# 通过历史学习和教学微积分

Chamila Gamage

## 引言：

作为一名大学微积分教师，我一直对这门学科如何成为数学领域最具变革性的成就之一深感着迷。当我们把目光投向牛顿和莱布尼茨在十七世纪各自独立发展微积分这一广为人知的故事之外时，便会发现一段更加深邃、丰富的历史叙事。它跨越数个世纪和不同文化，并持续塑造着我们对变化、运动和增长等概念的理解。微积分并非突然出现，也不是孤立发展的；它源自几何学、测量和哲学中的诸多传统，这些传统共同形成了现代科学语言。

我认为，微积分是一项真正的全球性成就，而非纯粹的欧洲发明。古印度、希腊和伊斯兰数学中的思想，以及后来的欧洲创新，展现了关于无穷、面积和连续变化的概念如何在协作与文化交流中不断演进。这种历史视角不仅对教师有价值，对当今学习数学的学生也同样如此。当我们重新审视早期数学家在描述无穷小变化或曲线运动时面临的难题，便会更加深刻地体会到，那些我们如今习以为常的公式背后蕴含着怎样的创造力与毅力。通过将这些历史发展与我的课堂实践联系起来，我努力把微积分呈现为不仅仅是一套步骤，更是一段鲜活的人类思想历程，也是持续不断的探索之旅。

**微积分的文化根源：**

微积分史远远不止于十七世纪。它的思想历经数百年，逐渐由世界各地的数学家发展而来；他们都在努力理解运动、面积和变化。早在牛顿和莱布尼茨之前，印度、希腊和伊斯兰世界的古代学者就已发展出体现微积分精神的方法，尽管他们尚未拥有微积分的符号或正式定义。

在印度，《绳法经》（约公元前800–200年）被认为是现存最古老的印度数学文献，其中阐述了几何学如何用于实际用途，例如建造形状精确、面积相等的火祭坛。正如塞沙德里在2010年所提到的那句话：“矩形的对角线所形成的面积，等于底边和侧边分别形成的面积之和”，这是毕达哥拉斯定理的一种文字表述。后来，印度数学家延续了这一探索模式。由玛德瓦领导的喀拉拉学派在十四世纪推导出了正弦、余弦和反正切函数的幂级数展开，比牛顿和莱布尼茨早了几个世纪（Katz，1993年）。这些早期成果凸显了微积分的核心思想：无穷过程可以描述有限值。

希腊数学通过欧多克索斯提出、阿基米德完善的穷竭法，补上了另一块关键拼图。通过反复作多边形的内接和外切图形，阿基米德能够以任意所需的精度近似计算面积和体积（希思，2002年）。他的推理展现了对极限的深刻理解，尽管他是以几何方式表达的。在微积分课程中，这可以成为引入黎曼和的一种好方法：讨论阿基米德求圆的面积或球的体积时所用的论证，再将其与课程内容联系起来，帮助学生认识到，现代方法源自关于测量和近似的永恒问题。

中世纪时期，伊斯兰学者进一步发展了这些思想（Rashed，1994年）。十一世纪时，伊本·海赛姆推导出了整数幂和的公式，这些关系后来成为积分学的一部分。他分析运动和光的方法也将代数与几何学联系起来，表明微积分等概念曾在多个地区同时萌芽。

在欧洲，十四世纪的法国学者尼科尔·奥雷姆提出了一种可视化这些关系的新方法。正如Babb（2005）所述，奥雷姆绘制了几何图示，其中一条轴表示时间，另一条轴表示速度，创造出一种视觉模型，预示了现代函数图像的概念。他的平均速度定理表明，匀加速运动下行进的距离等于速度—时间曲线下方的面积，这实质上是我们如今所说的积分的第一个清晰表述。奥雷姆还研究了无穷级数，证明调和级数发散，并利用几何图形表示部分和。

这些例子共同表明，微积分的根源确实遍及全球。他们共同的努力为牛顿和莱布尼茨后来正式确立符号微积分奠定了基础。

**牛顿—莱布尼茨的突破：**

到了十七世纪，微积分的基本要素早已散见于数百年来的数学思想之中。在这一时期，英格兰的艾萨克·牛顿和德国的戈特弗里德·威廉·莱布尼茨各自独立地发展出了后来被称为微积分的学科（Hathaway, 1919；Katz 1993），这是一套研究连续变化与累积的完整体系。他们的工作将纷繁多样的思想转化为科学与数学的共同语言。

牛顿从运动和几何学的视角研究微积分。正如 Katz（1993）所述，他的“流数法”描述了量如何随时间流动和变化，这与物理学中的运动物体颇为相似。对牛顿而言，导数表示瞬时变化率，而积分则衡量一个区间内变化的总效应。这些概念自然源自他对行星运动和引力的研究，后来发表于 Newton 等人（1999）的著作中。牛顿的推理极具几何性，通过比和极限而非符号来表达；不过，这为数学与物理世界建立联系提供了一种非凡的新方式。

莱布尼茨独立开展研究，从截然不同的出发点得出了相同的发现。他的目标是创造一种通用的符号语言，用于推理变化（Jesseph，1998年）。他引入了记法 $dy/dx$ 和 $\int$，这些记法此后已成为通用记法。莱布尼茨认为，代数符号比文字或图示更能精确地刻画运动和变换。他的记法使微积分变得易于教学且可扩展，让其他人能够进行系统计算（Guicciardini，1989年）。

这种哲学观点塑造了微积分的发展及其教学方式。Bernard Nieuwentijt 和米歇尔·罗尔等批评者认为，无穷小量毫无意义，因为比任何实数都小的量不可能存在（Jesseph，1998年）。但莱布尼茨反驳说，可以把无穷小量视为无法比较的小有限量，这样既保留了它们的实用价值，又无需争论它们是否真实存在。他的追随者约翰·伯努利、洛必达和 Varignon 接受了这一灵活观点，并将其发展为一种实用方法。洛必达的《无穷小分析》（1696年）是第一本微积分教科书，以清晰的形式介绍了求导法则、例题和应用，为往后数代人的微积分教学奠定了模式（Blanco，2024年）。

牛顿和莱布尼茨关于谁发明了微积分的争论，成为数学史上最著名的争议之一。双方都声称自己应获此殊荣，并受到民族自豪感以及对这一学科的不同思考方式的影响（Hathaway，1919）。然而，这场争论意外地促使微积分迅速传播到欧洲各地。在英格兰，牛顿的几何流数法流数法影响了数学的发展多年；另一方面，莱布尼茨的符号形式则成为通用语言。他的记法简洁、灵活且易于教授，使数学家能够将微积分应用于力学、概率等新问题

，

以及微分方程（Guicciardini，1989）。

从教学角度看，这两种方法——牛顿的几何直觉与莱布尼茨的符号形式主义——至今仍影响着我们教授微积分的方式。牛顿的观点契合学生在思考斜率、速度和面积时所需要的视觉与物理直觉。莱布尼茨的体系提供了计算与抽象所需的符号精确性。牛顿和莱布尼茨都将历经数世纪发展的几何、代数与哲学思想结合在一起。他们的工作把古代直觉与现代推理统一起来，创造了一种描述不断运动的宇宙的单一方式。

**现代贡献**

牛顿和莱布尼茨的工作奠定了微积分的形式，但他们的方法建立在直觉之上。在此后的三个世纪里，数学家将这种直觉逐步发展为一套逻辑严谨性完备的体系。这一过程使微积分从研究运动的工具转变为现代科学的通用语言。

莱昂哈德·欧拉在这一演变过程中发挥了决定性作用。欧拉在莱布尼茨记法的基础上，通过幂级数统一了微分与积分，并以现代形式引入了指数函数和三角函数。（Katz，1993年）

约瑟夫-路易·拉格朗日试图在纯粹的代数基础上重建微积分。他认为，任何可微函数都可以表示为泰勒级数，而微分则可以看作取该展开式中一次项的系数。尽管他的想法并未完全成功，却阐明了导数与局部线性近似之间的关系。拉格朗日对结构的重视，影响了后来微积分在课堂中的呈现方式，使其成为一套系统理论，而非一门依靠巧妙技巧的艺术。

十九世纪通过奥古斯丁-路易·柯西和卡尔·魏尔斯特拉斯的工作，使微积分得到了全面形式化。（Katz，1998年）柯西提出了极限、连续性和收敛的精确定义，魏尔斯特拉斯则以他的ε–δ 表述对它们加以完善。他们的工作赋予了微积分长期以来所缺乏的严谨性，消除了对无穷小量的依赖，并将该学科建立在算术逻辑之上。正如Zuccheri和Zudini（2014年）所解释的，从几何直觉转向分析精确性，从根本上改变了微积分的教学与理解方式。伯恩哈德·黎曼（1854年）将定积分定义为和的极限，使微积分能够处理不规则函数；而亨利·勒贝格（1902年）则通过测度论来定义积分，扩展了这一思想。这些贡献为现代概率论、实分析和数理物理打开了大门。与此同时，索菲斯·李发展了连续变换群，将微积分与几何学以及正在兴起的对称性理论联系起来，

如今在物理学中不可或缺的思想。大卫·希尔伯特和埃米尔·博雷尔拓展了理论性的分析学基础，将微积分与拓扑学和无限维空间联系起来。

二十世纪将微积分拓展到了新的领域。诺伯特·维纳将随机过程形式化，并创立了控制论，将微积分应用于随机运动。艾伦·图灵等人运用微分方程研究计算和生物图案形成。在物理学领域，爱因斯坦的广义相对论以张量微积分为基础，而量子力学则依赖薛定谔和海森堡的微分算子。这些现代发展表明，微积分的精神——对无穷小变化和连续变换进行推理——依然是科学思想的核心。

作为一名教师，追溯微积分从直观起步走向现代抽象的历程，令我深受启发。微积分史的每个阶段都体现了创造力与严谨、视觉理解与符号推理之间的平衡（Ortega，2002年）。学生的学习也遵循同样的平衡。当我教他们从描绘切线到撰写极限证明，或从探索数值数据到建立更抽象的系统模型时，我看到他们走过了数学本身走过的道路。从许多方面来说，微积分的故事也是学习本身的故事。

**将历史见解融入教学**

学习微积分史极大地改变了我的教学理念。我不再把课程仅仅看作由极限、导数、积分和级数等主题依次组成的序列，而是将其视为一个人类发现的故事，并在每一间课堂中不断延续。通过将历史发展与现代实践联系起来，我能够帮助学生认识到，微积分并非一堆事实的简单集合，而是一门由好奇心、创造力和问题解决塑造的鲜活学科。以下是我希望融入教学的一些做法：

1. **从历史问题入手**。

例如，在讲授曲线下的面积时，我们可以提及阿基米德的穷竭法，向学生展示早期数学家受到怎样的启发，并将这种方法应用于课堂。这种做法让学习过程显得顺理成章，因为它源于真实的需求。

**2**. **融合直觉与严谨性**。

效仿莱布尼茨的“有充分依据的虚构”，我们可以鼓励学生先凭直觉推理，再引入形式证明。起初，我们把 $dy$ 和 $dx$ 说成非常微小的变化；随后，再通过 ε–δ 极限定义来完善这些想法。这反映了从非形式推理到现代分析学的历史演变。学生可以了解到，近似和理解往往先于充分的严谨性。

**3. 突显跨文化联系**。

我们可以特意提及印度、希腊和伊斯兰学者的贡献，并将其与牛顿和莱布尼茨的贡献并列。学生了解到无穷级数或几何算法等思想早在十七世纪欧洲之前就已存在时，便会认识到数学是一场全球性的对话。这种视角不仅拓宽了他们对

这门学科的认识，也让他们愿意将自己视为持续对话的潜在参与者。

**4. 鼓励反思**。

我们可以要求学生撰写简短的反思，将一个历史观念与一个现代问题联系起来。这些反思鼓励他们思考早期数学家可能会如何应对类似的挑战、他们面临了哪些障碍，以及这些观念如何发展成为我们今天使用的方法。

## 结论

回顾微积分史改变了我对这门学科以及自身作为教师这一角色的看法。微积分的发展并非源于某一次单独的发现，而是许多文化与数个世纪思想积淀的成果。人们都受到一种共同愿望的驱动：理解运动，并更加精确地测量世界。他们的共同努力创造了一项突破，将几何学、代数和分析学连接为一个统一框架。微积分成为现代科学、技术，以及我们对增长、运动和不确定性进行建模的基础。了解这段历史有助于我将微积分作为不仅仅是一套步骤来教授。它提醒学生，这门学科是在创造力、协作和毅力的共同作用下建立起来的，而同样的品质对于当今学习微积分也至关重要。

**参考文献：**

Babb, J.（2005）。尼科尔·奥雷姆的数学概念与证明：运用微积分史教授数学。《科学与教育》，*14*（3–5），443–456。https://doi.org/10.1007/s11191-004-7937-y

Blanco, M. (2024). 关于洛必达的《无穷小分析》：如何教授微分。载于数学史及其背景：纪念 *Gert Schubring* 的论文集（第45卷）。

Guicciardini, N. (1989). *1700—1800*年英国牛顿微积分的发展。剑桥大学出版社。

Hathaway, A. S. (1919). 微积分的发现。《科学》，*50*（1280），41–43。https://doi.org/10.1126/science.50.1280.41

Heath, T. L. (2002年). 阿基米德著作。Courier Corporation.

Jesseph, D. M.（1998年）。莱布尼茨论微积分基础：无穷小量实在性问题。《科学视角》，*6*（1–2），6–40。https://doi.org/10.1162/posc_a_00543

Katz, V. J.（1993年）。利用微积分史教授微积分。《科学与教育》，*2*（3），243–249。https://doi.org/10.1007/BF00490066

Katz, V. J. (1998年)。数学史：导论。Addison-Wesley。

Newton, I., Cohen, I. B., & Whitman, A. (1999年)。《自然哲学的数学原理》：自然哲学的数学原理。加利福尼亚大学出版社。

Ortega, M. (2002年)。利用微积分史辅助动力学课程教学。*2002*年美国工程教育学会年会暨博览会论文集，7.1281.1。

Rashed, R. (1994年)。阿拉伯数学的发展：算术与代数之间（第156卷）。施普林格科学与商业媒体。

Seshadri, C. S.（编）。(2010年)。印度数学史研究（第1版）。Hindustan Book Agency。https://doi.org/10.1007/978-93-86279-49-1

Zuccheri, L., & Zudini, V.（2014年）。微积分教学史。载于 A. Karp & G. Schubring

（编者），数学教育史手册（第 493–513 页）。Springer。

https://doi.org/10.1007/978-1-4614-9155-2_24