在作为直觉主义策梅洛-弗兰克尔集合论模型的 $V^{\mathbb{H}_\kappa}$ 内进行推理，以处理这个特定集合 Λ。我们首先注意到

引理 5.5 (IKP $+$ PlUb)**.** 设 $\alpha \in$ 序数类 是瘦的，且 β、 $\gamma \in \mathcal{P}(\alpha) \cap$ 序数类。则

$$\gamma \subseteq \beta \leftrightarrow \gamma^{\mathrm{pl}} \subseteq \beta^{\mathrm{pl}}.$$

证明。 正向由$(-)^{\mathrm{pl}}$的定义平凡可得；对于反向，我们对参数 β, γ进行同时集合归纳。假设 $\gamma^{\mathrm{pl}} \subseteq \beta^{\mathrm{pl}}$ 并任取 $\delta \in \gamma$。我们有 $\delta^{\mathrm{pl}} \in \big(\delta^{\mathrm{pl}}\big)^{\mathrm{pl}+} \subseteq \gamma^{\mathrm{pl}}$ ，从而有 $\delta^{\mathrm{pl}} \in \beta^{\mathrm{pl}}$。换言之，存在某个 $\varepsilon \in \beta$ 使得 $\delta^{\mathrm{pl}} \in \big(\varepsilon^{\mathrm{pl}}\big)^{\mathrm{pl}+}$，即 $\delta^{\mathrm{pl}} \subseteq \varepsilon^{\mathrm{pl}}$。现在，由传递性我们仍有 $\delta, \varepsilon \subseteq \alpha$ ，因此归纳假设蕴含 $\delta \subseteq \varepsilon$，再由 α 的瘦性我们进一步有 $\delta \in \varepsilon \vee \delta = \varepsilon$。于是 $\delta \in \beta$，即为所求。 □

我们定义 $\dot{\Lambda}^{\mathrm{pl}} = \Big\{\big\langle \alpha^{\mathrm{pl}},\ \beta^{\mathrm{pl}} \big\rangle :\ \langle \alpha,\ \beta\rangle \in \dot{\Lambda}\Big\}$。注意，对于任意 $\langle \alpha,\ \beta\rangle \in \dot{\Lambda}$，对于薄序数 $\check{\kappa},\ \lambda \in$ 序数类，都有 $\check{}\,\check{}\alpha \subseteq \check{\kappa}$ 以及 $\beta \subseteq \lambda$ 。因此，根据引理 5.5，我们首先有

$$\alpha^{\mathrm{pl}} = \beta^{\mathrm{pl}} \ \text{ implies } \ \alpha = \beta, \ \text{ implies } \ \gamma = \delta, \ \text{ implies } \ \gamma^{\mathrm{pl}} = \delta^{\mathrm{pl}}$$

对于任意 $\langle \alpha,\ \gamma\rangle,\ \langle \beta,\ \delta\rangle \in \dot{\Lambda}$，即 $\dot{\Lambda}^{\mathrm{pl}}$是在某个定义域 $s = \big\{\alpha^{\mathrm{pl}} : \alpha \in \check{\kappa}\big\}$上的良定义函数。结合引理 5.5与推论 5.4，我们还有

$$\dot{\Lambda}^{\mathrm{pl}}\Big(\alpha^{\mathrm{pl}}\Big) \subseteq \dot{\Lambda}^{\mathrm{pl}}\Big(\beta^{\mathrm{pl}}\Big) \ \text{ implies } \ \dot{\Lambda}(\alpha) \subseteq \dot{\Lambda}(\beta), \ \text{ implies } \ \alpha = \beta, \ \text{ implies } \ \alpha^{\mathrm{pl}} = \beta^{\mathrm{pl}}$$

对于任意 $\alpha,\ \beta \in \check{\kappa}$，即 $\dot{\Lambda}^{\mathrm{pl}}:\ s \to \mathrm{PlOrd}$ 是一个两两不可比函数。

定理 5.6. $V^{\mathbb{H}_\kappa} \vDash \mathcal{P}(s) \in L_{\mathrm{pl}}$ 其中集合 $s = \big\{\alpha^{\mathrm{pl}} :\ \ \alpha \in \check{\kappa}\big\}$。

证明。 这由关于 $\dot{\Lambda}^{\mathrm{pl}}$ 的定理 4.7 立即得出。 □

现在我们可以着手讨论本例的主要目标，即证明对于任意固定的 x，都有 some $V^{\mathbb{H}_\kappa} \vDash \mathcal{P}(\check{x}) \in L_{\mathrm{pl}}$：

引理 5.7 (ZFC)。 对于任意 $\alpha, \beta \in$ 序数类，令 $\gamma = \alpha + \beta$ 和 $\delta = \alpha \cdot \beta$ 如经典序数算术中那样定义[3],则

$$V^{\mathbb{H}_\kappa} \vDash \check{\gamma}^{\mathrm{pl}} = \check{\alpha}^{\mathrm{pl}} + \check{\beta}^{\mathrm{pl}} \quad \textit{and} \quad \check{\delta}^{\mathrm{pl}} = \check{\alpha}^{\mathrm{pl}} \cdot \check{\beta}^{\mathrm{pl}}$$

对于任意无限基数 κ。

[3]严格来说，在经典集合论中，我们有 PlOrd $=$Ord，且丰满序数算术与通常的序数算术一致。因此，我们仍遵循第 4 节中的规定，此处并未滥用符号。

证明。 这可由对 β 的简单归纳法得出，并利用 IKP + PlUb 中的基本事实，即

(i) 对任意 $\alpha \in$ 序数类，$(\alpha^+)^{\mathrm{pl}} = (\alpha^{\mathrm{pl}})^{\mathrm{pl}+}$；(ii) 对任意 $s \subseteq$ 序数类，$(\bigcup s)^{\mathrm{pl}} = \bigcup_{\alpha \in s} \alpha^{\mathrm{pl}}$。 □

P命题 5.8 (ZFC)。 任取集合 x，则对所有足够大的基数 κ，我们有

$$V^{\mathbb{H}_\kappa} \vDash \check{x} \in L_{\mathrm{pl}}.$$

证明。 利用选择公理，我们固定一个基数 λ，并取一个满射 $f\colon \lambda \to \mathrm{trcl}(\{x\})$ 到 $\{x\}$ 的传递闭包上；不失一般性，我们可以假设 $f(\varnothing) = x$。令 κ 为 λ 的基数后继，并考虑集合

$$\tau = \{\lambda \cdot \alpha + \beta : \alpha, \beta \in \lambda, f(\alpha) \in f(\beta)\} \subseteq \kappa.$$

现在我们在 $V^{\mathbb{H}_\kappa}$ 内，使用名 $\check{}\, f$ 和 $\check{}\,\tau$。我们构造 $\tilde{\tau} = \left\{\alpha^{\mathrm{pl}} \colon \alpha \in \check{}\,\tau\right\}$，显然 $\tilde{\tau} \subseteq \left\{\alpha^{\mathrm{pl}} \colon \alpha \in \check{}\,\kappa\right\}$。因此，根据定理 5.6，我们有 $\tilde{\tau} \in L_{\mathrm{pl}}$。

我们定义

$$g = \left\{\left\langle \alpha^{\mathrm{pl}}, y \right\rangle : \langle \alpha, y\rangle \in \check{f}\right\},$$

随后， $V^{\mathbb{H}_\kappa}$ 认识到，根据引理 5.5， g 是在定义域 $s = \left\{\alpha^{\mathrm{pl}}$ 上良定义的函数： $\alpha \in \check{}\,\lambda\right\}$。根据引理 5.7，我们还有

$$V^{\mathbb{H}_\kappa} \vDash \tilde{\tau} = \left\{\check{\lambda}^{\mathrm{pl}} \cdot \alpha + \beta : \alpha, \beta \in s, g(\alpha) \in g(\beta)\right\}.$$

现在，由于根据定理 5.6， $s \in L_{\mathrm{pl}}$ 也显然成立，我们可以在 L_{pl} 中定义一个定义域为 s、满足递归条件 h的部分函数

$$h(\alpha) = \left\{h(\beta) : \beta \in s, \check{\lambda}^{\mathrm{pl}} \cdot \beta + \alpha \in \tilde{\tau}\right\}$$

若对所有此类 β， $h(\beta)$ 都存在，则通过一个 Σ^{pl}-公式。利用 L_{pl} 是 IKP + PlBΣ_1的模型这一事实，我们可以对 u 应用集合归纳来证明：对于任意集合 u，若 $g(\alpha) = u$，则 $h(\alpha)$也存在，且等于 u。具体而言，我们知道 $g(\varnothing) = \check{}\,x$且 $h \in L_{\mathrm{pl}}$，因此$\check{}\,x = h(\varnothing) \in L_{\mathrm{pl}}$，正如所需。 □

推论5.9 (ZFC)。 任取集合 x，则对任意足够大的基数 κ，我们有

$$V^{\mathbb{H}_\kappa} \vDash \mathcal{P}(\check{x}) \in L_{\mathrm{pl}}.$$

由于 $L_{\mathrm{pl}} \subseteq L$，我们也有 $V^{\mathbb{H}_\kappa} \vDash \mathcal{P}(\check{}\,x) \in L$。

证明。 利用选择公理，我们固定一个基数 λ，并取一个单射 $f\colon x \to \lambda$。根据命题 5.8，我们可以选取足够大的 $\kappa \geq \lambda$，使得 $V^{\mathbb{H}_\kappa} \vDash \check{}\, f \in L_{\mathrm{pl}}$。由于推论 3.6 保证 L_{pl} 关于丰满序数是正确的，我们可以在 L_{pl} 内定义函数 $\tilde{}\,\mathrm{tion}\ f\colon \check{}\,x \to \mathrm{PlOrd}$ 如下

$$\tilde{f}(z) = \check{f}(z)^{\mathrm{pl}},$$

因此， $\tilde{f}$ 的值域是 $s = \left\{\alpha^{\mathrm{pl}}$ 的子集： $\alpha \in \check{}\,\kappa\right\}$。

现在，注意到只需证明在 $V^{\mathbb{H}_\kappa}$ 中 $\mathcal{P}(\check{}x) \subseteq L_{\mathrm{pl}}$，因为 $\mathcal{P}(\check{}x) \in L_{\mathrm{pl}}$ 可由收集得到。任取子集 $y \subseteq \check{}x$，根据定理 5.6，我们有

$$u = \left\{ \tilde{f}(z) : z \in y \right\} \in L_{\mathrm{pl}}$$

因为 $u \subseteq s$。由此可得 $v = \left\{ z \in \mathrm{dom}\left(\tilde{f}\right) : \ \tilde{f}(z) \in u \right\} \in L_{\mathrm{pl}}$。注意，$\check{} f$是$\tilde{}$显然的单射，因此根据引理 5.5，$f$ 也如此。因此我们得到了所需的 $y = v \in L_{\mathrm{pl}}$。

□

参考文献

[1] John Lane Bell, *Set theory: Boolean-valued models and independence proofs*, 牛津逻辑指南，牛津大学出版社，2005 年。[2] Robert Seth Lubarsky, *Intuitionistic L*, 逻辑方法：献给 Anil Nerode 六十岁生日的论文集（John Newsome Crossley、Jeffrey Brian Remmel、Richard Arnold Shore 和 Moss Eisenberg Sweedler 编），Birkh¨auser Boston，1993 年，第 555–571 页。[3] Richard Matthews 和 Michael Rathjen, *Constructing the constructible universe constructively*, 《纯粹与应用逻辑年刊》**175**（2024 年），第 3 期。文章编号：103392。[4] Paul Taylor, *Intuitionistic sets and ordinals*, 《符号逻辑杂志》**61**（1996 年），第 3 期，705–744 页。[5] Shuwei Wang, *Antichain of ordinals in intuitionistic set theory*（2025 年），可在 arXiv:2510.18859 [math.LO] 查阅。