arXiv:2601.23165v1 [math.LO] 30 Jan 2026

类选择与凯利-莫尔斯集合论令人意外的弱点

VICTORIA GITMAN、JOEL DAVID HAMKINS 和 THOMAS A. JOHNSTONE

Abstract. 凯利-莫尔斯集合论 KM 比通常所认为的更弱，无法证明若干在基础性的二阶集合论中可能值得采用的原理。例如，尽管 KM 包含全局选择原理，(i) KM 并不能证明 *class choice* 模式；该模式断言，只要每个集合 x 都存在一个类 X ，使得 $\varphi(x,\ X)$，那么就存在一个类$Z \subseteq V \times V$，使得对每个截面都有 $\varphi(x,\ Z_x)$。即使是一阶实例中复杂度很低的情形 φ ，甚至只涉及一个指标集 x 时，这一模式在 KM 中也可能失效。出于密切相关的原因，(ii) KM 理论无法证明内部二阶超幂的 -Lo´s 定理模式，即使对于大基数超幂也是如此，例如由可测基数上的正规测度导出的超幂。事实上，KM 理论本身通常也不会在内部超幂下保持不变。最后，(iii) KM 无法证明 Σ^1_n 逻辑复杂度在一阶量词（甚至有界一阶量词）下保持不变。例如，当 ψ 时， $\forall\alpha{<}\delta\ \psi(\alpha,\ X)$ 并不总能被证明等价于一个 Σ^1_1 断言。尽管如此，只要通过加入类选择模式来扩充 KM，形成理论 KM$^+$，便可弥补 KM 的这些弱点；我们建议将其作为二阶集合论基础的一种稳健的 KM 替代方案。

1. Introduction

假设对于每个自然数 n，都存在一个类 X ，使得某个性质 $\varphi(n,\ X)$ 成立——并假设我们所处的是一种适当的带类集合论，其中包含选择公理，甚至包含全局选择原理。我们是否应该期待找到一个统一类 $Z \subseteq \omega \times V$，使得对于所有不同的截面， $\varphi(n,\ Z_n)$ 都成立? 类似地，如果每个序数 α 都有一个类 X ，使得 $\varphi(\alpha,\ X)$ 成立，那么我们是否应该期待找到一个类 $Z \subseteq \mathrm{Ord} \times V$，使得在每个截面上 $\varphi(\alpha,\ Z_\alpha)$ 都成立? 或者，如果每个集合 x 都有一个类 X 满足 $\varphi(x,\ X)$，那么我们能否找到一个类$Z \subseteq V \times V$，将这些见证统一起来 $\varphi(x,\ Z_x)$?

这些都是类选择模式的实例，也是本文关注的核心问题。每种情形下的类 Z 都会统一类见证，实际上是为每个指标 x在相应截面上选择一个类见证 Z_x 。因此，类选择模式是一种允许选择类而非集合的选择原理。

相对容易看出，即使该理论包含全局选择公理，类选择模式也无法在 G¨odel–Bernays GBC 集合论中得到证明。任何配备了且仅配备其所有可定义类的 ZFC $+\ V =$ HOD 传递模型，都是一个反模型。在这样的模型中，我们可以观察到，对于每个 n ，都有一个可定义的 Σ_n-真谓词（一个部分满足类）；但根据塔斯基关于真理不可定义性的定理，这些谓词无法统一为一个可定义的类。事实上，在这个例子中，我们并没有真正“选择”这些类，因为对于每个 n ，实际上都存在唯一的 Σ_n-真谓词。

更确切地说，这里发生的情况是，GBC 的力量不足以将这些各自唯一的见证收集到一个统一的类中（尽管 KM 可以做到）。这种情况与其说是选择的失败，不如说更像是类层面的收集公理失效，甚至是替代公理失效。

然而，得知类选择模式即使在强得多的 Kelley-Morse KM 集合论中也不可证明，或许会更加令人惊讶。对于这一理论而言，上述简单的真谓词反例完全不构成问题，因为 KM 证明：相对于任意类参数，都存在一致的一阶真谓词满足类。尽管如此，我们将在第 4 节证明，KM 并不证明类选择模式；事实上，即使在复杂度非常低的一阶实例中，并且再次仅使用一个集合的指标集，该模式也可能失败。因此，尽管凯利-莫尔斯集合论 KM 证明了一阶真谓词的存在性，但它并不证明类选择模式，即使是在看似简单的情形下也是如此。

此外，这些证明方法还揭示了 KM 的若干其他令人惊讶的弱点，这或许会使人质疑该理论是否适合作为集合论的基础。具体而言，KM 并不证明内部二阶超幂的 ´Lo´s 定理模式，即使是在大基数超幂的情形下也是如此，例如由可测基数上的正规测度所产生的超幂——是的，熟悉的大基数嵌入可能无法在 KM 集合论的语言中保持初等性。对于 ω 上的超滤子所产生的超幂，我们将证明，KM 宇宙的内部超幂本身甚至并不总是 KM 模型。最后，我们将证明，KM 并不证明二阶逻辑复杂度在一阶量词下保持不变，即使是有界一阶量词也不例外。鉴于所有这些弱点，KM 这一理论似乎并不像人们原本可能认为的那样，是一个足够稳健的基础理论。

与此同时，通过在理论 KM 中加入类选择方案，从而形成我们记作 KM^+ 的理论，我们解决了所有这些弱点；从这个意义上说，KM^+ 成功地为二阶集合论提供了稳健的基础性处理。

1.1. 集合与类的背景。 一阶集合论的对象是集合，集合论学者通常把一阶集合论模型中的类简单地视为集合的可定义集族（允许参数），这意味着对其性质的研究自然发生在元理论中。相比之下，研究集合与类的形式框架由二阶集合论提供。对二阶集合论最自然的解释是在一种双种类逻辑中进行，其中集合与类具有各自独立的种类（独立的变元与量词）。二阶集合论的语言有两种隶属关系，一种判定集合对集合的隶属，另一种判定集合对类的隶属。由于二阶集合论的基础公理断言类是集合的外延集族，与我们相关的二阶集合论模型具有形式 $\langle V, \in, \mathcal{S}\rangle$，其中 $\langle V, \in\rangle$ 是一阶集合论语言的一个模型，而 $\mathcal{S}$ 是类族，即集合的集族。[1] 按照标准约定，我们用小写字母表示集合，用大写字母

[1]尽管双排序逻辑为二阶集合论提供了一种启发式上更受青睐的解释，但实际上它可以用单类型一阶逻辑形式化。在一阶解释中，对象是带有成员关系的类，而集合则被定义为那些属于其他类的类。

表示类。在二阶集合论的元理论中，我们还可以研究超类，即类的可定义（带参数）集族。

任何合理的二阶集合论公理化基础都应断言，所有集合构成的集族满足 ZFC；更一般地，在加入任意有限多个类的谓词后，它仍应在扩展的一阶语言中满足 ZFC。后一项更一般的要求可转化为类替换公理：它断言，类函数作用于集合所得的像本身也是集合。合理的基础还应包含一些类存在原则，特别是应通过断言每个一阶可定义集合族都是一个类，来推广一阶集合论中的类概念。二阶集合论中最常考虑的两种公理化基础是 G¨odel-Bernays 公理（GBC）和 Kelley-Morse 公理（KM）。它们的区别在于概括公理模式的强弱，该模式决定哪些（二阶）可定义集族是类。理论 GBC 仅包含最弱的一阶概括，且与 ZFC 等一致。理论 KM 断言完整的二阶概括（精确的公理化体系见下一节第 2 节）；就强度而言，它介于存在一个 ZFC 的传递模型与存在一个不可达基数之间（见引理 12 和 13）。

1.2. **类选择模式**。 二阶集合论的公理化体系通常包含针对类的选择原则，因为这些原则能推出许多在此背景下所期望的性质。一种常用的选择原理是类选择模式，它断言每个由 V 索引的可定义超类族都有一个选择函数$\mathcal{F}$： $V \to \mathcal{S}$。从历史上看，这一原理可追溯至 Marek 在 20 世纪 70 年代的博士论文 [Mar73]，此后曾被多次重新发现；最近，Hrb´aˇcek 在关于含无穷小的非标准二阶集合论的研究中 [Khr05]，以及 Antos 和 Friedman 在 KM 模型上可定义超类力迫的研究中 [AK14]，都重新提出了这一原理。为了给出类选择模式的精确表述，我们采用标准记号：若 Z 是一个类，那么

$$Z_x = \{\, y \mid (x, y) \in Z \,\}$$

表示在 Z 的 section x 上编码的类。我们认为，这样的类 Z 自然地编码了函数 $x \mapsto Z_x$，从而实际上使我们能够指称上述函数 $\mathcal{F}$： $V \to \mathcal{S}$。一般而言，若一族类可以像这样由单个类Z编码，我们就称其为可编码的超类。

定义 1. 对于二阶集合论语言中的任意公式 φ，并允许使用任意类参数 A，类选择 模式是以下断言模式：

$$\forall x\, \exists X\, \varphi(x, X, A) \to \exists Z\, \forall x\, \varphi(x, Z_x, A).$$

正如我们在引言中所暗示的，类选择模式也可以被视为一种收集原理，而非选择原理，因为它在 GBC 上等价于以下看起来稍弱的原理，即类收集 模式：

$$\forall x\, \exists X\, \varphi(x, X, A) \to \exists Z\, \forall x\, \exists y\, \varphi(x, Z_y, A).$$

在这种表述中，类见证 X 只是作为截面 Z_y收集起来，但不一定位于相应的截面 Z_x上。首先要注意，这两个原理中的任意一个加在 GBC 上都能推出 Kelley–Morse 集合论；进一步来说，有了类收集模式，就可以通过全局选择为每个 x 选取一个合适的 y，从而将截面替换为位于正确指标上的截面，使这两个原理等价。

类选择模式有几种自然的弱化方式：按 φ 的逻辑复杂度分层，或将范围限制在指标集合上。

定义 2。

- 对于复杂度至多为 Σ^1_n （或 Π^1_n）的实例， Σ^1_n （或 Π^1_n）-类选择 模式是类选择模式的限制。
- 以集合为指标的类选择 模式是将类选择模式限制在以集合为指标的族上。也就是说，对于任意集合 a、类参数 A以及二阶集合论语言中的任意公式 φ ，我们纳入

$$\forall x \in a\, \exists X\, \varphi(x, X, A) \to \exists Z\, \forall x \in a\, \varphi(x, Z_x, A).$$

- 参数自由类选择模式是将类选择模式限制为无参数公式 $\varphi(x, X)$。

正如我们在第 3 节所讨论的，我们认为，将类选择模式与它在二阶算术中的对应概念进行比较颇有启发。例如，参数自由类选择模式这一概念是由 Guzicki [Guz76]在二阶算术的语境下引入的。

1.3. **主要结果**。 我们旨在证明，KM 甚至无法证明类选择模式中最弱的实例，即关于为 ω指标的参数自由一阶可定义族存在选择函数的实例。这与二阶算术中的情形形成了有趣的对照：在二阶算术中，Z_2, 通常被视为 KM 在算术方面紧密对应的理论（第 3 节将对此详述），并且它证明了类选择模式的所有Σ^1_2 实例。我们还将证明，KM 加上集合指标类选择模式并不能推出类选择模式，即使限于参数自由的一阶公式也是如此；而 KM 加上参数自由类选择模式也不能推出类选择模式。证明主要结果时，我们将自由使用温和的大基数假设，因为这些假设并不会削弱我们的核心论点：KM 无法证明集合论学家希望基础理论具备的、关于集合与类的二阶基础理论的那些性质；集合论学家希望使用的基础理论还带有这些乃至强得多的大基数。

定理 3。 (ZFC + 存在一个马洛基数) 存在一个 *Kelley–Morse* 集合论 KM 模型，其中某个实例

$$\forall n{\in}\omega\, \exists X\, \varphi(n, X) \to \exists Z\, \forall n{\in}\omega\, \varphi(n, Z_n)$$

的类选择模式对一阶公式 $\varphi(x, X)$不成立。

定理 4。 (ZFC + 存在一个马洛基数) 存在一个 *Kelley–Morse* 集合论 KM 模型，其中集合指标类选择模式成立，但无参数一阶公式的类选择模式不成立。

定理 5。 (ZFC +存在一个不可达基数) 存在一个 *Kelley–Morse* 集合论 KM 模型，其中无参数类选择模式成立，但类选择模式对一个 Π^1_1-公式不成立。

定理 5 及其证明受到 [Guz76] 的工作的启发。

KM 甚至无法证明类选择模式最弱的实例，这表明该理论存在根本性的弱点，也可能促使我们重新考虑它在二阶集合论中的重要地位。为凸显这一弱点，我们证明，对于 KM 宇宙的内部二阶超幂， ´Lo´s 定理模式可能会失效。

定理 6。 (ZFC +存在一个不可达基数) 存在一个KM模型，其内部二阶超幂（由KM-模型上的一个超滤子所取）本身并非KM模型。

类似地，我们证明 KM 并不能证明大基数嵌入——例如通过可测基数上的正规测度对宇宙取超幂——在 KM 语言中是初等的。

定理 7。 (ZFC +其上方存在一个不可达基数的可测基数) 存在一个 Kelley–Morse 集合论模型，其中有一个可测基数 δ，使得通过 δ 上的正规测度对宇宙取内部超幂，在 Kelley–Morse 集合论 语言中并非初等。

我们还证明，KM 并不能证明 Σ^1_1 公式（在等价意义下）对一阶量词封闭，甚至对有界一阶量词也不封闭。

定理 8。 (ZFC +其上方存在一个不可达基数的可测基数) 理论Kelley–Morse 集合论 无法确立：只要 ψ 成立， $\forall \eta{<}\delta\, \psi(\eta, X)$ 就可证明等价于某个 Σ^1_1 公式。

在所有情况下，只要用我们称为 KM$^+$ 的理论取代 KM，并为其加入类选择模式，就能弥补 KM 的这些不足。Marek 的一项结果表明，KM$^+$ 与一阶理论 ZFC$^-$ 双可解释；也就是说，ZFC 去掉幂集公理[2] ，再加上存在一个最大的基数，且该基数还是不可达基数的断言 [Mar73]。

2. 关于 Kelley-Morse 集合论

二阶集合论的第一个公理化基础——G¨odel-Bernays 公理 GBC——源自 Bernays、G¨odel 和 Von Neumman 在20世纪30年代的工作，基本上将引言中概述的基本要求编纂成体系。它由关于集合的 ZFC公理、类替换和一阶概括组成。Wang 和 Morse 最先考虑在 GBC 中加入二阶概括；由此得到的理论见于 Kelley 的《一般拓扑学》著作 [Kel75], ，后来被称为 Kelley-Morse 公理。下面我们将对这些公理化体系作出精确定义。

下文中，我们将用 V 来表示足够强的二阶集合论的一个模型中所有集合构成的类。

定义 9。

- 令 **Set** 表示二阶集合论语言中关于集合的以下公理集合：外延性、基础公理、空集、无穷公理、幂集公理、并。
- **外延性** 公理断言，任何两个具有相同元素的类都相等。
- **替代公理** 断言：只要 F 是一个函数，且 a 是一个集合，那么 $F\,"\,a$ 就是一个集合。
- 全局选择公理断言存在一个全局选择函数C： $V \smallsetminus \{\varnothing\} \to V$使得对每个非空集合 a， $C(a) \in a$。

[2]更准确地说，ZFC$^-$ 由 ZFC 的公理去掉幂集公理、以收集模式代替替代模式，并以良序原理代替选择公理而成。详情见 [GHJ16] 。

- 设 Γ 是二阶集合论语言中的某个公式收集。 Γ 的概括公理模式断言，任何可由 Γ中的公式和类参数定义的集合收集都是一个类。

在现代表述中，GBC 包含 **集合**、**外延性**、**替代公理**、**全局选择**，以及针对一阶公式的**概括**。KM 理论由 GBC 加上完整的二阶**概括**构成。请注意，**集合**公理与**全局选择** 和**替代公理** 共同保证，即使在加入有限多个类的谓词的扩展语言中， V 也满足 ZFC。还请注意，在 GBC 的其余公理之上，**全局选择** 等价于存在 V 的良序，事实上也等价于存在 V 的序数枚举。

可构造宇宙 L 连同其可定义集族，是 GBC 的一个模型，这表明 GBC 与 ZFC 等一致。更进一步，GBC 对 ZFC 关于一阶断言是保守的，这意味着任何能在 GBC 中证明的集合性质，也已能在 ZFC 中证明。与此同时，KM 更强大的概括模式使其具有显著更强的力量。KM 理论证明存在一个 ZFC 的传递模型，事实上还证明存在许多这样的传递模型——它证明一阶宇宙 V 是由基数 δ 的闭无界类所对应的 V_δ 组成的初等链之并。这些基数将满足 $V_\delta \models$ZFC，因此它们是世俗基数；但作为初等链中的基数，它们在 [Ham20] 的意义下也将是异世的，事实上是完全异世的，甚至更甚。另一方面，如果 κ 是一个不可达基数，那么 $\langle V_\kappa, \in, V_{\kappa+1}\rangle$ 是 KM 的一个模型。因此，KM 的一致性强度严格低于 ZFC 加上一个不可达基数，但严格高于 ZFC 加上一个完全异世界基数的真闭无界类。

为完整起见，我们给出初等链论证，该论证提供了真类的异世界基数（另见 [MM75]）。这一论证的核心是 KM 模型中的一阶真谓词类这一概念。给定一个 KM 模型 $\mathcal{V} = \langle V, \in, \mathcal{S}\rangle$ 我们定义：类 Tr $\in \mathcal{S}$ 是一阶真谓词，当且仅当它是带有集合参数的 G¨odel 代码 $\ulcorner\varphi(a)\urcorner$ 的收集 a ,–使得 V 的所有原子真式都属于 Tr，并且 $\mathcal{V}$ 认为 Tr 遵循关于布尔组合和一阶量化的递归塔斯基真值条件。根据塔斯基关于真理不可定义性的定理，这样的收集 Tr 永远不可能在 V上被一阶定义。但实际上，我们将在下文证明，每个 KM 模型都有一个一阶真谓词类。还要注意，如果 V 具有一个非标准ω，那么真谓词 Tr 必须为非标准 G¨odel 代码也提供一种连贯的真理概念，并遵循对标准和非标准公式的塔斯基递归。通过元理论归纳法很容易看出，每个真谓词都会在所有标准公式上与实际真一致。

引理10. 如果 $\mathcal{V} = \langle V, \in, \mathcal{S}\rangle \models$ Kelley–Morse 集合论，那么 $\mathcal{S}$ 包含一个一阶真谓词类 Tr。

证明。 由于 Σ^0_0-真是可定义的， $\mathcal{S}$ 包含一个 Σ^0_0-真谓词；又由于对任意 $n \in \omega$（无论n 是否为标准的），一个Σ^0_{n+1}-真谓词都可由一个 Σ^0_n-真谓词定义，因此若 $\mathcal{S}$ 包含一个 Σ^0_n-真谓词，则它必定包含一个 Σ^0_{n+1}-真谓词。现在我们对断言存在一个 Σ^0_n-真谓词的公式应用归纳法，从而得到对每一个 $n \in \omega$都存在一个 Σ^0_n-真谓词。注意，二阶断言的归纳法由

Kelley–Morse 集合论的概括模式得出。 Σ^0_n-真谓词若存在则是唯一的，因为不存在使分歧出现的最小公式，因此我们可以用这些 Σ^0_n-真谓词来定义 Tr，而 Tr 随后借助概括成为一个类。□

这一论证很容易推广到类参数，因此每个 Kelley–Morse 集合论模型都有针对任意有限多个类相对化的 V 真谓词。正如我们在引言中提到的，这个证明在 GBC 中行不通：首先，我们无法对二阶断言应用归纳法（因此不一定能得到针对非标准 n 的 Σ^0_n 真谓词）；其次，即使对每个 $n \in \omega$ 都存在 Σ^0_n 真谓词，我们也无法在没有二阶概括公理的情况下将它们统一为一个类。正如我们所提到的，如果 M 是一个 ZFC 的传递模型，且其宇宙具有可定义良序，那么用它的可定义类扩充 M 后，得到的就是一个 GBC 模型，它对每个 $n \in \omega$ 都有 Σ^0_n 真谓词（因为它有一个标准的 ω，而且 Σ^0_n 真是可定义的）；然而，根据塔斯基关于真理不可定义性的定理，它不会有一个作为一阶真谓词的类。

下面说明，只要 KM 模型中存在一个关于一阶真的真谓词，那么该真谓词就会宣称 ZFC 的非标准公理也都为真。对于标准有限实例，这一结论是直接的，因为真谓词在标准语句上同实际真一致；但当模型是 ω非标准的时，处理 ZFC 公理的非标准实例就稍微微妙一些。对于任意模型 $V \models$ZFC，令 ZFC^V 表示从 V的角度看 ZFC 公理的 G¨odel 编码的收集。如果 V 具有一个非标准ω，那么 ZFC^V 与 ZFC 的区别在于，它包含替代公理的额外非标准实例（我们可以忽略分离公理，因为它可由替代公理推出）。

引理 11。 如果 $\mathcal{V} = \langle V, \in, \mathcal{S}\rangle \models \mathrm{KM}$，并且 Tr 是 $\mathcal{S}$中的一阶真谓词，那么 Tr会宣称ZFC^V 的每个语句都为真。

证明。 这里主要微妙之处在于，尽管 Tr 对实际真判断正确，而且这包括实际的 ZFC，因为 $V \models$ZFC，但当 V 是 ω-非标准时，ZFC^V 可能包含更多非标准公理实例。只需验证 Tr 包含替代公理的所有实例，包括任何非标准实例。因此，假设替换断言 $\ulcorner \forall x \in a\, \exists! y\, \varphi(x, y, c)\urcorner$的假设属于 Tr。利用 Tr 满足塔斯基真值条件这一点，可推出

$$\mathcal{V} \models \forall x \in a \exists! y \ulcorner \varphi(x, y, c)\urcorner \in \mathrm{Tr}\,.$$

但这是实际替代公理的一个实例（其中涉及类参数 Tr），因此 $\mathcal{V}$ 满足存在一个集合 b，它收集了所有 y。因此，Tr 必须包含断言

$$\ulcorner \exists b \forall y\, (y \in b \leftrightarrow \exists x \in a\, \varphi(x, y, c))\urcorner$$

所以，Tr 验证了（可能非标准的）公式 $\ulcorner \varphi(x, y, c)\urcorner$的替代公理。

□

现在我们可以论证，KM 的每个模型都认为存在一个 ZFC 的传递模型；更进一步，它将宇宙 V 实现为一条由秩初始片段 $V_\kappa \prec V$构成的连续初等链的并。

引理 12. 若 $\mathcal{V} = \langle V, \in, \mathcal{S}\rangle \models$ Kelley–Morse 集合论，则 V是由一个真类俱乐部的秩初始片段构成的连续初等链的并

$$V_{\delta_0} \prec V_{\delta_1} \prec \cdots \prec V_{\delta_\xi} \prec \cdots \prec V$$

特别是， V 认为每个 $V_{\delta_\xi} \models$ZFC。因此，存在一个完全异世界基数的闭无界类。

证明。 根据通常的莱维-蒙塔古反射，我们可以找到一个由Σ^0_1-初等子结构组成的真类俱乐部

$$\langle V_\delta, \in, \mathrm{Tr}\rangle \prec_{\Sigma_1} \langle V, \in, \mathrm{Tr}\rangle$$

对于任意大的 δ。注意，若 $\langle V_\delta, \in, \mathrm{Tr}\rangle \prec_{\Sigma_1} \langle V, \in, \mathrm{Tr}\rangle$，则结构$\langle V_\delta, \in, \mathrm{Tr}\rangle$ 知道 Tr 满足塔斯基真值条件。因此， V_δ中的真与 V中的真一致，从而 $V_\delta \prec V$，而且 V也知道 $V_\delta \models \mathrm{ZFC}^V$，这意味着 δ 是一个世俗基数。事实上，由于 $V_\delta \prec V_\lambda$ 对真类俱乐部中的所有 $\delta < \lambda$ 都成立，这些基数全都是彻底的异世的（实际上还远不止如此）。□

该论证可推广到任意类参数，因此实际上对于任意类 X，我们都能得到一个由彻底X-异世基数组成的真类俱乐部。

我们也一并记下上界。

引理 13. (ZFC) 若 κ 是不可达基数，则 $\langle V_\kappa, \in, V_{\kappa+1}\rangle \models$ Kelley–Morse 集合论$^+$。

证明. 由于 κ 不可达， $V_\kappa \models$ ZFC。**全局选择**公理在$\langle V_\kappa, \in, V_{\kappa+1}\rangle$ 中成立，因为 V满足选择，因而 $V_{\kappa+1}$对 V_κ有一个选择函数，并且**替代公理** 成立，因为 V_κ 包含其所有小子集。**概括** 成立，因为分离公理对 V_κ 在 V 中成立，且 $V_{\kappa+1}$ 具有 V_κ的所有子集。类选择模式借助收集公理以及 V中的选择而成立。 □

由 L¨owenheim-Skolem 定理可知， V_κ 将有 KM$^+$的可数模型，因此不可达基数的存在蕴含 Con(Kelley–Morse 集合论$^+$ +Con(Kelley–Morse 集合论$^+$))以及更多结论。

若我们仅仅寻求一个 KM 模型，而不必是 KM$^+$，也就是说，不带类选择模式，那么背景中不需要 ZFC，而只需要 ZF，如下所述。

引理 14。 假设 ZF。如果 κ 是不可达基数且 V_κ 可良序化，那么 $\langle V_\kappa$、 $\in$、 $V_{\kappa+1}\rangle \models$KM。

由于我们可能并没有 $V_{\kappa+1}$ 的所有子集族的选择函数，类选择模式可能在 $\langle V_\kappa$、 $\in$、 $V_{\kappa+1}\rangle$ 中失效。因此，如果我们希望得到一个类选择模式失效的 KM 模型，这便启发了一种自然的策略。我们将在第 5 节实施这一策略，即寻找这样的 ZF 模型；我们将把它们作为力迫扩张的对称内模型构造出来，而这些力迫扩张则通过在不可达基数 κ 处或其以上进行力迫得到。

我们还应注意到，KM 的相容性由 ZFC$^-$ 与“存在一个不可达基数”这一断言的相容性推出。如果 $N \models$ZFC$^-$ 且 κ 在 N 中是不可达基数，那么 $\langle V_\kappa^N$、 $\in$、 $P^N(V_\kappa)\rangle \models$KM$^+$，其中 $P^N(V_\kappa)$ 是 V_κ^N 的所有子集的收集，这些子集都是 N 的元素。这是引言中提到的结果的容易方向：KM$^+$ 与 ZFC$^-$ 以及“存在一个不可达的最大基数”这一断言双可解释。

3. A detour into second-order arithmetic

二阶集合论中的许多定理，都是对研究得更为深入的二阶算术领域中相应定理的直接类比。二阶算术是一个形式框架，用来研究数字以及数字的集合，

我们可以将这些数字集合视为实数。因此，二阶算术的主要作用一直是为形式化分析提供尽可能弱的基础。它可以在一种双排序逻辑中解释，该逻辑的语言由算术的一阶语言 $\mathcal{L} = \{+, \cdot, <, 0, 1\}$ 以及数字属于集合的成员关系 $\in$构成。二阶算术的相关模型具有以下形式：$\mathcal{M} = \langle M, +, \cdot, <, 0, 1, \mathcal{S}\rangle$；其中 $\langle M, +, \cdot, <, 0, 1\rangle$ 是一个一阶算术模型，而 $\mathcal{S}$ 是 M 的子集所组成的一个集合族。二阶算术的公理化基础包括一阶公理 PA^-（不含归纳法的皮亚诺公理）、带集合参数的一阶公式归纳模式、集合存在原则，以及可能加强为适用于二阶断言的归纳模式。不同的公理化体系主要在集合存在原则上有所不同。例如，二阶理论 WKL_0 断言，任何可由某个集合递归得到的数字集合族本身都是一个集合；如果一个数字集合编码了一棵无限二叉树，那么就存在另一个数字集合，编码一条穿过这棵树的无限路径。GBC 在二阶算术中的对应理论是 ACA_0，它断言任何一阶可定义的数字集合族（带集合参数）都是一个集合；而 KM 的对应理论则是最强的二阶算术理论之一 Z_2,，它具有完全二阶概括。若 $V \models \mathsf{ZF}$，那么它的一阶算术模型 $\langle \omega, +, \cdot, <, 0, 1\rangle$ 连同其所有可定义子集，便是 ACA_0 的一个模型，并且$\langle \omega, , +, \cdot, <, 0, 1, P(\omega)\rangle \models \mathsf{Z}_2$。

二阶算术中类选择模式的自然类比是断言：对于二阶算术语言中的每个公式以及集合参数A，都有：

$$\forall n\, \exists X\, \varphi(n, X, A) \to \exists Z\, \forall n\, \varphi(n, Z_n, A).$$

我们也可以类似地定义 Σ^1_n（或 Π^1_n）-选择模式片段，以及无参数选择模式。如果 $V \models \mathsf{ZF} +$ $\mathsf{AC}\omega$，那么类选择模式在其二阶算术模型中成立 $\langle \omega, , +, \cdot, <, 0, 1, P(\omega)\rangle$。如果 $N \models$ ZFC^-+每个集合都是可数的，那么 $\langle \omega, +, \cdot, <, 0, 1, P^N(\omega)\rangle \models \mathsf{Z}_2 +$选择模式。

尽管要确定类选择模式中有多少内容可由Z_2, 推出，需要运用技术上复杂的集合论方法，但很容易看出，ACA_0甚至不能证明类选择模式的一阶实例。

观察 15。 存在一个ACA_0 的模型，其中一阶公式的类选择模式不成立。

证明。 令 $\mathcal{S}$为 $\langle \omega, +, \cdot, <, 0, 1\rangle$的所有可定义子集的收集公理；其中尤其包含对每个 $n \in \omega$而言的其 Σ_n-真谓词，但不包含完整的真谓词。因此，模型 $\langle \omega, +, \cdot, <, 0, 1, \mathcal{S}\rangle \models$ 满足ACA_0,，但无法收集这些Σ_n-真谓词。□

一个 Z $\mathcal{M}$ 模型（甚至是一个弱得多的二阶理论）可以编码数量惊人的集合论内容。每棵在 $\mathcal{S}$ 中编码的良基树本身都会编码某个遗传可数集，因此我们可以考虑由这些集合构成的一阶集合论模型（有关编码的详细信息，见 [Sim09]，第 7 章）。事实上，如果 $\mathcal{M} \models \mathsf{Z}_2 +$ 选择模式，那么不难验证，其对应的集合论模型满足 ZFC^-，并且满足“每个集合都是可数的”这一断言，这使得这两个理论双可解释。特别是，与 $\mathcal{M}$ 相关联的集合论模型有其自身的可构造层级 $L^{\mathcal{M}}$，而“某棵树编码了一个形如 L_α 的集合”这一断言在 $\mathcal{M}$ 中的复杂度为 Π^1_1（验证良基性需要用到二阶量词）。更

一般而言，对于 $\mathcal{S}$ 中的每个集合 A ，该集合论模型都有形如 $L^{\mathcal{M}}[A]$ 的子模型。 $\mathcal{M}$ 的这些可构造集和相对可构造集都具有通常的性质，例如存在可定义良序，而且它们甚至满足 Shoenfield绝对性定理： Σ^1_2 断言 φ（A）对于 $L[A]$ 是绝对的。相关论证的详细信息见 [Sim09] （第 7 章）。利用 Shoenfield 绝对性定理可以立即推出，Z_2 证明了 Σ^1_2-选择模式。

定理16。 理论 Z_2 证明了所有 Σ^1_2-选择模式的实例。

证明。假设 $\mathcal{M} = \langle M, +, \cdot, <, 0, 1, \mathcal{S}\rangle \models \mathsf{Z}_2$ 和 $\forall n\, \exists X\, \varphi(n, X, A)$ 在$\mathcal{M}$ 中成立，其中某些 $A \in \mathcal{S}$ 和 φ 的复杂度为 Σ^1_2。根据肖恩菲尔德绝对性，由于$\exists X\, \varphi(n, X, A)$ 是 Σ^1_2，对于每个 n，都存在 $X \in L^{\mathcal{M}}[A]$ 使得 $\varphi(n, X, A)$ 成立。但由于 $\mathcal{M}$ 具有一个关于 $L^{\mathcal{M}}[A]$ 的可定义良序 $<^{L[A]}$ ，对于每个 n，都存在一个关于 $<^{L[A]}$的最小此类 X。因此，我们可以假设见证类 X 是唯一的，从而可以用概括将它们收集起来。□

事实证明，定理16是最优的，因为在某个 Z_2模型中，类选择模式的一个 Π^1_2-实例可能失败。构造这种模型的策略与之前针对 KM 所提出的相同：我们寻找一个 ZF模型，在其中可数选择对于某个族失效，而这个族恰好还能够在其二阶算术模型中定义。该结果归功于 Feferman 和 L´evy；他们使用了经典的 Feferman-L´evy ZF模型，该模型表明，在缺乏可数选择的情况下， ω_1 可以是可数多个集合的可数并（见 [L´ev70, 定理 8]）。让我们回顾一下他们的构造。在 L 中，考虑有限支撑积 $\mathbb{P} = \Pi_{n\in\omega} \mathrm{Coll}(\omega, \omega_n)$。令 $G \subseteq \mathbb{P}$ 为 L-泛型，令 G_n 为 G 在 $\mathbb{P}_n = \Pi_{m<n} \mathrm{Coll}(\omega, \omega_n)$上的限制。由于每个 $\mathrm{Coll}(\omega, \omega_n)$ 都是弱齐次的，我们可以使用附录第 8.1 节中概述的构造，构造出 $L[G]$ 的一个对称子模型 N，使其序数集恰好是由坍缩积的真初始段添加的那些序数集。这就是 Feferman-L´evy 模型。因此，所有 ω_n 在 N中都是可数的，但ω_ω 是不可数的，因为没有初始段 $\mathbb{P}_n$ 能够将其坍缩，从而使其成为 N的 ω_1。还要注意 $P^N(\omega) = \bigcup_{n\in\omega} P^{L[G_n]}(\omega)$。

定理 17 (Feferman-L´evy)。 存在一个 Z_2 模型，其中类选择模式对某个 Π^1_2-公式不成立。

证明。令 $\mathcal{M} = \langle \omega,\ +,\ \cdot,\ <,\ 0,\ 1,\ P^N(\omega)\rangle$，其中 N 是一个 Feferman-L´evy 模型。每个 L_{ω_n} 都在 $P^N(\omega)$ 中编码，但 L_{ω_ω} 并未如此。集合 X 编码 L_{ω_n}（对于某个固定的 n）这一断言具有 Π^1_2 复杂度，因为它表示 X 编码了一个 L_α，并且每当 Y 编码一个满足 $\beta > \alpha$ 的 L_β 时， L_β 就认同 $\alpha = \omega_n$；而正如我们之前观察到的，集合编码一个 L_α 的断言具有 Π^1_1 复杂度。因此，类选择模式的 Π^1_2 实例

$$\forall n\, \exists X\ X \text{ codes } L_{\omega_n} \to \exists Z\, \forall n\ Z_n \text{ codes } L_{\omega_n},$$

在 $\mathcal{M}$ 中不成立，因为如果存在这样的 Z， $\mathcal{M}$ 就能够构造 L_{ω_ω}。 □

4. KM does not prove the class choice scheme

现在我们来证明，KM 并不能证明类选择模式。首先，我们采用一种直接的推广版 Feferman-L´evy 构造，通过力迫将不可达 κ的第一个 ω 多个后继基数坍缩为 κ。这将表明，类选择模式的某个 Π^1_1实例可以

在 KM 模型中失效；这与二阶算术的情形形成对照，在二阶算术中，Z_2 证明了 Σ^1_2-选择模式。

为了解释这一点，假设 L有一个不可达基数 κ。在 L中进行考察，考虑有限支撑积 $\mathbb{P} = \Pi_{n\in\omega} \mathsf{Coll}(\kappa, \kappa^{(+n)})$，将 κ 的前 ω 个后继基数坍缩到 κ。令 $G \subseteq \mathbb{P}$ 为 L-泛型，并令 G_n 为将 G 限制到前 n 个因子 $\mathbb{P}_n = \Pi_{m<n} \mathsf{Coll}(\kappa, \kappa^{(+m)})$所得的结果。现在，我们构造 $L[G]$ 的一个对称子模型 N，使其序数集恰好是由坍缩积的真初始段所添加的序数集（更多细节见附录第 8.1 节概述的构造）。因此，在 N 中，所有 $\kappa^{(+n)}$ 的大小都是 κ，但 $\kappa^{(+\omega)}$ 是 N 的 κ^+，因为它不会被 $\mathbb{P}_n$的任何真初始段坍缩。尽管 $V_\kappa^{L[G]}$有 ω 的新子集，而且实际上所有（κ^{+n}）都坍缩到 ω，但这些并非由力迫的初始段添加，因为有限积 $\bar{\mathbb{P}}_n$ 是 $<\kappa$-闭的。特别是，$V_\kappa^N = V_\kappa = L_\kappa$。事实上，我们得到的是 $V_{\kappa+1}^N = \bigcup_{n\in\omega} V_{\kappa+1}^{L[G_n]}$。显然，$\kappa$ 在N 中仍是不可达的，而且 N 有一个 V_κ 的良序，因为 L也有。因此，我们满足了引理 14 的假设，从而 $\langle V_\kappa, \in, V_{\kappa+1}^N\rangle \models$ Kelley–Morse 集合论。

使用上一节中为 Z_2, 模型所描述的相同编码方式，$\mathcal{M} \models$ KM 模型的类可以编码一个集合结构，其中包括新的序数；这个结构位于 $\mathcal{M}$的集合之上。[3] 对于形如 $\langle V_\kappa, \in, V_{\kappa+1}\rangle$ 的模型，这些序数恰好是 κ^+，额外的集合则是 H_{κ^+}的集合。

定理 18. (ZFC + 存在一个不可达基数) 存在一个 KM模型，其中类选择模式对某个 Π^1_1-公式不成立。

证明。令 $\mathcal{M} = \langle V_\kappa, \in, V_{\kappa+1}^N\rangle$，其中 N是如上所述的对称模型。每个 $L_{\kappa^{(+n)^L}}$ 都编码在 $V_{\kappa+1}^N$中，但$L_{\kappa^{(+\omega)^L}}$ 没有，因为 $\kappa^{(+\omega)^L}$ 在 N中没有坍缩。类编码$L_{\kappa^{(+n)^L}}$ 这一断言是 Π^1_1，因为现在检验良基性是 Π^1_0，而在 Z_2模型的情形下则是 Π^1_1。因此，类选择模式中 Π^1_1的实例

$$\left[\forall n \in \omega\, \exists X\ X \text{ codes } L_{\kappa^{(+n)^L}}\right] \to \exists Z\, \forall n \in \omega\ \left(Z_n \text{ codes } L_{\kappa^{(+n)^L}}\right),$$

在 $\mathcal{M}$ 中失败，因为如果存在这样的 Z，$\mathcal{M}$ 就能够构造出 $L_{\kappa^{(+\omega)^L}}$，但即使在 N中它也做不到这一点。□

现在，我们将通过发展一些技术来改进定理 18，使我们能够证明类选择模式甚至可能在 KM 模型的一阶实例中失败。总体思路是构造一个具有不可达基数 κ 的 $V \models$ZFC 模型，其中有 ω 棵 κ-苏斯林树，并且这些树具有如下性质：用其中任意有限子集合作力，都不会向其余的树添加分支。然后，我们可以像从坍缩力迫的积构造模型那样，考虑由这些树的积力迫产生的对称模型，并使其具有这样的性质：它的序数集恰好是由力迫的初始段添加的那些序数集。这样一来，该对称模型将拥有这 ω 棵树中的每一棵的分支，但却无法将它们收集起来。

假设 κ 是一个正则基数。κ-树 是一种偏序，其中任意节点的前驱都构成良序，序型小于 κ，且每一种这样的序型都能实现，并且每个特定层上的元素都少于 κ 个。若这种树没有大小为 κ的分支，则称其为 κ-阿隆佐恩树；若它还满足

[3]有关编码的更多细节，请参见 [AK14]。

没有大小为 κ的反链，则称其为苏斯林树。若同一层上的任意两个节点之间都存在一个将其中一个映射到另一个的自同构，则称这棵树为齐次 树。根据附录第 8.1 小节中的定义，这种树作为偏序是弱齐次的。

利用引理 41，我们可以假设自己处于宇宙 V 中，其中有一个不可达基数 κ，它具有一个 ω-序列 $\vec{T} = \langle T_n \mid n < \omega \rangle$，由齐次$\kappa$-苏斯林树组成，并且对每个 $n < \omega$，积 $\Pi_{m<n} T_m$ 都满足κ-链条件。因此，用任何这样的积进行力迫，都不会给任何后续树 T_i（其中 $i \geq n$）添加分支，因为这会违反包含该后续树的积的链条件。考虑全支撑积 $\mathbb{P} = \Pi_{n\in\omega} T_n$，并注意到，由于每个 T_n 作为偏序集时都是弱齐次的，$\mathbb{P}$ 就是附录第 8.1 小节所述类型的偏序集。令$G \subseteq \mathbb{P}$ 为 V-泛型，并令 G_n 为将 G 限制到 $\mathbb{P}_n = \Pi_{m<n} T_m$所得的限制。因此，我们可以得到一个 $V[G]$ 的对称模型 N，其序数集恰好是由该积 $\mathbb{P}$ 的真初始段添加的序数集。于是，每棵树 T_m 在 N中都有一条分支，但不存在一个收集集能为每棵树 T_m 都提供一条分支，因为初始段 $\mathbb{P}_n$ 只会为那些树添加分支。由于根据引理 41，$\mathbb{P}$ 是 $<\kappa$-分配的，我们有 $V_\kappa^{V[G]} = V_\kappa = V_\kappa^N$，因此可得 $V_{\kappa+1}^N = \bigcup_{n<\omega} V_{\kappa+1}^{V[G_n]}$。显然，$\kappa$ 在 N中是不可达的，并且 N具有 V_κ的良序。因此，我们满足了引理 14 的假设，从而$\langle V_\kappa, \in, V_{\kappa+1}^N \rangle \models$ Kelley–Morse 集合论。

定理 19。 (ZFC + 存在一个不可达基数) 存在一个 KM 的模型，其中有一个实例

$$\forall n\in\omega\, \exists X\, \varphi(n, X, A) \to \exists Z\, \forall n\in\omega\, \varphi(n, Z_n, A)$$

类选择模式对于带有类参数 A 的一阶公式 φ 不成立。

证明。令 $\mathcal{M} = \langle V_\kappa, \in, V_{\kappa+1}^N \rangle$，其中 N是如上构造的对称模型。序列 $\vec{T}$在 $V_{\kappa+1}^N$ 中编码，并且每个 T_m 在 $V_{\kappa+1}^N$中都有一个分支，但$V_{\kappa+1}^N$ 不可能有一个类，能够从每个 T_m中至少收集一个分支。断言一个类是树 T_n 的分支，是关于参数 $\vec{T}$ 的 Π_0^1。因此，类选择模式的Π_0^1 实例

$$\psi(\vec{T}) := \forall n \in \omega\, \exists X\, X \text{ is a branch of } T_n \to \exists Z\, \forall n \in \omega\, Z_n \text{ is a branch of } T_n$$

在 $\mathcal{M}$中不成立。 □

定理 19 的证明中产生的类选择模式失败实例使用了参数 T，它是一个树序列，这些树的分支无法被收集。一个稍微复杂一些、从马洛基数出发的构造可以消去该参数，并产生参数自由的$\vec{}$选择模式的一阶失败。其思路是在用这些树进行力迫以获得所需的对称子模型之前，将序列 T 编码到 κ以下的连续统函数中。我们$\vec{}$将论证，经过编码力迫后，序列 T 仍保留其原有的关键性质：这些树 T_n 是 κ-阿隆佐夫树，对它们的任意初始段进行力迫都是 $<\kappa$-分配的，并且不会给后面的树添加分支。

定理 20。（ZFC + 存在一个马洛基数）存在一个 Kelley–Morse 集合论 的模型，其中选择模式的一个实例

$$\forall n\in\omega\, \exists X\, \varphi(n, X) \to \exists Z\, \forall n\in\omega\, \varphi(n, Z_n)$$

对于一阶公式 $\varphi(x, X)$ 失败。

证明。根据引理 41，我们可以在一个宇宙 V 中工作，其中有一个马洛基数 κ，以及一个 ω-序列 $\vec{T} = \langle T_n \mid n < \omega \rangle$，由齐次的 κ-苏斯林树组成，并且它们任意初始段的积都满足 κ-链条件。由于添加该序列 $\vec{T}$ 的力迫是 $<\kappa$-分配的，我们还可以假设广义连续统假设在 κ 以下成立（通过对满足广义连续统假设的模型力迫添加这些树）。令 A 为 κ 以下正则 $\vec{}$ 基数的一个子集，以某种可定义的方式对 T 进行编码。令 $\mathbb{S}$ 为长度 κ 的 Easton 支撑积，它对每个正则 $\alpha \in A$ 都使用 Add(α, α^{++}) 进行力迫，并令 $H \subseteq \mathbb{S}$ 为 V-泛型。根据引理42，$\mathbb{S}$ 满足 κ-链条件，此外，熟知的论证还表明 κ 在 $V[H]$ 中仍是马洛基数。根据引理43，$\mathbb{S}$ 无法添加 κ 的新子集，而该子集的所有初始段都属于 V，因此每个 T_n 在 $V[H]$ 中仍是一棵 κ-阿伦佐恩树。现在考虑一个积 $\mathbb{P}_n = \Pi_{m<n} T_m$，并令 $G_n \subseteq \mathbb{P}_n$ 为 V-泛型。由于 $\mathbb{S} \times \mathbb{P}_n$ 是一个积，$V[H][G_n] = V[G_n][H]$。注意，κ 在 $V[G_n]$ 中是马洛基数，因为 $\mathbb{P}_n$ 在 V 中满足 κ-链条件；而且，$\mathbb{S}$ 在 $V[G_n]$ 中仍是一个 Easton 支撑积，因为 $\mathbb{P}_n$ 在 V 中是 $<\kappa$-分配的。因此，$\mathbb{S}$ 在 $V[G_n]$ 中满足 κ-链条件，由此可知 κ 在 $V[G_n][H]$ 中仍是马洛基数。特别地，κ 在那里是正则的，因此可知 $\mathbb{P}_n$ 在 $V[H]$ 中仍是 $<\kappa$-分配的。最后，任何满足 $i \geq n$ 的 T_i 都不可能在 $V[G_n][H]$ 中有分支，因为它在 $V[G_n]$ 中没有分支，而根据引理43，$\mathbb{S}$ 无法为 T_i 添加分支。至此，我们完成了论证：序列 $\vec{T}$ 在 $V[H]$ 中仍具有证明定理 19 所需的所有性质，但现在我们不必再用 T 作为参数来指称树 T_n。□

5. Separating fragments of the class choice scheme overKM

在本节中，我们将通过证明以下事实来区分类选择模式与集合指标类选择模式：集合指标类选择模式可以在 KM 模型中成立，而类选择模式的一个一阶实例不成立。我们还将通过证明以下事实来区分类选择模式与无参数选择模式：无参数选择模式可以在 KM 模型中成立，而类选择模式的一个Π^1_1实例不成立。

定理 21. (ZFC + 存在一个不可达基数) 存在一个KM模型，其中集合指标类选择模式成立，但类选择模式的一个一阶实例不成立。

证明。 利用引理 41，我们可以假设自己处于一个宇宙 V 中，该宇宙有一个不可达基数 κ，并且存在一个 κ-序列 $\vec{T} = \langle T_\xi \mid \xi < \kappa \rangle$，由齐次-苏斯林树组成，具有如下性质：对于每个 $\xi < \kappa$，积 $\Pi_{\eta<\xi} T_\eta$ 都满足-链条件。由此可知，这些积都不会为后面的树添加分支T_η（其中 $\eta \geq \xi$），因为这样的分支会使包含那棵后续树的积不再满足-链条件。

现在考虑全有界支撑积 $\mathbb{P} = \Pi_{\xi<\kappa} T_\xi$。令 $G \subseteq \mathbb{P}$be$V$-泛型，并令 G_ξ 为 G 到 $\mathbb{P}_\xi = \Pi_{\eta<\xi} T_\xi$的限制。由于附录第 8.1 节中描述的条件仍然适用，我们可以得到 Kelley–Morse 集合论 $V[G]$ 的一个对称模型 N，其序数集恰好是由积 $\mathbb{P}$的真初始段添加的那些。因此，每棵树 T_η 在 N中都有一个分支，但不存在一个收集集，其中包含每棵树 T_η的一个分支。由引理 41，$\mathbb{P}$是 $<\kappa$-分配的，因此我们有 $V_\kappa^{V[G]} = V_\kappa = V_\kappa^N$，由此可得

$V^N_{\kappa+1} = \bigcup_{\xi<\kappa} V^{V[G_\xi]}_{\kappa+1}$。显然，$\kappa$ 在 N 中是不可达基数，并且 N 具有 V_κ的良序，因此由引理 14 可得 $\langle V_\kappa, \in, V^N_{\kappa+1}\rangle \models$ Kelley–Morse 集合论。显然，在此模型中，类选择模式对于如下带参数 $\vec{T}$的一阶断言不成立：每棵树 T_ξ 都有一个分支。

接下来要证明集合指标类选择模式成立。为此，假设对于某个 $a \in V_\kappa$ 和 $A \in V^N_{\kappa+1}$，有 $\langle V_\kappa, \in, V^N_{\kappa+1}\rangle \models \forall x \in a\, \exists X\, \varphi(x, X, A)$。在 $V[G]$ 中，对每个 $i \in a$，选取一个见证 $X_i \in \bigcup_{\xi<\kappa} V^{V[G_\xi]}_{\kappa+1}$。由于 a 的大小小于 κ，且 κ 在 $V[G]$ 中是正则的，因此存在某个 $\xi < \kappa$，使得所有 X_i 都属于 $V[G_\xi]$。然而，由于尾强迫 $\Pi_{\xi<\eta<\kappa} T_\xi$ 是 $<\kappa$-分配的，因此序列 $\langle X_i \mid i \in a\rangle$ 本身属于 $V[G_\xi]$，进而可在 $V^{V[G_\xi]}_{\kappa+1}$ 中编码。因此，这个编码属于 $V^N_{\kappa+1}$，所以我们可以实现类选择模式的集合指标情形。□

同样，通过从更强的假设出发，我们可以消除类选择模式失败中的参数。

定理22。(ZFC +存在一个马洛基数) 存在一个 *Kelley–Morse* 集合论KM 模型，其中集合指标类选择模式成立，但无参数选择模式的一个一阶实例失败。

证明。 这只是定理20证明中所给论证的直接类比。具体而言，我们将树序列编码进 κ以下的广义连续统假设模式中，使其在 V_κ 中无需参数即可定义。□

下一个定理的灵感来自 Guzucki 在 [Guz76] 二阶算术模型中证明的一个类似结果。

定理23。(ZFC + 存在一个不可达基数) 存在一个 *Kelley–Morse* 集合论KM 模型，其中无参数选择模式成立，但类选择模式的一个 Π^1_1-实例失败。

证明。假设 L 有一个不可达基数 κ。在 L中，考虑有界支撑积 $\mathbb{P} = \Pi_{\xi<\kappa^+}$ Coll$(\kappa, \kappa^{(+\xi)})$，将 κ 的前 κ^+多个后继基数坍缩到 κ。令 $G \subseteq \mathbb{P}$ 为 V-泛型，并令 G_ξ 为 G 在$\mathbb{P}_\xi = \Pi_{\eta<\xi}$ Coll$(\kappa, \kappa^{(+\eta)})$上的限制。令 N 为 $L[G]$ 的一个对称模型，其性质是，它的序数集恰好是由该积 $\mathbb{P}$的真初始段所添加的序数集。因此，对于 $\xi < \kappa^+$， L 中的所有 $\kappa^{(+\xi)}$ 在 N中大小均为 κ，但 L 的 $\kappa^{(+\kappa^+)}$ 是 N 的 κ^+，因为它没有被任何真初始段 $\mathbb{P}_\xi$ 坍缩。和定理 18 的证明一样，我们可以看出 $V^N_\kappa = V_\kappa$ 和 $V^N_{\kappa+1} = \bigcup_{\xi<\kappa^+} V^{V[G_\xi]}_{\kappa+1}$。显然，$\kappa$ 在 N 中是正则的，且 N 有一个 V_κ的良序，因此再次由引理 14 可知 $\mathcal{M} = \langle V_\kappa, \in, V^N_{\kappa+1}\rangle \models$ KM。

我们来证明，类选择模式在 $\mathcal{M}$中失效。令 $<^*$ 为 κ 上的一个序型为 $(\kappa^+)^L$ 的序关系，且在 N 中令 α_ξ 表示由 ξ 在 $<^*$中编码的序数，其中 $<^*$ 限制在 ξ 的 $<^*$-前驱上。因此，类选择模式的Π^1_1实例

$$\psi(<^*) := \forall \xi\, \exists X\, X \text{ codes } L_{\kappa^{(+\alpha_\xi)}} \to \exists Z\, \forall \xi\, X \text{ codes } L_{\kappa^{(+\alpha_\xi)}}$$

在 $\mathcal{M}$中失效。

接下来，我们论证 $\mathcal{M}$ 中成立无参数选择模式。假设$\mathcal{M} \models \forall x\, \exists X\, \phi(x, X)$。必要时在某个条件以下工作，我们可以假设

$\mathbb{1}_{\mathbb{P}}$ 迫使规范名称 $\mathcal{M}$ 所表达的这一陈述，即对于 $\mathcal{M}$。 $\mathcal{M}$ 具有这样的规范名称，这是由 $V_{\kappa+1}^{N} = \bigcup_{\xi<\kappa^+} V_{\kappa+1}^{L[G_\xi]}$ 这一事实得出的。首先，我们论证，对于每个 x，都存在 $\xi_x < \kappa^+$，使得 $\mathbb{1}_{\mathbb{P}}$ 迫使存在 $A \in L[G_{\xi_x}]$ 满足 $\mathcal{M} \models \varphi(x, A)$。为此，假设 $x \in V_\kappa$。由于根据假设，存在 $A \in \bigcup_{\xi<\kappa^+} V_{\kappa+1}^{L[G_\xi]}$ 使得 $\mathcal{M} \models \varphi(x, A)$，我们可以固定某个 ξ_x，使得存在 $A \in L[G_{\xi_x}]$ 满足 $\mathcal{M} \models \varphi(x, A)$。我们还可以固定一个条件 p，迫使存在这样的 $A \in L[G_{\xi_x}]$ 满足 $\mathcal{M} \models \varphi(x, A)$。现在反设存在另一个条件 q，它迫使在这个特定扩展 $L[G_{\xi_x}]$中不存在这样的 A。令 π 为第 8.1 节附录中所述的保持坐标的自同构，使得 $\pi(p)$，且 q相容。因此，条件 $\pi(p)$迫使存在 A 属于 $L[\pi(G_{\xi_x})]$，使得 $\pi(\mathcal{M}) \models \varphi(x, A)$。然而，由于 π 保持坐标，故可推出 $\pi(G_\xi)_H$ 与 $(G_\xi)_H$ 在任何扩展 $L[H]$中都由 π 相互可定义，因此 $L[(G_{\xi_x})_H] = L[\pi(G_{\xi_x})_H]$。由此可知，在任何这样的 $L[H]$中，$\pi(\mathcal{M}) = \mathcal{M}$。于是，$\pi(p)$迫使存在 $A \in L[G_{\xi_x}]$ 满足 $\mathcal{M} \models \varphi(x, A)$；但这与我们的假设矛盾：与 $\pi(p)$相容的 q迫使该陈述的否定。至此，我们完成了如下论证：对于每个 $x \in V_\kappa$，都存在 $\xi_x < \kappa^+$，使得 $\mathbb{1}_{\mathbb{P}}$ 迫使存在 $A \in L[\dot{G}_{\xi_x}]$ 满足 $\dot{\mathcal{M}} \models \varphi(x, A)$。由于 κ^+ 在 L中是正则的，我们可以为这些 ξ_x选取一个上界 $\xi < \kappa^+$。因此，对于每个 $x \in V_\kappa$，$L[G_\xi]$ 都有见证A。然而，$V_{\kappa+1}^{L[G_\xi]}$ 在 N 中的大小为 κ，因此可由 $V_{\kappa+1}^{N}$中的某个元素编码。这个编码为我们提供了所需的收集类，作为$\varphi(x, X)$的见证。□

简而言之，模型 $\mathcal{M}$ 满足不带参数的完整选择模式，但该模式存在一个带参数的 Π^1_1实例出现了偏差。

6. Further weakness in Kelley–Morse 集合论

在本节中，我们论证：作为一套理论，Kelley–Morse 集合论未能确立二阶集合论中其他一些预期且可取的结果，例如关于内部二阶超幂的 Lo´s定理、常见大基数嵌入的初等性、超幂对 Kelley–Morse 集合论的一般保持，以及二阶逻辑复杂度不受一阶量词影响这一事实。与此同时，当我们用类选择模式扩充 Kelley–Morse 集合论时，这些种种不足便得到处理，从而形成我们记为 Kelley–Morse 集合论$^+$ 的严格更强的理论；该理论确实能证明那些可取的结果，并且在这一意义及其他意义上，为二阶集合论提供了比 KM 更为坚实的基础。

首先考虑超幂和 Lo´s 定理的情形；它们在集合论中发挥着核心作用，尤其是在大基数理论中，而在那里，人们通常会对整个集合论宇宙取超幂。我们自然会希望基础理论能够稳健地处理这一核心构造。确实，可以在二阶集合论中构造宇宙的超幂。具体而言，如果 $\mathcal{V} = \langle V, \in, \mathcal{S} \rangle \models \mathsf{KM}$，且 $U \in V$是某个集合 D 上的超滤子，那么我们使用 U 构造内部二阶超幂 $\mathrm{Ult}(\mathcal{V}, U)$，如下所述。显然，$\mathrm{Ult}(\mathcal{V}, U)$中的集合由函数 $f \in V$ 的等价类 $[f]_U$ 给出，这些函数的定义域为 D，并且是相对于等价关系 $f =_U g$而言的；当且仅当 $\{ d \in D \mid f(d) = g(d) \} \in U$时，该关系成立。这是关于超幂隶属关系 $[f]_U \in_U [g]_U$ 的一个同余关系；该关系成立

当且仅当 $\{ d \in D \mid f(d) \in g(d) \} \in U$。与此同时，二阶对象，也就是 Ult($\mathcal{V}$, U)中的类，被取作可编码超类函数 F 的等价超类 $[F]_U$： $D \to \mathcal{S}$，这些函数被定义为谓词，使得当且仅当 $[f]_U \in [F]_U$ 时，$\{ d \in D \mid f(d) \in F(d) \} \in U$。如前所述，我们用一个类 $F \subseteq D \times V$ 表示此类函数 $F^{\tilde{}}$ $^{\tilde{}}$，其中 $F(d)$ 是切片 F_d。这里应当指出，斯科特技巧并无类似方法可用于从超类等价类中选取唯一代表。由于我们使用的滤子是 V 的一个元素，刚才描述的整个构造都可以在 $\mathcal{V}$ 内进行，我们将其称为内部超幂构造。

当然，人们不只是想进行超幂构造，还想证明它具有预期的良好性质。因此，如果对于二阶集合论语言中的每个断言 φ，以下双条件的每个实例都成立，我们就说超幂 Ult($\mathcal{V}$, U) 满足内部二阶超幂的 -洛´斯定理模式：

$$\mathrm{Ult}(\mathcal{V}, U) \models \varphi([f]_U, [F]_U) \quad \text{if and only if} \quad \{ d \in D \mid \mathcal{V} \models \varphi(f(d), F(d)) \} \in U.$$

-洛´斯模式蕴含超幂嵌入的初等性；该嵌入将集合 $a \mapsto [c_a]_U$ 和类 $X \mapsto [c_X]_U$ 分别映射到相应常值函数的等价类。

通过在 KM 中进行元理论归纳，可以轻易证明 -洛´斯模式的每个一阶实例，也就是说，仅限于一阶公式 φ。然而，我们马上就会证明， -洛´斯模式的二阶实例并非普遍都能在 KM 中证明。与此同时，完整的二阶模式在 KM$^+$ 中是可证的；而且，鉴于选择公理在证明经典一阶 -洛´斯定理时所起的作用，内部二阶超幂的-洛´斯定理模式事实上恰好等价于 KM 上的集合指标类选择模式，这一点并不会太令人惊讶。

定理24。 内部二阶超幂的 *-Lo´s* 定理模式与Kelley–Morse 集合论上的集合指标类选择模式等价。

证明。 经典 -Lo´s 定理的通常证明很容易改编，从而证明：在满足集合指标类选择模式的任何 KM 模型中，内部二阶超幂的-Lo´s 定理模式成立。我们对公式作元理论归纳；在二阶存在量词的情形中，使用类选择模式来汇集见证，这与使用 AC 证明经典一阶 -Lo´s 定理的做法相同。

对于反向蕴含，假设 $\mathcal{V} = \langle V, \in, \mathcal{S} \rangle$ 满足 KM，并且满足内部二阶超幂的 -Lo´s 定理模式。我们将证明集合指标类选择模式也成立，证明过程对指标集的大小作归纳。归纳假设所有大小小于 κ的指标集都满足该模式的各个实例，并设我们有一个以 κ为指标集的实例。因此我们假设，对每个 $\xi < \kappa$，都存在 X 使得 $\psi(\xi, X, A)$，其中 A 是某个固定的类参数。我们要将这些不同的见证汇集成一个编码类序列。

令 U 为 κ上的一个超滤子，且集中于尾集，并考虑内部超幂 Ult($\mathcal{V}, U$)。根据我们对 κ的极小性假设，对于每个$\alpha < \kappa$，我们都有

$$\mathcal{V} \models \exists Z \ \forall \xi{<}\alpha \ \psi(\alpha, Z_\xi, A).$$

也就是说，对于任意特定的 $\alpha < \kappa$，我们都可以将 α 以下的 α 个见证统一编码为一个类 Z，其截面 Z_ξ 对所有 $\xi < \alpha$ 都适用。由于这一断言成立于

每个小于 κ 的 α，且这类 α 的集合属于 U，因此根据 Łoś 定理模式，

$$\mathrm{Ult}(\mathcal{V}, U) \models \exists Z\ \forall \xi{<}[\mathrm{id}]_U\ \psi(\xi, Z_\xi, [c_A]_U),$$

其中 $\mathrm{id} : \kappa \to \kappa$ 是恒等函数，而 $c_A : \kappa \to \mathcal{S}$ 是取值为 A的常值函数。令 $Z = [F]_U$ 为见证这一二阶存在性断言的类。因此，$F\colon \kappa \to \mathcal{S}$ 在 $\mathcal{S}$ 中有编码，并且对于几乎所有 U（相对于 α）都有

$$\mathcal{V} \models \forall \xi{<}\alpha\ \psi(\xi, F(\alpha)_\xi, A).$$

由于 U 集中在尾段上，这样的 α 有无界多个。也就是说，在无界多处，$F(\alpha)$会提供一个 α类的 F序列 $\alpha)_\xi$，对每个 $\xi < \alpha$都适用。因此，我们可以将这些见证组装成一个由适见证构成的单一κ序列。具体而言，令 $F'(\xi)$ 为 $F(\alpha)(\xi)$，其中 α取使其成为 $\psi(\xi,\ F'(\xi)\ A)$见证的最小值。因此，函数 F'为类选择模式的这一实例提供了所需的见证。

□

由此我们证明了，任何不是集合指标类选择模式模型的 KM 模型中，Łoś 定理模式都会失败。然而，我们接下来要说明，情况远比这更糟。具体而言，我们声称，不满足集合指标类选择模式的 KM 模型的内部二阶超幂，甚至未必是 KM 本身的模型。简言之，缺少集合指标选择模式时，内部超幂并不保持 KM。

首先，为了展开这一论证，我们在此记录先前的观察：Łoś 定理模式的一阶片段对内部超幂成立，即使允许类参数（但不允许类量词）也成立。这可以通过对公式作通常的归纳法来证明。我们只在归纳过程中处理类量词的情形时才需要类选择模式。

引理 25. *Łoś 定理模式对模型 $\mathcal{V} = \langle V, \in, \mathcal{S}\rangle \models \mathrm{GBC}$ 的内部超幂成立，适用于所有带类参数的一阶断言 φ。*

$$\mathrm{Ult}(\mathcal{V}, U) \models \varphi([f]_U, [F]_U) \quad \textit{if and only if} \quad \{\, d \in D \mid \mathcal{V} \models \varphi(f(d), F(d))\,\} \in U.$$

特别地，内部超幂映射是 Σ^1_1-初等的。

我们先证明 KM 模型的内部超幂不一定保持 KM，以此揭示 KM 所面临的问题。

定理 26. (ZFC + 存在一个不可达基数) 存在一个 Kelley–Morse 集合论的模型，其由 ω 上的超滤子所产生的内部二阶超幂不是 Kelley–Morse 集合论的模型。

证明。令 $\mathcal{M} = \langle V_\kappa, \in, V_{\kappa+1}^N\rangle$ 为在定理 19 的证明中构造的 KM 模型，其中包含一个由 T 个 ω 棵 κ树组成的类序列，每棵树都是 $\mathcal{M}$ 中的一个类，并且每棵树在 $\mathcal{M}$中都有一个分支，但不存在一个类能为每棵树收集一个分支。令 $\varphi(n, X, \vec{T})$ 为一个一阶公式，表示 X 对前 n 棵树中的 T 棵树的分支组成的 n序列进行编码。在 V_κ 中固定 ω上的一个非主超滤子 U，并考虑 $\mathrm{Ult}(\mathcal{M}, U)$。如果 $n < \omega$，那么 $\mathcal{M}$ 满足 Σ^1_1公式 $\varphi(n, X, \vec{T})$，因此根据引理 25，$\mathrm{Ult}(\mathcal{M}, U)$ 满足$\exists X\ \varphi([c_n]_U, X, [C_{\vec{T}}]_U)$。于是，对于每个实际的自然数 n，$\mathrm{Ult}(\mathcal{M}, U)$ 都满足 $\exists X\ \varphi([c_n]_U, X, [C_{\vec{T}}]_U)$。如果 $\mathrm{Ult}(\mathcal{M}, U)$ 是一个 KM 模型，那么它对关于自然数的所有二阶断言都满足归纳法，因此它必定有某个非标准自然数 $[f]_U$，使得 $\exists X\ \varphi([f]_U, X, [C_{\vec{T}}]_U)$ 成立，

否则它就能够定义标准截段 ω。假设情况确实如此，则可推出

$$\mathrm{Ult}(\mathcal{M}, U) \models \varphi([f]_U, [F]_U, [C_{\vec{T}}]_U)$$

对于某个类 $[F]_U$，因此，根据引理 25，由于 φ 是一阶的，集合

$$\{\, n < \omega \mid \varphi(n, F(n), \vec{T}) \,\}$$

是 U 的一个元素，因此在 ω 中共尾。但这是不可能的，因为利用 $\neg F$，我们可以像定理24那样，为 T 中的每棵树收集一个分支。□

接下来，我们证明，由 Kelley–Morse 集合论模型的内部超幂所产生的大基数嵌入，不一定是 Kelley–Morse 集合论语言中的初等嵌入。

定理 27。（ZFC + 上方有一个不可达基数的可测基数）存在一个 *Kelley–Morse* 集合论的模型，其中有一个可测基数 δ，使得宇宙在 δ 上的正规测度下的内部超幂，在二阶语言中不是初等的。

证明。 我们从一个模型出发，其中有一个可测基数 δ，其上方还有一个不可达基数 κ。运用附录第 8.2 节的论证，我们在这个模型上进行力迫，得到一个宇宙 V，其中 δ 仍是可测基数，κ 仍是不可达基数，并且现在有 δ个齐次 κ-苏斯林树 $\vec{T} = \langle T_\xi \mid \xi < \delta \rangle$，它们具有引理 41 中所述的性质。添加这些树的力迫保持了 δ 的可测性，因为它不会向 δ 添加新的子集，而且实际上它是 $<\kappa$-分配的。考虑全支撑积 $\mathbb{P} = \Pi_{\xi<\delta} T_\xi$。设 $G \subseteq \mathbb{P}$ 为 V-泛型，并令 G_η为 G 在积 $\mathbb{P}_\eta = \Pi_{\xi<\eta} T_\xi$上的限制，也就是使用截至 η的树进行力迫。因此，照常可以构造 $V[G]$ 的一个对称子模型 N，它具有这样的性质：其序数集恰好是某个此类片段$\mathbb{P}_\eta$添加的集合，其中 $\eta < \kappa$。这给出了一个 KM 模型 $\mathcal{M} = \langle V_\kappa,\ \in,\ V^N_{\kappa+1} \rangle$，其中

$$V^N_{\kappa+1} = \bigcup_{\eta<\delta} V^{V[G_\eta]}_{\kappa+1}.$$

在 $\mathcal{M}$ 中，我们可以为 T 的每个真初始段收集分支，但无法为所有真初始段都收集分支。固定 V_κ 中定义在 δ 上的一个正规测度 U，并考虑由该测度得到的内部超幂$\mathcal{W} = \mathrm{Ult}(\mathcal{M},\ U)$。由于该测度可数完备，这个模型是良基的；将其与 Mostowski 塌缩复合后，我们可以假定它是一个传递模型。

让我们利用 $V[G]$ 在 U 上的超幂，更精确地描述 $\mathcal{W}$ 的性质。具体而言，令 $j : V \to M$ 为 V 中由 U 得到的超幂。这个嵌入的临界点是 δ，而 κ 是更大的不可达基数，因此我们有 $\delta < j(\delta) < \kappa = j(\kappa)$。由于 $\mathbb{P}$ 是 $\leq\delta$-分配的，j 唯一地提升为 $j : V[G] \to M[H]$，其中 $j(G) = H = \{\, q \in j(\mathbb{P}) \mid \exists p \in G\ q \leq j(p) \,\}$，且该提升仍是 $V[G]$ 中由 U 得到的超幂。由于这种力迫不会添加新的 $<\kappa$- 序列，因此可得 $V_\kappa = V_\kappa^{V[G]}$，进而有 $j(V_\kappa) = V_\kappa^M$；又由于 V_κ 对定义在 δ 上的函数封闭，V_κ 经 U 得到的超幂与 $j(V_\kappa) = V_\kappa^M$ 同构。因此，超幂 $\mathcal{W}$ 的集合的收集恰好就是 V_κ^M。接下来，我们论证超幂 $\mathcal{W}$ 的类的收集就是集合 $\bigcup_{\eta<\delta} V^{M[H_\eta]}_{\kappa+1}$。超幂中的每个类都由某个 $\eta < \delta$ 的函数 $F : \delta \to V_{\kappa+1}[G_\eta]$ 表示，这意味着，当把 $[F]_U$ 看作 $M[H]$的一个元素时，它属于 $V^M_{\kappa+1}[H_\eta]$。反过来，一个元素

$M[H]$ 中属于 $\bigcup_{\eta<\delta} V_{\kappa+1}^{M[H_\eta]}$ 的元素由某个 $\eta<\delta$ 的函数 $F\colon \delta \to V_{\kappa+1}^{V[G_\eta]}$ 表示；由于 $\mathbb{P}$ 是 $<\kappa$-分配的，F 必须属于 $V[G_\eta]$。因此，$\mathcal{W}$ 与 $\bigcup_{\eta<\delta} V_{\kappa+1}^{M[H_\eta]}$ 的类之间存在一个显然的同构：将 $\mathcal{W}$ 中函数 F 的等价类映射到 M 中相应的等价类，而超幂嵌入由 j 给出。我们可以考察 $M[H]$ 的对称模型 N，它是仿照上述 N 的对称模型构造的，其序数集恰好是某个 $\eta<\delta$ 的 $M[H_\eta]$ 中的那些序数集，并注意到 $\mathcal{W}=\langle V_\kappa^M,\ \in,\ V_{\kappa+1}^{\bar{N}}\rangle$。因此，特别地，$\mathcal{W}$ 是一个 Kelley–Morse 集合论模型。

在 $\mathcal{M}$ 中，对每个 $\eta<\delta$，我们都有一个类，它为前 $\eta^{\rightarrow}$ 棵树 T_ξ（对于 $\xi<\eta$）编码一份分支列表。这是关于 $\mathcal{M}$ 中的 T 与 δ 的一个陈述。但如果我们应用超幂嵌入，相应的陈述对于 $j(\vec{T})$ 与 $j(\delta)$ 并不成立，因为在 $\mathcal{W}$ 中，不可能存在针对 $j(\vec{T})$ 中前 δ 棵树的这样一份列表，因为任何这样的列表都会由一个类函数 F 表示，然后我们便可以用 F 为每一个满足 $\xi<\delta$ 的 T_ξ 收集一个分支。这违反了超幂嵌入在二阶语言中的初等性。□

在定理 26 中，我们能够构造一个 KM 模型，它在 ω 上具有一个超滤子，其超幂本身并不是一个 KM 模型。尽管我们构造了一个带有正规测度的 KM 模型，其超幂映射不是初等的，但超幂本身确实满足 Kelley–Morse 集合论。这引出了下面这个自然的问题，我们猜想其答案是否定的。

问题 28. 对模型中的某个基数 δ 上的正规测度取该 KM 模型的内部超幂，所得模型是否总是 KM 模型?

请注意，初等性的失效出现在形如 $\forall\eta{<}\delta\,\exists X\,\psi(\eta, X, \vec{T})$ 的断言中，其中 ψ 断言 X 编码了 $\vec{T}$ 的前 η 棵树 T_ξ 上的一个 η 长度的分支序列。这个陈述的复杂度为 $\forall\eta{<}\delta\,\Sigma^1_1$。因此，这立即让我们看到 KM 的另一处缺陷：它无法证明 Σ^1_1 的逻辑复杂度在有界一阶量化下封闭。

回顾一下，一阶集合论 ZFC 证明，对一阶断言施加在前的后续有界量词，不会影响其逻辑复杂度。这一事实是集合论断言范式定理的基础；根据该定理，所有无界量词都可以置于最前面，而施加有界量词不会改变复杂度类别。我们似乎希望二阶集合论的基础公理也能类似地证明这样一种范式：公式中的所有二阶量词都出现在最前面，而且后续添加的一阶量词不会影响这种复杂度。

这很容易由 KM$^+$ 得出，但对 KM 并非如此。我们称二阶集合论中的一个公式具有复杂度 Σ^1_1，如果它具有如下形式：$\exists X\,\varphi(x,\ X,\ A)$，其中 φ 只有一阶量词。通过简单编码，我们也可以等价地允许多个存在类量词 $\exists X\exists Y\,\varphi(x,\ X,\ Y,\ A)$。

定理 29。 (ZFC + 上方有一个不可达基数的可测基数) 理论KM 无法证明：只要 ψ 是公式，$\forall\eta{<}\delta\ \psi(x)$ 就可证明等价于某个 Σ^1_1 公式。

证明。这直接由定理 6 的证明得出，该证明给出了一个带有可测基数 δ 的 KM 模型；对该模型而言，由正规测度所做的超幂对于形如 $\forall\eta{<}\delta\,\psi$ 的断言不是初等的，其中 ψ 为 Σ^1_1。

但根据引理 25，超幂映射是 Σ^1_1-初等的，因此该公式不能被证明等价于任何 Σ^1_1-断言。

□

7. Other class choice principles

类的其他有趣选择原则，可以类比一阶集合论中的依赖选择原则得到。我们先考虑这样一种原理：对于没有终端节点的可定义类关系，它允许我们作出 ω 个依赖选择。

定义 30。 ω-依赖类选择 模式是以下断言模式，其中 $\varphi(X, Y, W)$ 是二阶集合论语言中的任意公式，而 A 是一个类参数

$$\forall X\, \exists Y\, \varphi(X, Y, A) \to \exists Z\, \forall n{<}\omega\, \varphi(Z_n, Z_{n+1}, A).$$

在 Kelley–Morse 集合论中，类选择模式与 ω-依赖类选择模式等价于以下二阶反射原理。

定义 31. 一个足够强的二阶集合论 $\langle V, \in, \mathcal{S}\rangle$的模型满足二阶反射，当且仅当对于每个二阶断言 $\varphi(X)$，都存在一个（非空的）可编码超类 $\mathcal{A}$，使得对于所有 $X \in \mathcal{A}$，都有 $\langle V, \in, \mathcal{S}\rangle \models \varphi(X)$ 当且仅当 $\langle V, \in, \mathcal{A}\rangle \models \varphi(X)$。

也就是说，断言 $\varphi(X)$ 从类的全体 $\mathcal{S}$ 到可编码片段 $\mathcal{A}$是绝对的。（注意：文献中还有其他形式的二阶反射，它们与此处的表述并不相同。）

定理 32. 在Kelley–Morse 集合论中，类选择模式与 ω-依赖类选择模式等价于二阶反射。

证明。首先，假设类选择模式与 ω-依赖类选择模式在模型 $\mathcal{V} = \langle V, \in, \mathcal{S}\rangle \models$ KM 中成立。固定一个二阶公式 $\varphi(X)$。将 $\mathcal{V}$ 解释为一阶逻辑中的公式并运用塔斯基–沃特检验，我们注意到，只需找到一个可编码超类 $\mathcal{A}$，使得对于作为 $\varphi(X)$ 子公式的任意 $\exists Y\, \theta(\vec{X}, Y)$，以及 $\mathcal{A}$ 中满足 $\exists Y\, \theta(\vec{A}, Y)$ 在 $\mathcal{V}$ 中成立的有限多个类 $\vec{A}$，都有某个这样的 Y 属于 $\mathcal{A}$。令 $\psi(X, Y)$ 表示如下关系：由 Y 编码的类的收集公理对 $\varphi(X)$ 的子公式的存在见证封闭，且参数来自按上述方式由 X 编码的类的收集公理。由类选择模式可直接推出，对于每个类 X，都存在一个类 Y，使得 $\psi(X, Y)$ 在 $\mathcal{V}$ 中成立。因此，根据 ω-依赖类选择模式，存在一个 ω-序列 $Z = \langle Z_n \mid n < \omega\rangle$，使得每个 Z_{n+1}（视为其所编码的类的收集公理时）对 $\varphi(X)$ 的子公式的存在见证封闭，且参数来自由 Z_n 编码的类。于是，由所有 Z_n 的并构成的可编码超类具有所需性质。

反过来，现设 $\mathcal{V} = \langle V, \in, \mathcal{S}\rangle$ 是二阶反射的一个模型。首先，我们论证 $\mathcal{V}$ 满足类选择模式。设 $\mathcal{V} \models \forall x\, \exists X\, \varphi(x, X, B)$。令 $\mathcal{A}$ 为一个可编码超类，使得 $\langle V, \in, \mathcal{A}\rangle$ 满足 $\forall x\, \exists X\, \varphi(x, X, B)$；再令 A 满足条件：$\mathcal{A} = \{\, A_\xi \mid \xi \in \mathrm{Ord} \,\}$ 是 A 的切片所构成的收集公理，我们可以假设这些切片由序数索引。现在，对每个集合 x，我们都可以关联到唯一的 A_ξ，其中 ξ 是满足 $\langle V, \in, \mathcal{A}\rangle \models \varphi(x, A_\xi, B)$ 的最小对象，

因此我们可以收集这些见证类。接下来，我们论证 ω-依赖类选择模式在 $\mathcal{V}$ 中成立。设 $\mathcal{V} \models \forall X\, \exists Y\, \varphi(X,\ Y,\ B)$，并令 $\mathcal{A}$ 为一个可编码超类，使得 $\langle V,\ \in,\ \mathcal{A}\rangle$ 也满足该语句。同样，利用某个 A （其切片编码了 $\mathcal{A}$ 的元素），我们可以选出一个 ω-链，为 $\varphi(X,\ Y)$ 作出选择。□

在 [FG23] 中已证明， ω-依赖类选择公理模式不能从 KM$^+$ 推出，因此，特别是，KM$^+$ 的模型中可能不满足二阶反射。

类似于依赖选择原理在一阶集合论中的推广方式，我们可以推广定义 30，考虑任意基数 κ 下的 κ-依赖类选择模式，以及断言 κ-依赖类选择模式对所有基数 κ 都成立的命题。

定义 33. 如果 κ 是一个基数，那么 κ-依赖类选择 模式是以下断言模式，其中 $\varphi(X, Y, W)$ 是二阶集合论语言中的任意公式，且 A 是一个类参数

$$\forall \beta{<}\kappa\, \forall X : \beta \to \mathcal{S}\ \exists Y\, \varphi(X, Y, A) \to \exists Z : \mathrm{Ord} \to \mathcal{S}\ \forall \beta{<}\kappa\ \varphi(Z \restriction \beta, Z_\beta, A).$$

最后，我们可以考虑 Ord-依赖类选择公理模式。

定义 34. Ord-依赖选择 模式是以下断言模式，其中 $\varphi(X, Y, W)$ 是二阶集合论语言中的任意公式，且 A 是一个类参数

$$\forall \beta{\in}\mathrm{Ord}\, \forall X : \beta \to \mathcal{S}\ \exists Y\, \varphi(X, Y, A) \to \exists Z : \mathrm{Ord} \to \mathcal{S}\ \forall \beta{\in}\mathrm{Ord}\, \varphi(Z \restriction \beta, Z_\beta, A).$$

不难看出，Ord-依赖类选择模式蕴含类选择模式。假设 $\forall \xi{\in}\mathrm{Ord}\ \exists X\, \varphi(\xi, X, A)$ 在某个 KM 模型中成立，我们考虑关系 $\psi(X, Y, A)$，它断言 $\varphi(\beta, Y, A)$ 成立，其中 β 是 X 的定义域。显然，对每个 $X : \beta \to \mathcal{S}$，都存在 Y 使得 $\psi(X, Y, A)$ 成立。现在，应用 Ord-依赖类选择模式，我们得到一个类 Z，它编码了一个类序列，使得对每个序数 β， $\varphi(Z \restriction \beta, Z_\beta, A)$ 都成立。但由归纳法可知，对所有 $\beta \in \mathrm{Ord}$， $\varphi(\beta, Z_\beta, A)$ 都成立。

目前尚不清楚，更一般的依赖类选择公理模式能否与 ω-依赖类选择公理模式相分离，或彼此相分离。Friedman 与 Antos 的工作 [AK14], 使用了 Ord-依赖选择公理模式，他们证明：Kelley–Morse 集合论连同 Ord-依赖选择公理模式在所有温和可定义超类强迫下得以保持；而这一结果迄今尚不能推广到仅有 Kelley–Morse 集合论$^+$的情形。温和性是类强迫或超类强迫对集合保持 ZFC 的充要条件。与此相对，Antos 证明 Kelley–Morse 集合论与 Kelley–Morse 集合论$^+$ 均在所有温和类强迫下得以保持。

8. Appendix

8.1. 对称模型。 以下论证在对称模型构造中是标准的（例如参见 [Dim11], 引理 1.29），我们在此收录它们仅是为了完整性。

偏序 $\mathbb{P}$ 称为弱齐次的，如果对于任意两个条件$p,\ q \in \mathbb{P}$，都存在一个自同构 π，使得 $\pi(q)$ 与 p 相容。设 κ 为一个正则基数，并且对于 $\alpha < \kappa$， $\mathbb{P}_\alpha$ 是弱齐次偏序。考虑有界支持（或全支持）积 $\mathbb{P} = \Pi_{\alpha<\kappa}\mathbb{P}_\alpha$。我们称一个

偏序 $\mathbb{P}$ 的自同构 π 保持坐标，如果它由各个坐标上的自同构组成，也就是说，如果存在自同构 π_α，其分别作用于 $\mathbb{P}_\alpha$，使得 $\pi(p) = \langle \pi_\alpha(p(\alpha)) \mid \alpha < \kappa \rangle$。设 $\mathcal{G}$ 为所有保持坐标的自同构构成的群。设 $\mathcal{F}$ 为 $\mathcal{G}$ 上的滤子，由子群 H_α（对于$\alpha < \kappa$）生成；这些子群由所有满足以下条件的自同构 π 组成：对于所有 $\beta < \alpha$，π_β 都是恒等的，因此 π 仅在 α 及其之后具有非平凡作用。如果 σ 是一个 $\mathbb{P}$-名称，我们称 $\mathrm{sym}(\sigma)$ 为 $\mathcal{G}$ 中固定 σ 的自同构所构成的子群。若一个 $\mathbb{P}$-名称 σ 满足 $\mathrm{sym}(\sigma)$ 属于 $\mathcal{F}$，也就是说其中包含某个 H_α，则称其为对称的。令 $\mathrm{HS}^{\mathcal{F}}$ 为所有遗传对称的 $\mathbb{P}$-名称所构成的收集公理。

给定一个条件 $p \in \mathbb{P}$ 和一个序数 $\beta < \kappa$，我们将用 $p^{\restriction\beta}$ 表示与平凡尾部连接的条件 $p \restriction \beta$。

引理 35. 在上述齐次性假设下，设 $p \in \mathbb{P}$ 且 $\check{}p \Vdash \xi \in \sigma$，其中某个遗传对称的 $\mathbb{P}$-名称 σ 满足 $H_\beta \subseteq \mathrm{sym}(\sigma)$，那么 $p^{\restriction\beta} \Vdash \check{}\xi \in \sigma$。

证明。如果结论不成立，那么存在 $q \leq p^{\restriction\beta}$ 使得 $q \Vdash \check{}\xi \notin \sigma$。由于这些$\mathbb{P}_\alpha$ 是弱齐次的，因此存在一个自同构 $\pi \in H_\beta$，使得 $\pi(q)$与 p相容。由于 H_β 包含于 $\mathrm{sym}(\sigma)$，我们知道 $\pi(q) \Vdash \check{}\xi \notin \sigma$。但是，任何条件 $r \leq p$，$\pi(q)$都必须同时迫使 $\check{}\,\xi \in \sigma$ 和 $\check{}\,\xi \notin \sigma$成立，这就导致了矛盾。□

令 $G \subseteq \mathbb{P}$ 为 V-泛型，并令 G_α 为 G 在 $\mathbb{P}_\alpha = \Pi_{\beta<\alpha}\mathbb{P}_\alpha^{\frown}$上的限制。考虑由遗传对称名称导出的对称子模型 $N \subseteq V[G]$：

$$N = \{\, \sigma_G \mid \sigma \in \mathrm{HS}^{\mathcal{F}} \,\}.$$

标准的对称模型论证表明，这是一个 ZF模型。

引理 36. N 中的序数集恰好是由 $\mathbb{P}$ 的真初始段 $\mathbb{P}_\alpha$ 添加的那些序数集，也就是某个 $V[G_\alpha]$ 中的序数集。

证明。设 A 是 N 中的一个序数子集。令 $\sigma \in \mathrm{HS}^{\mathcal{F}}$ 为一个 $\mathbb{P}$-名称，使得 $\sigma_G = A$。那么存在某个条件 $p \in G$，迫使 σ 是序数的子集。由于 $\sigma \in \mathrm{HS}^{\mathcal{F}}$，存在 β 使得 $H_\beta \subseteq \mathrm{sym}(\sigma)$。考虑 $\mathbb{P}$-名称$\sigma^* = \{\, \langle \check{}\xi, q^{\restriction\beta} \rangle \mid q \leq p, q \Vdash \check{}\xi \in \sigma \,\}$，它显然可以视为一个$\mathbb{P}_\beta$-名称。只需证明 $p \Vdash \sigma = \sigma^*$。令 $H \subseteq \mathbb{P}$ 为包含 p 的某个 V-泛型 $\check{}$，并假设 $\xi \in \sigma_H$。那么存在 $q \leq p$ 使得 $q \Vdash \xi \in \sigma$ 且 $q \in H$，由此可得 $\langle \check{}\xi, q^{\restriction\beta} \rangle \in \sigma^*$ 且 $q^{\restriction\beta} \in H$。因此我们有 $\check{}\xi \in \sigma^*_H$。接下来，假设 $\xi \in \sigma^*_H$。那么存在一个条件 $q \Vdash \xi \in \sigma$，使得$\langle \check{}\xi, q^{\restriction\beta} \rangle \in \sigma^*$ 且 $q^{\restriction\beta} \in H$。但由引理 8.1 可得 $q^{\restriction\beta} \Vdash \check{}\xi \in \sigma$，因此 $\xi \in \sigma_H$。□

8.2. **齐次 κ-苏斯林树**。假设 κ是一个不可达基数。我们来描述一种力迫 $\mathbb{Q}$，用来添加一棵齐次的 κ-苏斯林树。给定一个序数α，若树 $^{<\alpha}2$ 的子树高度为 α、每个后继层上的节点都会分叉，且每个节点在所有更高层都有后继，我们就称它为正规 α-树。给定 $^{<\alpha}2$的子树 T，若 T的自同构收集公理 $\mathscr{C}$ 在各层上传递作用，即对于 T同一层上的任意两个节点，都存在 $\mathscr{C}$中的一个自同构将其中一个映射到另一个，我们就说该收集公理在各层上传递作用；如果 T 具有这样一个自同构收集公理，就称其为齐次。特别要注意，一棵齐次

树 T 作为力迫概念几乎是齐次的。 $\mathbb{Q}$ 中的条件是有序对（T， F），其中 T是高度为极限序数 α的齐次正规 $\alpha+1$-树，而$F=\langle f_\xi \mid \xi<\lambda\rangle$ 是 T的自同构枚举，这些自同构在各层上传递作用；这里的 $\lambda<\kappa$是某个序数。 $\mathbb{Q}$上的序关系规定为：若 T'端延伸 T，且 $\lambda'\geq\lambda$端延伸 $F'=\langle f'_\xi \mid \xi<\lambda'\rangle$，并且对所有 $\xi<\lambda$都有 f'_ξ 延伸 f_ξ，则（T'， F'） $\leq$（T， F），其中$F=\langle f_\xi \mid \xi<\lambda\rangle$和 $F'=\langle f'_\xi \mid \xi<\lambda'\rangle$。注意，正规$\alpha+1$-树的自同构由其对第 α层节点的置换决定，而且每个这样的置换都会生成树的一个自同构。该力迫的基本思想是：条件指定对泛型树的一个初始段作出承诺，并同时承诺第 ξ个自同构将如何作用于树的那部分。

引理37. $\mathbb{Q}$中的每个条件(T,F)都有扩展为条件(T',F')的可能，其中 T' 在 κ之下的高度可以任意高。

证明。 假设给定条件 (T,F)，其中 T是一棵 $\alpha+1$ 树。对于任意 $\beta<\kappa$，我们可以在 T顶层的每个节点上方放置一份全树 $2^{\leq\beta}$ 的副本，从而形成延伸树 T'。而且，我们显然可以将 F 中的每个自同构 f_ξ 扩展为 T' 的一个自同构，方法是将这些副本彼此映射；此外，还可以添加更多自同构，在每个 $2^{\leq\beta}$ 内部进行置换，以获得层传递作用。因此，我们找到了 $(T',F')\leq(T,F)$，其中 T'的高度为 $\alpha+\beta+1$。□

引理 38. 力迫 $\mathbb{Q}$ 是 $<\kappa$-策略闭的。

证明。 考虑一场长度为 κ 的双人博弈，玩家们在力迫 $\mathbb{Q}$ 中构造一个递降的 κ-条件序列 (T_α,F_α)。对手先行，但在所有极限阶段由我们先行。如果我们确实能够一直进行到 κ，那么我们就赢得这场博弈。

给定开局着法 (T_0,F_0)，我们要做的是在 T_0 的顶层选取一个特定节点 t_0，然后随着博弈继续进行，有条不紊地延伸这个节点。我们将保证所得分支在博弈的所有极限阶段都能存续。要走出第一步，我们把 (T_0,F_0) 延伸为一个更强的条件 (T_1,F_1)，并选取一个位于 t_0 上方且处于 T_1 顶层的 t_1。类似地，在博弈的后继阶段，若我们刚刚走出 (T_α,F_α)，并指定了顶层上的一个节点 t_α，而对手走出 $(T_{\alpha+1},F_{\alpha+1})$，那么我们就把 t_α 延伸为 $T_{\alpha+1}$ 顶层上的一个节点 $t_{\alpha+1}$，然后可以进一步延伸到任意更强的条件 $(T_{\alpha+2},F_{\alpha+2})$，并在 $T_{\alpha+2}$ 的顶层选取一个位于 $t_{\alpha+1}$ 上方的 $t_{\alpha+2}$。在极限阶段 $\lambda<\kappa$，我们可以取较早各阶段的树 $T^*_\lambda=\bigcup_{\alpha<\lambda}T_\alpha$ 的并，其高度为某个极限高度 η。节点 $\langle t_\alpha \mid \alpha<\lambda\rangle$ 构成穿过这棵树的一条分支，现在我们在恰好位于该分支顶端的 η 层放置一个节点 t_λ。对于自同构，对于每个 ξ，若相应的自同构 f_ξ 最终会在列表 F_α 中定义，我们就取它们的并 $f^*_\xi=\bigcup_{\alpha<\xi}f^\alpha_\xi$；其中，若 f^α_ξ 已定义，则它是 F_α 中列出的第 ξ 个自同构。注意到它是 T^*_λ 的一个自同构。我们将 f^*_ξ 在群运算下闭合，从而得到 T^*_λ 的自同构群的一个子群 $\mathscr{G}$。接着，我们通过在分支 $\langle t_\alpha \mid \alpha<\lambda\rangle$ 的顶端以及该分支在 $\mathscr{G}$ 中自同构作用下的每个像的顶端添加节点，将树 T^*_λ 延伸为树 T_λ。每个自同构 f^*_ξ 都以显然的方式延伸为 T_λ 的相应自同构 f_ξ。注意， T_λ 是正规子群。还要注意，由于 $\mathscr{G}$ 是一个群，且 T_λ 的顶层由单个节点在 $\mathscr{G}$ 中各自同构作用下的像组成，因此群 $\mathscr{G}$

在 T_λ 上传递作用。最后，我们令 F_λ 通过使 $F_\lambda(\xi) = f_\xi$ 来枚举 $\mathscr{G}$ 中的自同构，然后再将 $\mathscr{G}$ 中其余的自同构添加到后面。接着，我们在博弈的这一阶段走出 $(T_\lambda,\ F_\lambda)$。

总之，随着博弈进行、这些树不断长高，我们持续追踪穿过这些树的一条指定分支。在极限阶段，我们确保在该分支顶端放置一个点，并且在该层上只把那些会由我们已经承诺的这棵树的（由这些自同构生成的群的）自同构产生的节点保留为其他节点。□

由此可知，$\mathbb{Q}$ 是 $<\kappa$-分配的，因此它尤其会保持 κ的不可达性。假设 $G \subseteq \mathbb{Q}$ 是 V-泛型的。在 $V[G]$中，令 $\mathcal{T}$为泛型树，即 G中诸条件的所有第一坐标的并。由引理37可知，$\mathcal{T}$ 是一棵 κ-树。此外，$\mathcal{T}$ 是齐次的，由第二坐标所提供的自同构作为见证。接下来，我们通过证明标准封闭引理的一个变体来表明 $\mathcal{T}$ 是 κ-苏斯林的。令 $\mathcal{T}$为 $\mathcal{T}$的规范名称。

引理 39. 如果 $(T, F) \in \mathbb{Q}$ 强迫 A 是 $\mathcal{T}$的极大反链，那么就存在$(T', F') \leq (T, F)$，它强迫 A 包含于 T'。

证明。 我们将采用通常的自举论证来构造一棵树 T'，使得 (T', F')强迫 A 包含于 T'，同时确保 T' 的顶层可以像引理 38 的证明中那样，利用单个分支 B 的自同构像来构造。因此，B 必须具有这样的性质：在任意自同构 $F'(\eta)$作用下，它的像分支上都有某个节点被 (T', F')强迫属于 A。

固定一个大小小于 κ、包含 $\mathbb{Q}, A, (T, F)$ 的（非传递）初等子结构 $M \prec H_{\kappa^+}$，并且 $\kappa \cap M = \alpha$ 是一个序数。再固定一个可定义的记账函数 $\varphi : \kappa \to \kappa$，使得每个 $\beta < \kappa$在 φ的值域中共尾地出现；于是 φ必属于 M。

现在我们在 M 中工作，直至另行通知。设 $T = T_0, F = F_0$。设 t_0 是 T_0 顶层上的任意节点。设 (T_1, F_1) 是任意一个强化 (T_0, F_0) 的条件，并具有如下性质：对于每个 $s \in T_0$，都存在与 s 相容的 $t_s \in T_1$，使得 $(T_1, F_1) \Vdash t_s \in A$。为说明这样的 (T_1, F_1) 存在，我们转到由 $\mathbb{Q}$ 得到的强迫扩张 $V[G]$，其中 $(T_0, F_0) \in G$，并注意到，由于 κ 在那里是正则的，且 T_0 的大小小于 κ，因此泛型树 $\mathcal{T}$ 存在某一层 α，使得对于每个 $s \in T_0$，$A = A_G$ 中都有某个与之相容的元素出现在该层以下。接下来，我们查阅记账函数 $\varphi(0) = \eta$。若 $\eta \geq \lambda_0$，则取 t_1 为 T_1 中位于 t_0 上方的任意一个顶层节点。否则，令 $s = F_0(\eta)(t_0)$，并取 s' 为 T_1 顶层上位于 s 和 t_s 上方的节点。最后，令 $t_1 = F_1(\eta)^{-1}(s')$。这样，我们就以一种使第 η 个自同构将该分支映射到仍位于 A 中某个元素上方的方式延长了分支 B。在 α 以下的所有后继阶段，都应重复这一过程。在极限层 $\delta < \alpha$，我们按照引理 38 的证明构造 (T_δ, F_δ)。

现在回到 M 之外，我们得到一个由 $\langle (T_\xi,\ F_\xi) \mid \xi < \alpha \rangle$ 个条件组成的序列，这些条件位于 $\mathbb{Q}$ 中，同时还有一条穿过 $T^* = \bigcup_{\xi<\alpha} T_\xi$ 的分支 $B = \langle t_\xi \mid \xi < \alpha \rangle$。按照引理 38 的证明构造 $(T_\alpha,\ F_\alpha)$。现在我们来论证 $(T_\alpha,\ F_\alpha)$ 具有所需性质，即对于任意 $F_\alpha(\eta),\ B$ 的像中都有某个节点 t，它被 $(T_\alpha,\ F_\alpha)$ 强迫属于 A。因此，固定定义域中的某个 η，并令 ξ 为某个阶段，使得 η 已经属于 F_ξ 的定义域。由于 φ 具有这样的性质：η 在值域中共尾地出现，因此存在某个阶段 $\gamma > \xi$，使得 $\varphi(\gamma) = \eta$。在此阶段，我们在 T_γ 的顶层选取了某个 s'，它位于一个被强迫

属于 $\dot{A}$ 的节点之上，并令 $t_\gamma = F_\gamma(\eta)^{-1}(s')$，从而确保 B 在 $F_\alpha(\eta)$ 延伸 $F_\gamma(\eta)$ 下的像，将位于一个被强迫属于 A 的节点之上。□

引理 40. 两步迭代 $\mathbb{Q} * \mathcal{T}$ 有一个稠密子集，该子集是 $<\kappa$-闭的。

证明。在 $\mathbb{Q}*\mathcal{T}$ 中的条件是形如 $((T, F)\ \dot{a})$ 的有序对，其中 $\dot{a}$ 是一个 $\mathbb{Q}$-名称，表示 $\mathcal{T}$ 的一个元素。现在考虑 $\mathbb{Q}*\mathcal{T}$ 的子集 $\mathbb{S}$，它由形如 $((T, F)\ a)$ 的条件构成，其中 T 是一棵 $\alpha+1$-树，而 a 是 T 的第 α 层上的一个节点。令 $((T, F)\ \dot{a})$ 为 $\mathbb{Q}*\mathcal{T}$ 中的任意条件。那么存在一个更强的条件 $((T', F')\ a')$，使得 $a' \in T'$ 迫使 $\dot{a} = a'$。令 T' 顶层上位于 a' 之上的任意节点为 a。显然，$((T', F')\ a)$ 是 $\mathbb{S}$ 中的一个元素，并且延伸了 $((T, F)\ \dot{a})$。因此，$\mathbb{S}$ 在 $\mathbb{Q}*\mathcal{T}$ 中稠密。但由于在条件 $((T, F)\ a)$ 中，节点 a 确定了穿过 T 的一条分支，显然 $\mathbb{S}$ 是 $<\kappa$-闭的。□

现在来考虑由所有 $\mathbb{Q}_\xi = \mathbb{Q}$ 构成的有界支撑积 $\mathbb{P} = \Pi_{\xi<\kappa}\mathbb{Q}_\xi$。对引理 38 的证明中的论证作一个直接推广：对条件中出现的每棵树选取一条分支，即可说明 $\mathbb{P}$ 是 $<\kappa$-策略闭的，因此用它进行力迫会保留 κ 的不可达性。令 $\langle \mathcal{T}_\xi \mid \xi<\kappa\rangle$ 为 $\mathbb{P}$ 加入强迫扩张 $V[G]$ 的树序列。上述论证表明，所有 $\mathcal{T}_\xi$ 都是 κ-树。事实上，所有 $\mathcal{T}_\xi$ 都是 κ-苏斯林树；更进一步，我们将论证其中任意少于 κ 棵树的积都满足 κ-cc。为此，需要将引理 39 证明中的论证作一个简单推广。固定 $\lambda<\kappa$，并假设某个条件 $\langle (T(\xi)\ F^{(\xi)}) \mid \xi<\alpha\rangle$ 强迫 $\dot{A}$：A 是积 $\Pi_{\xi<\lambda}\mathcal{T}_\xi$ 的一个极大反链，其中 $\mathcal{T}_\xi$ 是 $\mathbb{P}$ 加入的树的规范名称。我们在大小小于 κ 的 H_{κ^+} 的初等子结构 M 中进行工作，该子结构对 λ-序列封闭，且具有 $M\cap\kappa=\alpha$ 是一个序数这一性质。在 M 中，我们固定一个记账函数 $\varphi\colon \kappa\to {}^{\lambda}\kappa$，使得 ${}^{\lambda}\kappa$ 的每个元素都在其值域中共尾地出现。由于我们选取的 M 对 λ-序列封闭，每个 $f\colon \lambda\to\alpha$ 都必须在 $\varphi\restriction\alpha$ 的值域中共尾地出现。我们通过为 $\xi<\lambda$ 指定 $T'^{(\xi)}$（不含顶层）的分支 B_ξ，来构造所需的条件 $\langle (T'(\xi)\ F'^{(\xi)}) \mid \xi<\alpha'\rangle$（其中有 $T'(\xi)\alpha+1$-树），从而封住反链 $\dot{A}$。这些分支具有如下性质：任意一列自同构 $\langle \pi_\xi \mid \xi<\lambda\rangle$，只要其 π_ξ 属于 $F'^{(\xi)}$ 的值域，就会将分支 B_ξ 映至分支 B^*_ξ，使得某个满足 $t^{(\xi)}\in B^*_\xi$ 的序列 $\langle t^{(\xi)} \mid \xi<\lambda\rangle$ 被 $\langle (T'(\xi)\ F'^{(\xi)}) \mid \xi<\alpha'\rangle$ 强迫属于 A。对于延伸过程中条件上出现的、超出 λ 的额外坐标，我们只需在相应的树上任意指定一条分支，并用它来构造最终树的极限层。

由此可知，对于某个 $\lambda<\kappa$，用积 $\langle \mathcal{T}_\xi \mid \xi<\lambda\rangle$ 进行力迫不会为任何满足 $\alpha\geq\lambda$ 的树 $\mathcal{T}_\alpha$ 添加分支。这是因为积 $(\Pi_{\xi<\alpha}\mathcal{T}_\xi)\times\mathcal{T}_\alpha$ 具有 κ-链条件（cc），因此 $\Pi_{\xi<\alpha}\mathcal{T}_\xi$ 必然力迫 T_α 具有 κ-链条件（cc）。引理 40 的证明中给出的论证也可以推广，从而证明两步迭代 $\mathbb{P}*\Pi_{\xi<\kappa}\mathcal{T}_\xi$ 具有一个 $<\kappa$-闭稠密子集。

现在可以将这些结果汇总为以下引理。

引理 41。如果 κ 在 V 中是不可达基数或马洛基数，那么 V 有一个强迫扩张 $V[G]$，在其中 κ 仍分别是不可达基数或马洛基数，并且存在 κ 多个齐次 κ-苏斯林树 T_ξ，满足以下性质：对于每个 $\lambda<\kappa$，全支撑积 $\Pi_{\xi<\lambda}T_\xi$ 都满足 κ-链条件，是 $<\kappa$-分配的，并且不会给任何满足 $\alpha\geq\lambda$ 的 T_α 添加分支。此外，在通过 $\Pi_{\xi<\kappa}T_\xi$ 得到的任何强迫扩张中，κ 仍分别是不可达基数或马洛基数。

注意，如果 κ 在 V 中是马洛基数，那么它在 $V[G]$ 中仍是马洛基数，因为基模型中 κ 的平稳子集在经过 $<\kappa$-策略闭迫后仍保持平稳；同样，在通过 $\Pi_{\xi<\kappa}T_\xi$ 进行强迫后，它仍是马洛基数，因为两步迭代 $\mathbb{P} * \Pi_{\xi<\kappa}\mathcal{T}_\xi$ 有一个稠密的 $<\kappa$-闭子集。

8.3. 马洛基数与 Easton积。

引理42。 如果 κ 是马洛基数，且 $\mathbb{P} = \Pi_{\xi<\alpha}\mathbb{P}_\alpha$ 是长度为 κ的 *Easton*积，其中每个 $\mathbb{P}_\alpha \in V_\kappa$，那么 $\mathbb{P}$ 具有 κ-*cc*。

证明。 将 $\mathbb{P}$ 中的条件截取到其支集的上确界处后， $\mathbb{P}$就成为 V_κ的子集。考虑结构 $\langle V_\kappa, \in, \mathbb{P}, A\rangle$，并注意到由于$\kappa$是马洛基数，它具有一个初等子结构 $\langle V_\delta, \in, \mathbb{P}\cap V_\delta, A\cap V_\delta\rangle$，其中 δ是不可达基数。根据我们关于 A 的大小为 κ的假设， V_δ 必定遗漏了 A中的某个元素 q。令 q^* 为 q 在 δ中其支集上确界处的限制；由于 $\mathbb{P}$ 具有 Easton支集，该上确界必定在 δ 中有界。由于根据初等性， V_δ 满足 $A\cap V_\delta$ 是一个极大反链， q^* 与某个 $p \in A\cap V_\delta$相容。但这样一来， q 也与 p 相容，这就是所需的矛盾。□

引理43。 假设 κ 是马洛基数，且 $\mathbb{P}$ 是长度为κ的 *Easton* 支撑积，其中每个 $\mathbb{P}_\alpha \in V_\kappa$。若 $G \subseteq \mathbb{P}$ 是 V-泛型，且 A 是 $V[G]$中的 κ 的一个新子集，那么存在一个不可达基数 $\delta < \kappa$，使得 $A\cap\delta$ 是$V[G]$中 δ 的一个新子集。

证明。由引理42， $\mathbb{P}$具有 κ-链条件。将 $\mathbb{P}$ 中条件的支撑截断到其上确界处后， $\mathbb{P}$成为 V_κ的子集。固定一个良好的 $\mathbb{P}$-名称 $\dot{A}$，使得 $\dot{A}_G = A$，并回忆一下，这样的良好名称可以看作一个从κ 到 $\mathbb{P}$ 的反链的函数，它将 α 映到反链 $\mathcal{A}_\alpha$，从而 $\alpha \in A$ 当且仅当 $G\cap\mathcal{A}_\alpha \neq \varnothing$。由于 $\mathbb{P}$ 具有 κ-链条件，每个 $\mathcal{A}_\alpha \in V_\kappa$。固定一个条件$p \in \mathbb{P}$，它迫使 $\dot{A} \notin V$。容易验证，这等价于假设：对于每个 $q \leq p$，存在 $\alpha < \kappa$ 和 r_1、 $r_2 \leq q$，使得 $r_1 \Vdash \dot{G}\cap\mathcal{A}_\alpha = \varnothing$且 $r_2 \Vdash \dot{G}\cap\mathcal{A}_\alpha \neq \varnothing$。命题 $r \Vdash \dot{G}\cap\mathcal{A}_\alpha \neq \varnothing$ 等价于集合 $D = \{q \mid q \leq a$ 对某个 $a \in \mathcal{A}_\alpha\}$ 在 r以下稠密，而命题 $r \Vdash \dot{G}\cap\mathcal{A}_\alpha = \varnothing$ 等价于 $\forall q \leq r \forall a \in \mathcal{A}_\alpha\, \neg q \leq a$。因此，结构 $(V_\kappa, \mathbb{P}, \dot{A}, p)$可以识别出 p迫使 $\dot{A}$是新的。由于 κ是马洛基数，存在一个不可达基数 δ，使得$(V_\delta, \mathbb{P}\cap V_\delta, A\cap V_\delta, p) \prec (V_\kappa, \mathbb{P}, \dot{A}, p)$。注意，$\mathbb{P}\cap V_\delta = \mathbb{P}_\delta$且 $\dot{A}\cap V_\delta = \dot{A}\restriction\delta$。因此，根据初等性， p在 $\mathbb{P}_\delta$中迫使 $\dot{A}\restriction\delta$是新的。但 $p \in G_\delta$是 G 在 $\mathbb{P}_\delta$上的限制，因此 $\dot{A}\restriction\delta$ 确实是新的。□

References

[AK14] Carolin Antos-Kuby。博士论文，Kurt G¨odel Institute，2014年。[Dim11] IoannaDimitriou。 *Symmetric models, singular cardinal patterns and indiscernibles*。博士论文，波恩大学，2011年。[FG23] Sy-David Friedman 和 Victoria Gitman。不可达基数上的 Jensen迫迫法，以及一个满足 cc 但不满足 dc 的 Kelley-Morse 模型。ω。2023年。[GHJ16] Victoria Gitman、Joel David Hamkins 和 Thomas A. Johnstone。没有幂集公理的 ZFC 是什么理论？ *Math. Logic Q.*, 62(4–5):391–406，2016年。[Guz76] Wojciech Guzicki。二阶算术中较弱形式的选择。 *Fund. Math.*, 93 2 131( ): –144，1976年。[Ham20] Joel David Hamkins。异世界基数。《无穷的数学与哲学》，博客文章，2020年。 https://jdh.hamkins.org/otherwordly-cardinals/。[Kel75] John L. Kelley。 *General topology*。施普林格出版社，纽约，1975年。1955年版的重印本 [Van Nostrand, 多伦多，安大略省], 数学研究生教材，第27卷。

[Khr05] K. Khrbachek。关于非标准类论的评注。 *Fundam. Prikl. Mat.*, 11(5):233– 255, 2005年。
[L´ev70] Azriel L
´ *Mathematical Logic and Founda-* evy。公
tions of Set Theory (Proc. Internat. Colloq., Jerusalem, 1968) 129 145
理化集合论中的可定义性。II。载于 , 页码 – 。North-Holland, 阿姆斯特丹, 1970年。[Mar73] W. Marek。关于非谓述集合论的元数学。
Dissertationes Math. , : 。[
(Rozprawy Mat.) 98 40, 1973
MM75] W. Marek 和 A. Mostowski。关于将 ZF集合论的模型扩充为Kelley-Morse类论模型。载于
⊨ *ISILC Logic Conference (Proc. Internat. Summer* , 页码 – 。
Inst. and Logic Colloq., Kiel, 1974) 460 542 499
数学讲义, 第 卷。Springer, 柏林, 1975年。[Sim09] Stephen G. Simpson。
Subsystems of second order arithmetic。《逻辑学视角》。剑桥大学出版社, 剑桥; 符号逻辑协会, 波基普西, 纽约州, 第二版, 2009年。
（V. Gitman） The City University of New York, CUNY Graduate Center, MathematicsProgram, 365 Fifth Avenue, New York, NY 10016*Email address*: vgitman@gmail.com*URL*: https://victoriagitman.github.io/
(Joel David Hamkins) O'Hara Professor of Logic, University of Notre Dame, 100 Malloy Hall, Notre Dame, IN 46556 USA*Email address*: jdhamkins@nd.edu*URL*: http://jdh.hamkins.orgT. A. Johnstone, Mathematics, New York City College of Technology, 300 JayStreet, Brooklyn, NY 11201 *Email address*: tjohnstone@citytech.cuny.edu