贪婪路由可达性博弈

Pascal Lenzner 奥格斯
堡大学 奥格斯堡，德国
pascal.lenzner
@uni-a.de

Paraskevi Machaira 哈索·
普拉特纳研究所 波茨坦，德国
paraskevi.
machaira@hpi.de

arXiv:2601.23126v1 [cs.GT] 30 Jan 2026

摘要

如今的网络由许多各自追求自身目标的自主实体组成，例如彼此互连的智能设备或大型人工智能系统的组成部分。鉴于大多数通信网络规模庞大且结构复杂，每个实体通常只能看到局部视图，因此必须依靠本地路由协议来发送和转发数据包。贪心路由是解决这一问题的一种常见方法：数据包在网络中被逐跳转发至距离其目的地更近的邻居。

本文研究一种博弈论模型，其中自主智能体旨在构建一个支持贪心路由的网络。这些智能体位于度量空间中，每个智能体都试图在保持能够通过贪心路由到达其他所有智能体的同时，尽可能少地建立链路。因此，该模型刻画了贪心路由网络如何形成，而不对智能体的分布或所采用的具体贪心路由协议作任何假设。由此，它提炼出了贪心路由得以奏效的本质。

我们研究该模型的两种变体：采用有向边或无向边。对于前者，我们证明均衡存在，且总成本最优；在欧几里得度量下，还可以高效地找到这些均衡。然而，即使在这个简单的设定中，计算最优策略仍是 NP 困难。对于更具挑战性的无向边设定，我们证明，在二维欧几里得空间中代理的现实设定下，无政府代价介于 1.75 和 1.8 之间；在更高维度中则小于 2。此外，我们证明最佳响应动态可能会循环，但在欧几里得空间中，可以在多项式时间内计算出近乎最优的近似均衡。而且，在二维欧几里得空间中，这些近似均衡优于著名的德劳内三角剖分。

关键词

贪心路由，网络创建博弈，纳什均衡，无政府代价，博弈论，几何

1 引言

贪心路由广泛应用于许多领域，因为它无需掌握网络的完整结构信息，就能实现网络节点之间的通信。如今的通信网络规模庞大、结构复杂，而且还可能动态变化，因此，传统的基于最短路径的路由方式——依靠固定路由表，并须将这些路由表分发到所有重要网络节点并加以维护——必须由更具局部性和适应性的方案取代。其中最受瞩目的方案之一就是贪心路由，也称为地理路由或无状态路由 [21, 28]。贪心路由常用于由智能设备或传感器构成的小型自组织对等网络，而最近有人提出将其应用于整个互联网 [8]。

贪心路由的关键在于，每个网络节点在某个底层空间中都有一个位置，该空间通常是度量空间，例如欧几里得平面或双曲圆盘。这些位置有助于在数据包路由过程中，局部决定将哪个网络邻居用作下一跳。如果在贪心路由路径的每一步，总能找到一个比当前节点更接近目标位置的下一跳，那么贪心路由就能成功。如果网络中任意一对节点之间的贪心路由都能成功，则称该网络是可导航的。因此，挑战在于构建一个可导航网络。

关于贪心路由，已有大量研究，但其目标大多是寻找合适的贪心嵌入，即将节点映射到某个空间中的虚拟坐标，以便于路由 [6, 13, 40]。在这种情形下，给定一个固定网络，嵌入得到的坐标会引导数据包前往目的地。另一种同样重要的方法则是在没有预定义网络的情况下，由节点自行构建网络，从而实现贪心路由。一个重要应用是自然灾害（如地震或海啸）摧毁通信基础设施地区的应急响应网络。其思路是在该区域投放通信传感器，由它们建立通信网络，供救援队和灾害救援人员使用 [32, 34]。对于这类应用，通常假设网络搭建过程是协调进行的，也就是说，所有设备都运行相同的局部算法。另一个应用是数据库相似性搜索，其中构建可导航网络被视为一个开放问题 [2, 16]。

嵌入方法基于固定网络，并试图寻找合适的节点位置；而将研究重点从贪心嵌入转移开来，则凸显了这一问题的两个重要方面。首先，在当今智能设备日益普及的时代，这一点尤为重要：它使我们能够研究一种不受中央权威机构支配网络结构的去中心化环境。相反，遵循博弈论方法 [37] ，尤其是网络创建博弈这一广为人知的范式 [3, 19], ，节点自身会就构建哪些边以实现贪心路由作出策略性决策，这也要求进行博弈论分析。其次，移除给定网络所施加的约束，揭示了贪心路由网络必然需要的基本机制和结构性质。要设计能够实现贪心路由且具备特定结构性质的最优网络，例如最小化总成本，这种理解至关重要。

在本文中，我们旨在研究由自私代理之间的互动所产生的可导航网络的结构性质。为此，我们考虑一种非常基本的网络形成博弈：对应于度量空间中固定位置节点的代理，通过策略性地向其他节点建立链路，使贪心路由路径能够到达所有网络节点。这一目标旨在实现贪心路由可达性，即所有

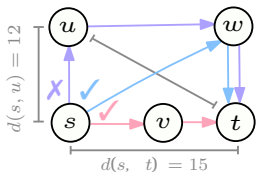


图1： $\mathbb{R}^2$**中贪心路由路径的示意图。粉色和蓝色的** s**-**t**-路径是贪心路由路径，而紫色的**s**-**t**-路径不是，因为** $15 = d(s, t) < d(u, t) = \sqrt{12^2 + 15^2}$**。只有节点** s**支持贪心路由。**

代理所需具备的最基本性质。基于此，我们为更复杂的模型奠定基础；除了贪心可导航性之外，这些模型还可以加入鲁棒性或伸展保证等更多目标。我们发现，近似稳定状态确实存在，并且可以高效地计算出来。此外，这些均衡还具有良好性质，因为可以保证它们在成本方面接近中心化优化网络，即所建立边的数量接近。聪明的代理能够独立做出决策。我们证明，这类代理无需中心协调，也能创建近似最优的可导航网络。

1.1 模型与预备知识

我们考虑与度量空间 M 中的点集 $\mathrm{P} = \{p_1, \ldots\ldots, p_n\}$ 对应的 n 智能体，其中 $\mathrm{M} = (\mathrm{P}\ d_{\mathcal{M}})$，$d_{\mathcal{M}}(u, v)$ 表示任意两点 $u, v \in \mathrm{P}$ 之间的距离，且对于所有 $u \in \mathrm{P}$，$d_{\mathcal{M}}(u, u) = 0$，并且满足三角不等式。若上下文清楚，我们会省略 M。智能体知道所有点的位置，并希望构建一个支持贪心路由的网络。为此，每个智能体决定要建立一组与其关联的边。

代理 $u \in \mathrm{P}$ 的策略是 S_u，即端点位于 $\mathrm{P} \setminus u$ 中的一组边，也就是说，代理 u 可以购买通向其他智能体任意子集的关联边。对于 S_u 中的每条边，我们称代理 u 拥有该边。我们考虑两种变体。在有向情形中，S_u 中的每条边形如 (u, v)，表示代理 u 购买一条指向 v 的有向边。在无向情形中，S_u 中的每条边形如 $\{u, v\}$，表示代理 u 购买一条通向 v 的无向边。令 $\mathbf{s} = (S_1, \ldots, S_n)$ 为策略组合，即所有智能体的策略向量。此外，对于代理 $u \in \mathrm{P}$，令 $\mathbf{s} = (S_u, \mathbf{s}_{-u})$，其中 $\mathbf{s}_{-u}$ 是除 u 之外所有智能体的策略向量。我们有时使用记号 $S_u(\mathbf{s})$ 来明确指代包含策略 S_u 的策略组合。任意策略组合 $\mathbf{s}$ 定义一个网络 $G(\mathbf{s}) = (\mathrm{P}\ E(\mathbf{s}))$，其中在有向边的情况下 $E(\mathbf{s}) = \bigcup_{u \in \mathrm{P}} S_u$，或在无向边的情况下 $E(\mathbf{s}) = \bigcup_{u \in \mathrm{P}} \{\{u, v\} \mid \{u, v\} \in S_u \vee \{u, v\} \in S_v\}$。$G(\mathbf{s})$ 的顶点称为智能体、节点或点。

给定网络 $G = (\mathrm{P}\ E)$，在 G 中从 u 到 v 的一条贪心路由路径是一列 $(x_1, x_2, \ldots, x_j)$，其中 $x_i \in \mathrm{P}$，对于 $1 \le i \le j$，满足 $x_1 = u$，$x_j = v$，且 $(x_i, x_{i+1}) \in E$（对于无向边则为 $\{x_i, x_{i+1}\} \in E$），对于 $1 \le i \le j - 1$，使得对所有 $1 \le i \le j - 1$，$d(x_i, v) > d(x_{i+1}, v)$ 均成立。因此，这样的路径是 G 中从 u 到 v 的一条有向（无向）路径，沿途节点到路径终点的距离严格递减。若网络 G 中的代理 u 能够进行贪心路由，或者说 u 是贪心连通的，则在 G 中存在一条从 u 到其他每个节点的贪心路由路径。若 G 中的每个节点都满足这一条件，则称 G 中支持贪心路由。参见图1。

智能体选择策略，以尽量降低其在所形成网络中的成本 。网络 $G(\mathbf{s})$ 中代理 u 的成本定义为

$$c_u(\mathbf{s}) = |S_u| + \omega,$$

其中，ω 充当惩罚项：若为代理 u 启用贪心路由，则其值为 0；否则为 ∞。网络 $G(\mathbf{s})$ 的社会成本 为 $c(\mathbf{s}) = \sum_{u \in \mathcal{P}} c_u(\mathbf{s})$，即所有代理的总成本。对于点集 P，使社会成本最小的网络 $G(\mathbf{s}^*) = (\mathrm{P}\ E(\mathbf{s}^*))$ 称为 P 的社会最优网络（*SO*）。

若对于任意其他策略 S'_u，都有 $c_u(S^*_u, \mathbf{s}_{-u}) \le c_u(S'_u, \mathbf{s}_{-u})$，则称策略 S^*_u 为代理 u 在策略组合 $\mathbf{s} = (S_u, \mathbf{s}_{-u})$ 中的最佳响应；在有向情形中，$S'_u \subseteq \{(u, v) \mid v \in \mathrm{P}\ v \ne u\}$，而在无向情形中，$S'_u \subseteq \{\{u, v\} \mid v \in \mathrm{P}\ v \ne u\}$。也就是说，在其他代理的策略固定时，最佳响应策略会使代理 u 的成本最小化。若策略组合 $\mathbf{s}$ 中的每个代理都已采用最佳响应，则称 $\mathbf{s}$ 为纯纳什均衡（NE），简称稳定。我们用 NE 表示所有纯纳什均衡策略组合的集合。对于有向边的情形，策略组合 $\mathbf{s}$ 与相应的网络 $G(\mathbf{s})$ 之间存在双射。对于无向边的情形，若同时考虑边所有权信息，也同样成立。在这两种情形下，若策略组合 $\mathbf{s} \in \mathrm{NE}$[1]，我们就称网络 $G(\mathbf{s})$ 属于 NE。注意，在每个纳什均衡网络中，都必须启用贪心路由，因为每个代理都可以购买通往其他所有节点的直接边，以避免无穷惩罚 ω。

我们还考虑较弱的稳定性版本。若网络 $G(\mathbf{s})$ 处于 β-近似纳什均衡（β-纳什均衡或 β-稳定），则不存在代理 u 可以通过改变策略，使其成本降至 $\frac{1}{\beta} c_u(\mathbf{s})$ 以下；也就是说，任何策略变更都无法使代理的成本降至原来的 β 倍以下。类似地，若 $G(\mathbf{s})$ 处于 γ-加性纳什均衡（$+\gamma$-纳什均衡或 $+\gamma$-稳定），则不存在代理 u 可以将其成本降低至 $c_u(\mathbf{s}) - \gamma$ 以下。若允许贪心路由，那么在 β-稳定网络中，智能体购买的边数至多比所需数量多出 β 倍；而在 $+\gamma$-稳定网络中，他们购买的边数至多多出 γ 条。因此，1-稳定网络和 $+0$-稳定网络都处于纳什均衡。

无政府代价（PoA）[30] 定义为任意纳什均衡的社会成本与相应社会最优解之比的最坏情况。

最佳响应路径是一个策略组合序列 $\mathbf{s}_0, \mathbf{s}_1, \ldots\ldots, \mathbf{s}_k$，其中，$\mathbf{s}_i$ 由某个智能体在 $\mathbf{s}_{i-1}$ 中切换至最佳响应而得到，满足 $1 \le i \le k$。最佳响应循环（最佳响应环，BRC）是一个循环最佳响应路径，即 $\mathbf{s}_0 = \mathbf{s}_k$；它的存在意味着该博弈不可能具有序数势函数 [36]。因此，这类博弈不是能够保证纳什均衡存在的势博弈。

对于每个点 $u \in \mathrm{P}$，u 的最近邻 集合为 $N(u) = \arg\min_{v \in \mathcal{P} \setminus \{u\}} d_{\mathcal{M}}(u, v)$。因此，集合 $N(u)$ 由 P 中与 u 距离最小的点组成。P 上的最近邻图 *(NNG)* 记作 $G^{NNG}(\mathrm{P}\ E)$，定义如下。在有向情形中，边集为 $E = \{(u, v) \mid v \in N(u)\}$，即每个点都有一条有向边指向其最近邻；而在无向情形中，$E = \{\{u, v\} \mid v \in N(u) \vee u \in N(v)\}$。图 2（左）给出了一个示例。已知对于任何支持贪心路由的图，最近邻图都必须是其子图 [38]。

在 D 维欧几里得空间中，点集 P 的 德劳内三角剖分（*DT*）[15] 是一种三角剖分，其中 P 中没有任何点位于 $DT(\mathrm{P})$ 中任何一个 D 单形的外接超球内（右图见图 2）。一个重要的结构性质

[1]对于无向边，在纳什均衡中，没有任何边会由其两个端点同时购买。

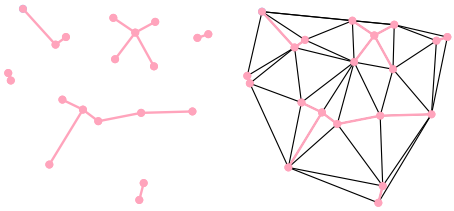


图 2：（右）$\mathbb{R}^2$ 中 20 个点 $\mathcal{P}$ 的最近邻图，（左）$\mathcal{P}$ 的德劳内三角剖分。

是，P 上的最近邻图是 $DT(\mathrm{P})$ 的子图。此外，已有研究 [9] 表明，二维欧几里得空间中的德劳内三角剖分支持贪心路由。在这种情况下，德劳内三角剖分是一个平面图，即其边数至多为 $3|\mathrm{P}| - 6$。

$\mathbb{R}^D$ 中的接吻数 记为 $K(D)$，它是 $\mathbb{R}^D$ 中能够同时接触给定单位超球面的互不相交单位超球面的最大数量。等价地，[12]，$K(D)$ 是 $\mathbb{R}^D$ 中单位球面表面上能够放置的点的最大数量，使得任意两点之间的角距离至少为 $60°$。我们有 $K(D) \leq 2^{0.401D}$，但 $K(D)$ 的确切值仅在 $D \in \{1, 2, 3, 4, 8, 24\}$ 中已知。见图 3。

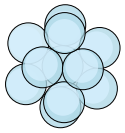


图 3：$\mathbb{R}^3$ 中的接吻数为 12。

对于嵌入度量空间中的代理 $u \in \mathrm{P}$，我们将贪心路由集 定义为一个边集，使得连接这些边后，对于所有 $w \in \mathrm{P} \setminus \{u\}$，代理 u 至少有一个邻居 v 满足 $d(v, w) < d(u, w)$。最小贪心路由集记为 $\Phi(u)$，是代理 u 的最小此类边集，其大小 $\phi(u) = |\Phi(u)|$ 被称为代理 u 的贪心路由度 。换言之，$\phi(u)$ 衡量代理 u 在本地启用贪心路由所需的最小连接工作量。$\phi^+(u)$ 表示属于 NNG 的这些边的数量。见图 4。

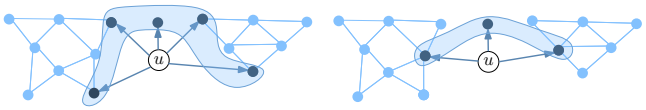


图4：（左）代理 u的一个贪心路由集，（右）带有 $\phi(u) = 3$ 和 $\phi^+(u) = 1$的最小贪心路由集。

1.2 相关工作

在贪心路由中，[21], 每个节点仅利用局部信息，将数据包转发给地理位置上最接近目的地的邻居。然而，数据包可能会在网络中的局部极小值处陷入停滞。Karp 和 Kung [28]以及 Bose 等人 [10]分别独立提出了将贪心转发与周界路由结合起来，以摆脱此类局部极小值的方法。后续研究将这一方法扩展到处理路由空洞并提高交付保证 [14, 20, 31, 33]。克服空洞的另一种方法是为节点分配虚拟坐标，构造贪心嵌入 [6, 18, 29]。虽然这类嵌入可以高效计算，但它们存在局限性，且无法体现真实距离。尽管关于贪心路由的研究十分广泛，但对于如何构造可导航网络这一问题，人们所知甚少。

德劳内三角剖分（德洛内三角剖分） [15] 在可导航网络中发挥着核心作用，因为它使 $\mathbb{R}^2$ [9] 和 $\mathbb{R}^3$ [39]中的贪心路由成为可能。此外，如果目的地可以是连续空间中的任意点，而非节点的离散集合，则不含退化边的德洛内三角剖分是每个支持贪心路由的图的子图 [25]。

更高维空间中的可导航网络因其在分布式相似性搜索和高维数据索引中的应用而受到关注 [16, 23]。诸如分层可导航小世界网络 [35] 之类的结构利用贪心路由原理来执行高效的近似最近邻搜索。关于这方面的大部分工作都集中于实证研究。

由于可导航网络与现实世界的复杂网络具有许多共同的结构性质，[7], 博弈论为理解此类网络如何形成并随时间演化提供了一个有用的框架。Bala和Goyal [3]提出了一种非合作网络形成博弈，其中智能体对应于网络节点，并购买关联边以到达每一个其他代理。与我们的模型不同，连接两个节点的任意路径都能建立可达性。他们证明纳什均衡存在，并且可以通过合适的博弈动态轻松找到。更为复杂的是Fabrikant等人 [19], 提出的网络创建博弈（NCG），其中智能体购买关联的无向边，以最小化到所有其他智能体的跳数距离之和。他们证明纳什均衡存在且无政府代价较低，但计算最佳响应是NP 困难的。涉及几何的NCG变体由Eidenbenz等人 [17], 提出，其中对应于平面中点的智能体建立无向边以确保可达性；由Abam等人 [1], 提出，其中智能体追求较低的最大伸展度（定义为图距离与度量空间距离之比）；以及由Bilò等人 [5] 和Friedemann等人 [22], 提出，其中智能体旨在最小化其到其他智能体的最短路径距离之和。

与我们的工作最为接近、在网络创建框架中研究贪心路由的成果，是 Gulyás 等人 [26] 和 Berger 等人 [4]的研究。在 [26] 中，代理旨在通过双曲空间中的贪心路由到达其他代理。他们研究了代理之间互不影响的有向情形，并证明计算最小贪心路由集是 NP 困难的。在 [4], 中，每条连接都有成本 $\alpha > 0$，代理旨在创建一个能够实现贪心路由的有向网络，同时最小化连接成本以及到其他代理的伸展度之和。大多数结果仅限于 1-2 度量（其中 $d_{\mathcal{M}}(u, v) \in \{1, 2\}$ 对任意 $u, v \in \mathrm{P}$）和树度量，不过他们证明了 $\mathbb{R}^2$中存在 5-近似纳什均衡，并证明在一般度量空间中存在 $(\alpha + 1)$-纳什均衡。

1.3 我们的贡献

我们的工作奠定了连接博弈论与计算几何的理论基础，并引入了用于开发更复杂网络创建模型的工具。尽管大多数文献聚焦于贪心嵌入，或聚焦于预先构建的有向边网络中的贪心路由，我们研究的是

创建能够实现贪心路由的有向或无向网络的过程。与现有研究不同，我们的模型刻画了贪心路由网络的形成过程，且不对智能体的分布或具体的贪心路由协议作出假设。因此，它提炼出了贪心路由得以实现的本质。

特别是，对于二维欧几里得度量中的智能体，我们提出了一种算法，能够高效构建从博弈论角度看几乎稳定的可导航网络，同时其边数至多比可能的最稀疏可导航网络多 80%。这优于著名的德劳内三角剖分所达到的 3 倍近似因子。此外，这可以视为设计高效算法的基础步骤，用于构建纳入伸展度或鲁棒性保证等额外特性的网络。所构建的网络适用于多种场景，例如在某一区域随机散布传感器、物联网网络，以及其他需要在智能设备之间建立通信网络的情形。此外，我们的方法能够很好地适应动态网络拓扑，不依赖所采用的路由协议，而且更具鲁棒性，因为它仅依赖直接邻居之间的局部通信。

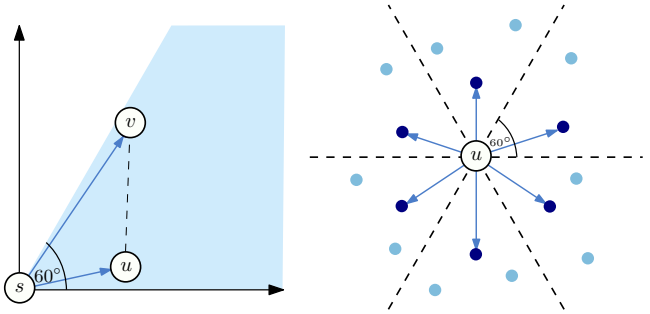


图 5：（左）从 s 到 v、经由 u 的路径是一条贪心路由路径，因为 $d(u,v) < d(s,v)$。（右）通过建立 6 条边，u 有一个邻居，该邻居到每个节点的距离都比 u 本身更近。

虽然我们重点研究二维欧几里得空间，但我们证明了该方法同样适用于一般度量和高维情形，可构建边数至多为最优解两倍的可导航网络。这一增加是由智能体自私性造成的，我们通过给出几乎紧确的无政府代价界来研究这一问题。

2 贪心路由的性质

我们将确立一些结构性质，用于分析有向变体和无向变体。这些性质对于实现贪心路由至关重要。

一般度量：我们先从适用于任意度量空间的性质入手。因此，这些性质是任意网络中贪心路由的基础。

引理1。考虑由一条边连接的两个智能体 $u, v \in \mathcal{P}(u, v)$（或由一条无向边连接的两个智能体 $\{u, v\}$）。如果智能体 v启用了贪心路由，那么从 u 经由 v 沿贪心路由路径可到达的智能体，与智能体 v的策略无关。

证明。考虑任意目的地点 $w \in$ P以及两个策略组合 **s**,**s**′，在这两个策略组合中，智能体 v 均启用了贪心路由，但其中 $S_v \neq S'_v$。为导出矛盾，假设在策略组合中存在一条从智能体 u到 w、经由节点 v的贪心路由路径

s，而在策略组合 **s**′中，节点 w无法经由节点 v通过贪心路由到达。

由于在 s′ 中允许代理 v 使用贪心路由，因此存在一条从 v 到 w、长度为 k 的贪心路由路径 $P = (v_i, v_{i+1}, \ldots, v_k)$，其中 $v = v_0$、$v_k = w$ 和 $0 \leq i < k$。根据贪心路由的定义，对于每个 $0 \leq i < k$，我们有 $d(v_i, v_k) > d(v_{i+1}, v_k)$。由于在策略组 s 中存在一条经由 v、从 u 到 w 的贪心路由路径，因此我们有 $d(v, w) < d(u, w)$。因此，路径 $(u, v) \cup P$ 是 s′ 中的一条贪心路由路径，这就产生了矛盾。□

接下来，我们还有另一个相当显然的性质。

引理 2. 在纳什均衡中，代理 u 至多建立 $\phi(u)$ 条边。

证明。根据定义，贪心路由度 $\phi(u)$是代理 u 需要连接的最少邻居数

以便实现贪心连通。特别地，存在一个含有 $\phi(u)$个节点的集合W，使得对于每个 $t \in$P，都存在一个 $w \in W$，满足 $d(w, t) < d(u, t)$。

假设为了导出矛盾，在纳什均衡网络 G(s)中，采用策略 S_u的代理 u构建了 $k > \phi(u)$条边。考虑另一种策略 S'_u，其中代理 u 仅向W中的节点构建边，并考虑相应的策略组合s′，它与策略组合s仅在代理 u的策略上有所不同。如果代理 u 在 G(s′)中是贪心连通的，那么代理 u便可通过在网络 G(s)中选择策略 S'_u来降低其成本，这与 G(s)是纳什均衡网络相矛盾。因此，在网络 G(s′)中，代理 u 仅向W中的节点购买边，必定存在一个节点 v无法经由贪心路由从代理 u到达。因此，根据集合W的定义，存在一个节点 $w \in W$，满足 $d(w, v) < d(u, v)$，它在网络 G(s′)中没有到达节点 v的贪心路由路径。此外，网络 G(s)中从 u到 v的贪心路由路径不能被代理 w使用，因为 $d(w, v) < d(u, v)$。因此，代理 w不是贪心连通的，从而网络 G(s)不是纳什均衡实例。□

注 1。在纳什均衡网络中，对于任意代理 $u \in \mathcal{P}$，$\phi^+(u)$的值与策略组合无关，因为最近邻图的所有边都必须存在于任何纳什均衡网络中。

欧几里得度量：现在我们转而讨论欧几里得度量下成立的性质。接下来的两个引理由 Clark- son [11]证明。为求完整起见，我们在本文的背景下给出证明。

引理3。在欧几里得度量中，考虑节点 s、u、$v \in \mathcal{P}$，其中$d(s, u) \leq d(s, v)$，并令 θ表示角 $\angle usv$。若 $\theta < \pi/3$，则序列 $P = (s, u, v)$是从节点 s到节点 v的一条贪心路由路径。

证明。为了证明 P是从节点 s到节点 v的贪心路由路径，只需证明 $d(u, v) < d(s, v)$。在三角形 vsu中应用余弦定理，可得：

$$
\begin{aligned}
d^2(u,v) &= d^2(s,u) + d^2(s,v) - 2 \cdot d(s,u) \cdot d(s,v) \cdot cos(\theta) \\
&< d^2(s,u) + d^2(s,v) - 2 \cdot d(s,u) \cdot d(s,v) \cdot 1/2 \\
&= d^2(s,u) + d^2(s,v) - d(s,u) \cdot d(s,v) \\
&< d^2(s,u) + d^2(s,v) - d^2(s,u) \\
&= d^2(s,v) \\
d(u,v) &< d(s,v)
\end{aligned}
$$

由于 $d(u, v) < d(s, v)$，从 s经由 u到 v的路径是一条贪心路由路径（示例见图 5（左））。□

引理 4. 对于二维欧几里得度量，任何代理的贪心路由度都可以在多项式时间内计算，且至多为 *6*。

证明。我们通过构造来证明（见图 5）：将节点 u 周围的空间划分为六个圆锥，每个圆锥的角为 $\pi/3$。在每个圆锥中，选取距离 u 最近的节点 v，并构造边 (u, v)。根据引理3，代理 u 可以经由节点 v 贪心路由到该圆锥中的每个节点。因此，贪心路由度 $\phi(u)$ 至多为 6。

要计算贪心路由度，只需尝试至多包含六条边的每个子集，这需要多项式时间。□

备注 2. 对于维数为 $D > 0$ 的欧几里得度量，任何代理的贪心路由度都可以在多项式时间内计算，且至多为接吻数 $K(D)$。

由 Conway 和 Sloane 对接吻数的定义 [12] 以及引理3可得上述结论。

3 贪心路由：有向边

本节探讨模型的有向变体，首先介绍一些在每个度量空间中都成立的结果。

3.1 纳什均衡

一般度量。 我们首先证明，任意度量空间中始终存在纳什均衡。

定理 1。 每个纳什均衡都是社会最优，每个社会最优也都是纳什均衡。

证明。根据引理1，对于每个代理 $u \in P$，只要代理 u 是贪心连通的，代理 u 的策略就不会影响其他智能体。利用这一性质，我们将证明每个社会最优都是纳什均衡，并且每个纳什均衡都是社会最优。

首先，反设存在一个并非社会最优的纳什均衡。那么，必定存在一个代理 u，其在社会最优解中的社会成本低于纳什均衡中的社会成本。若代理 u 改用社会最优解中采用的策略，就能降低其成本，这与原策略组合是纳什均衡相矛盾。

接下来，假设存在一个不是纳什均衡的社会最优解。那么，就存在一个代理 u 可以通过改变其策略来降低自身成本。由于这样的策略改变不会影响其他代理，总社会成本会随之降低，这与原策略组合是社会最优解这一假设相矛盾。□

这直接推出以下正面结果。**推论1**。 有向版本中的无政府代价为*1*。

接下来，我们证明最佳响应循环不可能存在。因此，可以通过自然的博弈动态找到稳定状态。

引理5。 不存在最佳响应循环。

证明。若存在最佳响应循环，则必定至少有一个代理 u在某一轮次 r选择了自己先前某一轮次采用过的策略。

设 S_u 表示第 r轮开始时 u 的策略，设 S'_u表示 u愿意再次采用的先前策略。不失一般性，假设 S_u并非最初分配给代理 u 的策略。假设 $|S_u| \le |S'_u|$。在这种情况下，代理 u 会将策略改为一项边数至少与其当前策略相同的策略。代理 u只有在以下情况下才会选择边数更多或相同的策略：尽管 u在先前某一轮次采用策略 S_u时是贪心连通的，但在第 r轮采用 S_u时已不再贪心连通。

反设存在一个代理 w，在前一轮中可通过 S_u中的贪心路由路径从 u到达，但在第 r轮中已不再可达。那么，在从 u到 w的该贪心路由路径上，必然存在一个代理 x，其策略在 r之前的某一轮发生了改变。由于代理 x没有激励将其策略改为不支持贪心路由的策略，因此其新策略必然继续支持贪心路由。根据引理1，即使代理 x改变了策略，仍然存在一条经由 x从 u到 w的贪心路由，这就产生了矛盾。如果从 u到 v的贪心路由路径上有多个代理改变策略，该论证仍然成立。

因此，在第 r轮中，从 u出发、使用 S_u中边的所有贪心路由路径仍然有效，所以代理 u没有激励将其策略改为使用更多边或相同数量边的策略。

现在考虑 $|S_u| > |S'_u|$的情况。由于 S'_u是之前采用过的策略，代理 u必然在更早的某一轮中将其策略从 S'_u改为使用更多边的策略。根据上述论证，这种改变不可能发生，即代理没有激励将其策略改为使用更多边的策略。因此，这种情况同样导致矛盾。

因此，不存在会将策略改为自己之前采用过的策略的代理 u，也就是说，最佳响应循环不可能存在。

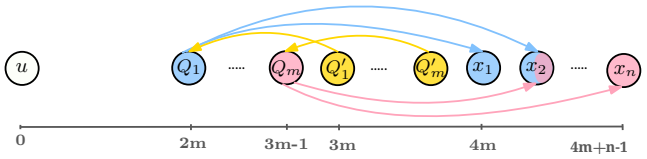
如果 S'_u是最初分配给 u的策略，唯一可能的例外情况是：S'_u本来会是最佳响应，但与 S'_u中的边相关联的一些智能体最初并未贪心连通。在这种情况下，u会改变策略以实现贪心连通；当与 S'_u中的边相关联的智能体实现贪心路由连通后，u就会将策略改回 S'_u。每个代理 u至多会发生一次这种情况。此后，前面的论证仍然适用，因此最佳响应循环不可能存在。□

3.2 计算复杂性

~~一般度量~~我们研究一般度量空间中计算最佳响应的计算复杂性，以及在欧几里得度量下计算纳什均衡的计算复杂性。

虽然可以在多项式时间内计算贪心路由度，但计算最佳响应是一个困难问题，即使在一维度量空间中也是如此。

定理 2。 对于欧几里得度量（因此也适用于一般度量），计算代理的最佳响应是 *NP* 困难的。



Fi图 6：集合覆盖问题归约的示意图

之上。

证明。我们将从 NP 困难问题集合覆盖进行归约。设 $P=(\{x_1、\ldots\ldots、x_n\}、\{Q_1、\ldots\ldots、Q_m\})$ 是集合覆盖的一个实例，其中 $\{x_1、\ldots\ldots、x_n\}$ 是需要覆盖的元素集合，$\{Q_1、\ldots\ldots、Q_m\}$ 是可用于覆盖元素的子集集合，即我们有 $\{x_1 \quad x_n \subseteq Q_1 \cup \quad \cup Q_m$ 、……、$\}$ ···。给定一个集合覆盖实例，我们按如下方式构造有向图 $G(V, E)$（见图 6）。我们为每个集合 Q_i 和每个元素 x_j 创建一个节点，其中 $1 \le i \le m$ 和 $1 \le j \le n$ 分别表示相应对象。此外，对于每个节点 Q_i，我们还添加一个辅助节点 Q'_i，并额外添加一个节点 u。这些节点放置在一条直线上，使得节点 u 位于位置 0，每个 Q_i 位于位置 $2m+i-1$，每个 Q'_i 位于位置 $3m+i-1$，每个 x_j 位于位置 $4m+j-1$。接下来，我们从每个节点 Q_i 向每个节点 $x_j \in Q_i$ 添加一条出边，并从每个节点 Q'_i 向对应的节点 Q_i 添加一条出边。

设 B 是代理 u的最佳响应。首先注意，每个节点 Q'_i 都没有入边，因此代理 u 必须向每个 Q'_i 购买一条边，才能拥有通往该节点的贪心路由路径。由于 $d(Q'_i, Q_i) = m < 2m+i-1 = d(u, Q_i)$，路径 (u, Q'_i, Q_i) 是从 u 到 Q_i 的贪心路由路径。因此，通过向每个 Q'_i 建边，代理 u 就拥有通往每个 Q'_i 和 Q_i 的贪心路由路径。注意，经过 Q'_i 和 Q_i 的路径不可能是通往任何节点 x_j 的贪心路由路径。

接下来我们证明，可以对最佳响应 B 进行修改，使其不包含指向节点 x_j 的任何边。为此，假设 B 包含边 (u, x_j)。由于 $\{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq Q_1 \cup \cdots \cup Q_m$，存在一个节点 Q_k，它有一条指向 x_j 的有向边。此外，我们有$d(Q_k, x_j) = 2m+j-1 < 4m+j-1 = d(u, x_j)$，因此代理 u 可以将边 (u, x_j) 替换为边 (u, Q_k)，从而获得一条通往节点 x_j 的贪心路由路径 (u, Q_k, x_j)。由于节点 x_j 没有任何出边，它无法使代理 u 实现通往其他任何节点的贪心路由。因此，将边 (u, x_j) 替换为 (u, Q_k)，会得到一个能使代理 u 实现贪心路由且成本与策略 B 相同的策略。因此，从现在起，我们可以假设最佳响应 B 不含指向节点 x_j 的边。

C是$\{x_1、\ldots\ldots、x_n\}$的一个最小集合覆盖。我们证明，在相应的度量实例中，代理 u 的一个最佳响应 B 若不包含指向节点x_j的边，则其所构建的边数恰为 $|C|+m$。

设 $B' = \{Q \mid (u, Q) \in B\}$，即 B'是代理 u在最佳响应 B 下购买边所指向的节点集合。首先观察到，$B' \setminus \{Q'_1, \ldots, Q'_m\}$ 是 $\{Q_1, \ldots, Q_m\}$ 的一个子集，且该子集覆盖集合 $\{x_1, \ldots, x_n\}$。这一点成立，因为否则代理 u将不是贪心连通的；特别地，至少有一个节点x_j无法经由贪心路由路径到达。

接下来我们证明，$B' \setminus \{Q'_1, \ldots, Q'_m\}$ 确实是 $\{x_1, \ldots, x_n\}$ 的一个最小集合覆盖。反设存在 $\{x_1, \ldots, x_n\}$ 的一个集合覆盖 C，使得 $|C| < |B'| - m$。那么，向 $C \cup \{Q'_1, \ldots, Q'_m\}$ 中的所有节点购买边，对代理 u而言将是比策略 B更好的响应，因为代理 u仍然可以通过通向每个 Q'_i的边，拥有到达每个 Q_i节点和每个 Q'_i节点的贪心路由路径，并且通过建立通向 C 中各节点的边，代理 u将拥有到达每个 x_j节点的贪心路由路径，矛盾。

根据上述交换论证，代理 u 的任意最佳响应都可以在多项式时间内转换为一个不购买指向x_j 节点的边的最佳响应 B。由此，可以高效地计算相应的集合 $B' = \{Q \mid (u, Q) \in B\}$。最后，$B' \setminus \{Q'_1、\ldots\ldots、Q'_m\}$是初始集合覆盖实例的一个最小集合覆盖。因此，如果我们能在多项式时间内计算代理 u 的一个最佳响应，那么就能在多项式时间内计算一个最小集合覆盖。□

欧几里得度量。虽然在欧几里得度量下计算最佳响应是困难的，但我们现在将证明一个截然相反的结果：在欧几里得度量下，计算纳什均衡、社会最优解，以及判断给定的策略组合是否为纳什均衡，都可以高效完成。

推论 2. 在维数 $D > 0$的欧几里得度量中，计算社会最优，从而也计算纳什均衡，可在多项式时间内完成。

证明。由引理1可知，只要代理 u 是贪心连通的，代理 u 的策略就不会影响其他智能体的策略。此外，由引理 4可知，计算最小贪心路由集可在多项式时间内完成。根据最小贪心路由集的定义，没有任何代理能够通过构建更少的边而实现贪心路由连通。因此，为每个代理 u 计算最小贪心路由集并构建相应的边，即可得到一个纳什均衡。此外，由定理 1可知，每个纳什均衡都是社会最优，反之亦然。因此，二者均可在多项式时间内计算。□

由于在纳什均衡中，每个代理都必须购买其最小贪心路由集中的边，且这可以高效地计算，因此我们得到如下结论。

推论 3. 在维数 $D > 0$的欧几里得度量中，判定一个策略组合是否为纳什均衡可在多项式时间内完成。

4 贪心路由：无向边

本节将探讨模型中更具挑战性的无向变体。我们先介绍二维欧几里得度量的相关结果。随后，我们会将部分结论推广到高维和一般度量空间。

4.1 无政府代价

二维欧几里得度量。我们先介绍一个技术引理，它对于推导无政府代价的上界至关重要。

引理 6。 设 $G(s)$是点集 $\mathcal{P}$上的一个纳什均衡网络，$G_{NNG}(\mathcal{P})$是相应的最近邻图。设 $C \subseteq \mathcal{P}$满足 C中的所有节点都属于 $G_{NNG}(\mathcal{P})$的同一个连通分量。那么， C中的代理在 $G(s)$中构建、但未出现在 G_{NNG}中的边总数至多为 $2+3|C|$。

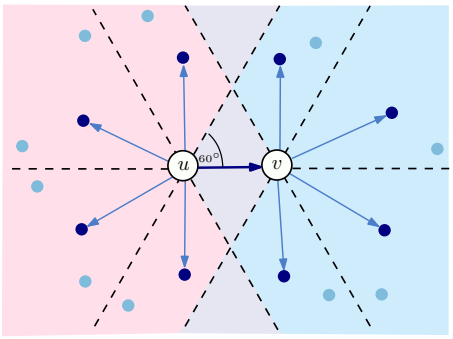


图7：由两个节点 u、v组成的最近邻图分量。要使智能体 u 和 v 贪心路由连通，最多需要构建8条边。

证明。设 $u, v \in \mathrm{P}$ 是两个节点，且 u在 $G_{NNG}(\mathrm{P})$ 中以 v 为其最近邻。我们将 u周围的空间划分为六个圆锥 $X_0, X_1, \ldots, X_5$，每个圆锥的角度为 $\frac{\pi}{3}$，从经过 u和 $\bar{v}$的直线开始，按逆时针方向排列。由于 v是 u的最近邻，对于所有 $w \in \mathrm{P}$，都有 $d(u,w) \geq d(u,v)$；仅当 $\angle wuv = \frac{\pi}{3}$时等号成立。见图7。

首先，我们考虑每个节点恰好有一个最近邻的情况。根据引理3，对于位于锥 X_0、X_5内的每个节点 $w \in \mathrm{P}$，都存在一条从 u 到 w且经过 v的贪心路由路径。此外，同一引理还意味着，只需确保 u 在其余每个锥 X_1、X_2、X_3、X_4中至多有一条出边，就能保证存在一条从 u到网络中每个其他节点的贪心路由路径。因此，除边 {u、v} 外，代理 u最多还需要四条附加边。

接下来，我们将 v周围的空间划分为六个锥 $X_{\prime 0}$、X_1', ……, $X_{\prime 5}$，每个锥的角为 $\frac{\pi}{3}$。这次按顺时针排列，从经过 u和 v的直线开始（X_0'与 X_0 和 X_1重叠）。

现在我们证明，对于位于锥 $X'0$ 内的每个 $p \in \mathrm{P}$，都存在一条从 v 经由 u 到达 p 的贪心路由路径。反设存在一个节点 $p \in \mathrm{P}$，位于相应的锥 $X'1$、$X'5$ 内，但 p 无法从 v 经由 u 通过贪心路由到达，即 $d(v,p) \leq d(u,p)$。那么，根据引理 3 可得 $d(u,p) \leq d(u,v)$，这与 u 以 v 为其最近邻的假设矛盾。采用与之前相同的论证，我们得到，v 也最多只需要四条附加边，就能确保存在一条从 v 到网络中其他每个节点的贪心路由路径。因此，由两个节点组成的最近邻连通分量 C 最多需要 8 条边，即 $3|C|+2$ 条。

现在考虑包含两个以上节点的连通分量。假设 $x \in \mathrm{P}$ 的最近邻是节点 v。我们以 v 为中心定义新的锥 Q_0、……、Q_5，并以 x 为中心定义新的锥 Q_0'、……、Q_5'，起始边界均为经过 x 和 v 的直线。采用与之前相同的论证，x 最多需要四条附加边，并且存在一条从 v 经由 x 到达 Q_0 Q_1 内任意节点 y 的贪心路由路径。如上所示，节点 x 不可能位于 $X_{\prime 0}$、X_1' 内。因此，它必定位于另一个锥中。由此，锥 Q_0、Q_5 中必有一个与 X_1、……、X_4 中至少一个锥重叠。这减少了附加边的数量

v 至少需要保持贪心连通。

节点具有多个最近邻的情况是等价的，前提是这些邻居彼此也不是最近邻。否则，例如，如果 x也将u作为最近邻，那么 u 所需的边数也会减少一条。由于我们的目标是计算附加边数量的上界，因此在计算中排除这种情况。

扩展这一论证可知，在一个连通分量中，若某个节点在 $G_{NNG}(\mathrm{P})$ 中只有一个邻居，则至多需要四条附加边；若至少有两个这样的邻居，则至多需要三条边。因此，大小为 $|C|$ 的任意连通分量 C至多需要 $3|C|+2$ 条附加边。□

现在，我们将使用引理 6 证明一个主要结果：就密度而言，纳什均衡网络接近最优。在最坏情况下，自利行为只会使边的数量增加80%。

定理3。 在二维欧几里得度量中，无政府代价至多为1.8。

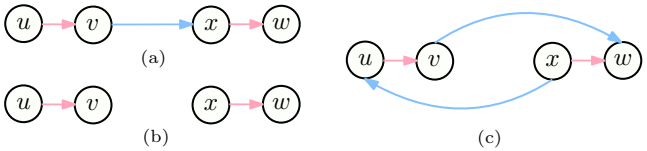


图 8：具有四个节点的网络的 (a)社会最优、(b)最近邻图和 (c) 一个纳什均衡。带方向的弧表示边所有权。

证明。如上所述，任何支持贪心路由的网络都必须将最近邻图包含为子图。因此，每个社会最优网络和每个纳什均衡网络也都将最近邻图包含为子图。示例见图 8。

NNG 由连通分量组成，每个连通分量至少包含两个节点。考虑定义在点集 P 上的纳什均衡网络 $G\mathbf{s}$，并令 $G_{NNG}(\mathrm{P})$ 表示相应的最近邻图。将 P 划分为 k个互不相交的集合 C_1，C_2、……、C_k，其中 k为 $G_{NNG}(\mathrm{P})$ 的连通分量数。每个集合 C_i包含第 i个连通分量中的节点，也就是说，任意两个节点 u, $v \in C_i$属于同一个集合 C_i，当且仅当它们属于 $G_{NNG}(\mathrm{P})$ 的同一个连通分量。于是，社会成本等于：

$$c(\mathbf{s}) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{u \in C_i} |S_u(\mathbf{s})| = \sum_{i=1}^{k} \sum_{u \in C_i} (|S_u^-(\mathbf{s})| + |S_u^+(\mathbf{s})|),$$

其中，$S_u^+\mathbf{s}$表示代理 u在 $G\mathbf{s}$中构建且同时出现在 $G_{NNG}(\mathrm{P})$ 中的边的集合，$S_u^-\mathbf{s}$表示代理 u构建但未出现在 $G_{NNG}(\mathrm{P})$ 中的边。等价地，我们将 $deg^+_{G(\mathbf{s})}(u)$ 定义为 u在 $G\mathbf{s}$中关联且同时出现在 $G_{NNG}(\mathrm{P})$ 中的边数，并将 $deg^-_{G(\mathbf{s})}(u)$ 定义为 u在 $G\mathbf{s}$中关联但未出现在 $G_{NNG}(\mathrm{P})$ 中的边数。

对于每个代理 u，存在一个由代理组成的集合 $W_u \subseteq \mathrm{P}$，使得代理 u可以通过以与代理 u相连的$G_{NNG}(\mathrm{P})$中的一条边为起点的贪心路由路径到达这些代理。令 $\phi'(u)$表示 u要与多少条边相连，才能通过贪心路由路径到达所有其他代理，即集合 $\mathrm{P} \setminus W_u$中的代理。

在最坏情况下，代理 u会独自构建所有 $\phi'(u)$ 条边。此外，根据引理 2 和注 1，我们知道代理 u

构建的非最近邻图边不会超过 $\phi'(u)$ 条。因此，

$$|S_u^-(\mathbf{s})| \le \phi'(u). \tag{1}$$

设 $\mathbf{s}^*$ 是实现社会最优的策略组合，并设 $G(\mathbf{s}^*)$ 为相应的网络。除去来自 $G_{NNG}(\mathbf{P})$ 的边，要使其成为贪心路由连通，每个代理 u 属于 $G(\mathbf{s}^*)$ 时，都必须至少关联 $\phi'(u)$ 条边。因此，

$$\sum_{u\in\mathcal{P}} \phi'(u) \le \sum_{u\in\mathcal{P}} deg^-_{G(\mathbf{s}^*)}(u) = 2\sum_{u\in\mathcal{P}} |S_u^-(\mathbf{s}^*)|. \tag{2}$$

结合 (1) 和 (2)，我们得到：

$$\begin{aligned}
\sum_{u\in\mathcal{P}} \phi'(u) &\le 2\sum_{u\in\mathcal{P}} |S_u^-(\mathbf{s}^*)| \\
\frac{1}{2}\sum_{u\in\mathcal{P}} |S_u^-(\mathbf{s})| &\le \sum_{u\in\mathcal{P}} |S_u^-(\mathbf{s}^*)| \\
\frac{1}{2}\sum_{u\in\mathcal{P}} |S_u^-(\mathbf{s})| + \sum_{u\in\mathcal{P}} |S_u^+(\mathbf{s})| &\le \sum_{u\in\mathcal{P}} |S_u^-(\mathbf{s}^*)| \\
&\quad + \sum_{u\in\mathcal{P}} |S_u^+(\mathbf{s}^*)|,
\end{aligned} \tag{3}$$

其中，最后一个不等式成立，是因为 $\sum_{u\in\mathcal{P}} |S_u^+(\mathbf{s}^*)| = \sum_{u\in\mathcal{P}} |S_u^+(\mathbf{s})|$，因为在这两个策略组合中，都必须购买数量相同的 NNG 边。因此，对于无政府代价，我们有：

$$PoA \le \frac{c(\mathbf{s})}{c(\mathbf{s}^*)} = \frac{\sum_{u\in\mathcal{P}} |S_u(\mathbf{s})|}{\sum_{u\in\mathcal{P}} |S_u(\mathbf{s}^*)|}.$$

利用 (3) 并对各个连通分量求和，我们得到：

$$PoA \le \frac{\sum_{u\in\mathcal{P}} |S_u^-(\mathbf{s})| + \sum_{u\in\mathcal{P}} |S_u^+(\mathbf{s})|}{\frac{1}{2}\sum_{u\in\mathcal{P}} |S_u^-(\mathbf{s})| + \sum_{u\in\mathcal{P}} |S_u^+(\mathbf{s})|} \tag{4}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^k \sum_{u\in C_i} |S_u^-(\mathbf{s})| + \sum_{i=1}^k \sum_{u\in C_i} |S_u^+(\mathbf{s})|}{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^k \sum_{u\in C_i} |S_u^-(\mathbf{s})| + \sum_{i=1}^k \sum_{u\in C_i} |S_u^+(\mathbf{s})|}. \tag{5}$$

当 $\sum_{i=1}^k \sum_{u\in C_i} |S_u^-(\mathbf{s})|$ 尽可能大且 $\sum_{i=1}^k \sum_{u\in C_i} |S_u^+(\mathbf{s})|$ 尽可能小时，无政府代价达到最大。因此，根据引理 6，我们有

$$\sum_{i=1}^k \sum_{u\in C_i} |S_u^-(\mathbf{s})| \le \sum_{i=1}^k \sum_{u\in C_i} (3|C_i| + 2),$$

而

$$\sum_{i=1}^k \sum_{u\in C_i} |S_u^+(\mathbf{s})| \ge \sum_{i=1}^k \sum_{u\in C_i} (|C_i| - 1),$$

由于 C_i 是连通的。因此，我们有：

$$\begin{aligned}
PoA &\le \frac{\sum_{i=1}^k (3|C_i| + 2) + \sum_{i=1}^k (|C_i| - 1)}{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^k (3|C_i| + 2) + \sum_{i=1}^k (|C_i| - 1)} \\
&= \frac{\sum_{i=1}^k (4|C_i| + 1)}{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^k (3|C_i| + 2) + \frac{2}{2}\sum_{i=1}^k (|C_i| - 1)} \\
&= \frac{2\sum_{i=1}^k (4|C_i| + 1)}{\sum_{i=1}^k (3|C_i| + 2) + \sum_{i=1}^k (2|C_i| - 2)} \\
&= \frac{8|\mathcal{P}| + 2k}{5|\mathcal{P}|}.
\end{aligned} \tag{6}$$

NNG 中连通分量的最大数量是 $\frac{|\mathcal{P}|}{2}$，因为每个连通分量至少包含两个节点。因此，

$$PoA \le \frac{(1+8)|\mathcal{P}|}{5|\mathcal{P}|} = 1.8. \qquad \square$$

现在我们将证明，我们的无政府代价上界几乎是紧的。为此，我们给出一个几乎匹配的下界，表明自利行为可以使建造的边数增加 75%。

引理 7. 在二维欧几里得度量中，无政府代价至少为 1.75。

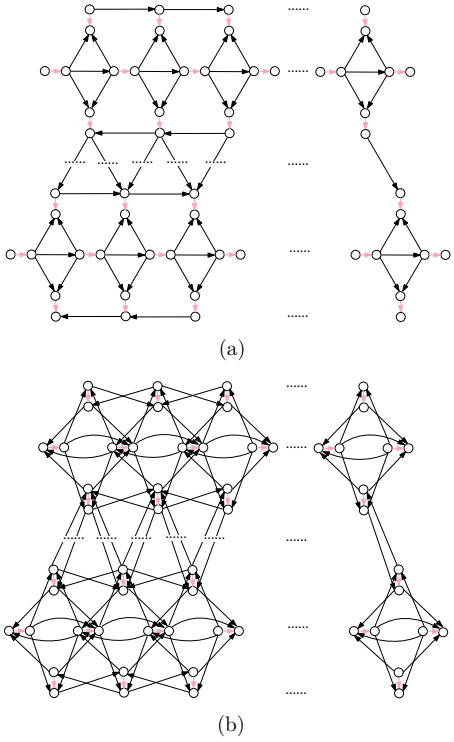


图 9：（a）社会最优（SO）；（b）社会成本为 SO 成本的 1.75 倍的一个纳什均衡（NE）。红色边属于最近邻图。所有边均为无向边，弧线表示边所有权。

证明思路。考虑图 9(a) 中的网络。令 $\mathbf{C}$ 表示该实例对应的最近邻图中连通分量的集合。每个最近邻图连通分量 $C \in \mathbf{C}$ 都由两个节点组成（由一条红色边连接），并通过 6 条边与 C 之外的节点相连；这是该实例中实现贪心连通性所需的最少边数。这是一个社会最优解，因为每条由代理 u 发出的非最近邻图边长度相等，且都有助于两个端点的贪心路由连通性。因此，边的总数为 $|\mathbf{C}|(\frac{6}{2}+1) = 4|\mathbf{C}|$。相比之下，图 9(b) 中的网络是一个纳什均衡，其中每条非最近邻图边只对一个端点的贪心连通性有贡献。因此，非最近邻图边的数量是社会最优解中的两倍，即为 $|\mathbf{C}|(6+1) = 7|\mathbf{C}|$。因此，社会成本比为 $\frac{7}{4} = 1.75$。$\square$

高维与一般度量。我们将分析扩展到更高维欧几里得空间和一般度量，以获得无政府代价的上界。

推论4. 在维数为 D的欧几里得度量中，无政府代价至多为 $2 - \frac{1}{K(D)}$；而在一般度量空间中，无政府代价小于2。

证明。我们继续分析定理3证明中的不等式（4）：

$$\begin{aligned} PoA &\le \frac{\sum_{u\in\mathcal{P}} |S_u^-(\mathbf{s})| + \sum_{u\in\mathcal{P}} |S_u^+(\mathbf{s})|}{\frac{1}{2}\sum_{u\in\mathcal{P}} |S_u^-(\mathbf{s})| + \sum_{u\in\mathcal{P}} |S_u^+(\mathbf{s})|} \\ &= \frac{2(\sum_{u\in\mathcal{P}} |S_u^-(\mathbf{s})| + \sum_{u\in\mathcal{P}} |S_u^+(\mathbf{s})|)}{\sum_{u\in\mathcal{P}} |S_u^-(\mathbf{s})| + 2\sum_{u\in\mathcal{P}} |S_u^+(\mathbf{s})|} \\ &= 2 - \frac{2\sum_{u\in\mathcal{P}} |S_u^+(\mathbf{s})|}{\sum_{u\in\mathcal{P}} |S_u^-(\mathbf{s})| + 2\sum_{u\in\mathcal{P}} |S_u^+(\mathbf{s})|} \end{aligned} \tag{7}$$

当$\sum_{u\in\mathcal{P}} |S_u^-(\mathbf{s})|$最大且$\sum_{u\in\mathcal{P}} |S_u^+(\mathbf{s})|$最小时，无政府代价达到最大。在一般度量的情形下，非最近邻图边的最大数量至多为：

$$\sum_{u\in\mathcal{P}} |S_u^-(\mathbf{s})| \le \frac{2(n-1)}{2} - \frac{n}{2}$$

其中，第一项是完全图的边数，第二项是最近邻图的最小边数。因此，一般度量下的无政府代价为：

$$\begin{aligned} PoA &\le 2 - \frac{2\sum_{u\in\mathcal{P}} |S_u^+(\mathbf{s})|}{\sum_{u\in\mathcal{P}} |S_u^-(\mathbf{s})| + 2\sum_{u\in\mathcal{P}} |S_u^+(\mathbf{s})|} \\ &\le 2 - \frac{2\frac{n}{2}}{\frac{n(n-1)}{2} - \frac{n}{2} + 2\frac{n}{2}} = 2 - \frac{2n}{n(n-1)+n} \\ &\le 2 - \frac{2n}{n^2} = 2 - \frac{2}{n} < 2. \end{aligned} \tag{8}$$

对于维数为 $D > 0$的欧几里得度量，代理构建的非最近邻图边的最大数量至多为 $K(D) - 1$，因为每个代理至少有一个最近邻。利用（7），可得：

$$\begin{aligned} PoA &\le 2 - \frac{2\sum_{u\in\mathcal{P}} |S_u^+(\mathbf{s})|}{\sum_{u\in\mathcal{P}} |S_u^-(\mathbf{s})| + 2\sum_{u\in\mathcal{P}} |S_u^+(\mathbf{s})|} \le 2 - \frac{2\frac{n}{2}}{(K(D)-1)n + 2\frac{n}{2}} \\ &\le 2 - \frac{n}{K(D)n} = 2 - \frac{1}{K(D)}, \end{aligned}$$

从而完成证明 . □

4.2 近似纳什均衡

一般度量。 我们首先研究寻找纳什均衡的最简单方法：最佳响应动态。遗憾的是，这些动态不保证收敛。

定理4。 最佳响应循环存在。

证明。考虑图 10（左上方）中网络的初始配置。代理 w到网络中除代理 z外的每个代理都有一条贪心路由路径。由于 y比 w更靠近 z，代理 w便连出一条边到 y。接着，代理 z被激活；由于不经过边 $\{z, a\}$ 时，它到每个代理都有一条贪心路由路径，因此它通过删除这条边降低了成本。接下来被激活的是代理 a，它到除 y外的每个代理都有一条贪心路由路径。因此，代理 a连出一条边到节点 w，因为 w比 a 更靠近y。随后，代理 w被激活，由于它有一条贪心

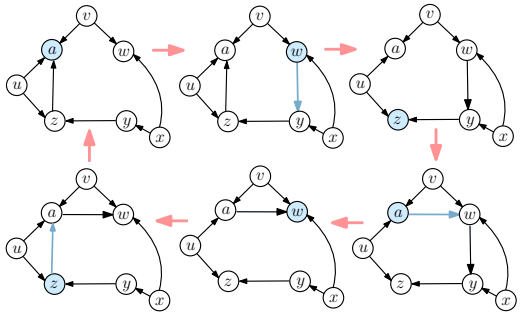


图10：最佳响应循环。

路由路径可以在不经过边 $\{w, y\}$ 的情况下到达每个代理，因此它通过删除这条边降低了成本。结果，代理 z不再有一条贪心路由路径到节点 w。接下来代理 z被激活时，它连出一条边到节点 a，因为 a比 z更靠近 w。最后，代理

a被激活，并移除了通往节点 w的边，因为即使没有这条边，它也能通过贪心路由路径到达其他所有代理，从而使网络恢复到原始配置。□

接下来，我们介绍一些对于证明近似纳什均衡存在性至关重要的定义和结果。

定义 1. 考虑支持贪心路由的图 $G(\mathcal{P}\ E)$。对于拥有关联边 $E_u \subseteq E$ 的代理 $u \in \mathcal{P}$，关键关联边集 $H_u \subseteq E_u$ 是关联边的一个极大集合，使得从 H_u 中移除任意一条边都会破坏代理 u的贪心连通性。

定义 2. 设 $G(\mathcal{P}\ E)$是一个支持贪心路由的图，且 H_u 是代理 u的关键关联边集。考虑修改后的网络 $G' = G(\mathcal{P}\ E \setminus H_u)$，其中边集 H_u 被移除。关键最佳响应 策略定义为代理 u 在 G' 中的最佳响应策略 S_u^{best}。如果存在多个最佳响应，我们选择与关键关联边集重叠最多的那个，即使量$|S_u^{best} \cap H_u|$ 最大化的策略。

接下来，我们为每个代理 $u \in \mathrm{P}$ 定义函数 $\alpha(u)$，该函数反映网络结构如何影响代理的策略。

定义 3. 设 $G(\mathcal{P}\ E)$是一个支持贪心路由的图。假设 S_u^{best}中恰有 $k \ge 0$条边是新的（即不与 $G(\mathcal{P}\ E)$中的节点 u相连）。那么 $\alpha(u) := k$定义为这些边的数量，即 $\alpha(u) := |S_u^{best} \setminus H_u|$。（见示例 5。）

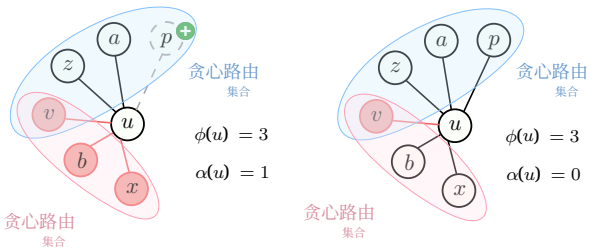


图 11：函数 $\alpha(u)$ 的示意图。

示例 5. 我们要确定图 11 中每条边的所有者，假设所示网络是纳什均衡网络的一部分。

集合 H_u、S_u^{best} 和参数 $\alpha(u)$ 被用作实现这一目标的工具。在图 11（左）中，假设代理 u 在贪心路由集 A 下是贪心连通的，而 $H_u = \{\{u,v\},\{u,b\},\{u,x\}\}$。因此，代理 u 没有激励购买边 $\{u,z\}$、$\{u,a\}$，因为它们对其贪心连通性没有贡献。因此，如果这是一个纳什均衡，那么这些边必须分别由代理 z 和 a 购买。此外，假设如果存在一条连接到节点 p 的边，代理 u 在贪心路由集 B 下将是贪心连通的。由于关键最佳响应 S_u^{best} 被定义为不含 H_u 边的网络中的最佳响应，并且边 $\{z,u\}$、$\{a,u\}$ 分别由 z 和 a 购买，因此我们有 $S_u^{best} = \{\{u,v\},\{u,p\}\}$。由于节点 v 已与 u 相连，因此我们有 $\alpha(u) = 1$。我们可以确定在此情形下代理 u 愿意购买哪些边。首先，代理 u 有激励购买边 $\{u,v\}$，因为它同时属于两个贪心路由集，即属于 $S_u^{best} \cap H_u$。此外，代理 u 至多可以从 $H_u \setminus S_u^{best}$ 中购买一条边，因为 $\alpha(u) = 1$。否则，代理 u 可以移除边 $\{u,b\}$ 和 $\{u,x\}$，转而购买一条连接到节点 p 的边，从而降低其总成本，因为边 $\{u,z\}$ 和 $\{u,a\}$ 分别由 z 和 a 购买。请注意，尽管边 $\{u,a\}$ 和 $\{u,z\}$ 对代理 u 的贪心连通性没有贡献，但它们仍会影响 $\alpha(u)$ 的值。

在图 11（右）中，代理 u 的贪心度为 3，而代理 u 同时由两个不同的贪心路由集贪心连通；而 $H_u = \{\{u, v\}\}$。因此，$S_u^{best} = \{\{u, v\}\}$，即 $\alpha(u) = 0$。因此，代理 u 有激励只购买边 $\{u, v\}$。◁

引理8。设 $G = (\mathcal{P}\ E)$ 是一个支持贪心路由的图，且 $u \in \mathcal{P}$ 是一个代理。在 G 的任意纳什均衡中，代理 u 只愿意购买 $S_u^{best} \cap H_u$ 中的边，以及从 $H_u \setminus S_u^{best}$ 中恰好 $\alpha(u)$ 条边。

证明。给定一个支持贪心路由的图 $G(\mathbf{P}\ E)$，假设存在一种所有权分配，使得 G 处于纳什均衡。我们的目标是确定代理愿意购买哪些关联边，以使 G 保持纳什均衡。

在纳什均衡中，每个代理 u 购买其关联边的一个子集 $S_u(\mathbf{s}) \subseteq E_u$，而其他边 $E_u \setminus S_u$ 则必须由其邻居购买。

首先，我们证明在纳什均衡中，代理 u 不会购买 $E_u \setminus H_u$ 中的任何边。假设不存在集合 $W \subseteq (E_u \setminus H_u)$，使得移除其中任意一条边都不会影响 u 的贪心连通性，而移除其中所有边则会影响其贪心连通性。在这种情况下，代理 u 没有激励购买 $E_u \setminus H_u$ 中的任何边，因为这些边不会促成其贪心连通性。如果存在这样的集合 W，那么代理 u 在 G 中必须通过多种策略实现贪心路由连通。否则，移除 W 中的任意一条边都会影响代理 u 的贪心连通性，这将意味着 $W_u \subseteq H_u$（见示例 5）。假设代理 u 购买了 $E_u \setminus H_u$ 中的一组边，这些边仅属于一种能使代理 u 实现贪心路由的策略。由于其余边由其邻居购买，这些边中也会包含属于另一种能使代理 u 实现贪心路由的策略的边。因此，代理 u 将能通过多种策略实现贪心连通，并可通过丢弃自己购买的所有边来降低成本。或者，假设代理 u 购买了 $E_u \setminus H_u$ 中的一组边，这些边属于多种贪心路由策略。由于所有关联边均由某个代理购买，代理 u 可以通过仅保留一种策略中的边并丢弃其余边来降低成本。因此，在所有情况下，当 G 处于纳什均衡时，代理 u 都不会购买 $E_u \setminus H_u$ 中的任何边。

另一方面，代理 u 愿意购买 H_u 中的一些边，以保持贪心路由连通。在任何纳什均衡中，代理 u 都愿意购买 $S_u^{best} \cap H_u$ 中的所有边，因为这些边属于最佳响应。此外，代理 u 愿意从 H_u 中剩余的边，也就是从 $H_u \setminus S_u^{best}$ 中，最多购买 $\alpha(u)$ 条边。否则，代理 u 可以移除 H_u 中未出现在 $S_u^{best} \cap H_u$ 里的边来降低成本，并改为购买这些 k 边。证明至此完成。□

在纳什均衡图 $G(\mathbf{s})$ 中，每条边都至少对其一个端点的贪心连通性有所贡献。我们区分两种边类型，定义如下：单边 和双边：

定义 4. 在纳什均衡图 $G(\mathbf{s})$ 中，代理 $u \in \mathcal{P}$ 的策略可划分为两个集合：单边 S_u^s 集合和双边 S_u^d 集合。边 $\{u,v\} \in S_u^s$ 称为单边，如果它只对代理 u 的贪心连通性有贡献；而边 $\{u,v\} \in S_u^d$ 称为双边，如果它对两个端点 u 和 v 的贪心连通性都有贡献。

注意，尽管单边 $\{u,\ v\}$ 只对 u 的贪心连通性有贡献，但它可能会影响代理 v 的 $\alpha(v)$ 的值。当代理 u 购买的单边 $\{u,\ v\}$ 必须出现在 v 的最佳响应中时，就可能发生这种情况。（参见示例 5。）

另一个有用的工具是Hakimi定理 [27]:

定理 6.（*Hakimi*定理）设 $G(V,E)$ 是一个无向图，且 δ 是定义在 V 上的整数值函数。那么，当且仅当对每个子集 $U \subseteq V$ 都满足 $\sum_{u\in U} \delta(u) \geq |E(U)|$ 时，G 才存在一种定向，使得每个顶点 $u \in V$ 的入度恰为 $\delta(u)$，其中 $E(U)$ 表示 G 中两个端点都属于 U 的边的集合。

我们接下来证明，每个社会最优解都是一个 2-纳什均衡。

定理 7. 在一般度量空间中，每个社会最优解都是一个2-纳什均衡。

证明。证明结构如下。我们从一个社会最优图 $G = (\mathbf{P}\ E)$ 开始，该图的边均未分配所有权。我们的目标是证明存在一种有效的所有权分配，使得 G 处于近似纳什均衡。

为此，我们首先构造辅助图 $\tilde{G}(\mathbf{P}\ \tilde{E})$。~ ~对于每个代理 $u \in \mathbf{P}$，图 $G(\mathbf{P}\ E)$ 包含代理 u 的所有单边，以及属于其关键最佳响应 S_u^{best} 的边，即 $\tilde{E} = \bigcup_{u\in\mathcal{P}} (S_u^s \cup S_u^{best})$。根据关键最佳响应的定义，并且由于所有单边都已包含在内，该图支持贪心路由。

由于 G 必须至少与 $\tilde{G}$ 拥有相同数量的边。因此我们有：

$$|\tilde{E}| \geq |E|$$

$$\sum_{u\in\mathcal{P}} (|S_u^{best} \cup S_u^s|) \geq |E|$$

$$\sum_{u\in\mathcal{P}} (|S_u^{best} \setminus H_u| + |S_u^{best} \cap H_u| + |S_u^{s^-}|) \geq |E|,$$

其中，$S_u^{s^-}$ 表示与代理 u 相关联且不属于 $(S_u^{best} \cap H_u)$ 的单边集合。由于 $\alpha(u) = |S_u^{best} \setminus H_u|$，我们有：

$$\sum_{u\in\mathcal{P}}(\alpha(u)+|S_u^{best}\cap H_u|+|S_u^{s-}|)\geq|E|. \tag{9}$$

得到这个不等式后，我们回到社会最优图 G。根据引理8，在 P 的任意纳什均衡中，代理 u 都愿意购买 $S_u^{best}\cap H_u$ 中的所有边，以及从 $H_u\setminus S_u^{best}$ 中恰好购买 $\alpha(u)$ 条边。

首先，我们将 $S_u^{best}\cap H_u$ 中的所有边分配给代理 u。如果一条边同时属于两个端点的关键最佳响应，我们就任意选择一个。接着注意，对代理 $u\in\mathrm{P}$ 的贪心连通性有贡献的剩余单边数量不会超过 $\alpha(u)$，否则我们可以用来自 $S_u^{best}\setminus H_u$ 的 $\alpha(u)$ 条边替换 S_u^{s-} 中的 $G(\mathrm{P},E)$，且不影响其他智能体的贪心连通性，从而构造出一个边数少于社会最优解的图，这就产生了矛盾。接下来，对于每个 $u\in\mathrm{P}$，我们将 S_u^{s-} 边（至多有 $\alpha(u)$ 条）分配给代理 u。

令 $G'(\mathrm{P},E')$ 为 G 的子图，其中包含所有剩余未分配边 $E'=E\setminus((S_u^{best}\cap H_u)\cup S_u^{s-})$。因此，我们有：

$$\sum_{u\in\mathcal{P}}(\alpha(u)+|S_u^{best}\cap H_u|+|S_u^{s-}|)\geq|E|$$

$$\sum_{u\in\mathcal{P}}\alpha(u)\geq|E|-\sum_{u\in\mathcal{P}}(|S_u^{best}\cap H_u|+|S_u^{s-}|)$$

$$\sum_{u\in\mathcal{P}}\alpha(u)\geq|E'|.$$

$(u,v)\in E'$ 中的每条边都对两个智能体 u 和 v 的贪心连通性有贡献，因此只要他们剩余的 α 值允许，就都有激励尽快购买该边。

反设存在一个子集 $U\subseteq\mathrm{P}$，使得 $\sum_{u\in U}\alpha(u)<|E'(U)|$，其中 $E'(U)$ 表示 G' 中两个端点都位于 U 内的边的集合。在这种情况下，我们可以针对每个代理 u，用 $E'(U)$ 中的边替换相应的 $\alpha(u)$ 条边，这些边取自 $S_u^{best}\setminus H_u$；然后添加 $E\setminus E'$ 中分配给它的边，从而得到一个支持贪心路由且边数少于社会最优解的图，矛盾。

因此，Hakimi定理（定理 6）适用于 $G'(\mathrm{P},E')$。令 $indeg_{G'}(u)$ 表示图 G' 中节点 $u\in\mathrm{P}$ 的入度。根据Hakimi定理，可以对图 G' 进行定向，使得对于每个 $u\in\mathrm{P}$，都有 $indeg_{G'}(u)\leq\alpha(u)$。将定向解释为边所有权后，存在一种 G' 中的所有权分配，使代理 u 至多购买 $\alpha(u)$ 条边。将这种分配应用于 G 中的边 $E\cap E'$，我们得到一种所有权分配，其中每个代理 u 建造 $|S_u^{best}\cap H_u|+2\alpha(u)$ 条边，而在纳什均衡中它本会建造 $|S_u^{best}\cap H_u|+\alpha(u)$ 条边。因此，社会最优网络 G 处于2-纳什均衡。□

二维欧几里得度量。 现在我们将重点讨论二维欧几里得度量。与定理 7 相比，我们证明一个更强的结果：每个社会最优都是一个 +2-纳什均衡。

定理 8。 在二维欧几里得度量中，每个社会最优都是一个 *+2*-纳什均衡。

证明。为了证明加性近似界，我们扩展定理 7 的证明。具体而言，设 $G(\mathrm{P},E)$ 为一个社会最优，对于每个代理 $u\in\mathrm{P}$，令 H_u 表示关键关联边集，令 S_u^{best} 表示关键最佳响应，并令 S_u^{s-} 表示与代理 G 相关联但不在 E 中的单边集合

然后，根据定理 7 的证明中的不等式（9），我们有：

$$\sum_{u\in\mathcal{P}}(\alpha(u)+|S_u^{best}\cap H_u|+|S_u^{s-}|)\geq|E|.$$

根据引理8，在 P 的任意纳什均衡中，代理 u 愿意购买 $S_u^{best}\cap H_u$ 中的所有边，以及从 $S_u^{best}\setminus H_u$ 中购买恰好 $\alpha(u)$ 条边。因此，我们为每个代理 u 分配 $S_u^{best}\cap H_u$ 中的所有边。

接下来，我们将证明，对于每个代理 $u\in\mathrm{P}$，都有

$$\alpha(u)\geq|S_u^{s-}|,$$

因为否则，鉴于单边只会影响相应代理 u 的贪心连通性，我们可以用 $\alpha(u)$ 条边替换 S_u^{s-} 中的边，从而得到一个边数少于社会最优的图。因此，这意味着：

$$\sum_{u\in\mathcal{P}}\alpha(u)\geq\sum_{u\in\mathcal{P}}|S_u^{s-}|. \tag{10}$$

由于 $\alpha(u)\geq|S_u^{s-}|$，我们为每个代理 u 分配 S_u^{s-} 中的所有边。随后，我们构造图 $G'(\mathrm{P},E')$，它由 E 中所有未分配的边组成，即集合 $E'=E\setminus\bigcup_{u\in\mathcal{P}}((S_u^{best}\cap H_u)\cup S_u^{s-})$。对于每个代理 $u\in\mathrm{P}$，我们定义函数 $\alpha'(u)=\alpha(u)-|S_u^{s-}|$。因此，我们有：

$$\sum_{u\in\mathcal{P}}(\alpha(u)+|S_u^{best}\cap H_u|+|S_u^{s-}|)\geq|E|.$$

$$\sum_{u\in\mathcal{P}}\alpha(u)\geq|E|-\sum_{u\in\mathcal{P}}(|S_u^{best}\cap H_u|+|S_u^{s-}|)$$

$$\sum_{u\in\mathcal{P}}\alpha(u)\geq|E'|.$$

注意，这个不等式对 G' 的每个诱导子图都成立。否则，沿用之前的相同论证，我们可以用 $S_u^{best}\setminus H_u$ 中的 $\alpha(u)$ 条边替换代理 u 的所有边，从而得到一个边数少于 E' 的图。随后加入 $E\setminus E'$ 中剩余的边，就会得到一个支持贪心路由且边数少于社会最优解的图，这与假设矛盾。

将 $\alpha(u)$ 替换为 $\alpha'(u)$，得到：

$$\sum_{u\in\mathcal{P}}(\alpha'(u)+|S_u^{s-}|)\geq|E'|.$$

考虑代理子集 $U\subseteq\mathrm{P}$，其中 $E'(U)$ 表示 G' 中两个端点都属于 U 的边集。因此，我们有：

$$\sum_{u\in U}(\alpha'(u)+|S_u^{s-}|)\geq|E'(U)|$$

$$\sum_{u\in U}\alpha'(u)+\sum_{u\in U}|S_u^{s-}|\geq|E'(U)|.$$

为了证明所需的近似界，我们首先考察 $\sum_{u\in U}|S_u^{s-}|\leq 2|U|$ 的情形。将上述不等式中的 $\sum_{u\in U}|S_u^{s-}|$ 替换为 $2|U|$，我们得到：

$$\sum_{u\in U}\alpha'(u)+2|U|\geq|E'(U)|$$

$$\sum_{u\in U}(\alpha'(u)+2)\geq|E'(U)|.$$

接下来，我们证明在$\sum_{u\in U}|S_u^{s-}|>2|U|$的情形下同一不等式仍然成立。我们从修改不等式（10）开始：

$$\sum_{u\in U}\alpha(u)\geq\sum_{u\in U}|S_u^{s-}|.$$

将$\sum_{u\in U}|S_u^{s-}|$替换为$2|U|$后，我们得到：

$$\sum_{u\in U}\alpha(u)>2|U|.$$

在等式两边加上$2|U|$，于是得到

$$\sum_{u\in U}\alpha(u)+2|U|>4|U|.$$

由于德劳内三角剖分支持贪心路由，且其边数至多为$3|U|-6$，因此$|E(U)|\leq 3|U|-6\leq 4|U|-1$，可得$\alpha(u)$。否则，根据引理，我们可以用德劳内三角剖分中的边替换$E(U)$中的边，从而再次得到一个支持贪心路由且边数少于社会最优的图。因此：

$$\sum_{u\in U}\alpha(u)+2|U|>4|U|>|E(U)|.$$

替换$\alpha(u)=\alpha'(u)+|S_u^{s-}|$后，我们得到：

$$\sum_{u\in U}(\alpha'(u)+|S_u^{s-}|)+2|U|>|E(U)|$$

$$\sum_{u\in U}\alpha'(u)+2|U|>|E(U)|-\sum_{u\in U}|S_u^{s-}|$$

$$\sum_{u\in U}(\alpha'(u)+2)>|E'(U)|.$$

结合这两种情况可得：

$$\sum_{u\in U}(\alpha'(u)+2)\geq|E'(U)|. \tag{11}$$

与之前一样，应用Hakimi定理（定理6），我们可以为G'中未分配的边计算所有权分配。因此，在纳什均衡中，每个代理u购买$|H_u\cap S_u^{best}|+\alpha(u)$条边，而在此构造中，一个代理$u$购买$|H_u\cap S_u^{best}|+\alpha'(u)+|S_u^{s-}|+2=|H_u\cap S_u^{best}|+\alpha(u)+2$条边。因此，$G$处于$+2$-纳什均衡。□

4.3 计算复杂性

我们在证明，计算最佳响应是NP困难的，而在欧几里得度量下，可以在多项式时间内计算出近似纳什均衡。

定理9. 计算最佳响应是*NP*困难的。

证明。我们对定理2的证明作如下修改：首先，将每条有向边替换为无向边，并将所有权分配给原边的尾节点。接着，从每个节点Q_i'到u添加一条边，并将该边的所有权分配给Q_i'。这样，代理u就有一条通往每个节点Q_i'和每个节点Q_i的贪心路由路径。证明的其余部分保持不变。□

算法1 计算_近似_纳什均衡 1: $E\leftarrow\emptyset$ 2: 对所有$u\in$ P 执行 3: $\Phi(u)\leftarrow$ 代理u的最小贪心路由集 4: $E\leftarrow E\cup\Phi(u)$ 5: 结束循环 6: 删除后不会禁用任何代理的贪心路由的E中的边 $X\leftarrow$ 7: $E\leftarrow E\setminus X$ 8: $G\leftarrow G($P $E)$ 9: $flag\leftarrow true$ 10: 当$flag$时 11: $A\leftarrow\emptyset$, $A_u\leftarrow\emptyset$, $S\leftarrow\emptyset$, $S_u^{s-}\leftarrow\emptyset$ 12: G中代理u的临界集$H_u\leftarrow$ 13: G中代理u的关键最佳响应$S_u^{best}\leftarrow$ 14: 对所有$u\in$ P 执行 15: $A_u\leftarrow S_u^{best}\setminus H_u$ 16: 不在$S_u^{best}\cap H_u$中的代理u的单边$S_u\leftarrow$ 17: $A\leftarrow A\cup A_u$ 18: $S\leftarrow S\cup S_u^{s-}$ 19: 结束循环 20: $a_{change}\leftarrow false$ 21: 对所有$u\in$ P 执行 22: 如果$|A_u|<|S_u^{s-}|$则 23: $E\leftarrow(E\setminus S_u^{s-})\cup A_u$ 24: $a_{change}\leftarrow true$ 25: 跳出循环 26: 结束条件判断 27: 结束循环 28: 如果a_{change}则 29: 继续 30: 结束条件判断 31: 如果 HakimiMaxFlow(A, S, E) 则 32: $w\leftarrow$ 所有权分配 33: $flag\leftarrow false$ 34: 否则 35: $E\leftarrow A\cup S$ 36: 结束条件判断 37: $G\leftarrow G($P $E)$ 38: 结束循环 39: 返回 G, w

欧几里得度量。 在这里，我们证明，在二维欧几里得度量下，可以在多项式时间内计算出边数至多为最优值1.8倍的近似纳什均衡；在D维欧几里得度量下，可以计算出边数至多为最优值$2-1/K(D)$倍的近似纳什均衡。请注意，这一界优于德劳内三角剖分在二维欧几里得度量下所达到的3的近似比。

定理10. 在维数为$D>0$的欧几里得度量下，2-近似纳什均衡，以及在二维欧几里得度量下边数至多为二维欧几里得度量下最优边数*1.8*倍的+2-近似纳什均衡，还有在D维欧几里得度量下边数至多为最优边数$2-1/K(D)$倍的近似纳什均衡，均可在多项式时间内计算。

证明。考虑算法1。首先，我们为每个代理$u\in$ P 计算最小贪心路由集$\Phi(u)$。然后，我们筛选

所得的边，排除那些移除后不会使任何代理的贪心路由失效的边。接下来，我们用剩余的边构造图 $G(\mathrm{P}\ E)$。由于每个代理的最小贪心路由集大小为常数，且筛选步骤涉及检查每个代理的关联边，该过程可在多项式时间内运行。

接下来，我们将证明，只需进行少于 $(K(D)\ -1)|\mathrm{P}|-1$次迭代；在每次迭代中，我们为每个代理 u计算关键关联边集 H_u、关键最佳响应 S_u^{best}、边集$A_u = S_u^{best}\backslash H_u$，以及不属于 $S_u^{best}\cap H_u$ 或 S_u^{s-} 的单边集合。这些计算均可在多项式时间内完成。注意，$|A_u| = \alpha(u)$。

对于每个代理 $u \in \mathrm{P}$，我们检查 $\alpha(u) < |S_u^{s-}|$是否成立。若成立，则将 S_u^{s-} 中的边替换为 E 内的 A_u 中的边。所得图包含更少的边，且仍支持贪心路由，因为与代理 u 相关联的单边只影响其自身的贪心连通性。随后，算法会为每个代理 $u \in \mathrm{P}$ 重新计算 H_u，A_u，A 和 S_u^{best}。由于任何支持贪心路由的图至少包含 $|\mathrm{P}|-1$ 条边，并且循环的每次迭代都会严格减少边的数量，因此该过程最多重复 $(K(D)\ -1)|\mathrm{P}|-1$ 次。

另一方面，如果对于每个$u \in \mathrm{P}$，$\alpha(u) \geq |S_u^{s-}|$，那么我们检查Hakimi定理（定理 6 $\sum_{u\in}\ \alpha\ u\ + S_u^{s-}\ \geq$）是否适用，即检查$|E'|$ $E' = \bigcup_{u\in}\ H_u\ \ S_u^{best}\cup S_u^{s-}$ $_{\mathcal{P}}(\ (\ ))$是否成立，其中$_{\mathcal{P}}(\backslash(\ ))$。使用最大流算法 [24, 27]可以在多项式时间内检查这一条件。如果最大流小于 $|E'|$，则不满足Hakimi定理的条件。在这种情况下，我们将 E'中的边替换为 $A\cup S$中的边，从而减少边的数量，然后重新开始循环。同样，这种情况最多可能发生 $(K(D)\ -1)|\mathrm{P}|-1$ 次。

如果满足 Hakimi定理的条件，我们就利用最大流解为边 E' 分配所有权。然后，我们将 H_u, S_u 中剩余的边分配给每个代理 u。由于对于每个代理 u，$\alpha(u) \geq S_u^{s-}$，且 Hakimi定理适用，因此（如定理 7 所示）所得的图在欧几里得度量下是一个 2- 纳什均衡。此外，边的总数至多为最优值的 $2-1/K(D)$ 倍。这是因为在 $G(\mathrm{P}\ E)$的初始构造中，我们采用了与计算定理3和推论4中的社会成本相同的步骤。

对于二维欧几里得度量，我们在第 8 行计算同一点集的德劳内三角剖分。如果德劳内三角剖分的边数少于 E，我们就用德劳内三角剖分的边替换 E。因此，最终得到的图至多有 $3|\mathrm{P}|-6$ 条边。根据定理 8 和定理3，我们得到该构造是一个 $+2$-纳什均衡，且边数至多为最优值的 1.8 倍。□

推论 5. 在维数为 $D > 0$的欧几里得度量中，判断一个策略组合是否为纳什均衡可以在多项式时间内完成。

证明。由于如上所示，在多项式时间内可以计算出任何纳什均衡中每个代理购买的边集，因此我们检查相应的边是否分配给每个代理。对于其他边，我们检查剩余的 α-值是否不大于分配给每个代理的边数。□

5 结论

我们研究如何通过分布式网络创建来实现贪心路由。我们发现，在有向边的情形下，均衡存在且达到最优；而无向边的情形则复杂得多。对于后一种情形，我们给出一种算法，能够构造近似均衡，其边数仅略多于社会最优解。此外，我们给出了一个几乎紧确的无政府代价界，这表明，由智能体的自私性导致的边数增加无法避免。不过，我们强调，所构造的网络仍显著优于著名的德劳内三角剖分。

未来的工作可以基于我们将网络创建博弈与计算几何相结合的基础展开。具体而言，可以改进该构造，以实现伸展度或鲁棒性保证等附加特性。此外，证明精确均衡存在也是一个令人期待的开放问题。我们认为，我们的构造或许已经能够导出纳什均衡，但要证明这一点颇具挑战性，需要进一步洞察其结构。

参考文献

[1] Mohammad Ali Abam与Mahnaz Sadat Qafari。2019年。几何拉伸博弈。理论计算机科学 795 2019 398 407 10 1016 2019 07 020 ( ), – . [2] doi: . /J.TCS. . . Yousef Al-Jazzazi 、 Haya Diwan 、 Jinrui Gou 、 Cameron Musco 、 Christopher Musco与Torsten Suel。2025年。用于可证明准确的基于图的最近邻搜索的距离自适应束搜索。*arXiv*预印本 *arXiv:2505.15636* (2025年)。[3] Venkatesh Bala与Sanjeev Goyal。2000年。网络形成的非合作模型。《计量经济学》 68, 5 (2000年), 1181–1229. doi:10.1111/1468-0262.00155[4] Julian Berger、Tobias Friedrich、Pascal Lenzner、Paraskevi Machaira与Janosch Ruff。2025年。用于实现贪心路由的策略性网络创建。载于*AAAI'25*，第39卷。13622–13630. doi:10.1609/AAAI.V39I13.33488[5] Davide Bilò、Tobias Friedrich、Pascal Lenzner与Anna Melnichenko。2024年。几何网络创建博弈。《*SIAM*离散数学杂志》 38, 1 (2024年), 277–315. doi:10.1137/20M1376662[6] Thomas Bläsius、Tobias Friedrich、Maximilian Katzmann与Anton Krohmer。2020年。用于近乎最优贪心路由的双曲嵌入。《*ACM* 实验算法学杂志》 25 2020 1 18 10 1145 3381751 ( ), – . doi: . / Marián [7] 2009 Boguñá、Dmitri V. Krioukov与Kimberly C. Claffy。复杂网络的可导航性。《自然·物理》 5, 1 2009 74 80 10 1038 1130 ( ), – . doi: . / [8] 2010 nphys Marián Boguñá、Fragkiskos Papadopoulos与Dmitri Krioukov。利用双曲映射维持互联网。*Nature Communications* 1, 1 (2010年), 62. doi:10.1038/ncomms1063[9] Prosenjit Bose与Pat Morin。2004年。三角剖分中的在线路由。《*SIAM*计算杂志》 33, 4 2004 937 951 10 1137 0097539700369387 (1月), – . doi: . /S [10] Prosenjit Bose、Pat Morin、Ivan Stojmenovic与Jorge Urrutia。2001年。自组无线网络中的保证交付路由。《无线网络》 7, 6 (2001 609 616 10 1023 1012319418150), – . [11] 1987 doi: . /A: Kenneth L. Clarkson。最短路径运动规划的近似算法（扩展摘要）。载于*STOC'87*, Alfred V. Aho（编）。ACM，56–65. doi:10.1145/28395.28402[12] John Horton Conway与Neil James Alexander Sloane。2013年。球堆积、格与群。第290卷。Springer Science & Business Media。[13] Andrej Cvetkovski与Mark Crovella。2009年。动态图的双曲嵌入与路由。载于*INFOCOM'09*。IEEE，1647–1655. doi:10.1109/INFCOM.2009.5062083[14] Susanta Datta、Ivan Stojmenovic与Jie Wu。2002年。无线网络中基于内部节点和捷径且保证交付的路由。《集群计算》 5, 2 2002 169 178 10 1023 1013985610753 ( ), – . doi: . /A: Mark de Berg、[15] Otfried Cheong、Marc J. van Kreveld与Mark H. Overmars。2008年。计算几何：算法与应用，第*3*版。Springer. doi:10.1007/978-3-540-77974-2[16] Haya Diwan、Jinrui Gou、Cameron Musco、Christopher Musco与Torsten Suel。2024年。用于高维最近邻搜索的可导航图：构造与极限。载于*NeurIPS'24*。http://papers.nips.cc/paper_files/paper/2024/hash/6dc63b4063c978cf195bc15178e8152a-Abstract-Conference.html[17] Stephan J. Eidenbenz、V. S. Anil Kumar与Sibylle Zust。2006年。自组网络拓扑控制博弈中的均衡。《移动网络与应用》 11, 2 (2006年), 143–159. doi:10.1007/s11036-005-4468-y [18] David Eppstein与Michael T Goodrich。2008年。双曲平面中的简洁贪心图绘制。载于*GD'08*。Springer，14–25. doi:10.1007/978-3-642-00219-9_3

[19] Alex Fabrikant、Ankur Luthra、Elitza Maneva、Christos Papadimitriou与Scott Shenker。2003年。论网络创建博弈。载于PODC'03。347–351. doi:10.1145/872035.872088[20] Qing Fang、Jie Gao与Leonidas J Guibas。2006年。传感器网络中孔洞的定位与绕行。《移动网络与应用》11, 2 (2006年), 187–200. doi:10.1007/s11036-006-4471-y[21] Gregory G Finn。1987年。大都市规模互联网络中的路由与寻址问题。技术报告。[22] Wilhelm Friedemann、Tobias Friedrich、Hans Gawendowicz、Pascal Lenzner、Anna Melnichenko、Jannik Peters、Daniel Stephan与Michael Vaichenker。2021年。欧几里得网络设计中的效率与稳定性。载于SPAA '21。232–242. doi:10.1145/3409964.3461807[23] Cong Fu、Chao Xiang、Changxu Wang与Deng Cai。2017年。利用导航扩展图的快速近似最近邻搜索。arXiv预印本 arXiv:1707.00143 (2017年)。[24] David Gale。1957年。网络流定理。载于《组合学经典论文》。Springer，259–268。[25] Mohsen Ghaffari、Behnoosh Hariri与Shervin Shirmohammadi。2010年。论基于贪心路由的网络中使用德劳内三角剖分基底的必要性。IEEE Communications Letters 14, 3 (2010年3月), 266–268. doi:10.1109/ LCOMM.2010.03.092045[26] András Gulyás、József J. Bíró、Attila Kőrösi、Gábor Rétvári与Dmitri Krioukov。2015年。作为导航博弈纳什均衡的可导航网络。Nature Communications 6, 1 2015 7651 10 1038 8651 ( ), . doi: . /ncomms S [27] 1965 Louis Hakimi。论有向图顶点的度数。Journal of the Franklin Institute 279, 4 (1965年), 290–308。[28] Brad Karp与Hsiang-Tsung Kung。2000年。GPSR：无线网络的贪心周界无状态路由。载于MOBICOM'00。243–254. doi:10.1145/345910.345953[29] Robert Kleinberg。2007年。使用双曲空间的地理路由。载于INFO- CO M' *07* 1902 1909 10 1109 2007 221 。IEEE，– . doi: . / [30] 2009 INFCOM. . Elias Koutsoupias与Christos H. Papadimitriou。最坏情形均衡。Comput. Sci. Rev. 3, 2 2009 65 69 10 1016 2009 04 003 ( ), – . doi: . / [31] 2003 J.COSREV. . . Fabian Kuhn、Rogert Wattenhofer与Aaron Zollinger。最坏情形最优且平均情形高效的几何自组网路由。载于MOBICOM'03。267–278. doi:10.1145/778415.778447[32] Vijay Kumar、Daniela Rus与Sanjiv Singh。2004年。面向应急响应人员的机器人与传感器网络。IEEE Pervasive Comput. 3, 4 (2004年), 24–33. doi:10.1109/ MPRV.2004.17[33] Wen-Jiunn Liu与Kai-Ten Feng。2008年。无线传感器网络中带反空洞遍历的贪心路由。IEEE移动计算汇刊 8, 7 (2008年), 910–922. doi:10.1109/TMC.2008.162[34] Konrad Lorincz、David J. Malan、Thaddeus R. F. Fulford Jones、Alan Nawoj、Antony Clavel、Victor Shnayder、Geoffrey Mainland、Matt Welsh与Steve Moulton。2004年。应急响应传感器网络：挑战与机遇。IEEE Pervasive Comput. 3, 4 2004 16 23 10 1109 2004 18 ( ), – . doi: . / [35] 2018 MPRV. . Yu A Malkov与Dmitry A Yashunin。使用分层可导航小世界图的高效稳健近似最近邻搜索。IEEE模式分析与机器智能汇刊 42, 4 (2018年), 824–836. doi:10.1109/TPAMI.2018.2889473[36] Dov Monderer与Lloyd S Shapley。1996年。势博弈。Games and Economic Behavior 14, 1 1996 124 143 10 1006 1996 0044 ( ), – . doi: . /game. . [37] 2001 Christos H. Papadimitriou。算法、博弈与互联网。载于STOC'01。749–753. doi:10.1145/380752.380883[38] Christos H. Papadimitriou与David Ratajczak。2005年。关于与几何路由相关的一个猜想。Theor. Comput. Sci. 344, 1 (2005年), 3–14. doi:10.1016/J.TCS. 2005.06.022[39] Yu Wang、Chih-Wei Yi、Minsu Huang与Fan Li。2013年。大规模随机无线传感器网络中的三维贪心路由。Ad Hoc Networks 11, 4 2013 1331 1344 10 1016 2010 10 003 ( ), – . doi: . /J.ADHOC. . . [40] 2009 Cédric Westphal与Guanhong Pei。通过贪心嵌入的可扩展路由。载于INFOCOM'09。IEEE，2826–2830. doi:10.1109/INFCOM.2009.5062240