模p^2下韦尔代数自同态的提升

Niels Lauritzen 和 Jesper Funch Thomsen

arXiv:2601.23110v1 [math.RA] 30 Jan 2026

摘要

设 φ 表示正特征p的完美域k 上的第n个韦尔代数$A_n(k)$的k-代数自同态。我们证明， φ 能够提升为定义在k 上长度为二的维特向量$W_2(k)$上的韦尔代数$A_n(W_2(k))$的自同态，当且仅当 φ 在$A_n(k)$的中心上诱导出一个泊松态射。此外，我们改进了 Tsuchimoto 的一项结果，从而得以断定，当 $\deg(\varphi) < p$时，这些等价命题至少成立。特别地，我们得出结论：若 $\deg(\varphi) < p$，则 φ 是单射。

引言

设k 是特征$p > 0$为正的完美域，并令n阶韦尔代数$A_n(k)$表示定义在k上的代数，其生成元为

$$z_1, z_2, \ldots, z_{2n},$$

满足以下关系

$$[z_i, z_j] := \omega_{i,j}, \qquad 1 \le i, j \le 2n,$$

其中 $\omega_{i,\ j}$ 是矩阵的第（i，j）个元素

$$\omega = \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{2n}(k),$$

且 $I_n \in \mathrm{Mat}_n(k)$ 表示$n \times n$ 单位矩阵。

在正特征下，韦尔代数是一个阿祖马亚代数，其中心Z 等于 k 上的一个含有 $2n$ 个变量的多项式环

$$x_i := z_i^p, \quad i = 1, \ldots, 2n.$$

我们将中心Z 视为一个泊松代数，其泊松括号定义如下：

$$\{x_i, x_j\} = -\omega_{i,j}, \qquad 1 \le i, j \le 2n.$$

设 φ 是 k-代数 $A_n(k)$ 的一个代数自同态。已知 $\varphi(Z) \subseteq Z$，因此可以进一步探讨在什么条件下，诱导自同态 φ_Z 是 Z 的泊松态射，即

$$\varphi_Z(\{f, g\}) = \{\varphi_Z(f), \varphi_Z(g)\}, \qquad f, g \in Z.$$

人们通常会认为情况确实如此；然而，即使 φ 是自同构（见例3.14），反例依然存在。尽管如此，目前已有一些部分结果。Tsuchimoto [9, 推论 3.3]证明，若 φ （将在下文定义）的次数小于$p/2$，则 φ_Z 是泊松态射。沿着略有不同的思路，Belov-Kanel 和 Kontsevich 指出 [3]，如果 φ 能够提升为一个

特征为p^2, 的环上的韦尔代数的自同态，那么 φ_Z 是泊松态射。顺带一提，Belov-Kanel 和 Kontsevich 曾猜想 [2]，如果k 是零特征域，那么韦尔代数的自同构群$A_n(k)$与n维仿射空间上定义的辛同胚群k之间应存在典范同构。

本文研究了何时一个 k-代数自同态 φ 能够提升为维特向量上的韦尔代数自同态$W_2(k)$（长度为二，底域为 k）。我们证明，这种提升存在，当且仅当诱导的中心 φ_Z 自同态 Z 是泊松态射。结合 Tsuchimoto 的结果，我们可知 φ 当 φ 的次数小于 $p/2$时，可以提升到长度为二的维特向量。与此同时，我们还指出，Tsuchimoto的结果可以改进，涵盖 φ 次数小于 p的情形，尽管该结果在更一般的条件下也成立（见定理 3.10）。此外，我们给出一个 φ_Z 成为泊松态射的充要判据，该判据由 Tsuchimoto 引入的某些微分方程的解决定（见命题 3.15）。

本文最后一节（§4）中，我们给出若干应用，展示这一改进后的次数界以及对中心的限制。对于 φ，当 $n = 1$时，它总是单射。Bavula 猜想这一性质普遍成立，但 Makar-Limanov 给出了一个 $n = 2$ 下非单射自同态的例子。在 $\varphi < p$ 的假设下（更一般地，在较弱的假设下），我们证明 φ 是单射。

我们还证明 φ 在其为双有理且 $\deg(\varphi) < p$时是平坦的，并且是一个自同构。这两个结果此前仅对零特征域已知。我们请参阅§4 以了解精确陈述与参考文献。

1 记号

设k 为一个正特征为$p > 0$的完美域，并设$A_n(k)$表示k上的第n个韦尔代数。我们将$A_n(k)$视为由元素$z_1, z2, \ldots\ldots, z_{2n}$，生成，并满足如下关系

$$[z_i, z_j] := \omega_{i,j}, \qquad 1 \le i, j \le 2n,$$

其中$\omega_{i,\ j}$是（i，j）位置的元素

$$\omega = \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{2n}(k),$$

并且$I_n \in \mathrm{Mat}_n(k)$表示$n \times n$单位矩阵。

作为k向量空间，$A_n(k)$具有基

$$z_1^{i_1} z_2^{i_2} \cdots z_{2n}^{i_{2n}}, \quad i_1, \ldots, i_{2n} \in \mathbb{Z}_{\ge 0}.$$

我们将使用多重指标记号，并将这样的元素写作 $\mathbf{z}^{\mathbf{i}}$，其中 $\mathbf{i} = (i1, \ldots, i_{2n})$。基元素的总次数定义为

$$\deg(\mathbf{z}^{\mathbf{i}}) := i_1 + \cdots + i_{2n},$$

对于一般的非零元素

$$f = \sum_{\mathbf{i}} c_{\mathbf{i}} \mathbf{z}^{\mathbf{i}} \in A_n(k), \quad c_{\mathbf{i}} \in k,$$

我们设

$$\deg(f) := \max\{\deg(\mathbf{z}^{\mathbf{i}}) : c_{\mathbf{i}} \neq 0\}.$$

$A_n(k)$ 的中心记为 Z，它是 k 上的关于 $2n$ 个变量的多项式环，由以下元素生成：

$$x_i := z_i^p, \qquad i = 1, \ldots, 2n.$$

作为Z上的模，韦尔代数是秩为p^{2n} 的自由模，其基为

$$z_1^{i_1} z_2^{i_2} \cdots z_{2n}^{i_{2n}}, \quad 0 \le i_1, \ldots, i_{2n} < p.$$

在全文中，令 φ 表示一个 k-代数 $A_n(k)$的自同态。我们将 (φ)的次数 deg 定义为 φ的元素 $\varphi(z_i)$、$i = 1$、.....、$2n$的最高次数。已知（[8,推论 2]），φ构成一个 Z-模基

$$\varphi(z_1)^{i_1} \varphi(z_2)^{i_2} \cdots \varphi(z_{2n})^{i_{2n}}, \quad 0 \le i_1, \ldots, i_{2n} < p.$$

$\varphi(Z)$中的任意元素都是中心元，因为它与所有基元素交换。因此，$\varphi(Z) \subseteq Z$，于是 φ通过限制诱导出一个k-代数自同态 φ_Z，其映射为Z。

本文中，记号 $\delta_{i,j}$ 用于表示克罗内克δ。此外，若R 是一个环，且$x \in R$，则记 $\mathrm{ad}(x)$为从 R 到其自身的映射，该映射由与x的交换子给出。

1.1 维特向量

长度为二的k上维特向量环，记作$W_2(k)$，是集合

$$W_2(k) = \{(a_1, a_2) \mid a_1, a_2 \in k\},$$

配备由下列公式给出的加法和乘法

$$(a_1, a_2) + (b_1, b_2) = \left(a_1 + b_1,\ a_2 + b_2 + \frac{1}{p}\left(a_1^p + b_1^p - (a_1 + b_1)^p\right)\right),$$

and

$$(a_1, a_2) \cdot (b_1, b_2) = \left(a_1 b_1,\ a_1^p b_2 + b_1^p a_2\right).$$

此处表达式

$$\frac{1}{p}\left(a_1^p + b_1^p - (a_1 + b_1)^p\right)$$

被解释为一个整系数多项式模 p 的约化，这是良定义的，因为分子在 $\mathbb{Z}[a_1, b_1]$ 中可被 p 整除。

$W_2(k)$ 的加法单位元和乘法单位元分别为 $(0,0)$ 和 $(1,0)$。此外，

$$p \cdot (a_1, a_2) = (0, a_1^p).$$

由于 k 是完美域，每个元素 $(a_1, a_2) \in W_2(k)$ 都可以唯一地写成如下形式

$$(a_1, a_2) = (a_1, 0) + p \cdot (a_2^{1/p}, 0),$$

其中 $a_2^{1/p} \in k$ 表示 a_2 的 p 次根。元素 $(a, 0) \in W_2(k)$ 称为 $a \in k$ 的 Teichmüller 提升。此后，每当我们将元素 $a \in k$ 视为$W_2(k)$ 中的元素时，我们默认指其 Teichmüller 提升。因此，$W_2(k)$ 的每个元素都有如下形式的唯一表达式

$$a + p \cdot b,$$

其中 $a, b \in k$ 通过其 Teichmüller 提升视为 $W_2(k)$ 中的元素。

环$W_2(k)$的特征为p^2，并配有一个到k的满射环同态，将(a_1, a_2)映射为a_1。特别地，$W_2(k)/pW_2(k)$与k同构。

1.1.1 $W_2(k)$上的韦尔代数

环$W_2(k)$上的韦尔代数$A_n(W_2(k))$的定义与$A_n(k)$类似，不同之处在于系数现在取自$W_2(k)$。特别地，$A_n(W_2(k))$是一个自由$W_2(k)$-模，其基为

$$\mathbf{z}^{\mathbf{i}} = z_1^{i_1} z_2^{i_2} \cdots z_{2n}^{i_{2n}}, \quad i_1, \ldots, i_{2n} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}.$$

任意元素

$$f = \sum_{\mathbf{i}} c_{\mathbf{i}} \mathbf{z}^{\mathbf{i}} \in A_n(k), \quad c_{\mathbf{i}} \in k,$$

有一个相伴元素

$$[f] = \sum_{\mathbf{i}} [c_{\mathbf{i}}] \mathbf{z}^{\mathbf{i}} \in A_n(W_2(k)),$$

其中 $[c_{\mathbf{i}}]$ 表示 $c_{\mathbf{i}}$的 Teichmüller 提升。我们称 $[f]$ 为 f 的 Teichmüller 提升，并且我们常常直接用 f 来表示这一提升。特别地，$A_n(W_2(k))$ 的每个元素都有唯一分解

$$f_1 + p \cdot f_2,$$

其中 $f_1, f_2 \in A_n(k)$ 通过其 Teichmüller 提升被视为 $A_n(W_2(k))$ 中的元素。

引理 1.1. 设 u 与 v 为 $A_n(W_2(k))$ 中的元素，它们在自然态射下于 $A_n(k)$中的像落在 Z 中。则 $[u,v]$ 是 $A_n(W_2(k))$ 的中心元素。

证明。 根据假设，u和v在$A_n(W_2(k))$上的算子 ad 的取值都在$p \cdot A_n(k)$中。由于$A_n(W_2(k))$的特征为p^2, , 因此我们得出结论，该算子

$$\mathrm{ad}([u,v]) = [\mathrm{ad}(u), \mathrm{ad}(v)]$$

为零。因此， $[u,v]$ 是中心的。 □

2 自同态的提升

本节中，我们研究 k-代数自同态 φ of $A_n(k)$ 在何种情况下可提升为 $W_2(k)$-代数自同态 Φ of$A_n(W_2(k))$。

固定 φ，并令

$$u_i := \varphi(z_i), \quad i = 1, \ldots, 2n.$$

通过 Teichmüller 提升将$u1, \ldots, u_{2n}$视为$A_n(W_2(k))$的元素，我们有

$$[u_i, u_j] = \omega_{i,j} + p \cdot u_{ij}, \quad i, j = 1, \ldots, 2n, \tag{2.0.1}$$

对于某些唯一确定的元素 $u_{ij} \in A_n(k)$。

引理 2.1. 设 $v_1, \ldots, v_{2n}$是 $A_n(k)$中的元素。那么

$$\Phi(z_i) = u_i + p \cdot v_i, \quad i = 1, \ldots, 2n,$$

定义了 φ 的一个提升，当且仅当

$$u_{ij} + [u_i, v_j] - [u_j, v_i] = 0, \quad i, j = 1, \ldots, 2n.$$

证明。 映射 Φ 定义了 φ 的一个提升，当且仅当

$$[u_i + p\cdot v_i, u_j + p\cdot v_j] = \omega_{i,j}, \quad i,j = 1,\dots,2n.$$

展开左边可得

$$[u_i + p\cdot v_i, u_j + p\cdot v_j] = \omega_{i,j} + p\cdot\big(u_{ij} + [u_i, v_j] - [u_j, v_i]\big),$$

由此立即得到所声称的等价关系。 □

引理 2.2. 设 u 和 v 是 $A_n(W_2(k))$中的元素。假设

$$[u,v] = \kappa + pw,$$

对于某个 $w \in A_n(W_2(k))$ 和 $\kappa \in W_2(k)$成立。那么

$$[u^t, v] = t\,\kappa u^{t-1} + p\sum_{i=0}^{t-1} u^i w u^{t-i-1}, \quad t \in \mathbb{N}.$$

特别地,

$$[u^p, v] = p\left(\kappa u^{p-1} + \mathrm{ad}(u)^{p-1}(w)\right).$$

证明. 我们通过对 $t \geq 1$ 使用归纳法来证明第一个恒等式。$t = 1$ 的情形是显然的。假设该恒等式对某个 $t \geq 1$ 成立。那么

$$\begin{aligned}[u^{t+1}, v] &= u^t\,[u,v] + [u^t, v]\,u \\ &= u^t\,(\kappa + pw) + t\,\kappa u^t + p\sum_{i=0}^{t-1} u^i w u^{t-i} \\ &= (t+1)\,\kappa u^t + p\sum_{i=0}^{t} u^i w u^{t-i},\end{aligned}$$

正如所声称的。

对于第二个恒等式，我们注意到，第一个恒等式意味着

$$[u^p, v] = p\left(\kappa u^{p-1} + \sum_{i=0}^{p-1} u^i w u^{p-i-1}\right).$$

因此，只需证明这个（众所周知的）恒等式

$$\mathrm{ad}(\hat{u})^{p-1}(\hat{w}) = \sum_{i=0}^{p-1} \hat{u}^i \hat{w} \hat{u}^{p-i-1},$$

对于 $\hat{u}, \hat{w} \in A_n(k)$。注意到 $\mathrm{ad}(\hat{u})$ 是两个可交换算子的差，即分别从左侧和右侧乘以 $\pm\hat{u}$，再结合二项式恒等式 $\binom{p-1}{i} = (-1)^i \in k$，即可得到该结论。

□

命题 2.3。 设 u 和 v 是 $A_n(W_2(k))$ 的元素。假设

$$[u,v] = \kappa + pw$$

对于某个 $w \in A_n(W_2(k))$ 以及 $\kappa \in W_2(k)$。于是

$$[u^p, v^p] = p\cdot\left(-\kappa^p + \mathrm{ad}(v)^{p-1}\,\mathrm{ad}(u)^{p-1}(w)\right).$$

证明。 由引理 2.2，可得

$$[u^p, v] = p\left(\kappa u^{p-1} + \mathrm{ad}(u)^{p-1}(w)\right).$$

特别地，将同一引理应用于v和u^p这一对，我们得到

$$\begin{aligned}[v^p, u^p] &= p\cdot\left(-\kappa\,\mathrm{ad}(v)^{p-1}(u^{p-1}) - \mathrm{ad}(v)^{p-1}\,\mathrm{ad}(u)^{p-1}(w)\right)\\ &= p\cdot\left(-(p-1)!\,\kappa^p - \mathrm{ad}(v)^{p-1}\,\mathrm{ad}(u)^{p-1}(w)\right)\\ &= p\cdot\left(\kappa^p - \mathrm{ad}(v)^{p-1}\,\mathrm{ad}(u)^{p-1}(w)\right),\end{aligned}$$

由此得到所需的恒等式。 □

定理 2.4. 对于 $i, j = 1, \ldots, 2n$，定义

$$c_{ij} := \mathrm{ad}(u_i)^{p-1}\,\mathrm{ad}(u_j)^{p-1}(u_{ij})$$

作为 $A_n(k)$中的一个元素。那么 c_{ij} 属于 $A_n(k)$的中心，而且

$$p\cdot c_{ij} = [u_i^p, u_j^p] + p\cdot\omega_{i,j}$$

在 $A_n(W_2(k))$ 中。

证明。 根据命题 2.3，我们有

$$[u_i^p, u_j^p] = p\cdot\left(-\omega_{i,j} + \mathrm{ad}(u_i)^{p-1}\,\mathrm{ad}(u_j)^{p-1}(u_{ij})\right),$$

因为

$$[u_i, u_j] = \omega_{i,j} + p\cdot u_{ij}.$$

这给出了$p\cdot c_{ij}$的公式。

尚需证明c_{ij} 属于$A_n(k)$的中心。由上述公式可知，若 $[u^p{}_i\ , u^p{}_j]$属于$A_n(W_2(k))$的中心，则此成立，而这是引理1.1的直接推论。 □

2.1 通过上同调解释的障碍

引理2.1 表明，元素u_{ij} 定义了一个上同调类，该上同调类编码了把 φ 提升为$A_n(W_2(k))$的自同态的障碍。为阐明这一想法，我们考虑$A_n(k)$的Chevalley–Eilenberg复形，将其视为维数为$2n$的阿贝尔李代数上的模，其中基元素通过算子$\mathrm{ad}(u_i)$作用。在适当的设定下，算子$\mathrm{ad}(u_i)$可解释为$A_n(k)$的形式导子。在此等同之下，与由$\mathrm{ad}(u_i)$生成的李代数相关联的Chevalley–Eilenberg复形约化为多项式环的德拉姆复形。更精确地说，回顾（如第1节所述），$A_n(k)$是其中心$k[z_1^p, \ldots\ldots, z_{2n}^p]$上的自由模，并具有基

$$u_1^{i_1}u_2^{i_2}\cdots u_{2n}^{i_{2n}}, \quad 0 \le i_1, \ldots, i_{2n} < p.$$

等价地，以下元素集也构成一个基：

$$\hat{u}_1^{i_1}\hat{u}_2^{i_2}\cdots\hat{u}_{2n}^{i_{2n}}, \quad 0 \le i_1, \ldots, i_{2n} < p,$$

其中

$$\hat{u}_i = -u_{n+i}, \quad \hat{u}_{n+i} = u_i \quad \text{for } i = 1, \ldots, n.$$

此外，由于 $[u_i, \hat{u}_j] = \delta_{i,j}$，我们有

$$\mathrm{ad}(u_l)(\hat{u}_1^{i_1}\hat{u}_2^{i_2}\cdots\hat{u}_{2n}^{i_{2n}}) = i_l\,\hat{u}_1^{i_1}\ldots\hat{u}_l^{i_l-1}\cdots\hat{u}_{2n}^{i_{2n}}.$$

因此，$\mathrm{ad}(u_l)$ 的作用等同于关于 $\hat{u}_l$ 的形式导子。

这自然引导我们考虑 k-线性双射

$$\psi\colon A_n(k) \longrightarrow S = k[y_1, \ldots, y_{2n}],$$

定义如下

$$\psi\Big(f(z_1^p, \ldots, z_{2n}^p)\,\hat{u}_1^{i_1}\hat{u}_2^{i_2}\cdots\hat{u}_{2n}^{i_{2n}}\Big) = f(y_1^p, \ldots, y_{2n}^p)\,y_1^{i_1}y_2^{i_2}\cdots y_{2n}^{i_{2n}},$$

在这种对应关系下，右侧的形式导子 $\partial^{\partial}_{y_i}$ 与左侧的算子 $\mathrm{ad}(u_i)$ 相对应。

现在考虑多项式环 $S = k[y1，\ldots\ldots，y_{2n}]$ 的德拉姆复形，它是微分复形

$$0 \longrightarrow S \xrightarrow{d} \Omega^1_{S/k} \xrightarrow{d} \Omega^2_{S/k} \xrightarrow{d} \cdots \xrightarrow{d} \Omega^{2n}_{S/k} \longrightarrow 0,$$

其中

$$\Omega^1_{S/k} = \bigoplus_{i=1}^{2n} S\,dy_i$$

表示卡勒微分模，且

$$\Omega^l_{S/k} = \wedge^l_S \Omega^1_{S/k}, \quad l = 1, \ldots, 2n.$$

微分d是k-线性的，定义如下：

$$d(f\,dy_{i_1}\wedge\cdots\wedge dy_{i_l}) = \sum_{i=1}^{2n}\frac{\partial f}{\partial y_i}\,dy_i\wedge dy_{i_1}\wedge\cdots\wedge dy_{i_l}.$$

这个复形的上同调称为S的德拉姆上同调。我们将其第l 次部分记为$H^l_{\mathrm{dR}}(S/k)$。由于域k 的特征为$p > 0$，S 的德拉姆上同调非平凡。更准确地说，对于每个$l = 0, \ldots, 2n$，都有（参见例如 [5, 定理 7。2]）

$$H^l_{\mathrm{dR}}(S/k) \cong \bigoplus_{1\le i_1<\cdots<i_l\le 2n} k[y_1^p, \ldots, y_{2n}^p]\,y_{i_1}^{p-1}\cdots y_{i_l}^{p-1}\,dy_{i_1}\wedge\cdots\wedge dy_{i_l}.$$

作为一个特例，第二德拉姆上同调群为

$$H^2_{\mathrm{dR}}(S/k) \cong \bigoplus_{1\le i<j\le 2n} k[y_1^p, \ldots, y_{2n}^p]\,y_i^{p-1}y_j^{p-1}\,dy_i\wedge dy_j.$$

特别地，$H^2_{\mathrm{dR}}(S/k)$ 是由微分形式的类生成的子环 $k[y_1^p, \ldots, y_{2\,n}^{p}]$，上的自由模

$$y_i^{p-1}y_j^{p-1}\,dy_i\wedge dy_j, \qquad 1 \le i < j \le 2n.$$

引理 2.5。该2-形式

$$\sum_{i<j}\psi(u_{ij})\,dy_i\wedge dy_j\in\Omega^2(S/k)$$

是闭的。

证明。 这个 2-形式的闭性等价于以下恒等式

$$\frac{\partial\psi(u_{ij})}{\partial y_l}+\frac{\partial\psi(u_{jl})}{\partial y_i}-\frac{\partial\psi(u_{il})}{\partial y_j}=0,$$

对所有整数 $i<j<l$。

由于 $\mathrm{ad}(u_i)$ 在双射 ψ 下对应于算子 $\partial/\partial y_i$，因此该条件等价地可改写为

$$\mathrm{ad}(u_l)(u_{ij})+\mathrm{ad}(u_i)(u_{jl})-\mathrm{ad}(u_j)(u_{il})=0,$$

这由雅可比恒等式

$$[u_l,[u_i,u_j]]+[u_i,[u_j,u_l]]-[u_j,[u_i,u_l]]=0$$

以及定义 $u_{st}=[u_s,u_t]$ 得出，其中计算是在 $A_n(W_2(k))$ 中进行的。 □

定理2.6。 存在元素 $v_1,\ldots,v_{2n}\in A_n(k)$ 使得

$$u_{ij}+[u_i,v_j]-[u_j,v_i]=c_{ij}\,\hat{u}_i^{p-1}\hat{u}_j^{p-1},$$

其中 c_{ij} 是 $A_n(k)$ 中的中心元素，它来自定理 2.4，定义为

$$p\cdot c_{ij}=[u_i^p,u_j^p]+p\cdot\omega_{ij}.$$

此外，自同态 φ 可提升为 $W_2(k)$-代数 $A_n(W_2(k))$ 的代数自同态，当且仅当

$$c_{ij}=0,\qquad i,j=1,\ldots,2n.$$

证明。 根据引理 2.5 以及 $H^2_{\mathrm{dR}}(S/k)$ 的描述，存在多项式 $h1,\ldots,h_{2n}\in S$ 以及$h_{ij}\in k[y_1^p,\ldots,y_{2n}^p]$，对于$i,j=1,\ldots,2n$，使得

$$\sum_{i<j}\psi(u_{ij})\,dy_i\wedge dy_j=d\Big(\sum_i h_i\,dy_i\Big)+\sum_{i<j}h_{ij}\,y_i^{p-1}y_j^{p-1}\,dy_i\wedge dy_j.$$

因此，对于$i<j$，有

$$\psi(u_{ij})=\frac{\partial h_j}{\partial y_i}-\frac{\partial h_i}{\partial y_j}+h_{ij}\,y_i^{p-1}y_j^{p-1},\quad i,j=1,\ldots,2n.$$

现在选取元素 $v_i\in A_n(k)$ 和中心元素 $\hat{}c_{ij}\in Z$ 使得

$$\psi(v_i)=-h_i,\quad \psi(\hat{c}_{ij})=h_{ij},\quad i,j=1,\ldots,2n.$$

由于 $\mathrm{ad}(u_i)$ 在 ψ 下对应于 $\partial/\partial y_i$，我们得出

$$u_{ij}+[u_i,v_j]-[u_j,v_i]=\hat{c}_{ij}\,\hat{u}_i^{p-1}\hat{u}_j^{p-1},\quad i,j=1,\ldots,2n,$$

当 $i<j$。将算子 $\mathrm{ad}(u_i)^{p-1}\mathrm{ad}(uj)^{p-1}$ 作用于等式两边，并利用定理 2.4，再结合 $\mathrm{ad}(u_i)$ 与 $\mathrm{ad}(u_j)$ 可交换，以及 $\mathrm{ad}(u_i)^p=\mathrm{ad}(ui)^p=0$ 这一事实，我们得到

$$c_{ij}=\hat{c}_{ij},\quad i,j=1,\ldots,2n,$$

对于$i<j$。这证明了第一个陈述。

由此可知，若$c_{ij}=0$对所有i，j成立，则

$$u_{ij}+[u_i,v_j]-[u_j,v_i]=0,\quad i,j=1,\ldots,2n,$$

由引理2.1 可知 φ 存在提升。反之，若 φ 存在提升，则由引理2.1存在元素w_i，$i=1$，……，$2n$，使得

$$u_{ij}+[u_i,w_j]-[u_j,w_i]=0,\quad i,j=1,\ldots,2n.$$

应用 $\mathrm{ad}(u_i)^{p-1}\mathrm{ad}(uj)^{p-1}$ 并再次利用定理2.4，我们得出

$$c_{ij}=0,\quad i,j=1,\ldots,2n.$$

□

2.2 提升与泊松态射

我们将韦尔代数$A_n(k)$的中心$Z=k[x1，……，x_{2n}]$视为带有标准括号的泊松代数

$$\{f,g\}=\sum_{l=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_l}\frac{\partial g}{\partial x_{l+n}}-\frac{\partial f}{\partial x_{l+n}}\frac{\partial g}{\partial x_l}\right),$$

或者等价地，

$$\{f,g\}=(\nabla f)^T\,\omega^{-1}\,(\nabla g),$$

其中，$h\in Z$ 的梯度定义为

$$\nabla h=\begin{pmatrix}\frac{\partial h}{\partial x_1}\\ \vdots\\ \frac{\partial h}{\partial x_{2n}}\end{pmatrix},$$

且 ω 是矩阵

$$\omega=\begin{pmatrix}0 & -I_n\\ I_n & 0\end{pmatrix}\in \mathrm{Mat}_{2n}(k).$$

若一个 k-代数自同态 $\phi:Z\to Z$ 保持括号不变，则称其为泊松态射：

$$\phi(\{f,g\})=\{\phi(f),\phi(g)\},\quad \text{for all } f,g\in Z.$$

等价地，该条件可以用雅可比矩阵来表述

$$J_\phi=\left(\frac{\partial\phi(x_i)}{\partial x_j}\right)$$

as

$$J_\phi\,\omega^{-1}J_\phi^T=\omega^{-1}. \tag{2.2.1}$$

由于 ω 可逆，我们立即看出 $\det J_\phi = \pm 1$，这意味着泊松态射是 étale 的。此外，（2.2.1）等价于恒等式

$$J_\phi^T \, \omega \, J_\phi = \omega, \tag{2.2.2}$$

这表达了标准 2-形式的不变性

$$\sum_{l=1}^{n} dx_l \wedge dx_{l+n}$$

在 ϕ 下，也就是说，

$$\sum_{l=1}^{n} dx_l \wedge dx_{l+n} = \sum_{l=1}^{n} d\phi(x_l) \wedge d\phi(x_{l+n}).$$

可以将 Z 上述泊松括号与 $A_n(W_2(k))$ 中的交换子联系起来。更确切地说，若 f 和 g 是 Z 中的元素，则 $A_n(W_2(k))$ 中的交换子 $[f, g]$ 属于 $p \cdot A_n(W_2(k))$。此外，根据引理 1.1，$[f, g]$ 是 $A_n(W_2(k))$ 中的中心元素，因此存在唯一的 $h \in Z$，使得

$$[f, g] = p \cdot h.$$

实际上 $h = \{f, g\}$，换句话说

$$\{f, g\} = \frac{[f, g]}{p} \in Z, \tag{2.2.3}$$

其中，右边应按上述说明进行解释。实际上，(2.2.3) 的右边显然分别对两个变量都是导子，因此，要使 (2.2.3) 中的等式成立，只需验证当 f和 g均为坐标函数 $x_1, \ldots, x_{2n}$之一时，等式成立。在这种情况下，该等式可由定理 2.6 应用于 φ 为恒等态射的情形推出。

现在我们将上面的注释与态射 φ 联系起来。令

$$J_\varphi = \left(\frac{\partial \varphi(x_i)}{\partial x_j} \right) \in \mathrm{Mat}_{2n}(Z)$$

den记与限制 φ_Z 将 φ 限制到中心 Z 相关联的雅可比矩阵，并令 t

$$C = (c_{ij}) \in \mathrm{Mat}_{2n}(Z)$$

表示其 (i, j)-项为定理 $c_{ij} \in Z$ 中定义的元素 2.4 的矩阵。

定理2.7。有

$$J_\varphi \, \omega^{-1} \, J_\varphi^T = \omega^{-1} + C.$$

特别地，诱导态射 φ_Z 是泊松态射，当且仅当 φ 可以提升为 $W_2(k)$-代数自同态 $A_n(W_2(k))$。

证明。 (i, j)-项 $J_\varphi \, \omega^{-1} J_\varphi^T$等于 $\{\varphi(x_i)\ \varphi(x_j)\}$，而根据等式（2.2.3），这等于

$$\frac{[\varphi(x_i), \varphi(x_j)]}{p}.$$

由定理 2.4，后者等于 $-\omega_{i,j} + c_{ij}$，这与 $\omega^{-1} + C$ 的第 (i, j) 个元素一致。这证明了所述结论的第一部分。特别地，根据上述讨论，φ_Z 是泊松态射，当且仅当 C 是零矩阵。此外，根据定理2.6，$C = 0$ 当且仅当φ 可提升为 $A_n(W_2(k))$ 上的 $W_2(k)$-代数自同态。

□

3 Tsuchimoto的方法及其改进

为完整起见，我们在此介绍 Tsuchimoto 的方法 [9]。其中大部分内容已包含在 Tsuchimoto 的论文中，但该文采用的设定涉及向量丛上的联络，与下文所述的设定略有不同。

3.1 $A_n(k)$的一个平凡化

韦尔代数 $A_n(k)$ 是一个阿祖马亚代数，因此它具有一个平凡化。我们将采用一个特定的平凡化，下文将对此加以描述。

回顾一下，$A_n(k)$ 的中心 Z 是 k 上含有 $2n$ 个变量的多项式环，由以下元素生成

$$x_i := z_i^p, \qquad i = 1, \ldots, 2n.$$

含 $2n$ 个变量的多项式环 $S = k[y_1, y2, \ldots, y_{2n}]$ 在下文中将通过这些等同被视为Z 的忠实平坦扩张

$$y_i^p = z_i^p, \qquad i = 1, \ldots, 2n.$$

于是 $A_n(k) \otimes_Z S$ 同构于 S 上的矩阵代数 $\mathrm{Mat}_{p^n}(S)$。更确切地说，令 M 表示S-模

$$M = S[T_1, T_2, \ldots, T_n]/(T_1^p, T_2^p, \ldots, T_n^p).$$

于是M 自然带有两类S-线性自同态：乘以T_i，记作ν_i；以及关于T_i的形式导数，记作 ν_{i+n}。于是

$$A_n(k) \otimes_Z S \to \mathrm{End}_S(M),$$
$$z_i \mapsto \nu_i + y_i,$$

定义了一个S-代数的显式同构 [8, 引理 5]。从现在起，我们通过此同构将$A_n(k)$视为 $\mathrm{End}_S($ $M)$的一个子集。

3.2 $A_n(k)$-线性自同态与M

k-代数 $\mathrm{End}_Z(M)$由Z-线性自同态组成，在描述$A_n(k)$的自同态时起着重要作用。本节研究 $\mathrm{End}_Z(M)$中的某些特殊元素。回顾一下，$A_n(k)$被视为 $\mathrm{End}_S(M)$的一个子代数，而后者又是 $\mathrm{End}_Z(M)$的一个子代数。

令$\frac{\partial}{\partial y_i}$ 表示关于y_i 的形式偏导数，并将其视为 $\mathrm{End}_Z(M)$中的一个元素。定义Z-线性自同态

$$L_i = \frac{\partial}{\partial y_i} + \hat{\nu}_i,$$

对于$i = 1$，2，……，$2n$，其中

$$\hat{\nu}_i = \begin{cases} -\nu_{i+n}, & \text{if } i = 1, \ldots, n, \\ \nu_{i-n}, & \text{if } i = n+1, \ldots, 2n. \end{cases}$$

注意，

$$[\hat{\nu}_i, \nu_j] = -\delta_{i,j}.$$

特别是，

$$[L_i, z_j] = [\frac{\partial}{\partial y_i} + \hat{\nu}_i, \nu_i + y_i] = 0,$$

对所有$i, j = 1, \ldots, 2n$均成立，因此每个L_i都是 $\mathrm{End}_{A_n(k)}(M)$ 中的一个元素。

注 3.1. 事实上，元素$L1,\ldots,L_{2n}$与S一起生成 $\mathrm{End}_{A_n(k)}(M)$。此外，$\mathrm{End}_{A_n(k)}(M)$ 在 $\mathrm{End}_Z(M)$ 中的中心化子等于$A_n(k)$。由于这里不需要这一结果，我们省略证明。

3.3 $An(k)$ 的自同态

设 φ 表示一个 k-代数自同态，作用于 $A_n(k)$。如第 1 节所述，中心 Z 被 φ 保持。因此存在 φ_Z 向一个k-代数自同态的自然扩张，该自同态作用于 S。将此与该等同相结合

$$\mathrm{End}_S(M) \simeq A_n(k) \otimes_Z S,$$

我们得到一个诱导的 k-代数自同态，它作用于 $\mathrm{End}_S(M)$；通过滥用记号，我们也将其记为 φ。

一旦我们固定一个 S-基，即 M 的基，便可将 $\mathrm{End}_S(M)$ 等同于矩阵环 $\mathrm{Mat}_{p^n}(S)$，并将 φ 等同于 $\mathrm{Mat}_{p^n}(S)$ 的一个自同态。这里我们固定单项式基

$$T_1^{i_1}\cdots T_n^{i_n}, \qquad 0 \le i_1,\ldots,i_n < p,$$

，属于 M。在此基 v_i 下，对于 $i = 1,$ ……，$2n$，具有系数在 $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ 中的矩阵表示。因此，由下面的引理，存在可逆元 $G \in \mathrm{End}_S(M)$，使得

$$\varphi(z_i) = G \cdot v_i \cdot G^{-1} + \overline{y_i}, \qquad i = 1,\ldots,2n,$$

其中我们使用记号 $r := \varphi(r) \in S$，每当 $r \in S$。

以下引理应当是众所周知的；不过，由于我们未能找到准确的参考文献，下面给出证明。

引理 3.2. 设 R 是唯一分解整环，且 $\phi : \mathrm{Mat}_m(R) \to \mathrm{Mat}_m(R)$ 是一个环同态。那么存在一个可逆矩阵 $G \in \mathrm{Mat}_m(R)$ 和一个环自同态 $\phi_c : R \to R$，使得

$$\phi\big((a_{ij})\big) = G \cdot \big(\phi_c(a_{ij})\big) \cdot G^{-1},$$

对所有 $(a_{ij}) \in \mathrm{Mat}_m(R)$均成立。此外，矩阵 G 除相差 R 中一个单位元的乘法外是唯一的；等价地，它在 射影一般线性群$_m(R)$中的像是唯一确定的。

证明. 令 Eij（其中 $1 \le$ i, j $\le$ m）表示 Mat_m(R) 中第 (i, j) 个标准矩阵单位，并令 $F_{ij} = \phi$(Eij)。于是 $\sum_i F_{ii} = 1$，特别地，对某个 i 有 $F_{ii} \neq 0$。由于 $F_{ii} = F_{i1}F_{11}F_{1i}$，我们还必须有 $F_{11} \neq 0$。取一个非零的 $\mathrm{r} = (\mathrm{r1},\ldots,\mathrm{r}_m) \in F_{11}R^m$，使得其各项 $\mathrm{r}_1, \mathrm{r2},\ldots,\mathrm{r}_m \in$ R 没有非平凡公因子。这是可行的，因为若 $\mathrm{r} = \beta$ r′，其中 $\mathrm{r}' \in$ R 且 $\beta \in$ R，则 $\mathrm{r}' = F_{11}\mathrm{r}'$。对于 $\mathrm{i} = 1,\ldots,\mathrm{m}$，令 $\mathrm{v}_i = F_{i1}\mathrm{r}$。于是我们有以下关系

$$F_{ij}\,\mathbf{v}_l = \delta_{jl} \cdot \mathbf{v}_i.$$

我们断言，向量 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}2,\ldots,\mathbf{v}_m$构成自由$R$-模$R^m$的一组基。首先，线性无关性由下式可得

$$F_{1i}\,(\alpha_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \cdot \mathbf{v}_2 + \cdots + \alpha_m \cdot \mathbf{v}_m) = \alpha_i \cdot \mathbf{r},$$

对所有 $\alpha_1,\ldots,\alpha_m \in R$ 均成立。接下来，设 $\mathbf{v} \in R^m$。由于这$m+1$个元素 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}2,\ldots,\mathbf{v}_m, \mathbf{v}$在 R 上线性相关，因此存在一个非零元素 $c \in R$ 使得

$$c \cdot \mathbf{v} = \beta_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \beta_2 \cdot \mathbf{v}_2 + \cdots + \beta_m \cdot \mathbf{v}_m,$$

对于某些 $\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_m \in R$。对等式两边应用 F_{1i}，得到 $c\cdot F_{1i}\mathbf{v}=\beta_i\cdot\mathbf{r}$。由 $\mathbf{r}$ 的选取可知，c 整除每个 β_i。因此，$\mathbf{v}$ 属于 R 上由 $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}2,\ldots,\mathbf{v}_m$ 张成的空间，这就证明了这些向量构成 R^m 的一组基。

设 $\mathrm{G}\in \mathrm{Mat}_m(\mathrm{R})$ 表示其列为 $\mathrm{v}_1,\mathrm{v}2,\ldots,\mathrm{v}_m$ 的矩阵。则 $\mathrm{Fij}=\mathrm{G}\cdot \mathrm{E}i\mathrm{j}\cdot \mathrm{G}^{-1}$，因为等式两边在基 $\mathrm{v}_1,\mathrm{v}2,\ldots,\mathrm{v}_m$ 上一致。现在回顾，集合 $\{\mathrm{E}_{ij}\}$ 的中心化子等于 $\mathrm{Mat}_m(\mathrm{R})$ 的中心。由于共轭保持中心化子，集合 $\{\mathrm{F}_{ij}\}$ 的中心化子因此也等于 $\mathrm{Mat}_m(\mathrm{R})$ 的中心。从而，映射 ϕ 必须把 $\mathrm{Mat}_m(\mathrm{R})$ 的中心映到自身；也就是说，对 $\alpha\in\mathrm{R}$，$\phi(\alpha\cdot\mathrm{I})$ 必具有形式 $\beta\cdot\mathrm{I}$，其中某个 $\beta\in\mathrm{R}$。这使我们能够通过 $\phi_c(\alpha)=\beta$ 来定义 ϕ_c。按照他的记号，我们得到

$$\phi\big((a_{ij})\big)=G\cdot\big(\phi_c(a_{ij})\big)\cdot G^{-1},$$

如所期望。特别地，G必须满足

$$\phi(E_{ij})=G\cdot E_{ij}\cdot G^{-1},$$

这意味着 G 在相差集合 $\{E_{ij}\}$ 的中心化子中的一个单位元的乘法意义下是确定的；也就是说，在相差 R 中的一个单位元的意义下是确定的。 □

R引理 3.3。 设 $n=1$，并考虑 $\mathrm{End}_S(M)$ 中形如以下形式的元素的迹

$$v_1^{i_1}v_2^{i_2},\quad 0\le i_1,i_2<p.$$

不难验证

$$\mathrm{tr}(v_1^{i_1}v_2^{i_2})=-\delta_{i_1,p-1}\,\delta_{i_2,p-1}.$$

由于迹在 G 的共轭作用下保持不变，因此我们也有

$$\mathrm{tr}\left(\varphi(z_1)^{i_1}\varphi(z_2)^{i_2}\right)=\mathrm{tr}\left((v_1+\overline{y_1})^{i_1}(v_2+\overline{y_2})^{i_2}\right)=-\delta_{i_1,p-1}\,\delta_{i_2,p-1}.$$

对于一般情形 n，我们可以将 M 视为上述情形（$n=1$）的 n 重张量积。因此 e

$$\mathrm{tr}\left(\varphi(z_1)^{i_1}\cdots\varphi(z_{2n})^{i_{2n}}\right)=(-1)^n\,\delta_{i_1,p-1}\cdots\delta_{i_{2n},p-1},\quad 0\le i_1,\ldots,i_{2n}<p.$$

如第 1 节所述，形如以下形式的元素

$$\varphi(z_1)^{i_1}\cdots\varphi(z_{2n})^{i_{2n}},\quad 0\le i_1,\ldots,i_{2n}<p,$$

构成 $A_n(k)$ 作为 Z 上模的一个基。将元素 $u\in A_n(k)$ 按此基写出时，由此可知 $(-1)^n\mathrm{tr}(u)$ 是该基元素的系数

$$\varphi(z_1)^{p-1}\cdots\varphi(z_{2n})^{p-1}.$$

因此，

$$\left(\mathrm{ad}(\varphi(z_1))^{p-1}\cdots\mathrm{ad}(\varphi(z_{2n}))^{p-1}\right)(u)=(-1)^n\,\mathrm{tr}(u),$$

从而该算子

$$\mathrm{ad}(\varphi(z_1))^{p-1}\cdots\mathrm{ad}(\varphi(z_{2n}))^{p-1}$$

不依赖于 φ。特别是，

$$\mathrm{ad}(\varphi(z_1))^{p-1}\cdots\mathrm{ad}(\varphi(z_{2n}))^{p-1}=\mathrm{ad}(z_1)^{p-1}\cdots\mathrm{ad}(z_{2n})^{p-1}.$$

3.4 微分方程

我们固定 $A_n(k)$ 的一个自同态 φ，并采用上述相关记号。

命题 3.4. 对于 $i = 1, \ldots, 2n$，这些元素

$$L_{\varphi,i} = G\left(\frac{\partial}{\partial y_i} + \sum_{l=1}^{2n} \frac{\partial \overline{y}_l}{\partial y_i}\hat{v}_l\right) G^{-1},$$

在 $\mathrm{End}_Z(M)$ 中属于 $\mathrm{End}_{A_n(k)}(M)$。

证明。 如第 1 节所述，代数 $A_n(k)$由以下元素作为 Z-代数生成：

$$\varphi(z_1), \ldots, \varphi(z_n), \varphi(\partial_1), \ldots, \varphi(\partial_n).$$

因此，若 $\mathrm{End}_Z(M)$ 中的一个元素是 $\varphi(A_n(k))$-线性的，那么它也是 $A_n(k)$-线性的。因此，只需证明所有 $L_{\varphi,i}$ 都与

$$\varphi(z_1), \ldots, \varphi(z_n), \varphi(\partial_1), \ldots, \varphi(\partial_n).$$

对于 $j = 1,\ldots,2n$，我们有

$$\varphi(z_j) = G \cdot (v_j + \overline{y_j}) \cdot G^{-1},$$

并且直接计算表明

$$\left[v_j + \overline{y_j}, \frac{\partial}{\partial y_i} + \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial \overline{y}_l}{\partial y_i}\hat{v}_l\right] = 0.$$

由于用G 作共轭保持交换子，因此

$$[\varphi(z_j), L_{\varphi,i}] = 0$$

对于$j = 1,\ldots,2n$，如所需。 □

注意，当 φ 为恒等态射时，$L_{\varphi,i}$ 与L_i重合。对于一般的自同态 φ，元素$L_{\varphi,i}$ 仍与L_i自然相关，如下一结果所述。

推论 3.5. 对于 $i = 1, \ldots, 2n$，我们有

$$[L_{\varphi,i}, y_j] = \delta_{i,j}.$$

特别地，存在元素 $\gamma_1, \ldots, \gamma_{2n} \in S$，使得

$$L_{\varphi,i} = L_i + \gamma_i,$$

对 $i = 1,\ldots,2n$。

证明。交换子关系直接由定义 $L_{\varphi,i}$ 得出，因为 G 和 $\hat{v}_i$ 都与 S 交换。根据推论前的观察，L_i 也满足类似关系。因此，差值 $L_{\varphi,i} - L_i$ 与所有 y j（j $= 1, \ldots, 2n$）交换，故属于 End_S(M)。由于 End_S(M) 由 A_n(k) 和 S 生成，根据命题 3.4，这些差值是 End_S(M) 的中心 S 中的元素，由此证明了 γ_i 的存在。

□

Tsuchimoto 的一个重要洞见是，p次幂映射 $\mathrm{End}_S(M)$决定了γ_i 推论3.5 中出现的元素，其公式不涉及G。为了解释这一点，我们先回顾 N. Jacobson 的以下结果（[4, 第 V 章，第 §7]）。

引理 3.6. 设 R 是一个 $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$-代数，$C \subseteq R$ 是一个交换子代数。设 $a,b \in R$，且 $b \in C$，并假设 $\mathrm{ad}(a)(C) \subseteq C$。那么

$$(a+b)^p = a^p + b^p + \mathrm{ad}(a)^{p-1}(b).$$

由此我们得到以下结果。

命题 3.7. 对于 $i = 1, \ldots, n$，在 S 中有以下恒等式：

$$L^p_{\varphi,i} = \frac{\partial^{p-1}}{\partial y_i^{p-1}} \left(\sum_{l=1}^{n} \frac{\partial \bar{y}_l}{\partial y_i} \bar{y}_{l+n} \right).$$

这里，右侧应理解为括号内多项式的第$(p-1)$阶偏导数。

证明。令

$$a := \frac{\partial}{\partial y_i} + \sum_{l=n+1}^{2n} \frac{\partial \bar{y}_l}{\partial y_i} \hat{v}_l, \qquad b := \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial \bar{y}_l}{\partial y_i} \hat{v}_l.$$

应用引理 3.6，取 $C \subseteq \mathrm{End}_Z(M)$ 为由 S 和 $\hat{v}_1, \ldots, \hat{v}_n$生成的交换子代数，可得

$$(a+b)^p = a^p + \mathrm{ad}(a)^{p-1}(b),$$

因为 $b^p = 0$。接下来，写作

$$a' := \frac{\partial}{\partial y_i}, \qquad b' := \sum_{l=n+1}^{2n} \frac{\partial \bar{y}_l}{\partial y_i} \hat{v}_l$$

并再次应用引理 3.6，取由 S和 $\hat{v}_{n+1}, \ldots, \hat{v}_{2n}$生成的交换子代数，得到

$$a^p = (a')^p + (b')^p + \mathrm{ad}(a')^{p-1}(b') = \sum_{l=n+1}^{2n} \frac{\partial^p \bar{y}_l}{\partial y_i^p} \hat{v}_l = 0,$$

因为 $(a')^p = (b')^p = 0$。因此

$$(a+b)^p = \mathrm{ad}(a)^{p-1}(b).$$

现在分解

$$b = b_1 + b_2, \quad b_1 := \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial \bar{y}_l}{\partial y_i} \left(\hat{v}_l - \bar{y}_{n+l} \right), \qquad b_2 := \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial \bar{y}_l}{\partial y_i} \bar{y}_{n+l}.$$

由于 $[\hat{v}_{n+j}, \hat{v}_l] = \delta_{j,l}$，对于 $j,l = 1, \ldots, n$，我们得到

$$\mathrm{ad}(a) \left(\hat{v}_l - \bar{y}_{n+l} \right) = 0,$$

因此

$$\mathrm{ad}(a)^{p-1}(b_1) = \sum_{l=1}^{n} \mathrm{ad}(a)^{p-1} \left(\frac{\partial \bar{y}_l}{\partial y_i} \right) \left(\hat{v}_l - \bar{y}_{n+l} \right) = \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial^p \bar{y}_l}{\partial y_i^p} \left(\hat{v}_l - \bar{y}_{n+l} \right) = 0.$$

因此，

$$(a+b)^p = \mathrm{ad}(a)^{p-1}(b_2) = \frac{\partial^{p-1}}{\partial y_i^{p-1}}\left(\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial \bar{y}_l}{\partial y_i}\bar{y}_{n+l}\right).$$

最后，由于$L_{\varphi,i} = G(a+b)G^{-1}$且$G$与$S$可交换，我们得到

$$L_{\varphi,i}^p = G(a+b)^p G^{-1} = \frac{\partial^{p-1}}{\partial y_i^{p-1}}\left(\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial \bar{y}_l}{\partial y_i}\bar{y}_{n+l}\right),$$

如所述。 □

引理 3.6 还推出以下结果。

命题 3.8。 对于 $i = 1, \ldots, 2n$ 以及 $\gamma \in S$，我们有

$$(L_{\varphi,i} + \gamma)^p = L_{\varphi,i}^p + \gamma^p + \frac{\partial^{p-1}\gamma}{\partial y_i^{p-1}}.$$

证明。 该恒等式可通过将推论3.5 和引理3.6 应用于$C = S$、$a = L_{\varphi,i}$以及$b = \gamma$得出。 □

推论 3.9。 推论 $\gamma_1, \ldots, \gamma_{2n}$ 中所描述的元素 *3.5* 满足以下微分方程：

$$\frac{\partial^{p-1}}{\partial y_i^{p-1}}\left(\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial \bar{y}_l}{\partial y_i}\bar{y}_{n+l}\right) = \gamma_i^p + \frac{\partial^{p-1}\gamma_i}{\partial y_i^{p-1}},$$

此外，这些微分方程唯一确定了作为 S 中元素的 γ_i。

证明。 回忆一下，L_i 与$L_{\varphi,\,i}$在 φ 是恒等态射时相同。因此，结合命题 3.7 和命题 3.8 （当 φ 是恒等态射时）可得

$$(L_i + \gamma_i)^p = \gamma_i^p + \frac{\partial^{p-1}\gamma_i}{\partial y_i^{p-1}}.$$

但是 $L_{\varphi,\,i} = L_i + \gamma_i$，因此再次应用命题 3.7 （此时态射为 φ）即可得到所声称的微分方程。

对 S 中的次数论证表明，齐次方程

$$\gamma^p + \frac{\partial^{p-1}\gamma}{\partial y_i^{p-1}} = 0$$

在 S 中仅有平凡解 $\gamma = 0$。因此， γ_i 被唯一确定。 □

3.5 保持泊松结构的条件

在本小节中，我们讨论特征 p 的界，以确保诱导态射 φ_Z（中心的）是泊松态射。我们使用第 2.2 节中引入的记号与注记。本节的主要目标是重述并略微加强 Tsuchimoto 的一个结果（[9, 推论 3.3]）。

定理 3.10. 设 φ 是如前几小节所述的 $A_n(k)$ 的 k-代数自同态。若

$$\deg(\varphi(z_l)) + \deg(\varphi(z_{n+l})) < 2p$$

对于 $l = 1, \ldots\ldots, n$，则 φ 到中心 Z 的限制 φ_Z 是一个泊松态射。特别是，限制 φ_Z 是 *étale* 的，并保持 Z 上的标准 2-形式。

我们将在下文证明这一结果。Tsuchimoto 在更强的假设下证明了这一结果

$$\deg(\varphi(z_l)) < p/2, \quad l = 1,\dots,2n.$$

注意，强化版本也适用于这种情况

$$\deg(\varphi(z_l)) < p, \quad l = 1,\dots,2n.$$

下面的例子说明，强化版本在某种意义下是最优的。

例 3.11. 令 φ 表示第一韦尔代数 $A_1(k)$ 的一个如下形式的自同态

$$\varphi(z_1) = z_1, \qquad \varphi(z_2) = z_2 + z_2^p z_1^i,$$

其中整数 $0 \le i \le p-1$。于是由引理 3.6

$$\varphi(z_1^p) = z_1^p, \qquad \varphi(z_2) = z_2^p(1-\delta_{i,p-1}) + z_2^{p^2} z_1^{ip}.$$

可知， φ在中心上是 étale 的当且仅当 $i < p-1$。注意， $i = p-1$ 这种情况无法由定理3.10 处理，因为

$$\deg(\varphi(z_1)) + \deg(\varphi(z_2)) = p+1+i.$$

注意，当 $i = 0$ 时

$$\Phi(z_1) = z_1 - p \cdot z_2^{p-1} z_1, \quad \Phi(z_2) = z_2 + z_2^p,$$

定义了将 φ提升为$A_n(W_2(k))$的自同态 Φ。对于 $0 < i < p-1$，提升也存在，不过更为复杂。

回顾推论 3.5可知，存在元素 $\gamma_1,\dots,\gamma_{2n} \in S$使得

$$L_{\varphi,i} = L_i + \gamma_i, \qquad i = 1,\dots,2n.$$

令J_γ表示矩阵

$$J_\gamma = \left(\frac{\partial \gamma_i}{\partial y_j}\right) \in \mathrm{Mat}_{2n}(S),$$

^并令J_φ 表示由 φ 在S上诱导的态射的雅可比矩阵：

$$\hat{J}_\varphi = \left(\frac{\partial \overline{y_i}}{\partial y_j}\right).$$

推论3.12。 对于$i, j = 1,\dots,2n$，以下交换关系成立：

$$[L_{\varphi,i}, L_{\varphi,j}] = \sum_{l=1}^{n} \left(\frac{\partial \bar{y}_{n+l}}{\partial y_i}\frac{\partial \bar{y}_l}{\partial y_j} - \frac{\partial \bar{y}_l}{\partial y_i}\frac{\partial \bar{y}_{n+l}}{\partial y_j} \right).$$

特别是，

$$\hat{f}_\varphi^T \omega \hat{f}_\varphi = \omega + J_\gamma^T - J_\gamma.$$

证明。 利用这一点

$$[\hat{v}_s, \hat{v}_t] = \omega_{s,t}, \qquad s,t = 1,\dots,2n,$$

经过直接计算可得

$$\left[\frac{\partial}{\partial y_i} + \sum_{l=1}^{2n} \frac{\partial \bar{y}_l}{\partial y_i}\hat{v}_l, \frac{\partial}{\partial y_j} + \sum_{l=1}^{2n} \frac{\partial \bar{y}_l}{\partial y_j}\hat{v}_l\right] = \sum_{l=1}^{n}\left(\frac{\partial \bar{y}_{n+l}}{\partial y_i}\frac{\partial \bar{y}_l}{\partial y_j} - \frac{\partial \bar{y}_l}{\partial y_i}\frac{\partial \bar{y}_{n+l}}{\partial y_j}\right).$$

因此,

$$[L_{\varphi,i}, L_{\varphi,j}] = \sum_{l=1}^{n}\left(\frac{\partial \bar{y}_{n+l}}{\partial y_i}\frac{\partial \bar{y}_l}{\partial y_j} - \frac{\partial \bar{y}_l}{\partial y_i}\frac{\partial \bar{y}_{n+l}}{\partial y_j}\right),$$

由于G与S可交换。因此， $[L_{\varphi,i}, L_{\varphi,j}]$是矩阵 $\hat{}J_\varphi^T\,\omega\hat{}J_\varphi$的第（$i,j$）个元素。将此结论应用于 φ 为恒等态射的情形，可得

$$[L_i, L_j] = \omega_{i,j}.$$

最后，由于$L_{\varphi,i} = L_i + \gamma_i$，我们有

$$[L_{\varphi,i}, L_{\varphi,j}] = [L_i + \gamma_i, L_j + \gamma_j] = [L_i, L_j] + [L_i, \gamma_j] - [L_j, \gamma_i] = \omega_{i,j} + \frac{\partial \gamma_j}{\partial y_i} - \frac{\partial \gamma_i}{\partial y_j},$$

这就得到了推论中所述的最终恒等式。 □

现在我们可以证明定理3.10了。

证明。 所述假设等价于以下要求：

$$\deg(\bar{y}_l) + \deg(\bar{y}_{n+l}) < 2p$$

对于每个$l = 1,\dots,n$，其中我们采用多项式环S上的标准次数。由此可知，左侧

$$\frac{\partial^{p-1}}{\partial y_i^{p-1}}\left(\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial \bar{y}_l}{\partial y_i}\bar{y}_{n+l}\right)$$

定义 γ_i 的微分方程在推论3.9 中的左侧次数严格小于p。另一方面，右侧

$$\gamma_i^p + \frac{\partial^{p-1}\gamma_i}{\partial y_i^{p-1}}$$

次数至少为p，除非 $\deg(\gamma_i) \le 0$。特别地， γ_i 必须是S中的常数，因此矩阵J_γ 为零。

现在由推论3.12可得

$$\hat{J}_\varphi^T\,\omega\,\hat{J}_\varphi = \omega.$$

令J_φ 表示与 φ 在中心上的限制 φ_Z 相关联的雅可比矩阵。该 n

$$J_\varphi = \hat{J}_\varphi^{[p]} = \left(\left(\frac{\partial \bar{y}_i}{\partial y_j}\right)^p\right),$$

因此

$$J_\varphi^T\,\omega\,J_\varphi = \omega.$$

现在由第 2.2 节中的讨论即可得出所需结论。 □

注3.13. 当 $n=1$ 时，为了将 φ 提升为$A_n(W_2(k))$ 的自同态，我们只需令 c_{12} 为零。回想一下，

$$c_{12}=\mathrm{ad}(u_1)^{p-1}\,\mathrm{ad}(u_2)^{p-1}(u_{12}),$$

其中 $u_1=\varphi(z_1)$ 和 $u_2=\varphi(z_2)$，而 u_1 与u_2 在 $A_n(W_2(k))$ 中的交换子通过恒等式确定 $u_{12}\in A_n(k)$

$$[u_1,u_2]=1+p\cdot u_{12}.$$

根据 $A_n(W_2(k))$ 中的定义关系，我们还知道

$$\deg(u_{12})\le\deg(u_1)+\deg(u_2)-2.$$

特别地，在与定理 3.10相同的假设下，有

$$\deg(u_{12})<2p-2.$$

因此

$$c_{12}=\mathrm{ad}(u_1)^{p-1}\,\mathrm{ad}(u_2)^{p-1}(u_{12})=\mathrm{ad}(z_1)^{p-1}\,\mathrm{ad}(z_2)^{p-1}(u_{12})=0,$$

这里用到了备注3.3的结论。由定理2.6可知 φ 可提升至 $A_n(W_2(k))$。因此，当 $n=1$时，为了得出定理 3.9 的结论，我们不需要定理 3.10中的微分方程。

存在一些自同态 φ 并非中心上的泊松态射。令人惊讶的是，甚至可以找到 φ 为同构的例子，如 [2]中的以下示例所示。

例 3.14. 考虑第二韦尔代数 $A_2(k)$，它由 z_1,z_2,z_3, 和 z_4, 生成，以及由 φ 定义的 $A_2(k)$ 的自同构

$$\varphi(z_1)=z_1+z_2^pz_3^{p-1},\quad \varphi(z_i)=z_i \text{ for } i=2,3,4.$$

那么，根据引理3.6,

$$\varphi(x_1)=x_1+x_2^px_3^{p-1}-x_2,\quad \varphi(x_i)=x_i \text{ for } i=2,3,4.$$

特别地,

$$c_{14}=\{\varphi(x_1),\varphi(x_4)\}=-1,$$

这表明 φ_Z 不是泊松态射。在这种情况下，矩阵C（见定理 2.7 ）中仅有的非零项是 $c_{41}=1$ 和 $c_{14}=-1$。此外，可以验证 $\gamma_3=y_2,$，而 $\gamma_1=\gamma_2=\gamma_4=0$。

总之，值得一提的是，第 2 节中引入的矩阵 C （见定理 2.6），它度量了将自同态 φ 提升为 $W_2(k)$-代数自同态的障碍，其中该自同态属于$A_n(W_2(k))$，与矩阵 $J_\gamma^T-J_\gamma$ （它与推论 3.9 中微分方程的解相关联）密切相关3.9。这些矩阵由以下恒等式联系起来

$$\begin{aligned}J_\varphi\,\omega^{-1}J_\varphi^T&=\omega^{-1}+C,\\ \hat{J}_\varphi^T\,\omega\,\hat{J}_\varphi&=\omega+J_\gamma^T-J_\gamma,\\ J_\varphi&=\hat{J}_\varphi^{[p]},\end{aligned}$$

由定理2.7和推论3.12可得。因此，一般而言，结合第 2.2.1 节的讨论，矩阵C 当且仅当 J_γ 对称时才为零。Tsuchimoto的结果对应于 J_γ 为零矩阵这一特殊情形。不过，一般而言，我们得到以下判据。

命题 3.15。对于 $i = 1, \ldots, 2n$，令 $f_i \in Z = k[x_1, \ldots, x_{2n}]$ 为微分方程的唯一解

$$\frac{\partial^{p-1}}{\partial x_i^{p-1}} \left(\sum_{l=1}^{n} \frac{\partial \varphi(x_l)}{\partial x_i} \varphi(x_{n+l}) \right) = f^p + \frac{\partial^{p-1} f}{\partial x_i^{p-1}}.$$

*Th*当且仅当 *en* φ *admits* 可提升为 $A_n(W_2(k))$ 的 $W_2(k)$-代数自同态时，f

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}, \quad i, j = 1, \ldots, 2n.$$

证明。首先注意到，对于$i = 1, \ldots, 2n$，有$f_i = \gamma_{p\,i}$。因此矩阵

$$J = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right) \in \mathrm{Mat}_{2n}(Z)$$

与J_γ的关系为

$$J = J_\gamma^{[p]} = \left(\left(\frac{\partial \gamma_i}{\partial y_j} \right)^p \right).$$

由此可知，J 是对称的，当且仅当J_γ是对称的。根据命题前的说明，证明至此完成。

□

注意，采用上文证明中的记号$J = (\partial f_i / \partial x_j)$，我们有以下恒等式

$$J_\varphi \, \omega^{-1} J_\varphi^T = \omega^{-1} + C,$$
$$J_\varphi^T \, \omega \, J_\varphi = \omega + J^T - J.$$

4 应用与结语

在 [1, 第 2328] 页中，有人猜想 $A_n(k)$ 的任意自态射 φ 都是单射。这一问题等价于中心上诱导映射 φ_Z 的单射性。Tsuchimoto [8, 引理 17] 证明了 $n = 1$时的单射性，但后来 Makar-Limanov [7, 第 793] 页给出了一个 $A_2(k)$ 的非单射自态射例子，其次数为 $p^2 + p - 1$。注意，Z 的任意平坦（因此也是 étale）自态射都是单射，因为 Z 是整环。因此，定理 3.10 在给定的次数界下确立了 φ的单射性，其中 $\deg(\varphi) < p$ 是一个特殊情形。

在 [6, 定理2.7、定理 4.3], 中，我们证明了域特征为零的韦尔代数的自态射是平坦的，并且双有理自态射是自同构。这些结果关键依赖于这样一个事实：将韦尔代数的自态射约化到（较大的）正特征后，会在中心上诱导出 étale自态射。定理3.10 给出了保证这一性质的特征的明确界限。特别地，在 [6] 中的自态射 φ 适用于特征为$p > \deg \varphi$。

参考文献

[1] V. Bavula，素特征下多项式代数和微分算子环自同构的求逆公式，J. Pure Appl. Algebra**212** (2008)，第 10期，2320–2337页。

[2] A. Belov-Kanel 和 M. Kontsevich，韦尔代数的自同构，数学物理通讯 **74** (2005)，第 2 期，181–199。

[3] ———, 雅可比猜想与迪克斯米耶猜想在稳定意义下等价，莫斯科数学杂志 **7** (2007)，第 2 期，209–218。
[4] N. Jacobson，李代数，Dover Publications，纽约，1979。1962 年 Interscience 版的重印本。[5] N. Katz，幂零联络与单值化定理：*Turrittin* 一项结果的应用，IHÉS 数学出版物**39**(1970)，175–232。[6] N. Lauritzen 和 J. F. Thomsen，*Weyl*代数自同态的两个性质，代数杂志**479** (2017)，137–158。[7] L. Makar-Limanov，*Bavula* 关于 *Weyl*代数同态的猜想，线性与多重线性代数**60**(2012)，第 7 期，787–796。
[8] Y. Tsuchimoto，迪克斯米耶猜想预备知识，高知大学理学院纪要，A辑，数学**24** (2003)，43–59。
[9] , *Weyl*代数的自同态与 *p*-曲率，大阪数学杂志**42** (2005)，第 2 期，435–452。

———