arXiv:2601.23083v1 [cs.CC] 30 Jan 2026

利用右端项的仿射分解，更快地求解 4块整数线性规划

AlexandraLassota 荷兰埃因霍温理工大学

KoenLigthart 荷兰埃因霍温理工大学

摘要

我们提出了一种用于 4块整数线性规划问题的全新、更快的算法，突破了以往依赖 Graver 复杂度或邻近界的算法长期面临的运行时间瓶颈。4块整数线性规划问题要求计算 $\min\{c_0^\top x_0 + c_1^\top x_1 + \cdots + c_n^\top x_n \mid Ax_0 + Bx_1 + \cdots + Bx_n = b_0,\ Cx_0 + Dx_i = b_i\ \forall i \in [n],\ (x_0, x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{(1+n)k}\}$，其中给定某些 $k \times k$ 矩阵 A, B, C, D，其系数的绝对值均不超过 Δ。我们的算法运行时间为 $f(k, \Delta) \cdot n^{k+\mathcal{O}(1)}$，优于此前已知的最佳运行时间 $f(k, \Delta) \cdot n^{k^2+\mathrm{O}(1)}$[（Oertel、Paat 和 Weismantel，数学规划，2024；Chen、Koutecký、Xu 和 Shi，ESA 2020）]。此外，我们给出了首个能够处理 A, B 和 C 中大系数的算法，也就是说，其运行时间仅以多项式方式依赖于这些系数的编码长度。我们通过扩展 Cslovjecsek、Koutecký、Lassota、Pilipczuk 和 Polak（SODA 2024）的 n-折整数线性规划算法，使其纳入额外的全局变量 x_0，从而得到这些结果。核心技术成果在于证明：通过仔细猜测全局变量模一个大模数的余数，并从足够少的候选项中选取合适超平面配置的一个面，可以将对 Cslovjecsek、Eisenbrand、Pilipczuk、Venzin 和 Weismantel（ESA 2021）向量重排引理的穷尽式应用转化为仿射形式。这使得我们能够对经过忠实分解且具有有界右端项的 n-折整数线性规划进行动态高重数编码，并针对每种猜测高效求解。

2012 ACM 主题分类 计算数学 → 组合优化；计算理论 →复杂度类

关键词和短语 整数线性规划、四块整数线性规划、固定参数可解性、多面体优化

1 引言

我们研究一类重要的整数线性规划的求解复杂度，这类整数线性规划在约束矩阵中具有特殊的块结构，称为四块 整数线性规划。一般的整数线性规划问题（标准形式）要求计算最优解 x 到

$$\min\{c^\top x \mid Qx = b, x \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n\},$$

对于某个约束矩阵 $Q \in \mathbb{Z}^{m \times n}$、右端向量 $b \in \mathbb{Z}^m$ 和目标向量$c \in \mathbb{Z}^n$。对于一般的 Q，这一问题已知是 NP难的，这推动了人们广泛研究在受限约束矩阵类别下求解整数线性规划的（参数化）复杂性；例如，参见综述 [20] 。在这些研究中，我们聚焦于*4* 块 矩阵，

其形式如下：

$$Q = \begin{pmatrix} A & B_1 & B_2 & \dots & B_n \\ C_1 & D_1 & & & \\ C_2 & & D_2 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ C_n & & & & D_n \end{pmatrix}$$

对于块 $A \in \mathbb{Z}^{m\times s}$，$B_i \in \mathbb{Z}^{m\times t}$，$C_i \in \mathbb{Z}^{d\times s}$，$D_i \in \mathbb{Z}^{d\times t}$，其中 $i \in [n] := \{1、2、...、n\}$。这里省略了由零组成的块。其对应的 4 块整数线性规划问题要求求解一个约束矩阵为 4块矩阵的整数线性规划。

将 x，c 和 b 拆分为与 4块矩阵 Q 的块结构相匹配的 $1+n$ 个砖块后，求解 4 块整数线性规划问题就相当于求出以下问题的一个最优解：

$$\begin{aligned} \min\{c_0^\top x_0 + c_1^\top x_1 + \dots + c_n^\top x_n \mid\ & Ax_0 + B_1x_1 + \dots + B_nx_n = b_0, \\ & C_ix_0 + D_ix_i = b_i\ \forall i \in [n], \\ & (x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{s+nt}\}. \end{aligned} \tag{4B}$$

我们用 $\overline{\Delta}$ 表示 Q 系数的最大绝对值，用 $\Delta \leq \Delta$ 表示对角块 D_i中系数的最大绝对值。此外，我们用 L 表示整数线性规划 (4B) 中数值绝对值最大的数的编码长度。若一个 4 块问题满足 $B_1 = B_2 = \dots = B_n$，$C_1 = C_2 = \dots = C_n$ 且$D_1 = D_2 = \dots = D_n$，则称其为一致的；若一个 4 块问题满足 $B_1 = B_2 = \dots = B_n$，则称其为 B-一致的。下文中，$\mathcal{O}_x(y)$ 用来表示 $\mathcal{O}(f(x)\cdot y)$，其中 f 是某个（可计算的）函数；也就是说，这里省略了依赖于参数 x 的乘法因子。

已知，当所有块的维度和系数均有常数上界时，4 块整数线性规划可以在多项式时间内求解 [5, 23, 31], ，也就是说，以 d, m, s, t, Δ 为参数时，该问题属于 XP。Hemmecke、Köppe 和 Weismantel [23] 率先证明了这一点，他们给出了一种算法，能够以切片多项式时间 $\mathsf{O}_{dmst\Delta}(n^{s2^m}+\mathsf{O}(1)\cdot L^{\mathcal{O}(1)})$ 求解一致四块整数线性规划。此后的研究改进了运行时间指数中块维度的依赖关系：Chen 等人 [5] 以 $\mathsf{O}_{dmst\Delta}(n^{sm+\mathcal{O}(1)})$ 的时间求解一致的 4 块整数线性规划，而 Oertel、Paat 和 Weismantel [31] 以[1] $\mathsf{O}_{dmst\Delta}(n^{s\cdot\min\{s+2,m\}+\mathcal{O}(1)})$ 的时间求解（非一致的）4 块整数线性规划。此外，研究者还关注了以下特殊情形：Chen 等人 [5] 给出了一种算法，当 A 为零矩阵时，该算法可在 $\mathsf{O}_{dmst\Delta}(n^{s(t^2+1)}+\mathsf{O}(1))$ 时间内求解一致的 4 块整数线性规划；Chen、Chen 和 Zhang [4] 则给出了一种算法，只要所有 C_i都一致等于某个秩 1 矩阵，该算法就能以 $\mathsf{O}_{dmst\Delta}(n^{\mathcal{O}(1)})$ 的时间求解 4 块整数线性规划。

此前提及的算法都采用了相同的方法：证明一个界 u，该界要么是邻近度，即限制线性规划松弛的最优解与距离其最近的最优整数解之间的距离；要么是 Graver 复杂度，即表示约束矩阵的整数核元素所构成的格的粒度。这些界可用于将 4 块整数线性规划问题化简为求解多项式数量的 4 块整数线性规划，其中 x_0 的定义域被限制在盒子 $[0, 2u]^s$的一个子集中。这样就能通过猜测全局变量向量 x_0 的取值来消去它；该向量是盒子[2]中的$\mathcal{O}(u)^s$ 个整数向量之一。最后，得到的不含

[1] 通过使用 [7] 中的算法以及强多项式算法（例如 Tardos 的 [33] 算法），在假设 Δ 较小的情况下求解线性规划松弛，可以达到这一运行时间。[2] 我们指出，在所有 C_i 都等于某个秩 1 矩阵 C 这一强假设下，[4] 的作者转而在一个一维盒子中枚举 Cx 的选项，这与 $s=1$ 的情形类似。

全局变量（$s = 0$）的 4 块整数线性规划问题通常称为 n-折整数线性规划，可以在$\mathcal{O}_{dmst\Delta}(n^{\mathcal{O}(1)})$时间内高效求解 [7]。

由于 Chen 等人 [5] 表明，四块约束矩阵的 Graver 复杂度（并且，由于可以使用类似的构造，邻近度亦然）可能高达 $u = \Omega_{dmst\Delta}(n^{\min\{d,m,s,t\}})$，此类盒猜测策略似乎仅限于块维度对运行时间中 n 的指数呈 $\Omega(s \cdot \min\{d, m, s, t\})$ 的二次依赖。相反，Eisenbrand 和 Rothvoss [15] 猜想 4 块整数线性规划问题是固定参数可解（FPT）的。

▶ **猜想 1** ([15]). 当以 d、m、s、t、Δ 为参数时，求解四块整数线性规划是固定参数可解的，即它可以在时间 $O_{dmst\Delta}((nL)^{\mathcal{O}(1)})$ 内求解。

Chen 等人 [5] 给出的下界表明，为了肯定地回答猜想 1，需要不同的算法技术。在猜想 1 的背景下，Cslovjecksek 等人 [9] 表明，一致四块整数线性规划关于 d, m, s, t, Δ 是固定参数可解的，当且仅当一致四块整数线性规划关于 d, m, s, t, Δ 和 $\Delta \leq n$是固定参数可解的：猜想 1 的一个证明将意味着，求解非对角块中系数适度较大的均匀 4 块整数线性规划也是固定参数可解的。因此，以 Δ 而非 Δ为参数、且其运行时间仅随 L 多项式增长的算法值得关注[3]。此类结果对于盒猜测方法似乎难以企及，因为整数线性规划的 Graver 复杂度和邻近度通常至少与约束矩阵的系数一样大。

Cslovjecksek 等人 [9], 以及 Eisenbrand 和 Rothvoss [15], 针对 4 块整数线性规划中的两类得到深入研究的特殊情况，提出了能够处理对角块之外的大系数的固定参数可解算法：n-折叠 和 两阶段随机 整数线性规划，接下来我们将讨论这两类问题。如图 1 所示，它们分别没有全局变量（即 $s = 0$），或没有全局约束（即 $m = 0$）。然而，它们的表达能力足以应用于图问题 [17, 18], 调度 [25, 28], 计算社会选择 [2, 29], 和机器学习 [16]等领域。另请参阅 [20]。

$$\begin{pmatrix} B_1 & B_2 & \dots & B_n \\ D_1 & & & \\ & D_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & D_n \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} C_1 & D_1 & & \\ C_2 & & D_2 & \\ \vdots & & & \ddots \\ C_n & & & D_n \end{pmatrix}$$

(a) n-折叠结构（$s = 0$）。 **(b)** 两阶段随机结构（$m = 0$）。

图 1 图中展示了两类重要的 4块矩阵特殊情况。

就多项式依赖而言，目前针对这些特殊情况的最先进固定参数可处理算法可在 $\mathcal{O}_{dm\Delta}((nt)^{1+o(1)})$ [7]时间内求解 n-折叠整数线性规划，并在 $\mathcal{O}_{st\Delta}((nd)^{1+o(1)})$ [8]时间内求解两阶段随机整数线性规划。算法运行时间对 Δ 的依赖源于邻近界的使用。

Cslovjecksek 等人 [9] 避免使用此类界限论证，并在时间 $\mathcal{O}_{dt\Delta}(m \cdot (nL)^{\mathcal{O}(1)})$ 内求解 B-一致[4]n-重整数线性规划，以及在时间 $\mathcal{O}_{ds\Delta}(t \cdot$

[3] 已知，按对角块 D_i 的系数大小 Δ 进行参数化是必要的 [3, 10]。[4] 请注意，由于子集和问题的 NP 困难性，在系数较大的情况下，B-一致性是必要的。

$(nL)^{\mathcal{O}(1)}$)。Eisenbrand 和 Rothvoss [15] 扩展了前一结果，给出一种算法，可在时间 $\mathcal{O}_{dst\Delta}((nL)^{\mathcal{O}(1)})$ 内对两阶段随机整数线性规划进行优化，并利用类似论证，说明如何找到四块整数线性规划的一个近似解，该解对 m 全局约束的违反至多具有加性误差 $\mathcal{O}_{dt\Delta}(m)$，所需时间为 $\mathcal{O}_{dst\Delta}(m \cdot (nL)^{\mathcal{O}(1)})$。

1.1 贡献

我们将 [9] 中的 B-一致 n-重整数线性规划算法加以扩展，从而得到一种求解 B-均匀 4 块整数线性规划的算法，其运行时间在 n 的指数上的依赖改进为 $s+\mathcal{O}(1)$，优于以往的二次依赖。此外，该算法是首个运行时间关于 A, B 与 C_i 的系数的编码长度呈多项式的算法。由此，我们克服了在边长由 Graver 复杂度或邻近度给出的 s 维盒子中枚举向量所固有的两个局限。

▶ **定理 2.** 一个 B-一致四块整数线性规划可在时间 $O_{dst\Delta}(n^{s+\mathcal{O}(1)} \cdot m \cdot L^{\mathcal{O}(1)})$ 内求解。

$\mathcal{O}_{dst\Delta}$ 中所隐含的常数关于 d 为三重指数，这与 Cslovjecksek 等人 [9] 的 n-重算法一致。

定理 2 背后的算法依赖于构造右端向量的忠实分解 b_i，这在 Cslovjecksek 等人 [9] 的 n 重整数线性规划算法中发挥着核心作用。在这种情形下，忠实分解可理解为将 n 重整数线性规划中的局部砖块分解为更多砖块，使这些砖块仅包含数量有界且规模较小的不同右端向量。我们将他们的方法扩展为以动态仿射方式计算随 b_i 变化的忠实分解。第 2 节和第 4 节将对此作出精确说明。为构造此类分解，我们利用了 Cslovjecksek 等人 [8] 对 Klein [27] 的向量重排引理变体所作证明的构造性。仿射忠实分解用于编码域受限四块整数线性规划，而全局变量的定义域只需进行有限次猜测。定理 2 中对 n 指数的依赖降低，基于这样一个事实：在 $\mathbb{R}^s$ 中由 N 个超平面构成的超平面排列，其面数有上界 $\mathcal{O}(N)^s$ [11, 21]，且可在 [11, 12, 13] 时间内计算出来，所需时间为 $\mathcal{O}(N)^s$。

我们还通过将有界系数的（非-B-一致）4 块整数线性规划归约到一致情形，借助 Dvořák 等人 [10] 提出的方法，获得了一种改进算法。此外，通过进一步应用 Frank 和 Tardos [19] 系数约简技术，我们得到了定理 3 中的逐切片强多项式时间算法。

▶ **定理 3.** 一个 *4* 块整数线性规划可在 $O_{dms\Delta}(n^{s+\mathcal{O}(1)} \cdot t)$ 时间内求解。

我们在第 2 节介绍预备知识。在第 3 节中，我们讨论如何利用仿射忠实分解构造求解 4 块整数线性规划的算法。我们在第 4 节证明构造所用分解的引理。在后面相应的两个章节中，我们先概述所用技术，再给出详细证明。

2 预备知识

当 A 是矩阵或标量，而 $S \subseteq \mathbb{R}^d$ 是向量集时，我们用 AS 表示 S在 A下的像$\{A \cdot x | x \in S\}$。类似地，对于偏移向量 $v \in \mathbb{R}^d$，我们用 $S+v$ 表示平移集 $\{x+v | x \in S\}$。为方便记号起见，我们将向量集 $S \subseteq \mathbb{R}^d$视为一个 $d \times |S|$ 矩阵，其列为 S中的向量。由向量集 $S = \{v_1, \ldots, v_n\}$ 生成的锥 是 S 中向量的非负组合所构成的集合，并且

由这些向量生成的整数锥 是非负整数线性组合所构成的集合。也就是说，

$$\operatorname{cone} S = \{\lambda_1 \cdot v_1 + \cdots + \lambda_n \cdot v_n \mid \lambda \in \mathbb{R}^n_{\geq 0}\} = S\mathbb{R}^S_{\geq 0} \text{ and } \operatorname{int.cone} S = S\mathbb{Z}^S_{\geq 0}.$$

这里，对于集合 K 和 I，我们用 K^I 表示由索引为 $i \in I$ 且坐标为 $x_i \in K$ 的向量 $x \in K^I$ 构成的向量集。作为简写，我们用 $\mathrm{B}^d(\Delta) = \{x \in \mathbb{Z}^d : \|x\|_\infty \leq \Delta\}$ 表示以原点为中心、离散半径为 Δ 的超立方体。此外，$\mathrm{B}^{d\times d}_*(\Delta) = \{F \in \{-\Delta, -\Delta+1, \ldots, \Delta\}^{d\times d} : \det F \neq 0\}$ 表示所有可逆 $d \times d$ 矩阵 F 的集合，这些矩阵的整数条目的绝对值不超过 Δ；等价地，它表示 $\mathbb{R}^d$ 的所有基 $F \subseteq \mathrm{B}^d(\Delta)$ 的集合。如果对于所有 $i \in [d]$，向量 $x \in \mathbb{R}^d$ 与向量 $y \in \mathbb{R}^d$ 共形，即满足 $x_i y_i \geq 0$ 和 $|x_i| \leq |y_i|$，我们就称 $x \in \mathbb{R}^d$ 与 $y \in \mathbb{R}^d$ 共形。我们将此记作 $x \sqsubseteq y$。

我们使用一个（$d+1$）维点（a_h, β_h） $\in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$ 来描述超平面 h，它表示集合$\{x \in \mathbb{R}^d : a_h^\top x = \beta_h\}$。请注意，我们允许 $a_h = 0$，即退化超平面，它们可以是整个空间或空集。一个（部分开）多面体 P由它与有限个超平面 $H_\leq, H_<$ 的关系定义，并可写作$P = \{x \in \mathbb{R}^d : a_h^\top x \leq \beta_h \ \forall h \in H_\leq, a_h^\top x < \beta_h \ \forall h \in H_<\}$。类似地，超平面集合 $H \subseteq \mathbb{R}^{d+1}$ 会诱导出一个面配置 F_H，其中每个面都由一个位置向量$\bowtie$ 定义，该向量指定该面相对于各超平面的位置。这里，位置向量为 $\bowtie \in \{<, =, >\}^H$ 的（可能为空的）面 $F_\bowtie$ 是由$F_\bowtie = \{x \in \mathbb{R}^d : a_h^\top x \bowtie_h \beta_h \ \forall h \in H\}$给出的部分开多面体，而由 H 诱导的超平面配置由所有面 $\mathrm{F}_H = \{F_\bowtie \mid \bowtie \in \{<, =, >\}^H\}$组成。已知，$d$ 维超平面配置中的不同面数有 $\mathrm{O}(|H|)^d$ [11, 21]的上界。此外，Edelsbrunner、O'Rourke 和 Seidel [12] 已证明，可以在相近的时间内计算出超平面配置。

▶ **定理 4** ([11, 12, 13])。设 H 是 d 维空间中的一个超平面集合。由 H 诱导的超平面排列 F_H 可在 $O(|H|)^d$ 时间内计算得出。

特别是，Edelsbrunner 等人的算法可以给出至多$\mathcal{O}(|H|)^d$ 个对应于非空面的 位置向量。

Cslovjecksek 等人的 n 折算法 [9] 以及定理 2 背后的算法中的一个核心概念是将右端向量 b 分解为较小向量的忠实分解，它体现了标准形式整数线性规划的解可以分解为有界右端项整数线性规划的解之和这一事实。

▶ 定义 *5*。*</style}*相对于 $D \in \mathbb{Z}^{d\times t}$、阶数为 Ξ 的 $b \in \mathbb{Z}^d$ 的忠实分解，是由向量 b_1、...、$b_\ell \in \mathbb{Z}^d$ 组成的多重集，满足

- b 分解为 $b = b_1 + \cdots + b_\ell$；对于 $i \in [\ell]$，每个 $b_i \sqsubseteq b$ 都满足相应条件；对于 $i \in [\ell]$，
- 每个 b_i 的范数均不超过 $\|b_i\|_\infty \leq \Xi$；并且 $Dx = b$ 的任意解 $x \in \mathbb{Z}^t_{\geq 0}$ 都可以分解
- 为 $x = x_1 + \cdots + x_\ell$，其中每个$x_i \in \mathbb{Z}^t_{\geq 0}$ 都是 $i \in [\ell]$ 下 $Dx_i = b_i$ 的一个解；

由集合中的元素构成的多重集 S 可解释为整数向量 $f \in \mathbb{Z}^S_{\geq 0}$，其中 f_s 表示 $s \in S$ 在多重集中出现的重数。因此，我们将多重集与整数向量等同起来。设 $X^D_{b'} = \{x \in \mathbb{Z}^t_{\geq 0} : Dx = b'\}$ 为给定右端项 b'的解集。将定义 5 转换后可知，b 关于 D 的阶为 Ξ 的忠实分解，是某个 $R \subseteq \mathcal{B}^d(\Xi)$对应的整数向量 $f \in \mathbb{Z}^R$，满足$b = \sum_{b' \in R} f_{b'} \cdot b'$;$b' \sqsubseteq b$ 对于 $b' \in R$;

6 利用右端项的仿射分解更快地求解 4 块整数线性规划

- 对于所有 $x \in X_b^D$，都存在一个多重集 $p_{b'} \in \mathbb{Z}^{X_b^D}, \geq 0$，使得对于每个 $b' \in R$，$x = \sum_{b' \in R} \sum_{x' \in X_b^D} (p_{b'})_{x'} \cdot x'$，并且 $\sum_{x' \in X_b^D} (p_{b'})_{x'} = f_{b'}$ 对于 $b' \in R$成立。

这种高重数编码是必要的，因为低阶忠实分解的多重集基数可能是 b编码长度的指数级。Cslovjecksek 等人 [9]提出了一种算法（引理 5.12），能够在$\mathcal{O}_{dt\Delta}(\log^{\mathcal{O}(1)} \|b\|_\infty)$时间内，计算 $b \in \mathbb{Z}^d$关于 $D \in \{-\Delta, -\Delta+1, \ldots, \Delta\}^{d \times t}$的忠实分解（的高重数编码），其阶为 $2^{(d\Delta)^{\mathcal{O}(d)}}$。我们在引理 7 中证明，只要 b 属于良性定义域，就可以将忠实分解表示为关于 b 的仿射函数；这使我们能够扩展 Cslovjecksek 等人 [9] 的算法来求解四块整数线性规划。我们注意到，我们的算法并未在计算上利用定义 5 中分解的共形性；将其纳入定义 5，是为了与 [9]的定义保持一致。

为了证明定理 2，我们需要 [9], 中的引理 6。该引理表明，对于系数有界的整数线性规划，任意大的解都可以分解为一个较小的基解，加上约束矩阵的 *Graver* 基中的若干小元素。整数矩阵 $D \in \mathbb{Z}^{d \times t}$ 的 Graver 基 $\mathcal{G}(D) \subseteq \mathbb{Z}^t \setminus \{0\}$ 是 D的共形极小非零整数核元素组成的集合。已知任意 Graver 基元素 $g \in \mathcal{G}(D)$ 在 $D \in \{-\Delta, -\Delta+1, \ldots, \Delta\}^{d \times t}$ [14]时，其大小都不超过 $\|g\|_\infty \leq \|g\|_1 \leq \mathcal{O}(d\Delta)^d$。

▶ **引理 6** (引理 5.3，见 [9], [32])。设 $D \in \{-\Delta, -\Delta+1, \ldots, \Delta\}^{d \times t}$, $b \in B^d(\Xi)$ 和$x \in \mathbb{Z}^t_{\geq 0}$ 满足 $Dx = b$。那么，存在一个满足 $Dx = b$ 的解 $x \in \mathbb{Z}^t_{\geq 0}$，其大小不超过$\|x\|_\infty \leq \mathcal{O}(d(\Delta + \Xi))^d$；并且存在一个由非负 *Graver* 基元素组成的多重集 $\mu \in \mathbb{Z}^{\mathcal{G}(D) \cap \mathbb{Z}^t_{\geq 0}}_{\geq 0}$，使得 $x = x + \sum_{g \in \mathcal{G}(D) \cap \mathbb{Z}^t_{\geq 0}} \mu_g \cdot g$。

3 算法

本节介绍一种用于 4 块整数线性规划的 $\mathcal{O}_{dst\Delta}(n^{s+\mathcal{O}(1)} \cdot m \cdot L^{\mathcal{O}(1)})$ 时间算法。在详细描述该算法之前，我们先概述 Cslovjecksek 等人 [9] 如何利用忠实分解求解（可行性变体的） B-一致 n-折叠整数线性规划问题，并说明如何将这种方法扩展到四块整数线性规划。简而言之，Cslovjecksek 等人 [9] 对给定的 n-折叠整数线性规划进行预处理，通过忠实分解 $b_i = b_i^{(1)} + \cdots + b_i^{(\ell)}$ 将每个砖块 $D_i x_i = b_i$ 拆分为砖块 $D_i x_i^{(1)} = b_i^{(1)}, \ldots, D_i x_i^{(\ell)} = b_i^{(\ell)}$。由此得到一个规模呈指数级增长的 n-折叠整数线性规划，其中仅包含 $\mathcal{O}_{dt\Delta}(1)$ 种不同的砖块，且其右端项有界。为利用这一特点，他们使用引理 6 推导出该整数线性规划的高重数编码，其形式为一个配置 整数线性规划，该规划仅有 $\mathcal{O}_{dt\Delta}(1)$ 个整数变量，并将忠实分解的高重数表示作为右端项。

现在请注意，四块整数线性规划可以视为一种“n-折整数线性规划”，其中右端项 b'_i 通过 $b'_i = L_i(x_0) := b_i - C_i x_0$ 仿射地依赖于全局变量 x_0。我们将这一观察与核心结果引理 7 结合起来。引理 7 表明，若 b'_i 属于固定的格平移 $r + M\mathbb{Z}^d$ 和固定的部分开多面体 F，且二者分别来自 $\mathcal{O}_{d\Delta}(1)$ 个选项，那么存在忠实分解 b'_i，并且这些分解仿射地依赖于 b'_i。引理 7 的证明推迟到第 4 节。

▶ **引理 7**。给定 d 和 $\Delta \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$。那么，存在一个模数 $M = 2^{\mathcal{O}(d\Delta)^{d^3}}$、一个数 $\Xi = 2^{\mathcal{O}(d\Delta)^d}$，以及一个能够输出以下内容的算法：

- 至多 $O(d\Delta)^{d^4}$ 个超平面的集合；一个仿射映射 $D_{r,F}: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{R_{r,F}}$ 满足 $R_{r,F} \subseteq B^d(\Xi)$
- 以及 $|R_{r,F}| \leq d+1$ 对于每个余数向量 $r \in \{0, 1, \ldots, M-1\}^d$ 和由 H 诱导的超平面排列中的面 $F \in F_H$。

对于所有 $b \in (r + M\mathbb{Z}^d) \cap F$以及 $D \in \{-\Delta, -\Delta+1, \ldots, \Delta\}^{d\times t}$，像 $D_{r,\ F}(b)$ 是关于 D、阶为 Ξ的 b 的忠实分解。该算法在 $O(d\Delta)^{d^4}$时间内输出超平面，并在给定 r 和 F 时，于 $O(\Delta)^{d^4}$ 时间内构造仿射映射 $D_{r,\ F}$ 。

在我们的设定中， b'_i 仿射地依赖于 x_0，这意味着我们可以构造仿射地依赖于 x_0的 b'_i 高重数编码忠实分解。由于这种编码出现在 Cslovjecksek 等人 [9], 的配置整数线性规划的右端项中，我们可以用 Cslovjecksek 等人 [9] 通过 $\mathcal{O}_{dt\Delta}(\log^{\mathcal{O}(1)} \|b\|_\infty)$ 时间算法获得的仿射函数替代静态忠实分解，并得到一个用线性约束编码四块整数线性规划的配置整数规划。这个整数线性规划具有 $\mathcal{O}_{dt\Delta}(1)$ 个 $+ s$整数变量，随后可以使用 Kannan 算法 [26]求解。

只要右端项 b'_i 属于形如（$r + M\mathbb{Z}^d$）$\cap F$的定义域，并且对于每个砖块 $i \in [n]$而言该定义域是预先已知的，就可以构造配置整数线性规划，参见引理 7。为此，我们同时猜测每个砖块的定义域。一个关键观察是，定义域的结构使我们能够通过将这些定义域“提升”到 s维全局变量 x_0空间中，以远少于平凡上界 $\mathcal{O}_{d\Delta}(1)^n$ 次猜测完成这一过程。

格结构 $r + M\mathbb{Z}^d$ 尤其方便，因为可以通过有限次参数化猜测来确定它。近期，这一方法已应用于两阶段随机整数线性规划 [9, 15]: 猜测余数向量 $r \in \{0, 1, \ldots, M-1\}^s$，对于该向量， $x_0 \equiv r \pmod M$ 会自动确定 r_i 在模 M 意义下的余数向量 $L_i(x_0)$，使其等于 $r_i = (b_i - C_i r) \bmod M$。这里，我们滥用记号，对向量的各个分量分别进行模运算。

同时猜测面 F 的代价更高。对于引理 7 生成的集合中的每个超平面 h ，以及每个砖块 $i \in [n]$，我们将该超平面沿 L_i 在 $\mathbb{R}^s$ 中的原像提升，并使用 Edelsbrunner 等人的算法（定理 4），在 $\mathcal{O}_{ds\Delta}(n^s)$ 时间内计算所得超平面排列。显然，将 x_0 限制在该超平排列的某个面上，会使 $L_i(x_0)$ 落在与砖块 i 对应的 d 维超平排列的唯一一个面上；该面对应一个定义域，我们可以为其求得仿射忠实分解。定理 2 的证明对此作了明确说明。图 2 展示了定理 2 的证明中 x_0 所受限制可能对应的区域。

我们现在可以证明定理 2。

▶ **定理 2.** *B-一致四块整数线性规划可在时间 $O_{dst\Delta}(n^{s+\mathcal{O}(1)} \cdot m \cdot L^{\mathcal{O}(1)})$内求解。*

证明。设 $M = 2^{\mathcal{O}(d\Delta)^{d^3}}$ 与 $\Xi = 2^{\mathcal{O}(d\Delta)^d}$ 为引理 7 中定义的数。设$\eta = \mathrm{O}(d(\Delta + \Xi))^d = \mathrm{O}(d(\Delta + 2^{\mathcal{O}(d\Delta)^d}))^d = 2^{\mathcal{O}(d\Delta)^d}$ 为引理 6 中定义的关于 x 的范数界，并设 $\underline{\delta} = \mathrm{O}(d\Delta)^d$ 为来自 [14] 的任意矩阵 $D \in \{-\Delta, -\Delta+1, \ldots, \Delta\}^{d\times t}$ 的 Graver 基元素的 ∞- 范数界。注意，上述所有数仅依赖于 d 与 Δ。

首先，我们对每个砖块 $i \in [n]$ 应用引理 7，以生成 $\mathbb{R}^d$ 中的超平面集合 H_i 。回想一下，这些超平面定义了 b_i 的仿射忠实分解有效的多面体区域。通过 $L_i^{-1}(h) := (-C_i^\top a_h, \beta_h - a_h^\top b_i)$ 将每个超平面提升到空间 $\mathbb{R}^s$ 。我们考虑由

$$H = \bigcup_{i\in[n], h\in H_i} L_i^{-1}(h)$$

并使用定理 4 计算这个超平面排列 F_H。注意， $|H| \le n \cdot \mathrm{O}(d\Delta)^{d^4}$。利用 $\mathrm{F}_H| \le \mathrm{O}(|H|)^s$ [11, 21]，可得 $\mathrm{F}_H| \le \mathrm{O}(d\Delta)^{d^4 s} \cdot n^s$。

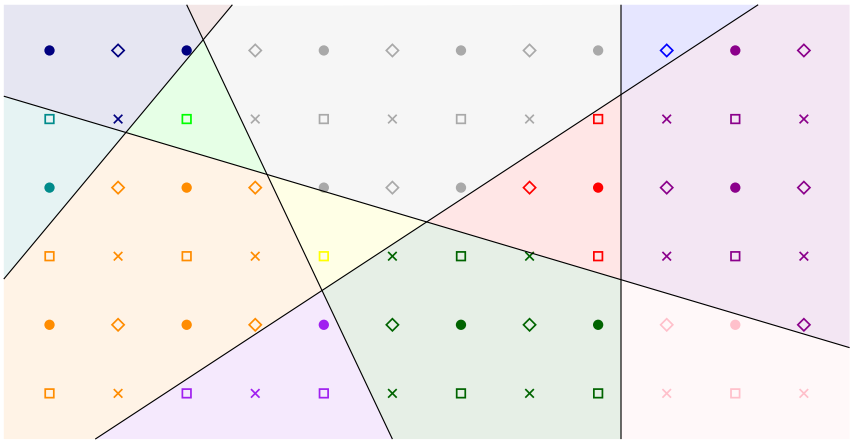


图 2 将 $\mathbb{Z}^2$ 划分为模 2 的四个余数类，每个格点处放置形状不同的标记以示区分；由 5 个超平面诱导出的面，则通过不同颜色的区域表示二维面。请注意，低维面也会出现在超平面排列中，并且可能包含整数点。要解决一个 4 块整数线性规划，我们针对每一组形状和颜色均相同的点分别求解一个配置整数线性规划，并限制 x_0 属于该组。

我们猜测包含 x_0 的非空面 F_H，即 x_0 相对于超平面 H 的位置，以及 x_0 模 M 的余数向量 $\{0, 1, \cdots\}$ $M-1$。更具体地，对于其中每种 r 和 $F \neq \emptyset$ 的组合

$$M^s \cdot |\mathcal{F}_H| \leq 2^{\mathcal{O}(d\Delta)^{d^3}\cdot s} \cdot \mathcal{O}(d\Delta)^{d^4 s} \cdot n^s = 2^{\mathcal{O}(d\Delta)^{d^3}\cdot s} \cdot n^s$$

对于这些选项，我们使用引理 7 对 4 块整数线性规划进行高重数编码。为了构造该编码，对于每个砖块 $i \in [n]$，我们计算：

- 包含 $L_i(F)$ 的面 $F_i \in \mathcal{F}^{H_i}$，即对所有 $x_0 \in F$都包含所有 $b_i - C_i x_0$。该面具有位置向量 $\bowtie_i \in \{<, =, >\}^{H_i}$，由 $(\bowtie_i)^h = \bowtie_{L_i^{-1}(h)}$ 给出，适用于 $h \in H_i$。这是因为对于任意 x_0，都有

$$\begin{aligned} L_i(x_0)\ (\bowtie_i)_h\ \beta_h \quad &\iff a_h^\top (b_i - C_i x_0)\ (\bowtie_i)_h\ \beta_h \\ \iff (-C_i^\top a_h)^\top x_0\ (\bowtie_i)_h\ \beta_h - a_h^\top b_i \quad &\iff a_{L_i^{-1}(h)}^\top x_0\ (\bowtie_i)_h\ \beta_{L_i^{-1}(h)}. \end{aligned}$$

- 余数向量 $r_i = (b_i - C_i r)$ 模 M，使得 $L_i(x_0) \equiv r_i$（模 M），当 $x_0 \equiv r$（模 M）时。
- 利用引理 7，为余数向量 r_i 和面 F_i 构造动态忠实分解 $\mathcal{D}_i$。也就是说，构造仿射映射 $\mathcal{D}_i$: $\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{R_i}$，使得 $\mathcal{D}_i(b)$ 是 b 的忠实分解，并且在 $b \in (r_i + M\mathbb{Z}^d) \cap F_i$ 时，使用来自 $R_i \subseteq \mathcal{B}^d(\Xi)$ 的元素。根据构造，当 $x_0 \in (r + M\mathbb{Z}^s) \cap F$ 时，这对 $b = L_i(x_0)$ $= b_i - C_i x_0$ 成立。用 $\mathbb{Q}^{R_i \times d}$ 中的矩阵和 $\mathbb{Q}^{R_i}$ 中的向量表示 $\mathcal{D}_i$。
- 每个较小右端向量 $b' \in R_i$ 所对应的基解集合 $X_{b',i} = \{x \in \mathbb{Z}^t_{\geq 0} : \|x\|_\infty \leq \eta, D_i x = b'\}$ 到 $D_i x = b'$。D_i[5] 的 Graver 基元素集合 $G_i := \mathcal{G}(D_i) \cap \mathbb{Z}^t_{\geq 0}$。

[5] 注意，在四块整数线性规划中，对角块 D_i 可以通过引入辅助局部变量来转换为系数非负的形式；这些变量用于对某些上界 u 建模（通过局部约束强制实施）。然后，若将不出现在局部约束中的局部变量单独处理，就会得到 $G_i = \emptyset$。这简化了整数线性规划 (C)，但代价是增加了 t 对运行时间的依赖。

现在，我们可以通过求解以下配置整数线性规划，来求解限制在 $x_0 \in (r + M\mathbb{Z}^s) \cap F$ 上的四块整数线性规划：

$$\text{minimize} \quad c_0^\top x_0 + \sum_{i\in[n]} c_i^\top \Big(\sum_{b'\in R_i} \sum_{x'\in \underline{X}_{b',i}} x' \cdot p^i_{b',x'} + \sum_{g\in G_i} g \cdot p^i_g \Big), \tag{C}$$

$$\text{subject to} \quad Ax_0 + B\Big(\sum_{x'\in\mathcal{B}^t(\eta)\cap\mathbb{Z}^t_{\geq 0}} x' \cdot q_{x'} + \sum_{g\in\mathcal{B}^t(\delta)\cap\mathbb{Z}^t_{\geq 0}} g \cdot q_g \Big) = b_0, \tag{1}$$

$$q_{x'} = \sum_{i\in[n]} \sum_{\substack{b'\in R_i:\\ x'\in\underline{X}_{b',i}}} p^i_{b',x'}, \qquad x' \in \mathcal{B}^t(\eta)\cap\mathbb{Z}^t_{\geq 0}, \tag{2}$$

$$q_g = \sum_{\substack{i\in[n]:\\ g\in G_i}} p^i_g, \qquad g \in \mathcal{B}^t(\delta)\cap\mathbb{Z}^t_{\geq 0}, \tag{3}$$

$$\sum_{x'\in\underline{X}_{b',i}} p^i_{b',x'} = (\mathcal{D}_i(b_i - C_i x_0))_{b'}, \qquad i\in[n],\ b'\in R_i, \tag{4}$$

$$\begin{aligned} q_{x'} &\in \mathbb{Z}_{\geq 0}, & x' &\in \mathcal{B}^t(\eta)\cap\mathbb{Z}^t_{\geq 0},\\ q_g &\in \mathbb{Z}_{\geq 0}, & g &\in \mathcal{B}^t(\delta)\cap\mathbb{Z}^t_{\geq 0},\\ p^i_{b',x'} &\in \mathbb{Z}_{\geq 0}, & i &\in [n],\ b'\in R_i,\ x'\in\underline{X}_{b',i},\\ p^i_g &\in \mathbb{Z}_{\geq 0}, & i &\in [n],\ g\in G_i,\\ x_0 &\in (r + M\mathbb{Z}^s)\cap F, \quad x_0 \geq 0. \end{aligned}$$

在 r 和 F 的所有猜测中选取最优解，即可报告原始四块整数线性规划的最优解。

该算法的正确性直接源于断言 2.1，以及形如 $(r + M\mathbb{Z}^s) \cap F$ 的定义域划分 $\mathbb{Z}^s$ 这一事实。

▷ 断言 2.1. 整数线性规划 (C) 能正确编码整数线性规划 (4B)，并满足 $x_0 \in (r + M\mathbb{Z}^s) \cap F$。

证明。 由于 $b_i - C_i x_0 \in F_i$ 并且 $b_i - C_i x_0 \in r_i + M\mathbb{Z}^d$ 对于所有 $x_0 \in (r + M\mathbb{Z}^s) \cap F$，忠实分解 $\mathcal{D}_i(b_i - C_i x_0) \cap F$ 是 $b_i - C_i x_0$ 的适当忠实分解。因此，任意解 $x_i \in \mathbb{Z}^t_{\geq 0}$ 都可以表示为 $D_i x_i = b_i - C_i x_0$ 的和

$$x_i = \sum_{b'\in R_i} \sum_{x'\in X^{D_i}_{b'}} (u_{b'})_{x'} \cdot x'$$

其中，$u_{b'} \in \mathbb{Z}^{X^{D_i}_{b'}}_{\geq 0}$ 是分解块的解的多重集，并且该多重集通过 $\sum_{x'\in X^{D_i}_{b'}} (u_{b'})_{x'} = (\mathcal{D}_i(b_i - C_i x_0))_{b'}$ 与分解相匹配。引理 6 表明，任意 $x' \in X^{D_i}_{b'}$ 都可以写成 $x' = x'' + g_1 + \cdots + g_\ell$，其中 $x'' \in X_{b',i}$ 和 $g_1, \ldots, g_\ell \in G_i$。由于将任意 Graver 基元素加到 x_i 上仍会得到 $D_i x_i = b_i - C_i x_0$ 的一个解，因此这证明了该编码的合理性

$$x_i = \sum_{b'\in R_i} \sum_{x'\in\underline{X}_{b',i}} p^i_{b',x'} \cdot x' + \sum_{g\in G_i} p^i_g \cdot g$$

在约束 (4) 下，且重数 p^i_g 可为任意非负值。 ◁

现在我们论证，整数线性规划 (C) 可以在固定参数可处理时间内求解。

▷ 断言 2.2. 整数线性规划 (C) 可在时间 $s^{\mathcal{O}(d\Delta)^d \cdot st + 2^{\mathcal{O}(d\Delta)^d \cdot t}} \cdot m \cdot \langle nL \rangle^{\mathcal{O}(1)}$ 内求解。

10 利用右端项的仿射分解，更快地求解 4 块整数线性规划

证明。 约束 $x_0 \in F$ 由部分开多面体 F 及其关联的位置向量 $\bowtie \in \{<, =, >\}^H$定义。这对应于 $a_h^\top x_0 \bowtie_h \beta_h$ 对所有 $h \in H$。将超平面系数重新缩放为整数后，严格不等式 $a^\top x_0 < \beta$ 等价于 $a^\top x_0 \leq \beta - 1$。注意，条件 $x_0 \in r + M\mathbb{Z}^s$ 可以通过添加变量 $v \in \mathbb{Z}^s$ 并在整个表述中代入 $x_0 = r + Mv$ 来强制满足。这表明，整数线性规划 (C) 对应于一个带有线性约束的整数规划。

现在我们估算整数线性规划 (C) 的维度。将 v 和 q 变量聚合为 z 后，该整数线性规划的形式为 $\min\{c'^\top(z,p) \mid Q_1 z + Q_2 p = f_1, Q_3 z \leq f_2, (z,p) \in \mathbb{Z}^{N_\mathbb{Z}} \times \mathbb{Z}^{N_\mathbb{R}}_{\geq 0}\}$，其中 $N_\mathbb{Z} \leq s + (\eta+1)^t + (\delta+1)^t = s + 2^{\mathcal{O}(d\Delta)^d \cdot t}$ 和 $N_\mathbb{R} \leq n \cdot ((d+1)\cdot(\eta+1)^t + (\delta+1)^t) = 2^{\mathcal{O}(d\Delta)^d \cdot t} \cdot n$。整数线性规划 (C) 的约束数量为 $O(|H| + m + N_\mathbb{Z} + N_\mathbb{R}) = O(m + N_\mathbb{Z} + N_\mathbb{R})$。现在，我们估算代入 $x_0 = r + Mv$ 后，整数线性规划中出现的任意数的分子和分母的最大绝对值。

- 目标系数以及约束（1）中出现的系数都是整数，且其上界为 $O(2^L) \cdot t \cdot (\eta + \delta) \cdot M = 2^L \cdot t \cdot 2^{\mathcal{O}(d\Delta)^{d^3}}$。引理 7 的证明中使用的矩阵 W 的分子和分母均以上界 $\Psi \cdot \Phi^d d^{d/2} = 2^{\mathcal{O}(d\Delta)^d}$ 为界。因此，引理 7 的证明中构成 D_i 的 α、γ 和 z 的表示，其分子和分母也以上述相同的渐近量为界。因此，约束 (4) 右端项中出现的系数，其分子和分母均以 $2^L \cdot 2^{\mathcal{O}(d\Delta)^d} \cdot M = 2^L \cdot 2^{\mathcal{O}(d\Delta)^{d^3}}$ 为界。 H_i 中超平面的法向量 a_h 对应于引理 7 的证明中矩阵 V^{-1} 的各行。将其乘以 $\det V$，即可得到整数超平面法向量，其范数以 $\Phi^d d^{d/2} = O(d\Delta)^{d^3}$ 为界。超平面偏移量 β_h 则变为整数，且以 $\det V \cdot (t \cdot \Psi)$_ $= 2^{\mathcal{O}(d\Delta)^d} \cdot t$ 为界。根据 $L_i^{-1}(h)$ 的定义， F 可表示为整数系数，且这些系数以 $2^L \cdot t \cdot 2^{\mathcal{O}(d\Delta)^d} \cdot M = 2^L \cdot t \cdot 2^{\mathcal{O}(d\Delta)^{d^3}}$ 为界。

—

取对数可知，该实例中所有有理数的编码长度均有上界 $L' = \log(2^L \cdot t \cdot 2^{\mathcal{O}(d\Delta)^{d^3}}) = L + \log t + \mathcal{O}(d\Delta)^{d^3}$。

我们现在重述 Cslovjecksek 等人 [9], 的观察结果，它揭示了整数线性规划 (C) 可以被高效求解。由于每个变量$p^i_{b',x'}$ 都出现在一个类型为 (4) 的约束和一个类型为 (2) 的约束中，而每个变量 p^i_g 都出现在一个类型为 (3) 的约束中，根据 Ghouila-Houri 判据，矩阵 Q_2是全幺模的。因此，可以通过求解混合整数松弛 $\min\{c'^\top(z,p) \mid Q_1 z + Q_2 p = f_1, Q_3 z \leq f_2, (z,p) \in \mathbb{Z}^{N_\mathbb{Z}} \times \mathbb{R}^{N_\mathbb{R}}_{\geq 0}\}$来求解整数线性规划。利用 Kannan 算法 [26], ，我们可以在以下时间内求解这个混合整数线性规划

$$
\begin{aligned}
&N_\mathbb{Z}^{\mathcal{O}(N_\mathbb{Z})} \cdot \mathcal{O}(m + N_\mathbb{Z} + N_\mathbb{R}) \cdot (N_\mathbb{R} L')^{\mathcal{O}(1)} \\
&= (s + 2^{\mathcal{O}(d\Delta)^{d} \cdot t})^{\mathcal{O}(s + 2^{\mathcal{O}(d\Delta)^{d} \cdot t})} \cdot m \cdot (2^{\mathcal{O}(d\Delta)^{d} \cdot t} \cdot n \cdot (L + \log t + \mathcal{O}(d\Delta)^{d^3}))^{\mathcal{O}(1)} \\
&= s^{\mathcal{O}(d\Delta)^{d} \cdot st + 2^{\mathcal{O}(d\Delta)^{d} \cdot t}} \cdot m \cdot (nL)^{\mathcal{O}(1)}.
\end{aligned}
$$

◁

现在我们估算算法其他部分的运行时间。我们可以利用引理 7 在 $O(d\Delta)^{d^4} \cdot n$ 时间内计算超平面 H，并利用定理 4 在 $O(n \cdot O(d\Delta)^{d^4})^s = O(d\Delta)^{d^4 s} \cdot n^s$ 时间内计算超平面排列 F_H。对于 $(r + M\mathbb{Z}^s) \cap F$ 的 $2^{\mathcal{O}(d\Delta)^{d^3} \cdot s} \cdot n^s$ 个定义域猜测中的每一个，以及对于每个砖块 $i \in [n]$，我们都可以在可忽略不计的时间内推导出 F_i 和 r_i。利用引理 7 提取 D_i 需要 $O(\Delta)^{d^4}$ 时间。由于 $G_i \subseteq \{0, 1, 2, \ldots, \delta\}^t$，我们可以朴素地在 $(dt)^{\mathcal{O}(1)} \cdot ((\delta+1)^t)^2 = (d\Delta)^{\mathcal{O}(dt)}$ 时间内计算 $G_i := G(D_i) \cap \mathbb{Z}^t_{\geq 0}$。类似地，对于每个 $b' \in R_i$，我们可以在 $(dt)^{\mathcal{O}(1)} \cdot (\eta+1)^t = 2^{\mathcal{O}(d\Delta)^d \cdot t}$ 时间内计算 $X_{b',i}$。

—

综合此前所有估算可知，整个算法的运行时间上界为

$$\begin{aligned}&\mathcal{O}(d\Delta)^{d^4}\cdot n+\mathcal{O}(d\Delta)^{d^4 s}\cdot n^s+2^{\mathcal{O}(d\Delta)^{d^3}\cdot s}\cdot n^s\\&\cdot\left(n\cdot(\mathcal{O}(\Delta)^{d^4}+(d\Delta)^{\mathcal{O}(dt)}+(d+1)\cdot 2^{\mathcal{O}(d\Delta)^{d}\cdot t})+s^{\mathcal{O}(d\Delta)^{d}\cdot st+2^{\mathcal{O}(d\Delta)^{d}\cdot t}}\cdot m\cdot(nL)^{\mathcal{O}(1)}\right)\\&=2^{\mathcal{O}(d\Delta)^{d^3}\cdot s}\cdot s^{\mathcal{O}(d\Delta)^{d}\cdot st+2^{\mathcal{O}(d\Delta)^{d}\cdot t}}\cdot n^s\cdot m\cdot(nL)^{\mathcal{O}(1)}.\end{aligned}$$

◀

与 Cslovjecksek 等人的 n-折算法类似，定理 2 中的运行时间仅在全局约束数量 [6] 上呈多项式依赖。

现在我们讨论如何从定理 2 的证明得到定理 3。第一步是将一个非均匀 4 块整数线性规划归约为一个 B-一致问题。Dvořák 等人 [10] 提供了一种参数化归约，可将非均匀 4 块整数线性规划归约为均匀 4 块整数线性规划。由于他们的目标是 $D_1 = \cdots = D_n$，他们的归约会使 d 指数级增长。因此，直接实现他们的归约会导致定理 3 的常数中隐藏着四重指数级的参数依赖。为此，我们在引理 8 中明确展示了如何将非均匀 4 块整数线性规划归约为 B-一致 4 块整数线性规划，同时不会使 d 显著增加。

▶ **引理 8.** 四块整数线性规划可通过将 t 更改为 $(2\Delta+1)^{m+d}$，并将 d 加 *1*，归约为 B-一致四块整数线性规划。

证明。 给定一个非均匀四块整数线性规划实例，我们构造一个新的 B-一致四块整数线性规划，其砖块数量相同。我们用带撇号的符号表示所构造实例中的部分；该实例每个砖块将有 $t' = (2\Delta+1)^{m+d}$ 个局部变量和 $d' = d+1$ 个局部约束。

将每个向量 $(p,q) \in \mathbb{B}^m(\Delta) \times \mathbb{B}^d(\overline{\Delta})$ 与唯一索引 $j \in [t']$ 关联。对于一个砖块 $i \in [n]$，我们通过统一设置系数 $(B_i')_j = p$，来构造新实例中对应于 (p,q) 的第 j 列 $j \in [t']$。如果原砖块中存在约束矩阵系数 (p,q)，且 $j^* \in [t]$ 是局部变量 $(x_i)_j$ 中目标系数 $(c_i)_{j^*}$ 最小的变量，并满足 $(B_i)_j = p, (D_i)_j = q$，则设置 $(c_i')_j = (c_i)_{j^*}$ 和 $(D_i')_j = \binom{0}{q}$。否则，如果不存在这样的 j^*，则设置 $(c_i')_j = 0$ 和 $(D_i')_j = \binom{1}{q}$。新砖块的其余部分通过设置 $C_i' = \binom{0^\top}{C_i}$ 和 $b_i' = \binom{0}{b_i}$ 构造。左上块 $A' = A$ 直接复制。

构造中的附加局部约束强制要求：$(x_i)_j = 0$ 如果原始实例中对应的列 (p,q) 不出现在砖块 i 中。通过这种方式，构造出的实例对应于原始整数线性规划的一个缩减版本，其中目标系数较差的重复列被移除；而这反过来又等价于原始整数线性规划。◀

我们注意到，引理 8 中的构造并不局限于系数较小的情况。具体而言，当 k 是任意 B_i 中出现的不同系数的数量时，我们可以假设

[6] 这并不令人意外：B-一致性意味着，4-块约束矩阵前 m 行的列秩至多为 $s+t$；在移除冗余约束后，我们可以假设 $m \leq s+t$。另一方面，值得注意的是，即使整数线性规划 (4B) 的全局约束以不等式形式表示为 $Ax_0 + B(x_1 + \cdots + x_n) \leq b_0$，证明定理 2 所使用的技术仍然可以得到一个运行时间关于 m 呈线性的算法。

$t' \leq (2\Delta+1)^d \cdot k^m$。由此可得一个时间复杂度为 $\mathcal{O}_{dms\Delta k}(n^{s+\mathcal{O}(1)} \cdot t \cdot L^{\mathcal{O}(1)})$ 的算法，用于求解 4 块整数线性规划。

现在，我们遵循 Kouteckỳ、Levin 和 Onn [30] 提出的强多项式框架中的步骤 1 和 4，证明定理 3。

▶ **定理 3.** 一个四块整数线性规划可在 $O_{dms\Delta}(n^{s+\mathcal{O}(1)} \cdot t)$ 时间内求解。

证明. 根据引理 8，我们只需将求解范围限制为 B-一致四块整数线性规划，并且在经过使用 $t = \mathcal{O}_{dm\Delta}(1)$ 时间的预处理步骤后，$_{dms\Delta}(nt)$ 即可。我们使用定理 2 中的同一算法求解此类实例，同时确保以强多项式时间求解整数线性规划 (C) 的实例。这是可行的，因为现在所有系数都以 $\mathcal{O}_{dms\Delta}(1)$ 为界。具体而言，整数线性规划 (C) 可通过以下步骤在强多项式时间内求解，其中 $N = \mathcal{O}_{dms\Delta}(n)$ 是整数线性规划 (C) 的变量数，$\square = \mathcal{O}_{dm\Delta}(1)$ 是整数线性规划 (C) 中系数绝对值的最大值：

- 使用约束矩阵元素有界时为强多项式的线性规划算法求解整数线性规划 (C) 的线性规划松弛，例如使用 Tardos算法 [33]。如果线性规划松弛不可行，那么整数线性规划也不可行。否则，如果线性规划松弛无界，我们就需要检查整数线性规划是否可行，或等价地，使用 $c = 0$进行优化。因此，我们可以假设线性规划松弛有界。我们可以得到一个最优分数解 (z^*, p^*)，并添加额外约束，将 (z, p) 限制在一个各边有界于 $Q := 2(N \cdot \square^N N^{N/2}) + 1$的定界盒内，这依据的是 Cook等人 [6]的邻近性结果。对所得实例进行平移，使变量下界变为零[7]。此时，整数线性规划的右端向量的 ∞-范数必须不超过 $\square NQ$，否则该整数线性规划显然不可行。由于盒约束整数线性规划的任意两个解之间的 1-范数距离至多为NQ，我们可以应用 Frank 和 Tardos的系数约简技术 [19]，将目标向量 c 替换为一个 ∞-范数至多为 $2^{4N^3}(NQ+1)^{N(N+2)}$ 的目标向量，且它在整数线性规划 (C) 的整数解上具有相同的最优解集合。所得等价整数线性规划实例中所有数的编码长度均不超过 $\log((NQ)^{N^{\mathcal{O}(1)}}) = N\mathrm{O}(1) \cdot \log(NQ) = N\mathrm{O}(1) \cdot \log \square = \mathrm{O}_{dms\Delta}(n^{\mathcal{O}(1)})$。因此，使用任意（弱）固定参数可解算法求解该整数线性规划，即可获得所需的运行时间。因此，我们再次将 p 变量松弛为 $\mathbb{R}^{N_{\mathbb{R}}}$，并使用 Kannan 算法 [26]求解所得混合整数线性规划。

◀

注意，由于引理 8 中的构造，定理 3 中$\mathcal{O}_{dms\Delta}$ 内隐藏的常数对块维度 d 和 m呈三重指数依赖。

4 动态忠实分解

本节证明引理 7。

▶ **引理 7.** 给定 d 和 $\Delta \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$。那么，存在一个模数 $M = 2^{\mathcal{O}(d\Delta)^{d^3}}$、一个数值 $\Xi = 2^{\mathcal{O}(d\Delta)^d}$和一种算法，可输出：

[7] 注意，为了计算得到的平移后的盒，我们需要将 (z^*, p^*) 舍入到一个整数点。这里，我们假设该操作可以在线性于坐标数量的时间内完成；这在整数规划文献中是标准做法。计算余向量 r_i 时也需要进行类似操作。

- 至多包含 $O(d\Delta)^{d^4}$ 个超平面的集合 H；
- 一个仿射映射 $D_{r,\ F}$：$\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{R_{r,\ F}}$ 满足 $R_{r,\ F} \subseteq B^d$（Ξ）以及 $|R_{r,\ F}| \leq d+1$ 对于每个余数向量 $r \in \{0, 1, \ldots, M-1\}^d$ 以及由 H 诱导的超平面配置中的面 $F \in F_H$。

对于所有 $b \in (r + M\mathbb{Z}^d) \cap F$ 和 $D \in \{-\Delta, -\Delta+1, \ldots, \Delta\}^{d\times t}$，像 $D_{r,\ F}(b)$ 是关于 D 的 b 的一个 Ξ阶忠实分解。该算法在 $O(d\Delta)^{d^4}$ 时间内输出这些超平面，并针对给定的 r 和 F，在 $O(\Delta)^{d^4}$ 时间内构造仿射映射 $D_{r,\ F}$。

引理 7 的证明的核心在于说明：将 b 限制在超平面配置的一个适当的面 F 上，并将其限制在一个格平移 $r + M\mathbb{Z}^d$ 上之后，便可预先获知所有必要要素，从而归纳应用 Cslovjecksek 等人的定理 4.1 的证明。对于一个向量 $b \in (r + M\mathbb{Z}^d) \cap F$，证明过程如下：

- 我们确定锥生成 b 的基集合 $\mathcal{U}$ $U \in \mathcal{B}_*^{d\times d}(\Delta)$。这由面 F 决定。我们在 $\bigcap_{U\in\mathcal{U}} \text{int. cone}$ U 中确定一个线性无关的向量集，使其锥生成 b。这同样由 F 决定。如果相应锥组合
- 中的某个锥乘子很大，那么 b 就能忠实地分解为相应的生成元 w_i 和 $b - w_i$。我们以穷举和归纳的方式反复应用这一过程。这里，归纳基例由唯一的根 q 表示。该根由猜测
- 的格平移 $r + M\mathbb{Z}^d$ 以及足够大的锥乘子子集决定，而后者通过 F 识别。

我们注意到，针对超平面排列的每个格平移和面逐一进行处理，最近也被用于验证整数上的全称—存在命题 [1]。

由于引理 7 的证明中断言 7.6 的归纳步骤沿用了 Cslovjecksek 等人 [8], 的证明，我们还需要他们的辅助引理——引理 9。该引理揭示了形如 $\bigcap_{U\in\mathcal{U}} \text{cone}\, U$ 的锥的重要性质，其中 $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{B}_*^{d\times d}(\Delta)$。这里，Cslovjecksek 等人证明，可以找到一个大小有界的锥生成元集合 P，它也属于每个整数锥 $\text{int. cone}\, U$，其中 $U \in \mathcal{U}$。

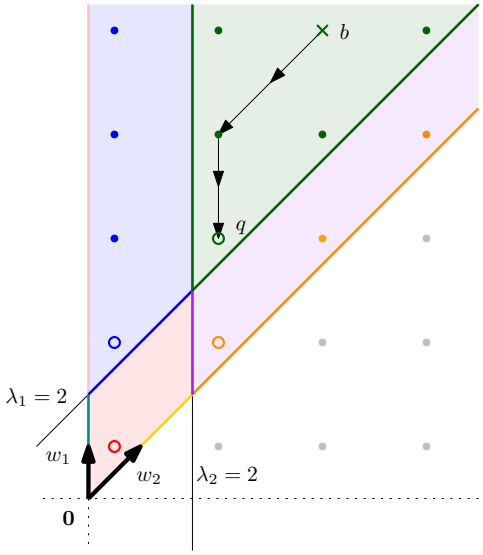
▶ **引理 9**（[8]）。设给定 d、$\Delta \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$。则存在数 $\Psi = 2^{\mathcal{O}(d\Delta)^d}$ 和 $\Phi = O(d\Delta)^{d^2}$，使得以下结论成立：对于满足 $\bigcap_{U\in\mathcal{U}}$ 锥 $U \neq \emptyset$ 的任意生成基子集 $U \subseteq B_*^{d\times d}(\Delta)$，存在一个由范数有界元素组成的生成集 $P \subseteq B^d(\Phi)$，使得

$$\text{cone}\, P = \bigcap_{U\in\mathcal{U}} \text{cone}\, U.$$

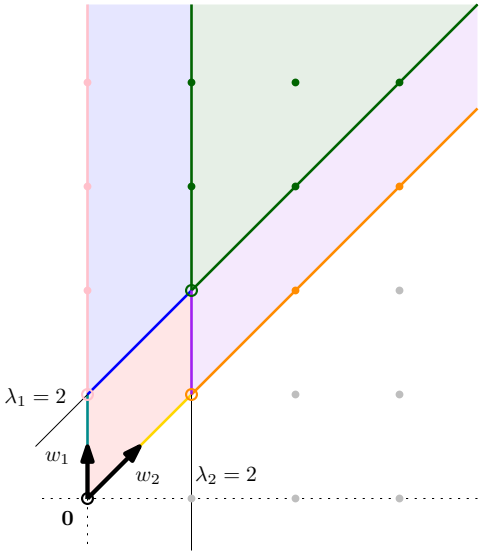
此外，对于任意 $v \in \mathbb{Z}^d \cap \bigcap_{U\in\mathcal{U}}$ 锥 U，有

$$\Psi \cdot v \in \bigcap_{U\in\mathcal{U}} \text{int. cone}\, U.$$

现在我们可以证明引理 7。分解机制如图 3 所示。



(a) 格平移 (1，2) $+4\mathbb{Z}^2$。箭头表示将右端项 $b = (9, 18)$ 动态分解为 $q = (5, 10)$、2 次 w_1 加上 2 次 w_2。每个箭头对应于断言 7.6 的一个归纳步骤。



(b) 格平移 (0，0) $+4\mathbb{Z}^2$。

图 3 引理 7 的证明中 $d = 2$ 维度下 $t = 2$ 和 $\Delta = 1$ 的子区域 $\mathbb{R}^2$ 的可视化表示。蓝色、红色、紫色和绿色区域的并集对应于生成基的集合

$$\mathcal{U} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

我们有 $\bigcap_{U\in\mathcal{U}}$ 锥 U 由 $v_1 = (0, 1)$ $v_2 = (1, 1)$ 生成，并且乘数 $\Psi = 2$足以得到 $w_1 = 2v_1 = (0, 2)$ $w_2 = 2v_1 = (2, 2)$ 这些位于整数锥交集中的生成元。此外，由于行列式为 $W = 2$，只需将空间划分为 $M\mathbb{Z}^2$ 的格平移，其中 $M = 2\cdot 2 = 4$。与 $\mathcal{U}$ 相关的区域根据 $\lambda_1 \geq 2$ 和/或 $\lambda_2 \geq 2$是否成立而划分为 4 个子区域。对于每个这样的子区域，根格点 q 用圆圈标记。注意，青色-粉色锥和黄色-橙色锥（退化的一维锥）都可以由严格更大的基集合生成，因此被分配了不同的生成基集合 $\mathcal{U}$。

引理 7 的证明。 首先，令 $\Phi = \mathcal{O}(d\Delta)^{d^2}$ 为引理 9 中定义的生成元的范数上界，并令 $\Psi = 2^{\mathcal{O}(d\Delta)^d}$ 为引理 9 中定义的大乘数。如有必要，我们扩大 Φ，使得 $1 \leq \Delta \leq \Phi$。

根据断言 7.1，我们可以假设 D 满行秩，且 $t = \mathcal{O}(\Delta)^d$。

▷ 断言 7.1. 关于列集为 $\mathcal{B}^d(\Delta)$ 的矩阵的 b 忠实分解，也是关于任意 $D \in \{-\Delta, -\Delta + 1, \ldots, \Delta\}^{d\times t}$ 的忠实分解。

证明。 只需证明，针对通过添加列或移除重复列而修改的矩阵构造的忠实分解，也是针对原矩阵的忠实分解。设 D, D' 是系数绝对值不超过 Δ 的整数系数矩阵，并设 $b = b_1 + \cdots + b_\ell$ 是某个 $b \in \mathbb{Z}^d$ 关于 D' 的忠实分解。

首先，考虑矩阵 $D' \in \mathbb{Z}^{d\times(t+1)}$ 由矩阵 $D \in \mathbb{Z}^{d\times t}$添加第 $(t + 1)$ 列 D得到的情形。如果 $x_0 \in \mathbb{Z}^t_{\geq 0}$ 是 $Dx_0 = b$的一个解，那么 $x'_0 \in \mathbb{Z}^{t+1}_{\geq 0}$

将 x_0 在第 $(t+1)$ 个坐标处补零后得到的结果是 $D'x'_0 = b$的一个解，它可分解为 $x'_0 = x'_1 + \cdots + x'_\ell$，其中 $D'x'_i = b_i$，$x'_i \in \mathbb{Z}^{t+1}_{\geq 0}$。令 $x_i \in \mathbb{Z}^t_{\geq 0}$为 x'_i在前 t 个坐标上的投影，可得 $x_0 = x_1 + \cdots + x_\ell$，其中$Dx_i = b_i$。

其次，考虑 $D \in \mathbb{Z}^{d\times(t+1)}$ 的第 t列与第$(t+1)$列相同，且 $D' \in \mathbb{Z}^{d\times t}$ 由 D的前 t 列组成的情形。在此情形下，可将$Dx_0 = b$ 的一个解 $x_0 \in \mathbb{Z}^{t+1}_{\geq 0}$ 聚合为 $D'x'_0 = b$ 的一个解 $x'_0 \in \mathbb{Z}^t_{\geq 0}$，方法是对 $j \in [t-1]$ 设置$(x_0)'_j = (x_0)_j$，并设置$(x'_0)_t = (x_0)_t + (x_0)_{t+1}$。考虑分解 $x'_0 = x'_1 + \cdots + x'_\ell$中的解 $x'_i \in \mathbb{Z}^t_{\geq 0}$，其中 $D'x'_i = b_i$。我们通过针对 $j \in [t-1]$ 复制$(x_i)_j = (x'_i)_j$，并设置另外两个分量来逆转该聚合操作，具体通过

$$\begin{pmatrix} (x_i)_t \\ (x_i)_{t+1} \end{pmatrix} = \begin{cases} \begin{pmatrix} (x'_i)_t \\ 0 \end{pmatrix}, & \text{if } \sum_{j=1}^{i} (x'_j)_t \leq x_t, \\ \begin{pmatrix} x_t - \sum_{j=1}^{i-1} (x'_j)_t \\ \sum_{j=1}^{i} (x'_j)_t - x_t \end{pmatrix}, & \text{if } \sum_{j=1}^{i-1} (x'_j)_t \leq x_t < \sum_{j=1}^{i} (x'_j)_t, \\ \begin{pmatrix} 0 \\ (x'_i)_t \end{pmatrix}, & \text{if } x_t < \sum_{j=1}^{i-1} (x'_j)_t. \end{cases}$$

根据构造，向量 $x_i \in \mathbb{Z}^{t+1}_{\geq 0}$ 是 $Dx_i = b_i$的解。因此，我们得到分解 $x_0 = x_1 + \cdots + x_\ell$。◀

对于向量 Φ中每个基 $V \in \mathcal{B}^{d\times d}_*(\Phi)$，我们向 H添加 $2d$ 个超平面。特别地，对于每个 $i \in [d]$，我们添加以下两个超平面

$$h^0_{\overline{V}i} = ((\overline{V}^{-1}b)_i, 0) \text{ and } h^+_{\overline{V}i} = ((\overline{V}^{-1}b)_i, t \cdot \Psi)$$

到 H。我们有

$$|H| \leq 2d \cdot \binom{|\mathcal{B}^d(\Phi)|}{d} \leq 2d \cdot |\mathcal{B}^d(\Phi)|^d = 2d \cdot \left(\left(2 \cdot \mathcal{O}(d\Delta)^{d^2} + 1\right)^d\right)^d = \mathcal{O}(d\Delta)^{d^4}.$$

令我们固定一个任意的面 $F \in \mathcal{F}_H$，其位置向量为 $\bowtie \in \{<, =, >\}^H$。在描述 $\mathcal{D}_{r,F}$ 的构造之前，我们先证明一些对该面中所有向量 b 都一致成立的有用性质。

▷ 断言 7.2。我们可以确定一组生成基 $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{B}^{d\times d}_*(\Delta)$，使得 $F \subseteq \bigcap_{U\in\mathcal{U}}$锥 U。此外，对于所有 $b \in F$和 $U \in \mathcal{B}^{d\times d}_*(\Delta)$，若 $b \in$锥 U，则 $U \in \mathcal{U}$。

证明。由于 $\Delta \leq \Phi$，我们有任意生成基 $U \in \mathrm{B}^{d\times d}_*(\Delta)$ 都以 $V = U$ 的形式出现。我们取 U 为所有满足 $\bowtie_{h^0_{U_i}} \in \{>, =\}$ 对任意 $i \in [d]$ 都成立的 $U \in \mathrm{B}^{d\times d}_*(\Delta)$ 的集合，即 $U^{-1}F \geq 0$。这立即推出，对于所有 $U \in \mathrm{U}$，$F \subseteq \operatorname{cone} U$。此外，若对于某个 $b \in F$ 有 $b \in \operatorname{cone} U$，则 $U^{-1}b \geq 0$，进而有 $U^{-1}F \geq 0$；这是由于面 F 相对于超平面的定向一致所致。这表明 $U \in \mathrm{U}$。◁

▷ 命题 7.3。我们可以找到一组线性无关生成向量 $V = \{v_1, \ldots, v_\ell\} \subseteq \mathcal{B}^d(\Phi)$，使得 $F \subseteq \operatorname{cone} V \subseteq \bigcap_{U\in\mathcal{U}} \operatorname{cone} U$。

证明。 利用引理 9，存在一个生成集 $P \subseteq \mathcal{B}^d(\Phi)$，使得 $F \subseteq$锥 $P = \bigcap_{U\in\mathcal{U}}$锥 U。令 b为 F中的任意向量。根据 Carathéodory定理，存在

16 利用右端项的仿射分解更快求解4 块整数线性规划

一个线性无关集 $V = \{v_1, \ldots, v_\ell\} \subseteq P \subseteq \mathcal{B}^d(\Phi)$，使得 $b \in$ 锥 V，也就是说，存在严格正乘子 $(\mu_i)^{i\in[\ell]}$，使得

$$b = \sum_{i\in[\ell]} \mu_i \cdot v_i.$$

通过添加单位向量，我们可以将 V扩展为$\mathcal{B}^d(\Phi)$中向量的一个基 V。由于 $b = V(V^{-1})\overline{b} = \overline{V}\mu$，我们有$(V^{-1}b)_i = \mu_i > \overline{0}$对 $i \in [\ell]$ 成立，且$(V^{-1}b)_i = 0$对 $i \in [d] \setminus [\ell]$成立。由于这些系数$(V^{-1}b)_i$的符号在 F中被一致确定，任意 $b \in F$都可以写成 V中元素的锥组合，从而有 $F \subseteq$ 锥 V。◁

设 $w_i = \Psi \cdot v_i$ 对 $i \in [\ell]$成立。考察锥组合 $b = \sum_{i\in[\ell]} \lambda_i \cdot w_i$中的缩放锥乘子$\lambda_i := \mu_i/\Psi > 0$将是有意义的。设 $r \in \{0, 1, \ldots, M-1\}^d$为一个固定的余数向量。我们将在下一个论证中选取一个合适的模数。

▷ 命题 7.4. 锥乘子 λ_i 对于 $i \in [\ell]$ 的 $\alpha_i := \lambda_i$ 模 t 余数，对所有 $b \in (r + M\mathbb{Z}^d) \cap F$ 都是常数，且可以计算。

证明。令 $W = \overline{\Psi}\cdot V$，即 W 的前 ℓ 个向量为 w_1、……、w_ℓ，最后的向量为经 Ψ 缩放的哑向量，从而得到一个基。已知 $W^{-1} = \frac{1}{\Psi}\cdot V^{-1} \in \frac{1}{\Psi}\cdot \det V \cdot \overline{\mathbb{Z}}^{d\times d}$。现在我们可以作出与 [8] 中类似的观察，作者借此推导出引理 9。由于根据阿达马界，$|\det V| \le \Phi^d d^{d/2}$，我们可以观察到，若取$M = t\cdot \Psi \cdot \operatorname{lcm}\{1, 2, \ldots, \Phi^d d^{d/2}\}$，则有 $M\cdot W^{-1} \in t\mathbb{Z}^{d\times d}$，且与 W 无关。该模数有界于 $M \le t\cdot \Psi \cdot 3^{\Phi^d d^{d/2}} = \mathsf{O}(\Delta)^d \cdot 2^{\mathcal{O}(d\Delta)^d} \cdot 3^{(\mathcal{O}(d\Delta)^{d^2})^d d^{d/2}} = 2^{\mathcal{O}(d\Delta)^{d^3}}$ [22]。

因此，若 $r \in \{0, 1, \ldots, M-1\}^d$是一个固定的余数向量，且 b是格平移 $r + M\mathbb{Z}^d$中的某个向量，则有 $W^{-1}b \in W^{-1}(r + M\mathbb{Z}^d) \subseteq W^{-1}r + (M\cdot W^{-1})\mathbb{Z}^d \subseteq W^{-1}r + t\mathbb{Z}^d$。因此，对于所有 $i \in [\ell]$，已知 λ_i 模 t 的余数固定为λ_i 模 $t = (W^{-1}r)_i$ 模 t。注意，这个余数可能是分数。◁

由于我们还知道 F 相对于超平面 $h^+_{V_i}$的位置，也就是说，已知 $(V^{-1}b)_i \ge t\cdot\Psi \iff (W^{-1}b)_i \ge t$是否成立，因此，对于每个 $i \in [\ell]$，一致地对定义域 $(r + M\mathbb{Z}^d) \cap F$中的所有向量 b，我们可以区分以下两种情况：要么 $\lambda_i = \alpha_i$；要么$\lambda_i \ge t$，并且，如果我们定义 $\gamma_i = t + \alpha_i$，差值 $z_i = \lambda_i - \gamma_i \in t\mathbb{Z}_{\ge 0}$ 是一个非负整数。

令 $S \subseteq [\ell]$ 为满足 $\lambda_i = \alpha_i$的方向集合 $i \in [\ell]$，即 F 沿 w_i的方向在锥 V 中并不深入。令 $q = \sum_{i\in S} \alpha_i \cdot w_i + \sum_{i\in[\ell]\setminus S} \gamma_i \cdot w_i$。如前所述，它只取决于 r 和 F，而不取决于 b。现在可以定义动态忠实分解$\mathcal{D}_{r,F} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{R_{r,F}}$，如下：

$$\mathcal{D}_{r,F}(b) = 1\cdot e_q + \sum_{i\in[\ell]\setminus S} z_i \cdot e_{w_i},$$

其中 $e_{b'}$ 是第 b' 个标准基向量，即 $e_{b'}(b') = 1$ 且 $e_{b'}(b'') = 0$，对于 $b'' \ne b'$ 均成立。也就是说，我们将 b 分解为 z_i 乘以 w_i（对于 $i \in [\ell]\setminus S$），再加上 1 乘以根 q。注意，对于所有 $i \in [\ell]$，$\|w_i\|_\infty = \Psi\cdot\|v_i\| \le \Psi\cdot\Phi = 2^{\mathcal{O}(d\Delta)^d}\cdot\mathcal{O}(d\Delta)^{d^2} = 2^{\mathcal{O}(d\Delta)^d}$，并且

$$\|q\|_\infty \le \sum_{i\in S}\alpha_i\|w_i\|_\infty + \sum_{i\in[\ell]\setminus S}\gamma_i\|w_i\|_\infty \le \sum_{i\in[\ell]} 2t\|w_i\|_\infty \le d\cdot 2t\cdot 2^{\mathcal{O}(d\Delta)^d} = 2^{\mathcal{O}(d\Delta)^d}.$$

因此，忠实分解$\mathcal{D}_{r,F}$中的右端向量都属于 $R_{r,F} = \{q, w_1, \ldots, w_\ell\} \subseteq \mathcal{B}^d(\Xi)$，其中 $\Xi = 2^{\mathcal{O}(d\Delta)^d}$和 $|R_{r,F}| \le d + 1$。注意，该函数关于 b是仿射的，因为 $z_i = \lambda_i - \gamma_i = (W^{-1}b)_i - \gamma_i$。

从现在起，令 $b \in (r + M\mathbb{Z}^d) \cap F$ 固定。注意，生成基$U \in \mathcal{B}_*^{d\times d}(\Delta)$的第 i 列为 e_i （当 $b_i \geq 0$ 时），为 $-e_i$ （当 $b_i < 0$ 时），其中 $i \in [d]$，且该生成基包含于$\mathcal{U}$，因为它生成的正交象限包含 b。因此，所有生成元 w_i 都与 b符号相容，这表明分解成$R_{r,F}$ 中的元素是符号相容的。

剩下要证明的是，该分解满足定义 5 中其余的性质。我们通过对 $\|z\|_1 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 递减归纳来证明断言 7.6。为此，我们需要命题 7.5 的结果。

▷ 命题 7.5。设 $\nu_i \in \mathbb{R}^{\ell}_{>0}$ 为严格正乘子，且 $p = \sum_{i\in[\ell]} \nu_i \cdot w_i$。令$U \in \mathcal{B}_*^{d\times d}(\Delta)$，并假设 $p \in$ 锥 U。则有 $U \in \mathcal{U}$。

证明。反设 $b \notin$ 锥 U。令 $Y \neq \emptyset$ 为满足 $(U^{-1}b)_j < 0$ 的指标集合，并通过翻转由 Y 标记的基向量的符号，构造另一个不同的基 $U' \neq U$。这样， $b \in$ 锥 U'。如果存在一个指标 $j \in Y$，使得也有 $(U^{-1}p)_j > 0$，那么我们得到 $p \notin$ 锥 U'。利用断言 7.2 和 $b \in$ 锥 U'，我们得到 $p \in$ 锥 $V \subseteq \bigcap_{U''\in}$U 锥 $U'' \subseteq$ 锥 U'，这就产生了矛盾。因此，对所有 $i \in Y$，必有 $(U'^{-1}p)_j = 0$ 且 $(U'^{-1}b)_j > 0$。由于对所有 $i \in [\ell]$，都有 $w_i \in$ 锥 $V \subseteq$ 锥 U'，因此 $(U'^{-1}w_i) \geq 0$。将此与对所有 $i \in [\ell]$ 的 $\nu_i > 0$ 结合，且

$$\sum_{i\in[\ell]} \nu_i \cdot \sum_{j\in Y} (U'^{-1}w_i)_j = \sum_{j\in Y} \Big(U'^{-1} \sum_{i\in[\ell]} \nu_i \cdot w_i\Big)_j = \sum_{j\in Y} (U'^{-1}b)_j > 0$$

这表明必定存在一个 $i \in [\ell]$ 和 $j \in Y$，使得 $(U'^{-1}w_i)_j > 0$。然而，由此可得

$$(U'^{-1}p)_j = \Big(U'^{-1} \sum_{i\in[\ell]} \nu_i \cdot w_i\Big)_j = \sum_{i\in[\ell]} \nu_i \cdot (U'^{-1}w_i)_j > 0,$$

这再次导致矛盾。因此，根据断言 7.2， $b \in$ 锥 U 且 $U \in \mathcal{U}$。 ◁

现在我们可以用归纳法证明断言 7.6。这里，我们将遵循 [8] 的定理 4.1 的证明。

▷ 断言 7.6. $\mathcal{D}_{r,F}(b)$ 是关于 D 的 b 的忠实分解。

证明.我们通过证明以下归纳假设对所有$s \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{[\ell]\setminus S}$ 均成立来证明这一点：令 $p = \sum_{i\in S} \alpha_i \cdot w_i + \sum_{i\in[\ell]\setminus S} (\gamma_i + s_i) \cdot w_i$。那么 $\mathcal{D}_{r,F}(p)$ 是关于 D 的 p 的忠实分解。

注意，当 $s = 0$ 时，我们有 $\mathcal{D}_{r,F}(p) = e_q = e_p$，因此断言成立。接下来进行归纳步骤。

现在进行归纳步骤，设给定了 s 和对应的 p。令 $\nu_i = \alpha_i$ 表示 $i \in S$，令 $\nu_i = \gamma_i + s_i$ 表示 $i \in [\ell]\setminus S$。注意，在这两种情况下， ν_i 都严格为正。设 $x \in \mathbb{Z}^t_{\geq 0}$是 $Dx = p$的一个解。我们证明，这个解可分解为若干方程组的解，其右端项如$\mathcal{D}_{r,F}(p)$所述。考虑多面体$\{Dx' = p, x' \geq 0\}$。根据闵可夫斯基–韦尔定理，我们可以写成

$$x = \sum_j \zeta_j \cdot u_j + \sum_j \eta_j \cdot l_j$$

对于多面体的顶点 u_j 和射线 l_j，凸乘子为 $\zeta_j \geq 0$， $\sum_j \zeta_j = 1$，锥乘子为 $\eta_j \geq 0$。根据Carathéodory定理，我们可以假设至多有 $t + 1$个非零乘子 ζ_j。对凸乘子取平均可知，必定存在一个 j，满足 $\zeta_j \geq 1/(t + 1)$。由于 x 的分解中的所有加项均为非负数，因此可得

$x \geq 1/(t+1)\cdot u_j$。设 U 为与 u_j 相关联的基，并令 π 为在相应基变量上的投影，即 $\pi(u_j) = U^{-1}p \geq 0$。注意到 $p \in$ 锥 U 意味着生成基 U 包含于 $\mathcal{U}$ 中，这是命题 7.5的结果。现在写出

$$p = \sum_{i\in[\ell]} \nu_i \cdot w_i = \sum_{i\in[\ell]} \nu_i \cdot U\tilde{y}_i$$

对于整数锥乘子 $\tilde{y}_i \in \mathbb{Z}^d_{\geq 0}$，使得 $w_i = U\tilde{y}_i$，这是可能的，因为根据命题 7.3， $w_i \in$ 属于锥 U，并且引理 9 保证 $w_i = \Psi \cdot v_i \in \operatorname{int}.$ 锥 U。由此可得

$$\pi(x) \geq 1/(t+1)\cdot\pi(u_j) = 1/(t+1)\cdot U^{-1}p = \sum_{i\in[\ell]} \tfrac{\nu_i}{t+1}\cdot\tilde{y}_i.$$

设 $i^* \in [\ell]\setminus S$ 使得 $s_{i^*} \geq 1$。则有 $\nu_{i^*} = s_{i^*} + t + \alpha_{i^*} \geq t+1$，因此可得 $\pi(x) \geq \tilde{y}_{i^*}$。由于 U 的列出现在 D中，我们可以用零将 $\tilde{y}_{i^*}$ 扩展为 $Dy = w_{i^*}$的一个解 $y \in \mathbb{Z}^t_{\geq 0}$。于是有 $Dy = w_{i^*}$，并且 $D(x-y) = p - w_{i^*}$，其中 $x = y + (x-y)$，以及 $p = w_{i^*} + (p - w_{i^*})$，且两个解 y 和 $x-y$ 均为非负整数。这对应于将 p 忠实地分解为一个较小向量 w_{i^*} 和一个较大向量 $p' = p - w_{i^*}$。显然， p' 可以写成锥组合

$$p' = \sum_{i\in S} \alpha_i \cdot w_i + \sum_{i\in[\ell]\setminus S} (\gamma_i + s'_i)\cdot w'_i$$

对于与 $s'_i = s_i$ 给出的归纳假设相符的乘子，在除 $s'_{i^*} = s_{i^*} - 1 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 外的所有 $i \in [\ell]\setminus(S\cup\{i^*\})$ 中，均属于锥 V。

因此，归纳假设适用，并表明

$$1\cdot e_q + \left(\sum_{i\in[\ell]\setminus S} s_i \cdot e_{w_i}\right) - 1\cdot e_{w_{i^*}}$$

是 p' 的忠实分解。由于 $x-y$ 是 $D(x-y) = p'$ 的一个解，它可以分解为该忠实分解 p' 所给出的方程组的解。容易验证，将这些解与 $Dy = w_{i^*} = p - p'$ 的解 y 结合起来，表明 $\mathcal{D}_{r,F}(p)$ 确实是 p 的一个有效忠实分解。◁

剩下需要讨论算法的运行时间。首先，显然可以在 $d^{\mathcal{O}(1)}\cdot\mathcal{O}(d\Delta)^{d^4} = \mathcal{O}(d\Delta)^{d^4}$ 时间内构造这些超平面。

给定一个面 $F \in \mathcal{F}_H$，按照断言 7.2 中的描述确定 $\mathcal{U}$，可以在时间 $d^{\mathcal{O}(1)}\cdot|\mathcal{B}^{d\times d}_*(\Delta)| = \mathcal{O}(\Delta)^{d^2}$ 内完成。

由于锥 $U = \{x \in \mathbb{R}^d\colon U^{-1}x \geq 0\}$ 对于 $U \in \mathrm{B}^{d\times d}_*(\Delta)$ 是单纯锥，交锥 $\bigcap_{U\in\mathrm{U}} \operatorname{cone} U$ 可由 $\mathrm{O}(\Delta)^{d^2}$ 个不等式描述，且是尖锥。要找到生成集，只需朴素地检验不等式描述中每一种由 $d-1$ 个线性无关等式构成的交是否位于交锥内；若是，则将相应符号的张成向量加入生成集。由此可知，我们可以在 $d^{\mathcal{O}(1)}\cdot\binom{|\mathcal{U}|}{d-1}\cdot|\mathrm{U}| = d^{\mathcal{O}(1)}\cdot(\mathrm{O}(\Delta)^{d^2})^d = \mathrm{O}(\Delta)^{d^3}$时间内，通过引理 9 得到 P，并得到 $|P| \leq \mathrm{O}(\Delta)^{d^3}$。接下来，我们可以按照命题 7.3 的建议，尝试检查对于 P 中的所有线性无关向量集 V，是否都有 $F \subseteq \operatorname{cone} V$，从而在时间$d^{\mathcal{O}(1)}\cdot\sum_{i=0}^{d}\binom{|P|}{i} = d^{\mathcal{O}(1)}\cdot d\cdot(\mathrm{O}(\Delta)^{d^3})^d = \mathrm{O}(\Delta)^{d^4}$内找到 V。扩展到基 W可以在多项式时间内完成。最后，命题 7.4 表明，给定 W后，可以在多项式时间内计算乘数 $\alpha,\overline{\gamma}$和指标集 S。

◀

5 未来方向

我们提出了一种新的切片多项式时间算法，用于求解 4 块整数线性规划；该算法使块维度对 n指数的依赖得到改进，并呈线性关系。该算法成功克服了枚举s维盒中整数向量所带来的运行时间限制，该盒的边长由 Graver 复杂度或邻近度决定；它也是首个无需将全局部分中的系数限制在某个参数以内的 4 块整数线性规划算法。

其思路是将全局变量的空间划分为 $\mathcal{O}_{st\Delta}(n^s)$ 个区域，并针对每个区域，求解一个分解的 n 重整数线性规划，其中右端向量仿射地依赖于 x_0。具体而言，我们证明，只要全局变量位于某个固定区域内，忠实分解就可以表示为该 n 重整数线性规划的右端向量的仿射函数。

尽管本文取得了进展，但是否存在一种用于求解 4 块整数线性规划的固定参数可解算法（猜想 1）仍未得到解答。若确实存在这样的固定参数可解算法，似乎必须采用不同的策略才能获得它：考虑一个 4 块整数线性规划，其中 A 是零矩阵，$C_i = -e_{j(i)}^\top$ 对于某个标准基向量 $e_{j(i)}$，$D_i = \begin{pmatrix}1 & -1\end{pmatrix}$ 以及 $B_i = \begin{pmatrix}a_i & 0\end{pmatrix}$ 对于任意向量 $a_i \in \{-1,0,1\}^m$。求解这样的可行性问题，相当于寻找一个解，使其满足

$$\begin{aligned} &a_1 y_1 + \cdots + a_n y_n = b_0, \\ &y_i \geq \max\{0, b_i + (x_0)_{j(i)}\} \ \forall i \in [n], \\ &x_0 \in \mathbb{Z}^s_{\geq 0}, y \in \mathbb{Z}^n. \end{aligned} \tag{5}$$

在这里，我们的算法需要猜测对于所有 $i \in [n]$，是 $(x_0)_{j(i)} \leq b_i$ 还是 $(x_0)_{j(i)} < b_i$，因此全局变量的空间被划分为一个 s 维的轴对齐网格，其中最多可能有 $\Omega_s(n^s)$ 个单元。我们注意到，如果将 (5) 中的不等式替换为等式，那么寻找一个解将是 $W[1]$-困难的。粗略地说，s-团问题可以这样编码：让每个全局变量 $(x_0)j$ 选取一个顶点 $v \in \{1, 2, \ldots, |V|\}$ 加入团中，并添加许多重复的砖块，以模拟一个含有 $m = \mathcal{O}(s^2)$ 个约束、且二元变量上的系数采用一元编码的整数线性规划 z_{jv}，这些变量表示 $(x_0)_j = v$ 是否成立；如 [10] 所示，这样便可编码所需的团约束。注意，在标准形式下，(5) 对应于 $y_i - z_i = b_i + (x_0)^{j(i)}$，其中 $z_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 是一个松弛变量。这表明，(5) 中大小为 s 的松弛，对应于在分解后的整数线性规划 (C) 中总共添加 $p_g^i = s$ 次 Graver 基元素 $g = \begin{pmatrix}1 & 1\end{pmatrix}$。因此，我们认为，为解决猜想 1，一个自然的后续问题是研究如何利用 (5) 中不等式的凸性，或整数线性规划 (C) 中添加 Graver 基元素的自由度。

最后，我们指出，[3, 24, 31] 中的 Graver 复杂度和邻近界可用于最小化 [24], 中所述的可分凸目标函数，但目前尚不清楚定理 2 背后的算法是否也能以类似方式推广。因此，能否在时间 $\mathcal{O}_{dmst\Delta}(n^{s+\mathcal{O}(1)})$ 内优化 4 块整数规划上的这类非线性目标函数，仍是一个值得探讨的开放问题。

参考文献

1 Eleonore Bach、Friedrich Eisenbrand、Thomas Rothvoss 和 Robert Weismantel。伪多项式时间内的全称—存在命题。载于 *2025 年 ACM-SIAM 离散算法研讨会论文集（SODA）*，第 2225–2233 页，2025 年。 doi:10.1137/1.9781611978322.73。

20 利用右端项的仿射分解，更快地求解 4 块整数线性规划

2 John Bartholdi、Craig A Tovey 和 Michael A Trick。难以判定选举胜者的投票方案。《社会选择与福利》，6(2):157–165，1989 年。doi:10.1007/BF00303169。3 Hua Chen、Lin Chen 和张国川。块结构整数规划：能否在不依赖最大系数的情况下进行参数化？《离散优化》，46:100743，2022 年。doi:10.1016/J.DISOPT.2022.100743。4 Hua Chen、Lin Chen 和张国川。用于调度的特殊块结构整数规划的 FPT算法。《数学规划》，208(1):463–496，2024 年。doi:10.1007/S10107-023-02046-Z。5 Lin Chen、Martin Koutecký、Lei Xu 和 Weidong Shi。关于块结构整数规划增广步的新界。载于第 28 届欧洲算法研讨会论文集（ESA），第 33:1–33:19 页，2020 年。 doi:10.4230/LIPICS.ESA.2020.33。6 William J. Cook、Albertus M. H. Gerards、Alexander Schrijver 和 Éva Tardos。整数线性规划中的敏感性定理。《数学规划》，34(3):251–264，1986 年。doi:10.1007/BF01582230。7 Jana Cslovjecsek、Friedrich Eisenbrand、Christoph Hunkenschröder、Lars Rohwedder 和 Robert Weismantel。强多项式时间和近线性时间内求解块结构整数规划与线性规划。载于 2021 年 ACM-SIAM 离散算法研讨会论文集（SODA），第 1666–1681 页，2021 年。 doi:10.1137/1.9781611976465.101。8 Jana Cslovjecsek、Friedrich Eisenbrand、Michal Pilipczuk、Moritz Venzin 和 Robert Weisman- tel。利用邻近度求解多阶段随机整数规划的高效顺序与并行算法。载于第 29 届欧洲算法研讨会论文集（ESA），第 204 卷，第 33:1–33:14 页，2021 年。 doi:10.4230/LIPICS.ESA.2021.33。9 Jana Cslovjecsek、Martin Koutecký、Alexandra Lassota、Michal Pilipczuk 和 Adam Polak。大系数块结构整数规划的参数化算法。《TheoretiCS》，4，2025 年。此前发表于 2024 年 SODA。doi:10.46298/THEORETICS.25.15。10 Pavel Dvořák、Eduard Eiben、Robert Ganian、Dusan Knop 和 Sebastian Ordyniak。整数线性规划分解参数的复杂性全景：具有少量全局变量和约束的规划。人工智能，300:103561，2021 年。 doi:10.1016/j.artint.2021.103561。11 Herbert Edelsbrunner。《组合几何中的算法》，《理论计算机科学 EATCS 专著》丛书第 10 卷。施普林格，1987 年。 doi:10.1007/978-3-642-61568-9。12 Herbert Edelsbrunner、Joseph O’Rourke 和 Raimund Seidel。构造直线与超平面排列及其应用。SIAM计算期刊，15(2):341–363，1986 年。doi:10.1137/0215024。13 Herbert Edelsbrunner、Raimund Seidel 和 Micha Sharir。关于超平面排列的区域定理。SIAM计算期刊，22(2):418–429，1993 年。 doi:10.1137/0222031。14 Friedrich Eisenbrand、Christoph Hunkenschröder 和 Kim-Manuel Klein。块结构整数规划的更快算法。载于第 45 届自动机、语言与程序设计国际学术会议论文集（ICALP），第 49:1–49:13 页，2018 年。 doi:10.4230/LIPIcs.ICALP.2018.49。15 Friedrich Eisenbrand 和 Thomas Rothvoss。整数凸包的参数化线性表述，2025 年。 arXiv:2501.02347。16 T. Ermolieva、Y Ermoliev、P. Havlik、A. Lessa-Derci-Augustynczik、N. Komendantova、T. Kahil、J. Balkovic、R. Skalsky、C. Folberth、P. S. Knopov 和 G. Wang。稳健统计估计、基于两阶段随机优化的稳健决策与稳健机器学习问题之间的联系。《控制论与系统分析》，59(3):385–397，2023 年。doi:10.1007/s10559-023-00573-3。17 Michael R. Fellows、Daniel Lokshtanov、Neeldhara Misra、Frances A. Rosamond 和 Saket Saurabh。以顶点覆盖为参数的图布局问题。载于第 19 届算法与计算国际研讨会论文集（ISAAC），第 294–305 页，2008 年。doi:10.1007/978-3-540-92182-0_28。

18 Jirí Fiala、Tomas Gavenciak、Dusan Knop、Martin Koutecký 和 Jan Kratochvíl。距离标记与统一信道分配问题的参数化复杂度。《离散应用数学》，248：46–55，2018。doi:10.1016/j.dam.2017.02.010。19 András Frank 和 Éva Tardos。同时丢番图逼近在组合优化中的应用。《组合数学》，7(1)：49–65，1987。 doi:10.1007/BF02579200。20 Tomáš Gavenčiak、Martin Koutecký 和 Dušan Knop。参数化复杂度中的整数规划：五个小例。《离散优化》，44（第1部分）：100596，2022。 doi:10.1016/j.disopt.2020.100596。21 Branko Grünbaum。《凸多胞体》，《数学研究生教材》第221卷。施普林格，第二版，2003。doi:10.1007/978-1-4613-0019-9。22 Denis Hanson。关于素数的乘积。《加拿大数学通报》，15(1)：33—37，1972。 doi:10.4153/CMB-1972-007-7。23 Raymond Hemmecke、Matthias Köppe 和 Robert Weismantel。优化 N 重 4 块可分解整数规划的多项式时间算法。载于第14届国际整数规划与组合优化会议论文集（IPCO），第219–229页，2010。doi:10.1007/978-3-642-13036-6_17。24 Raymond Hemmecke、Matthias Köppe 和 Robert Weismantel。块结构可分离凸整数最小化问题的 Graver 基与邻近技术。《数学规划》，145(1-2)：1–18，2014。 doi:10.1007/s10107-013-0638-z。25 Klaus Jansen、Kim-Manuel Klein、Marten Maack 和 Malin Rau。增强配置整数规划：带准备时间调度问题的新多项式时间近似方案结果。《数学规划》，195(1)：367–401，2022。 doi:10.1007/S10107-021-01694-3。26 Ravi Kannan。闵可夫斯基凸体定理与整数规划。《运筹学数学》，12(3)：415–440，1987。doi:10.1287/MOOR.12.3.415。27 Kim-Manuel Klein。关于两阶段随机整数规划的复杂度。《数学规划》，192(1)：319–337，2022。 doi:10.1007/S10107-021-01698-Z。28 Dusan Knop 和 Martin Koutecký。调度与 n 重整数规划的结合。《调度学报》，21(5)：493–503，2018。doi:10.1007/S10951-017-0550-0。29 Dusan Knop、Martin Koutecký 和 Matthias Mnich。单指数时间内的投票与贿赂。《ACM经济学与计算汇刊》，8(3)：12:1–12:28，2020。 doi:10.1145/3396855。30 Martin Koutecký、Asaf Levin 和 Shmuel Onn。块结构整数规划的参数化强多项式算法。载于第45届自动机、语言与程序设计国际学术会议（ICALP）论文集，第85:1–85:14页，2018。doi:10.4230/LIPICS.ICALP.2018.85。31 Timm Oertel、Joseph Paat 和 Robert Weismantel。彩色施泰尼茨引理及其在块结构整数规划中的应用。《数学规划》，204(1)：677–702，2024。doi:10.1007/S10107-023-01971-3。32 Loïc Pottier。线性丢番图方程组的极小解：界与算法。载于重写技术与应用国际会议（RTA）论文集，第162–173页，1991。doi:10.1007/3-540-53904-2_94。33 Éva Tardos。求解组合线性规划的强多项式算法。《运筹学》，34(2)：250–256，1986。 doi:10.1287/OPRE.34.2.250。