平面图同态：二分定理与来自量子群的障碍

蔡进一* 阿什温·马兰* 本·杨*j
yc@cs.wics.edu amaran@wisc.edu benyoung@cs.wisc.edu

arXiv:2601.23198v1 [cs.CC] 30 Jan 2026

摘要

我们研究由任意对称非负实值矩阵 M参数化的计数（加权）平面图同态问题Pl-GH(M)的复杂性。对于对角值两两不同的矩阵，我们证明了一个完整的二分定理：根据一个简单准则，Pl-GH(M)要么多项式时间可解，要么#P-困难。更一般地，只要由 M 表示的图的每个顶点对都能用某个平面边小工具加以区分，我们便得到一个二分定理。

证明平面情形下复杂性二分性的一个关键问题，是平面边构件的表达能力。我们在 Manˇcinska 和 Roberson [MR20]的框架基础上，建立了平面边构件与量子自同构群$\mathrm{Qut}(M)$理论之间的联系。我们证明，能够区分顶点对 M 的平面边构件当且仅当$\mathrm{Qut}(M)$是平凡的，并证明判定$\mathrm{Qut}(M)$是否平凡是不可判定的。这些结果划定了平面同态计数问题的边界，并揭示了将非平面归约技术扩展到平面情形时所存在的内在障碍。

*计算机科学系，威斯康星大学麦迪逊分校

目录

1 引言 1

2 预备知识
2.1 加厚构件 .3 2.2 拉伸构件 .4 2.3 桥接小工具 .5 2.4 环小工具 .5 **3 幅值互异矩阵的困难性 6 4 对角元互异矩阵的困难性 9 5 对角元互异矩阵的二分定理 11 6 边构件与量子自同构 11 7 推论与未来工作 13 A 计算模型 14 B 加厚构件 16 C 拉伸构件 20 D 桥接小工具 22 E 环小工具 24 F 对角元互异矩阵的困难性 27 G 对角元互异矩阵的二分定理 39** G.1 满秩矩阵的困难性 .39 G.2 正值矩阵的二分定理 .39 G.3 非负值矩阵的二分定理 .41

H 对角相异性与量子自同构 44
H.1 量子自同构群 .44 H.2 从两两可区分性推出对角元互异 .47

H.3 不可判定性 .53

1 引言

给定图 G 和 H，从 $V(G)$到 $V(H)$的映射称为同态，如果G 的边被映射到 H的边。更一般地，设 $M=(M_{ij})$为一个 $q\times q$ 对称矩阵。本文考虑任意 $M_{ij}\in\mathbb{R}_{\geq 0}$，其中 $M_{ij}>0$ 是 $H=H_M$中边(i,j)的边权重。给定 M，对任意输入无向多重图 $G=(V,E)$，配分函数 $Z_M(G)$为

$$Z_M(G)=\sum_{\sigma:V\to[q]}\prod_{(u,v)\in E}M_{\sigma(u)\sigma(v)}.$$

同构图 $G\cong G'$具有相同的值 $Z_M(G)=Z_M(G')$，因此每个 M都定义了一种图性质 $Z_M(\cdot)$。对于一个 0-1矩阵 M，$Z_M(G)$统计从 G到 H的同态数量。图同态（GH）涵盖了许多图性质 [Lov67；Lov12；HN04]。

每个 M都定义了一个计算问题，记作 GH(M)：$G\mapsto Z_M(G)$。GH(M) 的复杂性一直是研究的重点。研究者已取得一系列适用范围日益广泛的复杂性二分定理 [DG00；BG05；Gol+10；CCL13]。图同态也是计数CSP的一种特殊情形，已有一系列结果证明，对于任意一组约束函数 $\mathcal{F}$ [Bul13；DR10；DR11；DR13；Bul+12；CCL16；CC17]，都存在复杂性二分定理。

与这一发展并行，Valiant [Val08] 提出了全息算法。众所周知，计数完美匹配的数目（#PM）是#P完全的 [Val79]。另一方面，自20世纪60年代以来，便有著名的FKT算法 [Kas61；TF61；Kas63；Kas67] 可在平面图上以P时间计算#PM。Valiant的全息算法极大地扩展了其适用范围，以至于引出一个极为引人入胜的问题：这是否是一种通用算法，使得每一个可表示为积和式的计数问题，只要能够在平面图上以P时间求解（但在一般情况下为#P-困难），便都由这一方法单独求解?

经过一系列工作 [CLX09；CGW16；Bac17；Bac18；YF22；FYY19；FY14；CF19]，已经确立：对于每一个复值约束函数集合 $\mathcal{F}$ 在布尔域上（即定义域大小 $q=2$），#CSP($\mathcal{F}$)都存在一种三分精确分类：(1) 可在P时间求解；(2) 在平面图上可在P时间求解，但在一般图上为#P-困难；(3) 在平面图上为#P-困难。此外，第(2)类恰好由那些可利用FKT、借助Valiant的全息算法求解的问题构成。即便将此推广到定义域大小 $q=3$ 与4也一直十分困难 [CM23；CM24a]，，需要付出巨大努力，并采用各自量身定制的证明思路。

本文从两个方向推动了这一普适性的发展。一方面，令 Pl-GH(M) 表示问题 GH(M)，其中输入图 G 被限制为平面图。我们通过证明若干尚未解决的 Pl-GH(M) 问题具有 #P 困难性，证明了对于所有定义域大小 q，Pl-GH(M) 都存在二分定理。这类我们证明具有 #P 困难性的矩阵空间之一，是形如 $M=\begin{pmatrix}a_1 & b_1\\ b_1 & c_1\end{pmatrix}\otimes\cdots\otimes\begin{pmatrix}a_n & b_n\\ b_n & c_n\end{pmatrix}$ 的张量积；它们与匹配门的张量积密切相关，属于第(2) 类可通过全息算法在平面图上求解的问题。与此同时，我们通过联系量子群理论 [Ats+19；LMR20；MR20]，证明了当前证明技术存在一些局限。

在一般 GH(M) 的情形中，用于证明 #P 困难性的经典工具是小工具构造。给定一个图 G，利用某个构件从 G 构造出一个新图 G'。通过巧妙地

选择 G'，可以证明，计算 $Z_M(G')$ 等价于在实例 G 上计算某个 #P-困难问题，从而证明 GH(M) 是 #P-困难的。

在 Pl-GH 的设定中，构件构造的主要难点在于，用于证明 GH(M) 的 #P 困难性的若干构件并不保持平面性（即，G 是平面图并不意味着 G' 是平面图）。一类能够保持平面性的构件是平面边小工具。给定一个外部面上有 2 个标记顶点的平面图 K，以及任意平面图 $G = (V, E)$，G 的每条边都可以用构件 K 替换，从而保持所构造图 KG的平面性。于是，计算 Z_M(KG) 的问题可以表述为计算某个其他矩阵 K(M) 的$Z_{\mathbf{K}(M)}(G)$的问题；如果能够证明 Pl-GH(K(M)) 是 #P-困难的，那么也就意味着 Pl-GH(M) 是 #P-困难的。蔡和马兰 [CM23; CM24a] 采用这一策略证明：对于 $q \in \{3, 4\}$，若 Pl-GH(M) 是 #P-困难的，则 M不能由类别 (1) 或 (2) 中的对象（通过直和和张量积）表示，从而确立了 $q \leq 4$的三分分类。

对于一般（非平面）的 GH(M)，边构件的表达能力与 M 的自同构群 Aut(M) 的大小成反比，这一结论源自 Lov´asz [Lov06] 的研究。一项关键的结构性观察（命题 35）表明，当且仅当两个顶点标签i、j属于 Aut(M) 的同一轨道时，边构件无法区分它们。这使得关于一般边构件表达能力的问题可以归结为关于 Aut(M) 的可判定问题。基于 Man˘cinska 和 Roberson 的研究（[MR 20]），我们建立了平面边构件与量子自同构群 Qut(M) 理论之间的联系 [LMR20; MR20]。

我们的主要技术贡献是 Pl-GH(M) 的一个二分定理（定理 33）：对于任意对称的非负矩阵 M，若其对角元两两不同，则 Pl-GH(M) 要么可在多项式时间内计算，要么是 #P-困难，并且存在一个简单且易于检验的判据。在第 3 节中，我们考虑所有元素两两不同（$M_{ij} = M_{ji}$ 除外）的矩阵。我们展示了如何利用平面边小工具和构件插值技术，放大不同顶点类型之间的差异，并从已知的 #P-困难布尔 2×2 情形导出归约（见定理 23）。在第 4 节和第 5 节中，我们概述了证明过程，说明如何运用类似技术，在仅要求对角元两两不同的情况下建立复杂性二分定理（见定理 33）。在第 6 节中，我们证明（定理 34）该二分定理适用于任何能够通过平面构件分离其对角元的矩阵。最后，我们通过证明 Qut(M) 平凡当且仅当这种分离是可能的（推论 37），将这一组合判据与量子自同构联系起来；并证明，给定任意 M 和指标 i、j，判断是否存在某个平面边小工具 K 能够分离这些指标处的对角元是不可判定的（见定理 39）。本研究首次建立了计数问题的二分定理与量子群理论之间的联系，并有力表明，要进一步推进普适性猜想，必须提出真正新颖的思路，而不能仅依靠经典小工具构造。

2 预备知识

对于任意整数 $q \geq 1$，令 Mat$_q(X)$ 表示元素取自 $X \subseteq \mathbb{R}$ 的 $q \times q$ 矩阵集合。例如，我们可以有 $X = \mathbb{R}$、$\mathbb{R}_{\geq 0}$ 或 $\mathbb{R}_{\neq 0}$。接着，令 Sym$_q(X) \subset$ Mat$_q(X)$ 表示对称矩阵的子集；$\mathrm{Sym}_q^{\mathrm{F}}(X) \subset$ Sym$_q(X)$ 和 $\mathrm{Sym}_q^{\mathrm{pd}}(X) \subset \mathrm{Sym}_q^{\mathrm{F}}(X)$ 分别表示.....

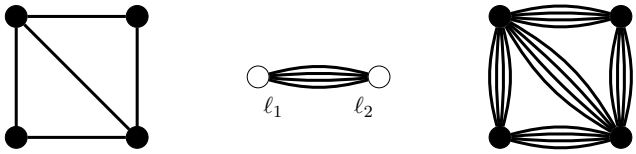


图 1：图 G、加粗构件 $\mathbf{T_4}$，和 $\mathbf{T_4}G$。

满秩矩阵和正定对称矩阵的子集。我们在 $\mathbb{R}$中说明，为什么选择考虑任意取值于 的矩阵（而不只是代数实值矩阵）。附录 A。

边构件 *edge gadget* 是一个带有指定顶点 $\ell_1 \neq \ell_2 \in V(\mathbf{K})$ 的 2-标号图 $\mathbf{K} = (V(\mathbf{K}), E(\mathbf{K}))$。给定任意 $M \in \mathrm{Sym}_q(\mathbb{R})$，我们定义其签名 *signature* $\mathbf{K}(M) \in \mathrm{Mat}_q(\mathbb{R})$ 如下：

$$\mathbf{K}(M)_{ij} = \sum_{\substack{\tau: V(\mathbf{K}) \to [q] \\ \tau(\ell_1)=i, \tau(\ell_2)=j}} \prod_{(u,v) \in E(\mathbf{K})} M_{\tau(u)\tau(v)}. \tag{1}$$

在这项 工作中，我们考虑签名为对称矩阵的平面边构件 s.

定义 *1*（$\mathfrak{C}(M)$，*Pl-*$\mathfrak{C}(M)$）。对于 $M \in \mathrm{Sym}_q(\mathbb{R})$，令 $\mathfrak{C}(M) := \{K(M)$：边构件 $K\} \cap \mathrm{Sym}_q(\mathbb{R})$。定义 *Pl-*$\mathfrak{C}(M) \subset \mathfrak{C}(M)$ 为平面边构件签名的集合：对于其中每个签名，都存在 K 的一个平面嵌入，使得标记顶点位于外面。

给定任意平面图 $G = (V, E)$ 和满足 $\mathbf{K}(M) \in$ Pl-$\mathfrak{C}(M)$ 的 $\mathbf{K}$，我们通过将每条边 (u, v) 替换为 $\mathbf{K}$ 的一个副本，并分别将 (u, v) 与 ℓ_1, ℓ_2 识别，构造平面图 $\mathbf{K}G = (V(\mathbf{K}G), E(\mathbf{K}G))$。严格来说，$\mathbf{K}G$ 尚未被明确定义为一个图，因为其定义取决于我们如何将每条边 $\{u, v\}$ 命名为 (u, v) 或 (v, u)；然而，由于 $\mathbf{K}(M)$ 的对称性，$Z_M(\mathbf{K}\ G)$ 的值不会依赖于边的定向。我们有

$$Z_M(\mathbf{K}\,G) = \sum_{\sigma: V \to [q]} \prod_{(u,v) \in E} \sum_{\substack{\tau: V(\mathbf{K}) \to [q] \\ \tau(\ell_1)=\sigma(u), \tau(\ell_2)=\sigma(v)}} \prod_{(u',v') \in E(\mathbf{K})} M_{\tau(u')\tau(v')} = Z_{\mathbf{K}(M)}(G). \tag{2}$$

因此，对于所有 $\mathbf{K}(M) \in$ Pl-$\mathfrak{C}(M)$，均有 Pl-GH$(\mathbf{K}(M)) \leq$ Pl-GH(M)。下面给出一些例子：

2.1 加厚装置。 对于一个整数 $n \geq 1$，加粗构件 $\mathbf{T}_n$ 由两个顶点 ℓ_1、ℓ_2组成，它们之间由 n 条平行边连接。根据 公式 (1)，我们有，对于所有 i，$j \in [q]$，

$$\mathbf{T_n}(M)_{ij} = \sum_{\substack{\tau: V(\mathbf{T_n}) \to [q] \\ \tau(\ell_1)=i, \tau(\ell_2)=j}} \prod_{(u,v) \in E(\mathbf{T_n})} M_{\tau(u)\tau(v)} = \prod_{(u,v) \in E(\mathbf{T_n})} M_{ij} = (M_{ij})^n.$$

我们看到，对于所有 $M \in \mathrm{Sym}_q(\mathbb{R})$ 以及所有 $n \geq 1$，都有 $\mathbf{T_n}(M) \in$ Pl-$\mathfrak{C}(M)$。通过一种称为构件插值的技术，我们可以将问题从比 $\mathbf{T_n}(M)$ 更多的矩阵归约而来。其思路是，借助对 Pl-GH(M) 的预言机访问，我们可以针对多项式数量的 n 计算 $Z_M(\mathbf{T_n}G) = Z_{\mathbf{T_n}(M)}(G)$，然后构造一个范德蒙德方程组。解出该方程组后，我们就能计算 $Z_N(G)$，适用于更一般的矩阵 N（见附录 B）。由此可得以下结论：

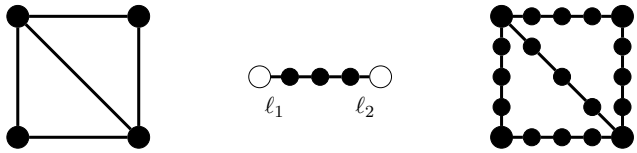


图2：图 G、拉伸构件 $\mathbf{S_4}$，和 $\mathbf{S_4}G$。

定义2。 令 $M \in$对称矩阵空间$q(\mathbb{R}_{>0})$。我们可以定义 $\mathcal{T}_M : \mathbb{R} \to$对称矩阵空间$q(\mathbb{R}_{>0})$ 使得

$$\mathcal{T}_M(\theta)_{ij} = (M_{ij})^\theta, \qquad for\ all\ i, j \in [q].$$

引理 3. 令 $M \in$对称矩阵空间$q(\mathbb{R}_{>0})$。那么，对于所有 $\theta \in \mathbb{R}$，$\texttt{Pl-GH}(\mathcal{T}_M(\theta)) \leq \texttt{Pl-GH}(M)$。

加粗构件的全部能力使我们能够插值更多矩阵。

定义4. 设 $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}_{\neq 0}$ 是一个非零实数集合。有限集合 $\{g_t\}_{t\in[d]} \in (\mathbb{R}_{>1})^d$，其中 $d \geq 0$ 为某个整数，称为 $\mathcal{A}$ 的生成集，若对每个 $a \in \mathcal{A}$，都存在唯一的唯一$(e_0, e_1, \ldots, e_d) \in \{0,1\} \times \mathbb{Z}^d$，使得 $a = (-1)^{e_0} g_1^{e_1} \cdots g_d^{e_d}$。

备注。 注意，给定任意有限 $\mathcal{A} \subset \mathbb{Z}_{\neq 0}$，$\prod_{a\in\mathcal{A}} |a|$ 的素因子集合构成 $\mathcal{A}$的一个生成集。一般而言，每个有限 $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}_{\neq 0}$ 都有一个生成集（见引理*42*，载于附录 *B*）。

定义 *5.* 设 $M \in$对称矩阵空间$q(\mathbb{R}_{\neq 0})$，其元素由某个 $\{g_t\}_{t\in[d]}$ 生成，满足 $M_{ij} = (-1)^{e_{ij0}} \cdot g_1^{e_{ij1}} \cdots g_d^{e_{ijd}}$。设 $e_t^* = \min_{i,j\in[q]} e_{ijt}$ 对所有 $t \in [d]$ 均成立。定义 $\mathcal{T}_M^* : \mathbb{R}^d \to$对称矩阵空间$q(\mathbb{R})$，使得$\mathcal{T}_M^*(z)_{ij} = (-1)^{e_{ij0}} \cdot z_1^{e_{ij1}-e_1^*} \cdots z_d^{e_{ijd}-e_d^*}$ 对所有 $i, j \in [q]$ 都是 $z = (z_1, \ldots, z_d)$ 中的带符号单项式。

引理 6. 设 $M \in$ 对称矩阵空间$q(\mathbb{R}_{\neq 0})$，其元素由某个 $\{g_t\}_{t\in[d]}$ 生成。则，对所有 $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^d$，$\texttt{Pl-GH}(\mathcal{T}_M^*(\mathbf{z})) \leq \texttt{Pl-GH}(M)$。

引理 *7.* 设 $M \in$对称矩阵空间$q(\mathbb{R}_{>0})$，其元素由某个 $\{g_t\}_{t\in[d]}$ 生成。于是，我们可以找到 $\widehat{f}_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$，使得对于 $i \in [d]$，并构造 $\mathcal{T}_M : z \mapsto \mathcal{T}_M^*(f_1(z), \ldots, f_d(z))$，使得对于$x_{ij} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$，$\mathcal{T}_M(z)_{ij} = z^{x_{ij}}$，并且对于所有 (i, j)，$M_{ij} < M_{i'j'} \iff x_{ij} < x_{i'j'}$，且 $M_{ij} = M_{i'j'} \iff x_{ij} = x_{i'j'}$。此外，若 $M \in$对称矩阵空间$_q^{\mathrm{F}}(\mathbb{R}_{>0})$，则存在某个 $\widehat{z} \in \mathbb{R}$，使得 $\widehat{\mathcal{T}}_M(\widehat{z}) \in$对称矩阵空间$_q^{\mathrm{F}}(\mathbb{R}_{>0})$。

证明以及对引理 6和引理 7的详细讨论见附录 B。

2.2 拉伸构件。对于一个整数 $n \geq 1$，拉伸构件$\mathbf{S_n}$ 由两个顶点组成ℓ_1，ℓ_2这两个顶点由一条长度为 n的路径连接。由公式 (1)可知，对于所有 i，$j \in [q]$，

$$\mathbf{S_n}(M)_{ij} = \sum_{\substack{\tau: V(\mathbf{S_n}) \to [q] \\ \tau(\ell_1)=i, \tau(\ell_2)=j}} \prod_{(u,v)\in E(\mathbf{S_n})} M_{ij} = \sum_{k_1,\ldots,k_{n-1}\in[q]} M_{ik_1} M_{k_1k_2} \cdots M_{k_{n-1}j} = (M^n)_{ij}.$$

我们看到，对于所有 $M \in$Sym$_q(\mathbb{R})$ 和所有 $n \geq 1$，都有$\mathbf{S_n}(M) \in$Pl-$\mathfrak{E}(M)$。令 $M \in \mathrm{Sym}_q^{\mathrm{pd}}(\mathbb{R})$，其特征值为 $\lambda_1, \ldots, \lambda_q > 0$。存在一个由单位特征向量组成的正交归一矩阵 H，使得

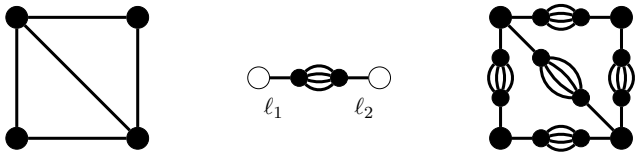


图 3：图 G、桥接构件 $\mathbf{B_4}$，和 $\mathbf{B_4}G$。

$M = HDH^{\mathsf{T}}$，其中 $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_q)$ 是一个对角矩阵。注意，对于所有 $n \geq 1$，都有 $M^n = HD^nH^{\mathsf{T}}$。因此，通过预言机访问 Pl-GH(M)，我们可以针对多项式数量的 n 计算 $Z_M(\mathbf{S_n}G) = Z_{\mathbf{S_n}(M)}(G)$。由此，我们得到一个范德蒙德方程组，从而可以计算其他矩阵 N 的 $Z_N(G)$（见附录 C）。由此得到以下推论：

定义 8 . 设 $M = HDH^{\mathsf{T}} \in \mathit{Sym}_q^{\mathrm{pd}}(\mathbb{R})$。我们可以定义 $\mathcal{S}_M : \mathbb{R} \to \mathit{Sym}_q^{\mathrm{pd}}(\mathbb{R})$ 使得

$$\mathcal{S}_M(\theta) = HD^{\theta}H^{\mathsf{T}}, \qquad \textit{for all real } \theta \in \mathbb{R}.$$

引理 9。 设 $M = HDH^{\mathsf{T}} \in \mathit{Sym}_q^{\mathrm{pd}}(\mathbb{R})$。那么，对于所有 $\theta \in \mathbb{R}_{\neq 0}$，$\texttt{Pl-GH}(\mathcal{S}_M(\theta)) \leq \texttt{Pl-GH}(M)$。

2.3 桥接小工具。 对于整数 $n \geq 1$，桥接构件 $\mathbf{B_n}$ 由两个顶点 ℓ_1、ℓ_2组成，它们由一条长度为 3 的路径连接，其中中间边被替换为 n 条平行边。根据公式 (1)，对于所有 i，$j \in [q]$,

$$\mathbf{B_n}(M)_{ij} = \sum_{\substack{\tau: V(\mathbf{B_n}) \to [q] \\ \tau(\ell_1)=i, \tau(\ell_2)=j}} \prod_{(u,v) \in E(\mathbf{B_n})} M_{ij} = \sum_{k_1,k_2 \in [q]} M_{ik_1}(M_{k_1k_2})^n M_{k_2j} = (M \cdot \mathbf{T_n}(M) \cdot M)_{ij}.$$

我们看到 $\mathbf{B_n}(M) \in \texttt{Pl-}\mathfrak{E}(M)$ 对于所有 $M \in \mathrm{Sym}_q(\mathbb{R})$，对于所有 $n \geq 1$。通过构件插值（详见 附录 D），我们还得到

定义 10。 令 $M \in \mathit{Sym}_q(\mathbb{R}_{\neq 0})$。我们定义 $\mathcal{B}_M$： $\mathbb{R} \to \mathit{Sym}_q(\mathbb{R})$，使得

$$\mathcal{B}_M(\theta)_{ij} = \sum_{x,y \in [q]} M_{ix}(M_{xy})^{\theta} M_{jy}, \qquad \textit{for all } i, j \in [q].$$

引理 11。 令 $M \in \mathit{Sym}_q(\mathbb{R}_{\neq 0})$。那么，对于所有 $\theta \in \mathbb{R}$，$\texttt{Pl-GH}(\mathcal{B}_M(\theta)) \leq \texttt{Pl-GH}(M)$。

2.4 环小工具。 对于一个整数 $n \geq 1$，环构件 $\mathbf{L_n}$ 由两个顶点 ℓ_1、ℓ_2组成，它们由一条单边连接，其中 n 在两者上各有自环 ℓ_1 和 ℓ_2。根据 公式 (1)，对于所有 i、$j \in [q]$,

$$\mathbf{L_n}(M)_{ij} = \sum_{\substack{\tau: V(\mathbf{L_n}) \to [q] \\ \tau(\ell_1)=i, \tau(\ell_2)=j}} \prod_{(u,v) \in E(\mathbf{L_n})} M_{ij} = (M_{ii})^n \cdot M_{ij} \cdot (M_{jj})^n.$$

我们看到 $\mathbf{L_n}(M) \in \texttt{Pl-}\mathfrak{E}(M)$ 对所有 $M \in$ 对称矩阵空间$_q(\mathbb{R})$，对所有 $n \geq 0$。构件插值现在使我们能够证明如下结论（详见附录 E）。

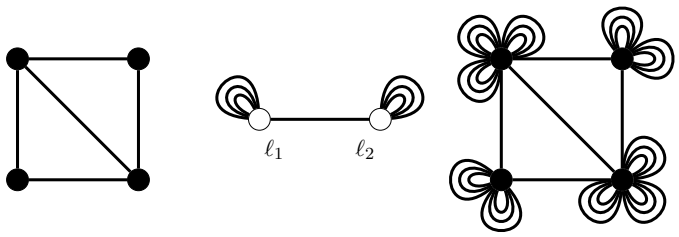


图 4：图 G、环构件 $\mathbf{L_3}$, 和 $\mathbf{L_3}G$。

定义 12. 设 $M \in$ 对称矩阵空间$^q(\mathbb{R}_{>0})$。我们定义 $\mathcal{L}_M$： $\mathbb{R} \to$对称矩阵空间$^q(\mathbb{R})$:

$$\mathcal{L}_M(\theta) = \mathcal{D}_M(\theta) \cdot M \cdot \mathcal{D}_M(\theta),$$

其中 $\mathcal{D}_M(\theta)$ 是一个对角矩阵，其 $\mathcal{D}_M(\theta)_{ii} = (M_{ii})^\theta$.

引理 13. 设 $M \in$对称矩阵空间$^q(\mathbb{R}_{>0})$。则对于所有 $\theta \in \mathbb{R}$，$\texttt{Pl-GH}(\mathcal{L}_M(\theta)) \leq \texttt{Pl-GH}(M)$。

与加厚构件一样，生成集使我们能够在此插值得到更大一类矩阵。

定义 14. 设 $M \in$ 对称矩阵空间$^q(\mathbb{R}_{>0})$。设 $\{g_t\}_{t\in[d]}$ 是 $\{M_{ii} : 1 \leq i \leq q\}$ 的一个生成集，满足 $M_{ii} = g_1^{e_{ii1}} \cdots g_d^{e_{iid}}$，且对所有 $t \in [d]$， $e_t^* = \min^{i\in[q]} e_{iit}$。我们定义 $\mathcal{L}_M^*$: $\mathbb{R}^d \to$ 对称矩阵空间$^q(\mathbb{R})$:

$$\mathcal{L}_M^*(\mathbf{z}) = \mathcal{D}_M^*(\mathbf{z}) \cdot M \cdot \mathcal{D}_M^*(\mathbf{z}),$$

其中 $\mathcal{D}_M^*(\mathbf{z})$ 是一个对角矩阵，其 $\mathcal{D}_M^*(\mathbf{z})_{ii} = z_1^{e_{ii1}-e_1^*} \cdots z_d^{e_{iid}-e_d^*}$。

引理 15。 设 $M \in Sym^q(\mathbb{R}_{>0})$ 的对角元由某个 $\{g_t\}_{t\in[d]}$生成。那么$\texttt{Pl-GH}(\mathcal{L}_M^*(\mathbf{z})) \leq \texttt{Pl-GH}(M)$ 对所有 $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^d$均成立。

3 幅值互异矩阵的困难性

本节将展示小工具插值技术的威力，证明对于任意 幅度互异的矩阵 $M \in \mathrm{Sym}_q^{\mathrm{pd}}(\mathbb{R}_{>0})$ (定义 16)，$\texttt{Pl-GH}(M)$ 是 #P-困难的。

定义 16。 若 $M \in Sym^q(\mathbb{R})$ 幅值互异，则称其为幅值互异矩阵；如果 $|M_{ij}| = |M_{i'j'}|$ 对 $i \leq j$ 和 $i' \leq j'$成立，则意味着$(i, j) = (i', j')$。等价地，若 $\phi_{\mathrm{mag}}(M) \neq 0$，则称 M幅值互异，其中

$$\phi_{\mathrm{mag}}(M) = \prod_{i\leq j} \prod_{\substack{i'\leq j': \\ (i',j')\neq(i,j)}} \left((M_{ij})^2 - (M_{i'j'})^2\right) \tag{3}$$

定义 17. 给定一个开集 $U \subseteq$ 矩阵空间$^q(\mathbb{R})$，若函数 $\rho : U \to \mathbb{R}$ 是关于矩阵元素的实解析函数，则称其为 U-解析函数。若函数 ρ: 对称矩阵空间$^q(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ 是关于矩阵元素的多项式，则称其为对称矩阵空间$^q(\mathbb{R})$-多项式。

备注。 显然，对称矩阵空间$q(\mathbb{R})$-多项式也是对称矩阵空间$q(\mathbb{R})$-解析函数。

引理*18*。设 $U \subseteq Sym^q(\mathbb{R})$ 是一个开集。设 $\mathcal{K}: Z \to U$，其中 $Z \subseteq \mathbb{R}^d$ 是某个开连通 $\mathcal{K}$，使得对于所有 $i, j \in [q]$，$\mathcal{K}(z)_{ij}$ 是 z 的解析函数。设 $\mathcal{F}$ 是一个由 U-解析函数组成的可数集，使得对于每个 $\rho \in \mathcal{F}$，存在某个 $z_\rho \in Z$，满足 $\rho(\mathcal{K}(z_\rho)) \neq 0$。那么，对于任意开子集 $\mathcal{O} \subseteq Z$，存在某个 $z^* \in \mathcal{O}$，使得对于所有 $\rho \in \mathcal{F}$，$\rho(\mathcal{K}(z^*)) \neq 0$。

证明。对于每个 $\rho \in \mathcal{F}$，当 A 在 U 中变化时，$\rho(A)$ 关于 A 的元素是解析的。$\mathcal{K}(\mathbf{z})$ 的元素关于 $\mathbf{z} \in Z$ 是解析的，而 $\mathcal{K}(\mathbf{z})$ 取值于 U。因此，每个 $\rho(\mathcal{K}(\mathbf{z}))$ 都是关于 $\mathbf{z} \in Z$ 的解析函数。此外，根据我们的假设，对于任意 $\rho \in \mathcal{F}$，$\rho(\mathcal{K}(\mathbf{z}))$ 都不是零函数。因此，零点集 $\emptyset_\rho = \{\mathbf{z} : \rho(\mathcal{K}(\mathbf{z})) = 0\}$ 是零测集（参见 [Mit15]）。由于可数个零测集的并仍是零测集，而开集 $\mathcal{O}$ 的测度为正，因此存在某个 $\mathbf{z}^* \in (\mathcal{O} \setminus \cup_\rho \emptyset_\rho)$，满足我们的要求。 □

备注。 $\mathcal{T}_M$， $\mathcal{T}^*_M$， $\mathcal{T}_M$， $\mathcal{S}_M$， $\mathcal{B}_M$， $\mathcal{L}_M$ 以及 $\mathcal{L}^*_M$ 都满足 $\mathcal{K}$ 中的引理*18*的条件。

我们如下使用引理18。假设我们可以将一个矩阵性质编码为 $\rho(M) \neq 0$ 某个 $\mathrm{Sym}^q(\mathbb{R})$-解析函数 ρ，并且假设我们已经有某个 $M \in \mathrm{Sym}^q(\mathbb{R})$，满足 $\rho(M) \neq 0$。那么，当我们使用构件插值函数来寻找一个 $N \in \mathrm{Sym}^q(\mathbb{R})$ 以实现某些目标时，就可以继承这一性质 $\rho(N) \neq 0$。这使我们能够同时满足可数多个这样的矩阵性质。

备注。 例如，这样一个矩阵性质是 $A \in Sym^q(\mathbb{R}_{\neq 0})$，我们可以用函数 $\rho: \ A \mapsto \prod_{i \leq j} A_{ij}$ 对其进行编码。另一个性质是 $A \in Sym^{\mathrm{F}}_q(\mathbb{R})$，我们可以用行列式函数$\det$对其进行编码。

定义 19. 若 $M \in Sym^q(\mathbb{R})$ 满足 I-接近 条件，则称其为 *I*-接近；若 $|M_{ij} - I_{ij}| < 1/3$ 对所有 $i, j \in [q]$均成立，其中 $I \in Sym^q(\mathbb{R})$是单位矩阵。

I-接近并非 一种可以用 $\mathrm{Sym}^q(\mathbb{R})$-解析函数编码的性质。不过，我们可以使用拉伸装置函数 $\mathcal{S}_M$ 来获得 N 接近 I且继承相关矩阵性质的对象。

引理 20. 设 $M \in Sym^{\mathrm{pd}}_q(\mathbb{R}_{>0})$。设 $\mathcal{F}$ 是某个由 $Sym^q(\mathbb{R})$-多项式构成的可数族，满足 $\rho(M) \neq 0$对所有 $\rho \in \mathcal{F}$均成立。那么，存在某个 *I*-接近的 $N \in Sym^{\mathrm{pd}}_q(\mathbb{R}_{>0})$，使得 $\rho(N) \neq 0$对所有 $\rho \in \mathcal{F}$均成立，并且 $\texttt{Pl-GH}(N) \leq \texttt{Pl-GH}(M)$。

证明。 令 $\mathcal{F}' = \{\rho' \colon A \mapsto \rho(\mathbf{T_2}(A)) \mid \rho \in \mathcal{F}\}$。回忆 $\mathcal{T}_M$自 定义2。由假设，$\rho(M) \neq 0$对所有 $\rho \in \mathcal{F}$均成立。因此， $\rho'(\mathcal{T}_M(1/2)) \neq 0$对所有 $\rho' \in \mathcal{F}'$均成立。

给定 $M \in$对称矩阵空间$^{\mathrm{pd}}_q(\mathbb{R}_{>0})$。由于矩阵的特征值是其元素的连续函数，且 $\mathcal{T}_M(1) = M \in$ 对称矩阵空间$^{\mathrm{pd}}_q(\mathbb{R}_{>0})$，因此存在一个包含 1 的开区间 $\mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}$，使得$\mathcal{T}_M(\theta) \in$对称矩阵空间$^{\mathrm{pd}}_q(\mathbb{R}_{>0})$ 对所有 $\theta \in \mathcal{O}$均成立。由引理18可知，现在可以找到某个 $\theta^* \in \mathcal{O}$，使得 $M' = \mathcal{T}_M(\theta^*)$ 满足： $\rho'(M') \neq 0$对所有 $\rho' \in \mathcal{F}'$均成立，且 $\text{Pl-GH}(M') \leq \text{Pl-GH}(M)$。

由于 $M' \in$ 对称矩阵空间$^{\mathrm{pd}}_q(\mathbb{R}_{>0})$，我们可以考虑 $\mathcal{S}_{M'}(\theta)$ (回忆一下 定义 8）。注意 $\mathcal{S}_{M'}(0) = I$。由于 $\mathcal{S}_{M'}(\theta)$ 的每个元素关于 θ都是连续的，因此存在一个开区间 $\mathcal{O}' \subseteq \mathbb{R}$，它以 0 为中心，使得对所有 $\theta \in \mathcal{O}'$， $|\mathcal{S}_{M'}(\theta)_{ij} - I_{ij}| < 1/10$，并且

$$(\mathcal{S}_{M'}(\theta)_{ii})^2 > \sum_{j \neq i \in [q]} (\mathcal{S}_{M'}(\theta)_{ij})^2, \qquad \text{for all } i \in [q].$$

我们再次使用 引理18 来找到 $\theta^{**} \in \mathcal{O}'$，使得 $M'' = \mathcal{S}_{M'}(\theta^{**}) \in$对称矩阵空间$^{\mathrm{pd}}_{q}(\mathbb{R})$ 满足： $\rho'(M'') \neq 0$ 对所有 $\rho' \in \mathcal{F}'$, $\prod_{i,\ j}(M'')_{ij} \neq 0$，并且 Pl-GH$(M'')$ $\leq$Pl-GH(M') $\leq$Pl-GH(M)。

最后令 $N = T_2(M'')$。由 $\mathcal{F}'$ 的构造可知，对于所有 $\rho \in \mathcal{F}$， $\rho'(M'') \neq 0 \implies \rho(N) \neq 0$。此外，根据 $\theta^* \in \mathcal{O}'$ 的选择可知，对于所有 $i \in [q]$， $N_{ii} \in ((9/10)^2, (11/10)^2) \subset (2/3, 4/3)$，并且对于所有 $i \neq j \in [q]$， $N_{ij} \in (0, 1/3)$。由于对于所有 $i, j \in [q]$， $(M'')_{ij} \in \mathbb{R}_{\neq 0}$，我们还得出 $N \in$ 对称矩阵空间 $_{q}(\mathbb{R}_{>0})$。此外， $N_{ii} > \sum_{j \neq i} |N_{ij}|$。因此，根据格尔什戈林圆盘定理（参见 [HJ12] 定理 6.1.1 ）， $N \in$ 对称矩阵空间 $^{\mathrm{pd}}_{q}(\mathbb{R}_{>0})$ 即为所需的矩阵。 □

定义21. 我们称 $M \in Sym_q(\mathbb{R})$ 对角占优，如果 $M_{ii} > |M_{jk}|$ 对所有 $i \in [q], j \neq k \in [q]$均成立。

显然，如果 $M \in$Sym$_q(\mathbb{R})$ 是 I-接近的，那么它也是对角占优的。现在我们可以证明本节的主要定理了，但需要用到以下定理：

定理 22 ([GW20])。 问题 Pl-GH(M) 是 #*P*-困难的，对于 $M = \left(\begin{smallmatrix} x & y \\ y & z \end{smallmatrix}\right) \in$对称矩阵空间$^{\mathrm{F}}_{2}(\mathbb{R}_{>0})$，除非$x = z$，在这种情况下，Pl-GH$(M)$ 可在多项式时间内计算。

定理 23. 设 $M \in Sym^{\mathrm{pd}}_{q}(\mathbb{R}_{>0})$ 是幅度互异的（$q \geq 3$）。那么，Pl-GH(M) 是#*P*-困难的。

证明。我们可以使用引理 20，结合 $\mathcal{F} \ni \phi_{\mathrm{mag}}$ （其中 ϕ_{mag} 在式（3）中定义），得到一个 I-接近（因此也是对角占优）且幅度互异的 $M' \in$ Sym$^{\mathrm{pd}}_{q}(\mathbb{R}_{>0})$，使得 $\widehat{\ }$Pl-GH(M') $\leq$Pl-GH(M)。现在我们考虑引理 7 中定义的 $\mathcal{T}_{M'}(z)$。我们知道，其中存在 $x_{ij} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 使得 $\mathcal{T}_{M'}(z)_{ij} = z^{x_{ij}}$，并且存在某个 $\widehat{z} \in \mathbb{R}$，使得 det$(\mathcal{T}_{M'}(\widehat{z}))$ $\neq 0$。

$\widehat{\ }$令 $x^* = \min_{i,j} x_{ij}$。由 $\mathcal{T}_{M'}$ 的构造以及 M' 幅度互异且对角占优这一事实可知， $x^* = x_{i^*j^*}$，其中某个 $i^* < j^*$满足：对于所有其他$i \leq j \in [q]$，均有 $x^* < x_{ij}$。还可以证明（见引理 44），对于所有 $z \in \mathbb{R}_{\geq 0}$，Pl-GH$(\widehat{\mathcal{T}}_{M'}(z))$ $\equiv$Pl-GH$(z^{-x^*} \cdot \widehat{\mathcal{T}}_{M'}(z))$。因此，我们可以不失一般性地假设 $x^* = x_{i^*j^*} = 0$。

$\widehat{\ }$作为关于 z的多项式，由于存在 $\widehat{z}$，det$(\mathcal{T}_{M'}(z))$ 并非恒等于零。因此，存在$\widehat{\ }$某个 z^*，使得对于所有 $z > z^*$，det$(\mathcal{T}_{M'}(z))$ $\neq 0$。由于 M' 幅度互异，还可推出，对于所有 $k \neq i^*$， $j^* \in [q]$, $M'_{i^*k} \notin \{M'_{j^*j} : j \in [q]\}$。此外，由于 $q \geq 3$，这样的 $k \in [q]$ 存在。因此，差值 $S_2(\widehat{\mathcal{T}}_{M'}(z))_{i^*i^*} - S_2(\widehat{\mathcal{T}}_{M'}(z))_{j^*j^*}$是 $f(z)$ $= \sum_{k \in [q]} z^{2x_{i^*k}} - \sum_{k \in [q]} z^{2x_{j^*k}}$，它不是零多项式。因此，存在某个 $z^{**} \in \mathbb{R}$，使得对于所有 $z > z^{**}$， $f(z)$ $\neq 0$。

现在我们可以选取一个素数 $p >$max(z^*, z^{**})，并令 $M'' =$**S**$_2(\widehat{\mathcal{T}}_{M'}(p))$ $= (\widehat{\mathcal{T}}_{M'}(p))^2$。$\widehat{\ }$根据我们对 $p > z^*$ 的选择，det$(\mathcal{T}_{M'}(p))$ $\neq 0$。由于 M'' 是一个满秩对称矩阵的平方，因此它是正定的，所以 $M \in$Sym$^{\mathrm{pd}}_{q}(\mathbb{Z}_{>0})$。注意，对于所有 $i \in [q]$， $M''_{ii} = \sum_{j \in [q]} p^{2x_{ij}}$。因此，

$$M''_{i^*i^*} = p^{2x^*} + \sum_{j \neq j^*} p^{2x_{i^*j}} = 1 + \sum_{j \neq j^*} p^{2x_{i^*j}} \equiv 1 \mod p.$$

同理， $M''_{j^*j^*} \equiv 1 \bmod p$。此外，对于 $k \neq i^*$， j^*，我们看到 $M''_{kk} \equiv 0 \bmod p$，因为对于所有 $j \in [q]$, $x_{kj} > 0$。此外，根据我们对 $p > z^{**}$ 的选择，我们还可以看到 $M''_{i^*i^*} \neq M''_{j^*j^*}$

由于 $M'' \in$对称矩阵空间$^{\mathrm{pd}}_{q}(\mathbb{Z}_{>0})$，整除 $\prod_i M''_{ii}$的素数集合构成 M''的对角元的生成集。我们可以假设该生成集为 $\{g_1, \ldots, g_d\}$。由于我们知道 $p \mid M''_{ii}$对于 $i \notin \{i^*, j^*\}$，并且 $q \geq 3$，我们知道 $p \in \{g_1, \ldots, g_d\}$。我们可称其为 $g_1 = p$。现在，我们可以令 $M''' = \mathcal{L}^*_{M''}(0,\ 1,\ \ldots\ldots,\ 1)$。根据定义 14，我们注意到 $\mathcal{D}^*_{M''}(0,\ 1,\ \ldots\ldots,\ 1)_{ii} = 0$

对于所有 $i \notin \{i^*, j^*\}$，因为 $g_1 \mid M''_{ii}$。此外，$\mathcal{D}^*_{M''}(0, 1, \ldots\ldots, 1)_{i^*i^*} = \mathcal{D}^*_{M''}(0, 1, \ldots\ldots, 1)_{j^*j^*} = 1$。因此，对于 $\mathbf{z} = (0, 1, \ldots\ldots, 1)$，$\mathcal{D}^*_{M''}(\mathbf{z})$ 恰好选取 M'' 的两行和两列 $\{i^*, j^*\}$，在 $M''' = \mathcal{D}^*_{M''}(\mathbf{z}) \cdot M'' \cdot \mathcal{D}^*_{M''}(\mathbf{z})$ 中。因此，$M'''_{ij} = M''_{ij}$ 当且仅当 $\{i, j\} \subseteq \{i^*, j^*\}$，否则为 $M'''_{ij} = 0$。

现在令 $N \in \mathrm{Sym}_2(\mathbb{Z}_{>0})$ 为 M'' 中由行和列 i^*、$j^* \in [q]$ 组成的 2×2 主子矩阵。于是 Pl-GH(N) $\equiv$ Pl-GH(M''')。由于 $M'' \in \mathrm{Sym}^{\mathrm{pd}}_q(\mathbb{Z}_{>0})$，因此所有主子矩阵也都必须是正定的（参见 [HJ12] 观察 7.1.2）。所以，$N \in \mathrm{Sym}^{\mathrm{pd}}_2(\mathbb{Z}_{>0})$。由于 $M''_{i^*i^*} \neq M''_{j^*j^*}$，定理 22 告诉我们 Pl-GH($N$) 是 #P- 困难的，并且 Pl-GH($N$) $\equiv$ Pl-GH(M''') $\leq$ Pl-GH(M)。

□

4 对角元互异矩阵的困难性

定义 24。如果 $M \in \mathit{Sym}_q(\mathbb{R})$ 中的 q 元素互不相同，则称其为对角相异（分别地，若对任意 i、j、$k \in [q]$、$M_{ii} = M_{jk} \implies i = j = k$ 均成立，则称其为强对角互异）。等价地，M 满足 $\phi_{\mathrm{diag}}(M) \neq 0$（分别地，满足 $\psi_{\mathrm{diag}}(M) \neq 0$），其中

$$\phi_{\mathrm{diag}}(M) = \prod_{i<j} (M_{ii} - M_{jj}) \quad and \quad \psi_{\mathrm{diag}}(M) = \prod_{i \in [q]} \prod_{(j,k) \neq (i,i)} (M_{ii} - M_{jk}) \tag{4}$$

在本节中，我们将证明，对角相异足以证明 #-P 困难性 $M \in$ 对称矩阵空间 $\mathrm{Sym}^{\mathrm{pd}}_q(\mathbb{R}_{>0})$（所有缺失的证明均见附录 F）。我们通过归纳法证明这一点。假设以下结论对所有 $2 \leq t < q$ 都成立。

归纳假设（t）。如果 $M \in$ 对称矩阵空间 $\mathrm{Sym}^{\mathrm{pd}}_t(\mathbb{R}_{>0})$ 是对角相异的，那么 Pl-GH(M) 是 #P 困难的。

基础情形 $t = 2$ 由定理 22 证明。

定理 25。令 $M \in$ 对称矩阵空间 $\mathrm{Sym}^{\mathrm{F}}_q(\mathbb{R}_{>0})$ 为强对角互异。令 $m^* = \min_{i,j} M_{ij}$。若存在某个 $i^* \in [q]$，使得 $M_{i^*j} > m^*$ 对所有 $j \in [q]$，以及 $i^\dagger_1 \neq i^\dagger_2 \in [q]$、$j^\dagger_1$、$j^\dagger_2 \in [q]$，均满足 $M_{i^\dagger_1 j^\dagger_1} = M_{i^\dagger_2 j^\dagger_2} = m^*$，那么 Pl-GH($M$) 是 #$P$ 困难的。

该证明类似于定理 23，并使用归纳假设（t）。

备注。定理 *25* 额外施加了如下约束：M 须为强对角互异，但我们稍后将利用引理 *18* 看到，若 $M \in$ 对称矩阵空间 $\mathrm{Sym}^{\mathrm{pd}}_q(\mathbb{R}_{>0})$ 是对角相异的，则我们可以找到某个 Pl-GH（N）$\leq$ Pl-GH（M），其同样为强对角互异。

我们证明的下一步是要说明：给定一个对角元互异的 $M \in$ 对称矩阵空间 $\mathrm{Sym}^{\mathrm{pd}}_q(\mathbb{R}_{>0})$，可以找到某个具有额外理想性质的 $N \in$ 对称矩阵空间 $\mathrm{Sym}^{\mathrm{pd}}_q(\mathbb{R}_{>0})$，使得 Pl-GH（$N$）$\leq$ Pl-GH（M）。

定义 26. 若对所有 $i \in [q]$、$M_{ij} = M_{ij'} \implies j = j'$ 成立，则称 $M \in$ 对称矩阵空间 $\mathrm{Sym}_q(\mathbb{R})$ 行内互异。等价地，若 $\phi_{\mathrm{row}}(M) \neq 0$，则 M 是行内互异的，其中

$$\phi_{\mathrm{row}}(M) = \prod_{i \in [q]} \prod_{j<j' \in [q]} (M_{ij} - M_{ij'}) \tag{5}$$

引理 27. 设 $M \in$ 对称矩阵空间$^{\mathrm{pd}}_{q}(\mathbb{R}_{>0})$ 为对角元互异。则要么 $\texttt{Pl-GH}(M)$ 是 $\#P$-困难的，要么存在一个 I-接近（从而对角占优）、强对角互异且行内互异的$N \in$对称矩阵空间$^{\mathrm{pd}}_{q}(\mathbb{R}_{>0})$，使得 $\texttt{Pl-GH}(N) \leq \texttt{Pl-GH}(M)$。

给定一个满足引理 27 条件的矩阵 N，只要 N 的最小元素并非出现在 N 的每一行中，我们就可以使用定理 25 证明 Pl-GH(N) 是 #P-困难的。既然我们已经知道 N 强对角互异且行内互异，那么希望还能确保没有任何元素出现在 N 的每一行中，似乎是合理的。若是如此，便可平凡地推出，该矩阵的最小元素也并非出现在每一行中。然而事实证明，这是不可能的。例如，若 $M = \left(\begin{smallmatrix} x & y \\ y & z \end{smallmatrix}\right) \otimes \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ b & c \end{smallmatrix}\right)$，我们会发现$M_{14} = M_{23} = (b \cdot y)$。更令人担忧的是，可以验证，对于所有 $\mathrm{K}(M) \in$ Pl-$\mathfrak{C}(M)$，都有 $\mathrm{K}(M) = \mathrm{K}\left(\left(\begin{smallmatrix} x & y \\ y & z \end{smallmatrix}\right)\right) \otimes \mathrm{K}\left(\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ b & c \end{smallmatrix}\right)\right)$。换言之，利用边构件归约，我们不可能找到一个归约 Pl-GH(N) $\leq$Pl-GH(M)，使其不满足： $N_{14} = N_{23}$。

因此，我们不再尝试证明能够找到 $\texttt{Pl-GH}(N) \leq \texttt{Pl-GH}(M)$ 使得 N 的每一行中都没有同一个元素，而是试图确保：即使某个元素出现在 N 的每一行中，它也不是 N 的最小元素。我们通过使用第 2 节中引入的各种构件函数来实现这一点，并证明一系列引理；这些引理要么对矩阵 N 的形式施加越来越多的限制，要么证明 $\texttt{Pl-GH}(N)$ 是 $\#$P-困难。所有这些引理的精确陈述及其证明的详细讨论见 附录 F。这里先将结果概述为一个定理，其中只列出几项最相关的限制条件。

定理 28. 设 $N \in$对称矩阵空间$^{\mathrm{pd}}_{q}(\mathbb{R}_{>0})$ 为对角占优、强对角互异且行内互异。那么，或者 $\texttt{Pl-GH}(N)$ 是 $\#P$-困难，或者经过定义域元素重命名 $[q]$ （下文对所有 $i \in [q]$ 记作 $i^{\mathrm{R}} = q + 1 - i$），

(I) $N_{i,\, i^{\mathrm{R}}} =$ 最小值$_{i,\, j \in [q]}\, N_{i,\, j}$ 对所有 $i \in [q]$,

(IV) $N_{11} > N_{22} > \cdots > N_{qq}$,

(X) $\aleph(N) = 0$，其中 $\aleph$ 是如下定义的对称矩阵空间$q(\mathbb{R}_{>0})$-解析函数：

$$\aleph(A) = \Big(\ln(A_{1q}) - \ln(A_{qq})\Big)\Big(\ln(A_{(q-1)(q-1)}) - \ln(A_{qq})\Big) - \Big(\ln(A_{11}) - \ln(A_{qq})\Big)\Big(\ln(A_{(q-1)q}) - \ln(A_{qq})\Big).$$

关于 N 形式的其他所有限制条件的确切表述可见于 附录 F （参见 引理 47 至49、51和 53）。最后，我们证明以下引理。

引理 29。 设 $N \in$对称矩阵空间$^{\mathrm{pd}}_{q}(\mathbb{R}_{>0})$ 满足 I-接近、强对角互异和行内互异，并满足定理 *28*中的所有限制条件。那么存在某个 $N' \in$ 对称矩阵空间$^{\mathrm{pd}}_{q}(\mathbb{R}_{>0})$，使得$\texttt{Pl-GH}(N') \leq \texttt{Pl-GH}(N)$，且该矩阵对角占优、强对角互异、行内互异，但不同时满足定理 *28*中的所有限制条件。

定理 30. 设 $M \in \mathrm{Sym}^{\mathrm{pd}}_{q}(\mathbb{R}_{>0})$ 对角元互异（对于 $q \geq 2$）。那么，Pl-GH(M) 是 #P-困难的。证明。由引理 27 可知，Pl-GH(M) 要么是 #P-困难的，要么存在一个 I-接近（因此是对角占优）、强对角互异、行内互异的 $N \in \mathrm{Sym}^{\mathrm{pd}}_{q}(\mathbb{R}_{>0})$，使得 Pl-GH($N$) $\leq$Pl-GH(M)。除非 N 满足定理 28 中的所有性质，否则 Pl-GH(N) 是 #P-困难的。现在，假设 N 满足所有这些性质。引理 29 意味着 Pl-GH(N') $\leq$Pl-GH(N) 不满足定理 28 中的所有性质。因此，Pl-GH(N') $\leq$Pl-GH(N) $\leq$Pl-GH(M) 是 #P-困难的。 □

5 对角相异矩阵的二分定理

在本节中，我们采用已有技术，为所有对角元互异的 $M \in$对称矩阵空间$_q(\mathbb{R}_{\geq 0})$ 建立复杂性二分定理（不要求所有元素均为正，也不要求矩阵正定）。第一步是将定理 30 从正定矩阵推广到满秩矩阵。这相当直接，因为 $M \in$对称矩阵空间$_q^{\mathrm{F}}(\mathbb{R}_{>0})$蕴含$\mathbf{S_2}(M) = M^2 \in$对称矩阵空间$_q^{\mathrm{pd}}(\mathbb{R}_{>0})$。巧妙地使用构件，还可以确保对角相异性，从而证明以下结论：

引理31. 设 $M \in \mathit{Sym}_q^{\mathrm{F}}(\mathbb{R}_{>0})$ 为对角元互异（对于 $q \geq 2$）。则，$\texttt{Pl-GH}(M)$ 是 $\#P$-困难的。

完整证明见附录 G。利用改编自 [GCD20]和 [CCL13], 的技术和结果，我们还可以证明以下结论（更多细节见附录 G）：

定理 32. 设 $M \in \mathit{Sym}_q(\mathbb{R}_{>0})$ 为对角元互异。则当 M 的秩为1时，$\texttt{Pl-GH}(M)$ 可在多项式时间内求解。在其他所有情形下，$\texttt{Pl-GH}(M)$ 均为$\#P$-困难的。

定理 33. 设 $M \in \mathit{Sym}_q(\mathbb{R}_{\geq 0})$ 为对角元互异。则如果（对 $[q]$重新命名后） $M = M_1 \oplus \cdots \oplus M_r$ 对应秩为0 或秩为1 的矩阵 M_i，则$\texttt{Pl-GH}(M)$ 可在多项式时间内求解。在其他所有情形下，$\texttt{Pl-GH}(M)$ 均为$\#P$-困难的。

6 边构件与量子自同构

定理定理 33 的二分定理可扩展为以下结论：

定理 34. 设 $M \in \mathit{Sym}_q(\mathbb{R}_{\geq 0})$。假设对于所有 $x < y \in [q]$，都存在某个 $K^{xy}(M) \in$*Pl-*$\mathfrak{C}(M)$，使得 $K^{xy}(M)_{xx} \neq K^{xy}(M)_{yy}$。那么，如果（对 $[q]$ 重新命名后） $M = M_1 \oplus \cdots \oplus M_r$，且矩阵的秩为 *0* 或秩为 *1*，或者为二部秩 *2* 矩阵 M_i，则 *Pl-GH(*M*)* 可在多项式时间内求解。其他情况下，*Pl-GH(*M*)* 是 *#P*-困难的。

定理 34 的证明见附录 H。由此引出以下问题：给定 $M \in \mathrm{Sym}_q(\mathbb{R}_{>0})$ 和 $i < j \in [q]$，是否存在 $\mathrm{K}(M) \in$ Pl-$\mathfrak{C}(M)$，使得 $\mathrm{K}(M)_{ii} \neq \mathrm{K}(M)_{jj}$? 如果允许所有 $\mathrm{K}(M) \in \mathfrak{C}(M)$（可能并非平面图），那么该问题可通过图同构得到明确解答。图 M 的自同构群 $\mathrm{Aut}(M)$ 是由满足以下条件的置换 $\sigma \in S_q$ 组成的群：对于所有 i， $M_{ij} = M_{\sigma(i)\sigma(j)}$ $j \in [q]$。$\mathrm{Aut}(M)$ 的轨道是关系 $\sim$ 在 $[q]$ 上的等价类，该关系定义为 $i \sim j \iff \exists\, \sigma \in \mathrm{Aut}(M) : \sigma(i) = j$。如果 $i \sim j$，那么对于所有 $\mathrm{K}(M) \in \mathfrak{C}(M)$，都有 $\mathrm{K}(M)_{ii} = \mathrm{K}(M)_{jj}$。对于 $M \in \mathrm{Sym}_q(\mathbb{R}_{>0})$，我们利用 [Lov06; You22], 的结果证明，反过来同样成立，即使将范围限制在对称构件签名上也是如此。

命题 35. 设 $M \in$对称矩阵空间$_q(\mathbb{R}_{\geq 0})$。那么，对于每个$\mathbf{K}(M) \in \mathfrak{C}(M)$，$\mathrm{K}(M)_{ii} = \mathbf{K}(M)_{jj}$当且仅当 i 和 j 属于$\mathrm{Aut}(M)$的同一轨道。

有关本节结果的证明，请参阅 附录 H 。判定 $i \sim j$ 是否成立是可判定的，因此根据 命题 35，判定是否存在一个 $\mathbf{K}(M) \in \mathfrak{C}(M)$ 将i 与 j分开的情形也是可判定的。要得到 命题 35的平面版本，我们转而考察 $\mathrm{Aut}(M)$ 和

的轨道。 量子自同构群 $\mathrm{Qut}(M)$ 是 M 的一个高度抽象的对象，旨在模拟并推广 $\mathrm{Aut}(M)$。特别是，$\mathrm{Qut}(M)$ 在 $[q]$ 上也有定义良好的轨道，这些轨道通常与 $\mathrm{Aut}(M)$的轨道相同，但也可能严格更粗。为证明量子同构与平面图同态不可区分性等价，Manˇcinska 和 Roberson [MR20] 建立了 $\mathrm{Qut}(M)$ 的轨道与平面同态小工具之间的联系（在 [CY24] 中推广到加权图），据此我们可以证明以下结果。

定理 36。 设 $M \in$ 对称矩阵空间$_q(\mathbb{R}_{\geq 0})$。那么，对于每个 $\mathbf{K}(M) \in \mathtt{Pl\text{-}}\mathfrak{C}(M)$，$\mathbf{K}(M)_{ii} = \mathbf{K}(M)_{jj}$ 成立，当且仅当 i 和 j 属于$\mathrm{Qut}(M)$的同一个轨道。

若 Qut(M) 的所有轨道大小均为 1，我们就称其为平凡。在这种情形下，任意 $i \neq j \in [q]$ 都能被某个 $K \in$Pl-$\mathfrak{C}$(M) 区分。若 M 的底层图 $\Gamma_M =$([q], $E(\Gamma_M)$) 连通，我们就称 M 为连通，其中 (i, j) $\in E(\Gamma_M)$ 当且仅当 $M_{ij} > 0$。对于这样的 M，我们可以找到一个单边构件，同时区分所有 i, $j \in [q]$ 对。

推论 37。 设 $M \in$ 对称矩阵空间$_q(\mathbb{R}_{\geq 0})$ 连通。那么$\mathrm{Qut}(M)$ 平凡，当且仅当存在一个对角元互异的$\mathbf{K}(M) \in \mathtt{Pl\text{-}}\mathfrak{C}(M)$。

另一方面的极端情形是 Qut(M) $= S_q^+$，即量子对称群。令$I, J \in$ Sym$_q(\mathbb{R}_{\geq 0})$分别表示单位矩阵和全1矩阵。

命题 38. 令 $M \in$*Sym*$_q(\mathbb{R}_{\geq 0})$。那么$\mathrm{Qut}(M) = S_q^+$当且仅当 $M \in$张成空间$_{\mathbb{R}}(I, J)$。

注意，$M \in$张成空间$_{\mathbb{R}}(I, J)$ 中的每个矩阵要么是 I的标量倍数，要么是 J的标量倍数，要么具有 $\{aI + bJ \mid ab \neq 0\}$的形式。在前两种情形下，$\mathtt{Pl\text{-}GH}(M)$ 显然是可处理的；在第三种情形下（对于 $q \geq 3$），由 Potts 模型可知其为 #P-困难 [Ver05]。

与经典情形相仿，邻接矩阵分别为 M 和 M' 的连通图 H 和 H' 量子同构，当且仅当某个 $v \in V(H)$ 和 $v' \in V(H')$ 属于 Qut($M \oplus M'$) [的同一轨道 LMR20，定理 4.5]。由此，图的量子同构可归结为以下问题：给定 $q \geq 1$, $M \in$ Sym$_q(\mathbb{R}_{>0})$ 以及 $i, j \in [q]$，判断 i 和 j 是否属于 Qut(M) 的同一轨道。通过非局域游戏的量子策略理论可知，量子同构不可判定 [Ats+19 ; Slo 19], 因此，根据定理 36，我们得出结论：寻找具有指定不同对角元的平面边构件这一问题是不可判定的。

定理 39。 以下问题是不可判定的：给定 $q \geq 1$, $M \in$ 对称矩阵空间$_q(\mathbb{R}_{>0})$ 和 $i, j \in [q]$，确定是否存在某个 $\mathbf{K}(M) \in \mathtt{Pl\text{-}}\mathfrak{C}(M)$，使得 $\mathbf{K}(M)_{ii} \neq \mathbf{K}(M)_{jj}$。

备注 *40.* 设 M 和 M' 是两个量子同构但不同构的图的邻接矩阵。例如，可以利用非局域游戏 */Ats+19/*或哈达玛矩阵 */CM24b/*构造无穷多对这样的图。我们可以假设这些图是连通的（见附录 *H* 中的命题 *78*），因此存在 $i \in V(M)$ 和 $j \in V(M')$，它们属于 *Qut*($M \oplus M'$) 中的同一轨道，却属于 *Aut*($M \oplus M'$) 中不同的轨道。根据命题 *35* 和定理 *36*，这些 i 和 j 可以被区分，但只能通过非平面构件来实现：存在一个 $K' \in \mathfrak{C}(M \oplus M')$，使得 $K'(M \oplus M')_{ii} \neq K'(M \oplus M')_{jj}$；但对于每个 $K \in$*Pl-*$\mathfrak{C}(M \oplus M')$，都有 $K(M \oplus M')_{ii} = K(M \oplus M')_{jj}$。

7 推论与未来工作

推论 37 揭示了我们在尝试使用平面边小工具证明 Pl-GH(M) 的 #P 困难性时所面临的一些挑战，尤其是在 Qut(M) 非平凡的情况下。例如，给定一个图 $G=(V,E)$，Dyer 和 Greenhill（[DG00]）构造了一个图 G'：先取 G 与一个具有 $|V|$ 个叶节点的星图的不交并，然后将这些叶节点分别与 V 的顶点相识别。这个高度非平面的构造使他们能够证明，即使对于具有非平凡 Qut(M) 的矩阵 M，也有 GH ((1 11 0)) $\leq$ GH(M)。由推论 37 可知，对于所有具有非平凡 Qut(M) 的 $M \in \mathrm{Sym}_q(\mathbb{R}_{\geq 0})$，都无法使用任何平面边小工具将对角元互异矩阵归约到该问题。

这并不意味着无法使用平面边小工具在 Pl-GH 框架下确立复杂性二分定理。例如，Cai 和 Maran（[CM24a]）仅使用平面边小工具，就确立了 $M \in \mathrm{Sym}_4(\mathbb{R}_{\geq 0})$ 的复杂性二分定理。但即便如此，他们长达 100 页的证明中，近 50 页都用于处理 Qut(M) 的非平凡子情况。他们利用小规模情形下矩阵的特定形式，并通过一系列繁复的引理，证明了每个非平凡 Qut(M) 都是 #P 困难的。由定理 39 可知，对于任意 q，不可能刻画具有非平凡 Qut(M) 的矩阵 M 必须具有的形式。因此，这种策略无法适用于任意 q。

根据定理 36，定理 34 中的二分定理等价于以下结论：对于任意 $M \in \mathrm{Sym}_q(\mathbb{R}_{\geq 0})$，如果 Qut($M$) 是平凡的，那么 Pl-GH($M$) 要么可处理，要么是 #P-困难的。另一方面，命题 38 及其附近的讨论给出了同样形式的一个（相对平凡的）二分定理，适用于满足 Qut(M) $= S_q^+$ 的 M。对于具有中间程度 Qut(M)（存在某种量子对称性，但并非完全量子对称性）的 M，目前尚不清楚 Pl-GH(M) 是否存在二分定理。

要在现有工作的基础上更进一步，我们需要在某些顶点对无法借助平面边构件加以区分的情形下建立一个二分定理。任何归纳证明都必然需要处理所有对角值均相同的矩阵这一基础情形。因此，自然的下一步是尝试在此情形下建立复杂性二分定理，这对应于 Qut(M) 只有单个轨道。

为实现这一目标，本文指出了我们面临的若干挑战：存在 M，使得$\mathrm{Qut}(M)$ 只有单个轨道（M 是量子顶点传递），但$\mathrm{Aut}(M)$ 有多个轨道（M 不是顶点传递） [LMR20]。如备注 40 所述，这意味着存在一个对角线不均匀的非平面边构件，但不存在这样的平面边构件。因此，要对这些问题进行刻画都很困难。这种情形还带来了另一个额外挑战：与 Qut() 平凡的情形不同，存在一些新的多项式时间可解的 Pl-GH() 问题（匹配门的张量积）。因此，要证明二分定理，就必须先划分出这些多项式时间可解的问题，再证明其余问题具有#P 困难性。

这些挑战或许会促使我们考虑跳出 Pl-$\mathfrak{C}$(M)，采用其他此前尚未探索的技术，从无法表示为 Pl-GH(N) 问题的问题 Π 中找到归约 $\Pi \leq$ Pl-GH(M)。另一种可能是，我们必须在只能使用平面边小工具的限制下，发展更强大的分析技术（不依赖于 M 的具体形式），以证明 #P 困难性。

一种计算模型

图灵机模型天然适用于研究整数或图等离散结构上的计算。当 $M \in \mathrm{Sym}_q(\mathbb{R})$ 时，对于 Pl-GH(M)，通常将 M 限定为仅含代数数的矩阵。这纯粹是出于计算模型方面的考虑，尽管允许所有实值矩阵会更加自然。

存在一种形式化（尽管非构造性）的方法，可以处理任意实值矩阵 M 对应的 Pl-GH(M)，同时在位复杂度方面严格遵循图灵机模型。本文的证明高度依赖于在$\mathbb{R}^d$上针对连续函数的解析论证，因此这种逻辑上的形式化视角变得不可或缺。

首先，我们回顾域论中的一个定理：由有限个实数生成的 $\mathbb{Q}$ 上的每个扩张域 F，都是某个纯超越扩张域 E 的有限代数扩张 E′；该纯超越扩张域 E 的形式为 $\mathrm{E} = \mathbb{Q}(X_1, \ldots, X_m)$，其中 $m \geq 0$ 和 $X_1, \ldots, X_m$ 是代数无关的（Jac85] ，定理 8.35，第 512 页）。称 F 在$\mathbb{Q}$上具有有限超越次数 m。已知 m 由 F 唯一确定。由于 char $\mathbb{Q} = 0$，有限代数扩张 E′ 实际上是单扩张，即 E′ =E(β)，其中 β是某个元素；它由 E[Y]中的一个最小多项式指定，其中 E[Y]是仅含一个不定元 Y的多项式环。现在，给定一个实矩阵 M，令 $\mathrm{F} = \mathbb{Q}(M)$为通过添加 M的元素得到的扩张域。对于问题 Pl-GH(M)，我们认为 M 是固定的，因此可以（非构造性地）假设已给出 $\mathrm{F} = \mathrm{E}(\beta)$和 $\mathrm{E} = \mathbb{Q}(X_1, \ldots, X_m)$ 的形式。（这意味着，除其他事项外，β 在 E 上的最小多项式已给出，并且可以在 F 上执行所有算术运算。）

现在，计算问题 Pl-GH(M) 如下：给定一个平面 G，计算 $Z_M(G)$ 在 $\mathbf{F}$ 中的值（它表示为一个关于 β 的多项式，其系数属于 $\mathbf{E}$）。更具体地说，我们可以证明这等价于以下问题 COUNT(M)：输入是一对 (G, x)，其中 $G = (V, E)$ 是一个平面图，且 $x \in \mathbf{F}$。输出是

$$\#_M(G, x) = \left| \{ \sigma : V \to [q] \ : \ \prod_{(u,v) \in E} m_{\sigma(u),\sigma(v)} = x \} \right|,$$

一个非负整数。请注意，在这个定义中，我们基本上是将 $Z_M(G)$ 定义中乘积值相同的项合并起来。

令 $n = |E|$。定义 X 为 $Z_M(G)$ 中所有可能出现的乘积值构成的集合 ：

$$X = \left\{ \prod_{i,j \in [q]} m_{ij}^{k_{ij}} \;\middle|\; \text{integers } k_{ij} \geq 0 \text{ and } \sum_{i,j \in [q]} k_{ij} = n \right\}. \tag{6}$$

存在 $\binom{n+q^2-1}{q^2-1} = n^{O(1)}$ 多个整数序列 $(k_{i,\ j})$，满足 $k_{i,\ j} \geq 0$ 且 $\sum_{i,\ j \in [q]} k_{i,\ j} = n$。$X$ 定义为集合，而不是多重集。去除重复元素后，其基数 $|X|$ 也关于 n为多项式。对于固定且给定的 $\mathbf{F}$，X 中的元素可以在关于 n的多项式时间内枚举。（重要的是，$\mathbf{F}$ 和 q 都被视为固定常数。）由定义可得，对于任意 $x \notin X$，$\#_M(G,\ x) = 0$。这给出了如下关系：

$$Z_M(G) = \sum_{x \in X} x \cdot \#_M(G, x), \quad \text{for any graph } G,$$

因此，Pl-GH(M) $\leq$ COUNT(M)。

对于另一方向，我们为任意 $p \in [|X|]$（回顾一下，$|X|$ 在 n 中是多项式的）构造图$\mathbf{T_p}G$。于是，

$$Z_M(\mathbf{T_p}G) = Z_{\mathbf{T_p}(M)}(G) = \sum_{x \in X} x^p \cdot \#_M(G, x), \quad \text{for any graph } G.$$

这是一个范德蒙德方程组；由于根据定义，X 中的元素两两不同，因此它具有满秩。所以，通过查询 Pl-GH(M) 在 Z_M（$\mathbf{T_p}G$）处的值，我们可以在多项式时间内求解该方程组，并得到每个非零 $x \in X$ 对应的 #$_M$(G, x)。为了得到 #$_M$(G, 0)（如果 $0 \in X$），我们注意到

$$\sum_{x \in X} \#_M(G, x) = q^{|V|}.$$

这给出了一个多项式时间归约，因此，COUNT(M) $\leq$ Pl-GH(M)。我们已经证明了

引理 41。对于任意固定的 M ∈对称矩阵空间$_q$（$\mathbb{R}$），Pl-GH（M）≡COUNT（M）。

因此，Pl-GH(M) 可以等同于这样一个问题：在 Z_M(G) 的规范表达式中，将那些作为 X 中（互不相同的）项之和的、数量为多项式级别的整数系数生成出来。

这种形式主义的观点有一个优点：我们可以研究一般Pl-GH(M) 的复杂度，而不必将范围M限制在代数数之内。因此，无需排除诸如 e 或 π 这样的数。更重要的是，由于我们采用的证明技巧（见引理18），本文的论证离不开这种一般性。简而言之，在本文中，研究一般实数Pl-GH(M) 的复杂度是 M 的特性，而非缺陷，而是优点。

不过，我们注意到，这种处理方式存在以下微妙之处。对于计算问题 Pl-GH(M)，形式主义观点要求$\mathbf{F}$ 以$\mathbf{F}$ $=$ $\mathbf{E}$(β)的形式给出。这种形式确实存在，且按输入图 G 的大小衡量，其描述长度为常数。然而，关于超越数的许多基本问题目前仍无定论。例如，我们仍不知道 $e+\pi$或 $e\pi$ 是有理数、代数无理数还是超越数；此外，$\mathbb{Q}(e, \pi)$ 在 $\mathbb{Q}$ 上的超越次数是否为 2（或 1）仍是一个开放问题，也就是说，e 和 π 是否代数无关，尚无定论。这里的形式主义观点非构造性地假设，关于$\mathbf{F}$的这些信息已给定。在这种设定下，从一个问题到另一个问题的多项式时间归约 $\Pi_1 \leq \Pi_2$，仅意味着：对于 Π_2，多项式时间算法的存在性在逻辑上蕴含对于 Π_1，多项式时间算法的存在性。我们实际上并未通过构造得到这样的算法。

尽管有这一逻辑上的迂回，如果读者只关心 M ∈Sym$_q$($\mathbb{Z}_{\geq 0}$) 中 MPl-GH(M) 的复杂性，那么根据计算模型中针对整数 M 的 Pl-GH(M) 标准定义，本文证明的复杂性二分定理依然成立；而这一结论是在更广泛的设定下针对所有实矩阵 M 得出的，这一点无关紧要。这类似于解析数论中的情形：人们可能只对一个严格针对普通整数的问题感兴趣，但相关定理却是在更广泛的分析设定下证明的。

B 加厚装置

本节将更严格地探讨加厚装置和构件插值。对于 m, $n \geq 1$, 令

$$\mathcal{P}_m(n) = \left\{ \mathbf{x} = (x_i)_{i\in[m]} \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^m \;\middle|\; \sum_{i\in[m]} x_i = n \right\}.$$

注意，对于任意图 $G = (V, E)$,

$$Z_M(\mathbf{T_n}G) = Z_{\mathbf{T_n}(M)}(G) = \sum_{x\in X(G)} x^n \cdot \#_M(G, x) \tag{7}$$

其中

$$X(G) = \left\{ \prod_{i,j\in[q]} M_{ij}^{k_{ij}} \;\middle|\; \mathbf{k} = (k_{ij})_{i,j\in[q]} \in \mathcal{P}_{q^2}(|E|) \right\}, \tag{8}$$

and

$$\#_M(G, x) = \left| \left\{ \sigma : V \to [q] \;:\; \prod_{(u,v)\in E} M_{\sigma(u)\sigma(v)} = x \right\} \right|. \tag{9}$$

注意，对于任意 $x \in X(G), \#_M(G,\ x)$ 不依赖于 n，而只依赖于矩阵 M的元素。定义4中所定义的生成集 使我们能够处理这种依赖关系。首先，我们将证明生成集总是存在的。

定义4。 设 $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}_{\neq 0}$ 是一个非零实数集合。有限集合 $\{g_t\}_{t\in[d]} \in (\mathbb{R}_{>1})^d$，其中 $d \geq 0$为某个整数，称为 $\mathcal{A}$ 的生成集，若对于每个 $a \in \mathcal{A}$，都存在唯一的唯一$(e_0, e_1, \ldots, e_d) \in \{0, 1\} \times \mathbb{Z}^d$，使得 $a = (-1)^{e_0} g_1^{e_1} \cdots g_d^{e_d}$。

Lem定理42。 每个有限的非零实数集合 $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}_{\neq 0}$ 都有一个生成集 .

证明。 考虑由正实数 $\{|a|$生成的乘法群 $\mathcal{G}$： $a \in \mathcal{A}\}$。它是乘法群 $(\mathbb{R}_{>0}, \cdot)$ 的子群。由于 $\mathcal{A}$ 是有限的，且 $(\mathbb{R}_{>0}, \cdot)$ 是无挠的，因此群 $\mathcal{G}$ 是有限生成自由阿贝尔群，从而同构于某个 $\mathbb{Z}^d$。令 f 为从 $\mathbb{Z}^d$ 到该乘法群的同构。通过翻转 $\mathbb{Z}$ 中的 ± 1，我们可以假设此同构将 $\mathbb{Z}^d$ 的基元素映射到某些元素 $\{g_t\}_{t\in[d]}$，使得对所有 $t \in [d]$ 都有 $g_t > 1$。集合 $\{g_t\}_{t\in[d]}$ 是一个生成集。

□

现在我们利用 引理42 为任意矩阵 $M \in \mathrm{Sym}_q(\mathbb{R}_{\neq 0})$ 的元素 $(M_{ij})_{i,j\in[q]}$ 找到一个生成集。注意，这个生成集不一定唯一。不过，对于固定的生成集，任意 M_{ij} 都存在唯一的整数 $e_{ij0} \in \{0, 1\}$ 和 $e_{ij1}, \ldots, e_{ijd} \in \mathbb{Z}$，使得

$$M_{ij} = (-1)^{e_{ij0}} \cdot g_1^{e_{ij1}} \cdots g_d^{e_{ijd}}. \tag{10}$$

备注。 需要注意的是，由于 M 是对称的， $M_{ij} = M_{ji}$ 对于所有 i， $j \in [q]$。整数 e_{ijt} 在 公式 (10) 中的唯一性进而意味着，对于所有 i， $j \in [q]$， $e_{ijt} = e_{jit}$ 对于所有 $t \in [d]$。

现在我们可以证明以下引理。

引理 43。 设 $M \in$对称矩阵空间$_q(\mathbb{R}_{\neq 0})$ ，其元素由某个 $\{g_t\}_{t\in[d]}$ 生成，使得

$$M_{ij} = (-1)^{e_{ij0}} \cdot g_1^{e_{ij1}} \cdots g_d^{e_{ijd}}.$$

此外，假设对于所有 i、$j \in [q]$ 和 $t \in [d]$，$e_{ijt} \geq 0$ 。那么，对于任意形如

$$N_{ij} = (-1)^{e_{ij0}} \cdot z_1^{e_{ij1}} \cdots z_d^{e_{ijd}},$$

参数为 $\mathbf{z} = (z_1, \ldots, z_d) \in \mathbb{R}^d$ 的对象，我们有 $\texttt{Pl-GH}(N) \leq \texttt{Pl-GH}(M)$。

证明。 对于任意 $n \geq 1$ 以及图 $G = (V, E)$，回顾 方程 (7) 可知

$$Z_M(\mathbf{T_n}G) = \sum_{x\in X(G)} x^n \cdot \#_M(G, x), \tag{11}$$

其中 $X(G)$ 和 $\#_M(G,x)$ 如方程 (8) 和 (9) 所示。由于 $X(G)$ 是一个有限集合，且 $|X(G)| \leq |E|^{O(1)}$，通过查询 $n \in [|X(G)|, \text{我们可以利用 Pl-GH}(M)|]$ 得到关于变量 $\{\#_M(G,x)\}_{x\in X(G)}$ 的满秩范德蒙德方程组。因此，所有 $\#_M(G,x)$ 都可以在多项式时间内计算得到。

接下来，每个 $x \in X(G)$ 都可以写成 $x = \prod_{i,\ j\in[q]} M_{ij}^{k_{ij}}$ 其中某个 $\mathbf{k} = (k_{ij}) \in \mathcal{P}_{q^2}(|E|)$。由于 M 的元素由 $\{g_t\}_{t\in[d]}$生成，因此每个这样的 x 都有唯一表示

$$x = (-1)^{e_0^x} \cdot g_1^{e_1^x} \cdots g_d^{e_d^x}, \qquad e_t^x = \sum_{i,j\in[q]} k_{ij} e_{ijt},$$

其中 $e_t^x \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$，因为所有 e_{ijt}，$k_{ij} \geq 0$。

定义映射 $\widehat{y}\colon X(G) \to \mathbb{R}$ 如下：

$$\widehat{y}(x) = (-1)^{e_0^x} \cdot z_1^{e_1^x} \cdots z_d^{e_d^x},$$

其中 $\mathbf{z} = (z_1, \ldots\ldots, z_d)$ 是 $N \in$对称矩阵空间$_q(\mathbb{R})$ 的参数。对于任意 $\mathbf{k} \in \mathcal{P}_{q^2}(|E|)$，此定义保证

$$\widehat{y}\left(\prod_{i,j\in[q]} M_{ij}^{k_{ij}}\right) = \prod_{i,j\in[q]} N_{ij}^{k_{ij}}.$$

Let

$$Y(G) = \left\{ \prod_{i,j\in[q]} N_{ij}^{k_{ij}} \;\middle|\; \mathbf{k} \in \mathcal{P}_{q^2}(|E|) \right\}.$$

对于任意标号 $\sigma\colon V \to [q]$，定义 $k_{ij} = |\{(u, v) \in E\colon \sigma(u) = i, \sigma(v) = j\}|$。那么

$$\widehat{y}\left(\prod_{(u,v)\in E} M_{\sigma(u)\sigma(v)}\right) = \widehat{y}\left(\prod_{i,j\in[q]} M_{ij}^{k_{ij}}\right) = \prod_{i,j\in[q]} N_{ij}^{k_{ij}} = \prod_{(u,v)\in E} N_{\sigma(u)\sigma(v)}.$$

因此，对于每个 $y \in Y(G)$，

$$\left\{\sigma : V \to [q] \;\middle|\; \prod_{(u,v)\in E} N_{\sigma(u)\sigma(v)} = y\right\} = \bigsqcup_{\substack{x\in X(G):\\ \widehat{y}(x)=y}} \left\{\sigma : V \to [q] \;\middle|\; \prod_{(u,v)\in E} M_{\sigma(u)\sigma(v)} = x\right\}.$$

因此，我们得到

$$\#_N(G,y) = \sum_{\substack{x\in X(G):\\ \widehat{y}(x)=y}} \#_M(G,x).$$

利用已确定的 $\#_M(G,\ x)$ 值，我们可以计算

$$Z_N(G) = \sum_{y\in Y(G)} y\cdot \#_N(G,y) = \sum_{x\in X(G)} \widehat{y}(x)\cdot \#_M(G,x).$$

因此，借助对 Pl-GH(M) 的预言机访问，可以在多项式时间内计算 $Z_N(G)$，这意味着 Pl-GH(N) $\leq$Pl-GH(M)。 □

引理 43 使我们能够证明引理 6，但我们首先需要以下初等引理。

Le引理 44。设 $M\in$ 对称矩阵空间$_q(\mathbb{R}_{\neq 0})$，并设 $c\in\mathbb{R}_{\neq 0}$。则$\texttt{Pl-GH}(M)\equiv\texttt{Pl-GH}(cM)$.

证明。注意，给定任意 $G=(V,\ E)$

$$Z_{cM}(G) = \sum_{\sigma:V\to[q]}\prod_{(u,v)\in E}(cM)_{\sigma(u)\sigma(v)} = c^{|E|}\sum_{\sigma:V\to[q]}\prod_{(u,v)\in E} cM_{\sigma(u)\sigma(v)} = c^{|E|}Z_M(G).$$

因此，拥有对 Pl-GH(M) 或 Pl-GH(cM) 之一的预言机访问，即可获得对另一个的预言机访问。 □

我们现在可以证明引理 6。

引理 6. 设 $M\in$ 对称矩阵空间$_q(\mathbb{R}_{\neq 0})$ 的元素由某个 $\{g_t\}_{t\in[d]}$ 生成。那么，对于所有 $\mathbf{z}\in\mathbb{R}^d$，有 $\texttt{Pl-GH}(\mathcal{T}^*_M(\mathbf{z}))\leq\texttt{Pl-GH}(M)$。

证明。由于 $M\in$对称矩阵空间$_q(\mathbb{R}_{\neq 0})$ 由 $\{g_t\}_{t\in[d]}$ 生成，我们知道存在整数 $e_{ijt}\in\mathbb{Z}$，使得对于所有 i、$j\in[q]$，$M_{ij}=(-1)^{e_{ij0}}\cdot g_1^{e_{ij1}}\cdots g_d^{e_{ijd}}$。现在，对所有 $t\in[d]$，令 $e^*_t=\min_{i,j\in[q]} e_{ijt}$，并令 $c=\prod_{t\in[d]} g_t^{-e^*_t}$。由引理 44 可知，Pl-GH($M$) $\equiv$Pl-GH(cM)。此外，我们还发现矩阵 cM 的元素也由 $\{g_t\}_{t\in[d]}$ 生成，使得对于所有 i、$j\in[q]$，$(cM)_{ij}=(-1)^{e_{ij0}}\cdot g_1^{e_{ij1}-e^*_1}\cdots g_d^{e_{ijd}-e^*_d}$。根据我们对 e^*_t 的选择，对于所有 i、$j\in[q]$、$t\in[d]$，都有 $e_{ijt}-e^*_t\geq 0$。因此，引理 43 意味着，对于所有 $\mathbf{z}=(z_1,\ldots,z_d)\in\mathbb{R}^d$，Pl-GH($\mathcal{T}^*_M(\mathbf{z})$) $\leq$Pl-GH(cM) $\equiv$Pl-GH(M)。 □

引理 3 和7 现在可作为推论得出：

Le引理 3. 令 $M\in$对称矩阵空间$_q(\mathbb{R}_{>0})$。那么，对于所有 $\theta\in\mathbb{R}$，$\texttt{Pl-GH}(\mathcal{T}_M(\theta))\leq\texttt{Pl-GH}(M)$。

证明。令 $M\in$ 对称矩阵空间$_q(\mathbb{R}_{>0})$ 的元素由某个 $\{g_t\}_{t\in[d]}$生成，使得 $M_{ij}=g_1^{e_{ij1}}\cdots g_d^{e_{ijd}}$对所有 $i,\ j\in[q]$。令 $e^*_t=\min_{i,\ j\in[q]} e_{ijt}$当 $t\in[d]$时。接着，根据 定义 5，我们注意到

$$\mathcal{T}^*_M(g_1^\theta,\ldots,g_d^\theta)_{ij} = (g_1^{e_{ij1}}\cdots g_d^{e_{ijt}})^\theta\cdot(g_1^{-e^*_1}\cdots g_d^{-e^*_d})^\theta = (M_{ij})^\theta\cdot c^\theta,$$

对于 $c=(g_1^{-e^*_1}\cdots g_d^{-e^*_d})$。重要的是，$c$与所有 $i,\ j\in[q]$均无关。因此，$\mathcal{T}^*_M(g_1^\theta,\ \ldots\ldots,\ g_d^\theta)$ $=c^\theta\cdot\mathcal{T}_M(\theta)$对所有 $\theta\in\mathbb{R}$均成立。因此，引理 6 和 44 推出

$$\texttt{Pl-GH}(\mathcal{T}_M(\theta))\equiv\texttt{Pl-GH}(\mathcal{T}^*_M(g_1^\theta,\ldots,g_d^\theta))\leq\texttt{Pl-GH}(M),$$

对于所有 $\theta\in\mathbb{R}$。 □

引理 7。设 $M \in Sym_q(\mathbb{R}_{>0})$，其元素由某个 $\{g_t\}_{t\in[d]}$ 生成。那么，我们可以找到 $\widehat{\ } \quad \sim f_i\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 对于 $i\in[d]$，并构造 $\mathcal{T}_M\colon z\mapsto \mathcal{T}_M^*(f_1(z)\dots,f_d(z))$，使得 $\mathcal{T}_M(z)_{ij}=z^{x_{ij}}$ 对于 $x_{ij}\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$，从而对于所有 (i,j)，$M_{ij}<M_{i'j'} \iff x_{ij}<x_{i'j'}$，以及 $M_{ij}=M_{i'j'} \iff x_{ij}=x_{i'j'}$。此外，如果 $M\in Sym_q^{\mathrm{F}}(\mathbb{R}_{>0})$，那么存在某个 $\widehat{z}\in\mathbb{R}$，使得 $\widehat{\mathcal{T}}_M(\widehat{z})\in Sym_q^{\mathrm{F}}(\mathbb{R}_{>0})$。

证明。设 $\{g_t\}_{t\in[d]}$ 是 M 的元素的一个生成集，其中 $M_{ij}=g_1^{e_{ij1}}\cdots g_d^{e_{ijd}}$，$e_t^*=\min_{i,j\in[q]} e_{ijt}$，$(i,j\in[q],t\in[d])$。根据引理 6，对于所有 $\mathbf{z}\in\mathbb{R}^d$，Pl-GH$(\mathcal{T}_M^*(\mathbf{z}))\leq$Pl-GH$(M)$。

定义 $\mathcal{E}_M\colon \mathbb{R}^d\to$对称矩阵空间$_q(\mathbb{R})$，使得 $\mathcal{E}_M(y_1,\dots,y_d)=\mathcal{T}_M^*(e^{y_1},\dots,e^{y_d})$。根据生成元的定义，如果 $M_{ij}=M_{i'j'}$，那么 $(\mathcal{E}_M(\mathbf{y}))_{ij}=(\mathcal{E}_M(\mathbf{y}))_{i'j'}$。由定义 5 可知，对于某个 $c\in\mathbb{R}_{>0}$，$\mathcal{E}_M(\ln(g_1)\dots,\ln(g_d))=\mathcal{T}_M^*(g_1,\dots,g_d)=c\cdot M$。定义 δ_M: 对称矩阵空间$_q(\mathbb{R})\to\mathbb{R}$，其中

$$\delta_M(A)=\min_{\substack{i\leq j,\,i'\leq j':\\ M_{ij}\neq M_{i'j'}}} |A_{ij}-A_{i'j'}|,$$

它衡量的是 A 中对应于 M 的不同元素之间绝对差值的最小值。显然，$\delta_M(c\cdot M)>0$。由于 $\delta_M(A)$ 是关于 A 中各元素的连续函数，因此存在一个以 $(\ln(g_1)\dots,\ln(g_d))$ 为中心的开球 $\mathcal{O}$，使得对所有$\mathbf{y}\in\mathcal{O}$，$\delta_M(\mathcal{E}_M(\mathbf{y}))>0$。此外，若 $M\in \mathrm{Sym}_q^{\mathrm{F}}(\mathbb{R}_{>0})$，注意到矩阵的特征值是其元素的连续函数，因此存在一个以 $(\ln(g_1)\dots,\ln(g_d))$ 为中心的开球 $\mathcal{O}'$，使得对所有 $\mathbf{y}\in\mathcal{O}'$，$\det(\mathcal{E}_M(\mathbf{y}))\neq 0$。在这种情形下，后续我们用较小的开球 $\mathcal{O}\cap\mathcal{O}'$ 替换 $\mathcal{O}$。

特别地，我们可以找到某个 $\mathbf{y}^*=(y_1^*,\dots,y_d^*)\in\mathbb{Q}_{>0}^d\cap\mathcal{O}$。现在，对于任意的 (i,j) 和 (i',j')，若 $M_{ij}<M_{i'j'}$，我们断言 $(\mathcal{E}_M(\mathbf{y}^*))_{ij}<(\mathcal{E}_M(\mathbf{y}^*))_{i'j'}$。否则，根据介值定理，存在某个 $t\in[0,1]$，使得 $\mathcal{E}_M(\mathbf{y})_{ij}=\mathcal{E}_M(\mathbf{y})_{i'j'}$，其中 $\mathbf{y}=t\cdot\mathbf{y}^*+(1-t)\cdot(\ln(g_1)\dots,\ln(g_d))\in\mathcal{O}$。这与对所有 $\mathbf{y}\in\mathcal{O}$，$\delta_M(\mathcal{E}_M(\mathbf{y}))>0$ 矛盾。因此，

$$M_{ij}<M_{i'j'} \iff \mathcal{E}_M(\ln(g_1)\dots,\ln(g_d))_{ij}<\mathcal{E}_M(\ln(g_1)\dots,\ln(g_d))_{i'j'} \iff \mathcal{E}_M(\mathbf{y}^*)_{ij}<\mathcal{E}_M(\mathbf{y}^*)_{i'j'}.$$

由于 $\mathbf{y}^*\in\mathbb{Q}_{>0}^d$，我们知道存在某个 $\kappa\in\mathbb{Z}_{>0}$，使得 $\kappa\cdot\mathbf{y}^*\in\mathbb{Z}_{>0}^d$。现在，我们定义

$$x_{ij}=\sum_{t\in[d]}\kappa y_t^*(e_{ijt}-e_t^*),\qquad \text{for all } i\leq j\in[q].$$

由于 $\kappa y_t^*\in\mathbb{Z}_{>0}$，且 $(e_{ijt}-e_t^*)\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$，我们看到对于所有 $i\leq j\in[q]$都有 $x_{ij}\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$。同样容易看出，对于所有 $i,j\in[q]$，$e^{x_{ij}}=\mathcal{E}_M(\kappa\cdot\mathbf{y}^*)_{ij}$。因此，$M_{ij}<M_{i'j'} \iff x_{ij}<x_{i'j'}$。

现在我们可以定义对所有 $i,j\in[q]$ 对称矩阵空间$_q(\mathbb{R})$ 中的 $\widehat{\mathcal{T}}_M(z)$ 使得 $\mathcal{E}_M(\ln(z)(\kappa\cdot\mathbf{y}^*))\leq$Pl-GH$(M)$。此外，如果 $M\in$对称矩阵空间$_q^{\mathrm{F}}(\mathbb{R}_{>0})$，则$\det(\widehat{\mathcal{T}}_M(e^{1/\kappa}))=\det(\mathcal{E}_M(\mathbf{y}^*))\neq 0$。

□

C 拉伸构件

在本节中，我们将更严格地探讨拉伸构件和构件插值。对于 $m, n \geq 1$，令

$$\mathcal{P}_m(n) = \left\{ \mathbf{x} = (x_i)_{i\in[m]} \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^m \;\middle|\; \sum_{i\in[m]} x_i = n \right\}.$$

给定一个矩阵 $M \in$对称矩阵空间$_q^{\mathrm{pd}}(\mathbb{R})$，我们知道存在一个由单位特征向量构成的正交归一矩阵（不一定唯一） H，其元素为 $H_{ij} \in \mathbb{R}$，以及一个由特征值构成的对角矩阵$D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots\ldots, \lambda_q)$，使得 $M = HDH^{\mathsf{T}}$。因此，

$$(\mathbf{S_n}(M))_{ij} = (M^n)_{ij} = (H_{i1}H_{j1})\lambda_1^n + \cdots + (H_{iq}H_{jq})\lambda_q^n,$$

对所有 i，$j \in [q]$，以及所有 $n \geq 1$。

由此可得

$$Z_{\mathbf{S_n}(M)}(G) = \sum_{\mathbf{k}\in\mathcal{P}_q(|E|)} c_H(G,\mathbf{k}) \cdot \left(\lambda_1^{k_1}\cdots\lambda_q^{k_q}\right)^n, \tag{12}$$

其中

$$c_H(G,\mathbf{k}) = \sum_{\sigma:V\to[q]} \left(\sum_{\substack{E_1\sqcup\cdots\sqcup E_q = E \\ |E_i|=k_i}} \left(\prod_{i\in[q]} \prod_{(u,v)\in E_i} H_{\sigma(u)i}H_{\sigma(v)i} \right) \right) \tag{13}$$

仅依赖于 G 和正交矩阵 H，而不依赖于 D。

我们现在可以证明引理 9。

引理 9。 令 $M = HDH^{\mathsf{T}} \in$对称矩阵空间$_q^{\mathrm{pd}}(\mathbb{R})$。则对于所有 $\theta \in \mathbb{R}_{\neq 0}$，$\texttt{Pl-GH}(\mathcal{S}_M(\theta)) \leq \texttt{Pl-GH}(M)$。

证明。 根据公式 (12)，回顾可知，对于任意图 $G = (V, E)$，

$$Z_M(\mathbf{S_n}G) = \sum_{\mathbf{k}\in\mathcal{P}_q(|E|)} c_H(G,\mathbf{k}) \cdot \left(\lambda_1^{k_1}\cdots\lambda_q^{k_q}\right)^n,$$

其中 $c_H(G,\mathbf{k})$ 定义于公式 (13)。

定义集合（即不计重数）

$$\Lambda_D(G) = \left\{ \prod_{i\in[q]} \lambda_i^{k_i} \;\middle|\; \mathbf{k} \in \mathcal{P}_q(|E|) \right\}.$$

对于每个 $\mu \in \Lambda_D(G)$，定义

$$X_D(G,\mu) = \left\{ \mathbf{k} \in \mathcal{P}_q(|E|) \;\middle|\; \prod_{i\in[q]} \lambda_i^{k_i} = \mu \right\}, \qquad c_{H,D}(G,\mu) = \sum_{\mathbf{k}\in X_D(G,\mu)} c_H(G,\mathbf{k}).$$

代入后，我们得到

$$Z_M(\mathbf{S_n}G) = \sum_{\mu \in \Lambda_D(G)} c_{H,D}(G,\mu) \cdot \mu^n.$$

由于 $\Lambda_D(G)$ 是一个集合，其元素互不相同，且 $|\Lambda_D(G)| \le |E|^{O(1)}$。借助对 Pl-GH($M$) 的预言机访问，我们可以对 $n \in [|\Lambda_D(G)|]$ 计算 $Z_M(\mathbf{S_n}G)$。由此得到一个满秩的范德蒙德方程组，它可以在多项式时间内求解，从而得到所有 $c_{H,D}(G,\mu)$。

现在考虑任意 $N = H\Delta H^{\mathsf{T}}$ 下的 $Z_N(G)$，其中 $\Delta = D^\theta$ 对于 $\theta \in \mathbb{R}_{\neq 0}$。$N$ 的特征值为 $(\lambda_1^\theta, \ldots, \lambda_q^\theta)$。仿照 $\Lambda_D(G)$ 定义 $\Lambda_\Delta(G)$，将 $D_{ii} = \lambda_i$ 替换为 $\Delta_{ii} = \lambda_i^\theta$。类似地，对每个 $\nu \in \Lambda_\Delta(G)$ 定义 $X_\Delta(G,\nu)$，并且

$$c_{H,\Delta}(G,\nu) = \sum_{\mathbf{k} \in X_\Delta(G,\nu)} c_H(G,\mathbf{k}).$$

Then

$$Z_N(G) = \sum_{\nu \in \Lambda_\Delta(G)} c_{H,\Delta}(G,\nu) \cdot \nu.$$

对于任意 $\nu \in \Lambda_\Delta(G)$，存在 $\mathbf{k} \in \mathcal{P}_q(|E|)$，使得

$$\nu = \prod_{i \in [q]} (\lambda_i^\theta)^{k_i} = \left(\prod_{i \in [q]} \lambda_i^{k_i} \right)^\theta.$$

由于每个 $\lambda_i > 0$ 和 $\theta \neq 0$，我们都有唯一的 $\mu = \nu^{1/\theta} \in \Lambda_D(G)$。因此 ，

$$X_\Delta(G,\nu) = X_D(G,\nu^{1/\theta}), \qquad c_{H,\Delta}(G,\nu) = c_{H,D}(G,\nu^{1/\theta}).$$

因此，利用先前计算出的 $c_{H,D}(G,\mu)$ 值，我们可以计算

$$Z_N(G) = \sum_{\nu \in \Lambda_\Delta(G)} c_{H,D}(G,\nu^{1/\theta}) \cdot \nu.$$

因此，对于所有 $\theta \in \mathbb{R}_{\neq 0}$，Pl-GH($\mathcal{S}_M(\theta)$) $\le$ Pl-GH(M)。 □

在引理 9中，归约对 $\theta = 0$ 也同样有效（平凡地）。不过我们不需要这一事实。

D 桥接小工具

本节将更严格地探讨桥接小工具和构件插值。对于$m,\ n \geq 1$，令

$$\mathcal{P}_m(n) = \left\{ \mathbf{x} = (x_i)_{i\in[m]} \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^m \;\middle|\; \sum_{i\in[m]} x_i = n \right\}.$$

现在我们将证明引理 11。

Le引理 11。设 $M \in$对称矩阵空间$_q(\mathbb{R}_{\neq 0})$。那么，对于所有 $\theta \in \mathbb{R}$，平面-GH$(\mathcal{B}_M(\theta)) \leq$平面-GH$(M)$.

证明。我们知道，对于任意 $n \geq 1$，以及给定的任意平面图 $G = (V, E)$，

$$Z_M(\mathbf{B_n}G) = \sum_{\sigma:V\to[q]} \prod_{(u,v)\in E} \sum_{x,y\in[q]} M_{\sigma(u)x}(M_{xy})^n M_{\sigma(v)y}.$$

如B 节中所述，我们定义集合

$$X(G) = \left\{ \prod_{i,j\in[q]} M_{ij}^{k_{ij}} \;\middle|\; \mathbf{k} \in \mathcal{P}_{q^2}(|E|) \right\}.$$

对于每个 $\mathbf{k} \in \mathcal{P}_{q^2}(|E|)$，我们还定义

$$Y(G,\mathbf{k}) = \left\{ (\mathbf{x},\mathbf{y}) \in [q]^{|E|} \times [q]^{|E|} \;\middle|\; (\forall\ i,j \in [q])\ [\ k_{ij} = |\{t : x_t = i, y_t = j\}|\ ] \right\}.$$

最后，对于每个 $x \in X(G)$，我们定义

$$c(G,x) = \sum_{\sigma:V\to[q]} \left(\sum_{\substack{\mathbf{k}\in\mathcal{P}_{q^2}(|E|):\\ \prod_{i,j\in[q]} M_{ij}^{k_{ij}} = x}} \left(\sum_{\mathbf{x},\mathbf{y}\in Y(G,\mathbf{k})} \left(\prod_{(u,v)\in E} M_{\sigma(u)x_u} M_{\sigma(v)y_v} \right) \right) \right).$$

现在，我们注意到

$$Z_M(\mathbf{B_n}G) = Z_{\mathbf{B_n}(M)}(G) = \sum_{x\in X(G)} x^n \cdot c(G,x).$$

由于每个 $x \in X(G)$ 都各不相同，且 $|X(G)| \leq |E|^{O(1)}$，我们可以通过对 Pl-GH(M) 的预言机访问，计算 $Z_M(\mathbf{B_n}G)$，其中 $n \in [|X_M(G)|]$。这样我们就得到一个满秩的范德蒙德方程组，其中包含线性方程；该方程组可在多项式时间内求解，从而为所有 $x \in X(G)$ 求得 $c(G,x)$。

现在注意到，每个 $x \in X(G)$ 都是矩阵 M 的元素之积。由于 $M \in$Sym$_q(\mathbb{R}_{>0})$，这意味着 $X(G)$ 的每个元素都是正数。此外，我们看到，对于每个$\mathbf{k} \in \mathcal{P}_{q^2}(|E|)$，以及每个 $\theta \in \mathbb{R}$，

$$\left(\prod_{i,j\in[q]} M_{ij}^{k_{ij}} \right)^{\theta} = \prod_{i,j\in[q]} (M_{ij}^{\theta})^{k_{ij}}$$

定义良好。因此，对于任意 $\theta \in \mathbb{R}$，我们可以计算该量

$$\sum_{x \in X(G)} x^{\theta} \cdot c(G, x) = \sum_{\sigma : V \to [q]} \prod_{(u,v) \in E} \left(\sum_{x,y \in [q]} M_{\sigma(u)x} (M_{xy})^{\theta} M_{\sigma(v)y} \right) = Z_{\mathcal{B}_M(\theta)}(G)$$

在多项式时间内。这证明对于所有 $\theta \in \mathbb{R}$，Pl-GH($\mathcal{B}_M(\theta)$) $\leq$Pl-GH(M)。 □

E 环小工具

在本节中，我们将更严谨地探讨环构件和构件插值。对于$m, n \geq 1$，令

$$\mathcal{P}_m(n) = \left\{ \mathbf{x} = (x_i)_{i\in[m]} \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^m \;\middle|\; \sum_{i\in[m]} x_i = n \right\}.$$

我们回顾一下

$$Z_M(\mathbf{L_n}G) = \sum_{\sigma:V\to[q]} \prod_{(u,v)\in E} (M_{\sigma(u)\sigma(u)})^n M_{\sigma(u)\sigma(v)} (M_{\sigma(v)\sigma(v)})^n = Z_{\mathbf{L_n}(M)}(G), \quad \text{for all } n \geq 1,$$

其中 $\mathbf{L_n}(M) = (\mathrm{diag}(M))^n \cdot M \cdot (\mathrm{diag}(M))^n$。

现在我们可以证明引理 15。证明与引理 6 中B 节的证明非常相似。我们先证明以下引理。

引理 45. 设 $M \in \mathit{Sym}^q(\mathbb{R}_{>0})$。设 $A \in \mathit{Sym}^q(\mathbb{R}_{\geq 0})$ 是一个对角元为正的对角矩阵，这些对角元由某个 $\{g_t\}_{t\in[d]}$ 生成，使得 $A_{ii} = g_1^{e_{ii1}} \cdots g_d^{e_{iid}}$对所有 $i \in [q]$ 均成立。此外，假设 $e_{iit} \geq 0$ 对所有 $i \in [q]$，$t \in [d]$ 均成立，并且对所有 $n \geq 1$，$\texttt{Pl-GH}(A^n M A^n) \leq \texttt{Pl-GH}(M)$。那么，对于任意形如以下形式的对称矩阵 $B \in \mathit{Sym}^q(\mathbb{R})$，

$$B_{ii} = z_1^{e_{ii1}} \cdots z_d^{e_{iid}},$$

其参数为$\mathbf{z} = (z_1, \ldots, z_d) \in \mathbb{R}^d$，我们有 $\texttt{Pl-GH}(BMB) \leq \texttt{Pl-GH}(M)$。

证明。 我们注意到

$$Z_{A^n M A^n}(G) = \sum_{\sigma:V\to[q]} \left(\prod_{(u,v)\in E} M_{\sigma(u)\sigma(v)} \right) \left(\prod_{v\in V} (A_{\sigma(v)\sigma(v)})^{\deg(v)\cdot n} \right),$$

对所有 $n \geq 1$ 均成立。

现在我们定义集合

$$X(G) = \left\{ \prod_{i\in[q]} A_{ii}^{k_i} \;\middle|\; \mathbf{k} = (k_i)_{i\in[q]} \in \mathcal{P}_q(2|E|) \right\}, \text{ and}$$

$$c_{A,M}(G, x) = \sum_{\substack{\sigma:V\to[q]: \\ x = \prod_v (A_{\sigma(v)\sigma(v)})^{\deg(v)}}} \prod_{(u,v)\in E} M_{\sigma(u)\sigma(v)}.$$

我们可以看到

$$Z_{A^n M A^n}(G) = \sum_{x\in X(G)} x^n \cdot c_{A,M}(G, x).$$

关键的是，我们注意到 $c_{A,M}(G, x)$ 与 n 无关。由于 $X(G)$ 是一个集合，其元素各不相同，且 $|X(G)| \leq |E|^{O(1)}$。根据我们的假设，$\text{Pl-GH}(A^n M A^n) \leq \text{Pl-GH}(M)$，通过预言机访问

Pl-GH(M)，我们可以计算 $Z_{A^n MA^n}(G)$，其中 $n \in [|X(G)|]$。这得到一个满秩的范德蒙德方程组，可以在多项式时间内求解，从而得到所有 $c_{A,M}(G,x)$。

接下来，每个 $x \in X(G)$ 都可以写成 $x = \prod_{i\in[q]} A_{ii}^{k_i}$，其中 $\mathbf{k} = (k_i)_{i\in[q]} \in \mathcal{P}_q(2|E|)$。由于 $\{g_t\}_{t\in[d]}$ 是 $\{A_{ii}\}_{i\in[q]}$的生成集，我们注意到每个 $x \in X(G)$都有唯一表示

$$x = g_1^{e_1^x} \cdots g_d^{e_d^x}, \qquad e_t^x = \sum_{i\in[q]} k_i e_{iit},$$

其中 $e_t^x \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$，因为所有 $e_{iit}, k_i \geq 0$。

现在，我们定义映射 $\widehat{y}\colon X(G) \to \mathbb{R}$，定义如下：

$$\widehat{y}(x) = z_1^{e_1^x} \cdots z_d^{e_d^x},$$

其中 $\mathbf{z} = (z_1, \ldots, z_d)$ 是 $B \in$对称矩阵空间$_q(\mathbb{R})$ 的参数。于是，对任意 $\mathbf{k} \in \mathcal{P}_q(2|E|)$，该定义保证

$$\widehat{y}\left(\prod_{i\in[q]} A_{ii}^{k_i}\right) = \prod_{i\in[q]} B_{ii}^{k_i}.$$

现在，我们定义集合

$$Y(G) = \left\{ \prod_{i\in[q]} B_{ii}^{k_i} \,\middle|\, \mathbf{k} = (k_i)_{i\in[q]} \in \mathcal{P}_q(2|E|) \right\}.$$

对于任意标号 $\sigma\colon V \to [q]$，定义 $\mathbf{k}$，使得 $k_i = \sum_{v\in V:\ \sigma(v)=i}$ 度(v)。于是

，

$$\widehat{y}\left(\prod_{v\in V} (A_{\sigma(v)\sigma(v)})^{\deg(v)}\right) = \widehat{y}\left(\prod_{i\in[q]} A_{ii}^{k_i}\right) = \prod_{i\in[q]} B_{ii}^{k_i} = \prod_{v\in V} (B_{\sigma(v)\sigma(v)})^{\deg(v)}.$$

因此，对于每个 $y \in Y(G)$,

$$\left\{\sigma : V \to [q] \,\middle|\, \prod_{v\in V} (B_{\sigma(v)\sigma(v)})^{\deg(v)} = y\right\} = \bigsqcup_{\substack{x\in X(G):\\ \widehat{y}(x)=y}} \left\{\sigma : V \to [q] \,\middle|\, \prod_{v\in V} (A_{\sigma(v)\sigma(v)})^{\deg(v)} = x\right\}.$$

因此，我们得到

$$c_{B,M}(G,y) = \sum_{\substack{x\in X(G):\\ \widehat{y}(x)=y}} c_{A,M}(G,x).$$

利用我们已经确定的 $c_{A,\ M}(G,\ x)$ 的值，我们可以计算

$$Z_{BMB}(G) = \sum_{y\in Y(G)} y \cdot c_{B,M}(G,y) = \sum_{x\in X(G)} \widehat{y}(x) \cdot c_{A,M}(G,x).$$

因此，Pl-GH(BMB) $\leq$Pl-GH(M)。 □

正如在B 节中的情形一样，我们可以使用 引理 44 和 45 来证明 引理 15。

引理 15. 设 $M \in$ 对称矩阵空间$^{q}(\mathbb{R}_{>0})$ 的对角元由某个 $\{g_t\}_{t\in[d]}$ 生成。则$\texttt{Pl-GH}(\mathcal{L}_M^*(\mathbf{z})) \leq \texttt{Pl-GH}(M)$ 对所有 $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^d$ 成立。

证明。令 $A =$diag(M) 为与 M 具有相同对角元的对角矩阵。由于 A 的对角元由 $\{g_t\}_{t\in[d]}$ 生成，我们知道存在整数 $e_{iit} \in \mathbb{Z}$，使得 $A_{ii} = g_1^{e_{ii1}} \cdots g_d^{e_{iid}}$ 对所有 $i \in [q]$ 均成立。现在，对所有 $t \in [d]$，令 $e_t^* =$min$_{i\in[q]}\, e_{iit}$，并令$c = \prod_{t\in[d]} g_t^{-e_t^*}$。由引理 44 可知，Pl-GH$((cA)^n M(cA)^n) \equiv$ Pl-GH$(A^n M A^n)$。由于 Ln$(M) = A^n M A^n$，我们知道对所有 $n \geq 1$，Pl-GH$(A^n M A^n) \leq$ Pl-GH(M)。因此，对所有 $n \geq 1$，Pl-GH$((cA)^n M(cA)^n) \leq$Pl-GH(M) 也成立。

此外，我们还可以看到，矩阵（cA）的对角元也由 $\{g_t\}_{t\in[d]}$生成，使得（cA）$_{ii} = g_1^{e_{ii1}-e_1^*} \cdots g_d^{e_{iid}-e_d^*}$对所有 $i \in [q]$ 都成立。根据我们对 e_t^* 的选择可知，$e_{iit} - e_t^* \geq 0$对所有 $i \in [q]$、$t \in [d]$ 都成立。因此，由引理 45 可得，对所有 $\mathbf{z} = (z_1, \ldots, z_d) \in \mathbb{R}^d$，Pl-GH$(\mathcal{L}_M^*(\mathbf{z})) \leq$Pl-GH$(M)$。 □

证明 引理 13 的证明现在可直接由此推得。

引理 13。 设 $M \in$对称矩阵空间$^{q}(\mathbb{R}_{>0})$。则对所有 $\theta \in \mathbb{R}$，$\texttt{Pl-GH}(\mathcal{L}_M(\theta)) \leq \texttt{Pl-GH}(M)$。

证明。 设 $M \in$对称矩阵空间$^{q}(\mathbb{R}_{>0})$ 的对角元由某个 $\{g_t\}_{t\in[d]}$生成，使得 $M_{ii} = g_1^{e_{ii1}} \cdots g_d^{e_{iid}}$对所有 i、$j \in [q]$均成立。设 $e_t^* =$最小$_{i\in[q]}\, e_{iit}$ 对于 $t \in [d]$。然后，由 定义 14可知，

$$\mathcal{D}_M^*(g_1^\theta, \ldots, g_d^\theta)_{ii} = (g_1^{e_{ii1}} \cdots g_d^{e_{iit}})^\theta \cdot (g_1^{-e_1^*} \cdots g_d^{-e_d^*})^\theta = (M_{ii})^\theta \cdot c^\theta,$$

对于 $c = (g_1^{-e_1^*} \cdots g_d^{-e_d^*})$。重要的是，$c$与 $i \in [q]$无关，因此，$\mathcal{D}_M^*(g_1^\theta$、.....、$g_d^\theta) = c^\theta \cdot \mathcal{D}_M(\theta)$ 对于所有 $\theta \in \mathbb{R}$均成立。因此，引理 15 和 44 表明

$$\texttt{Pl-GH}(\mathcal{L}_M(\theta)) \equiv \texttt{Pl-GH}(\mathcal{D}_M(\theta) \cdot M \cdot \mathcal{D}_M(\theta)) \equiv \texttt{Pl-GH}(\mathcal{L}_M^*(g_1^\theta, \ldots, g_d^\theta)) \leq \texttt{Pl-GH}(M),$$

对所有 $\theta \in \mathbb{R}$。 □

F 对角元互异矩阵的困难性

在本节中，我们将通过完成定理 30归纳步骤来证明。我们首先证明定理 25。

定理 25. 设 $M \in Sym_q^{\mathrm{F}}(\mathbb{R}_{>0})$ 是强对角互异的。设 $m^* = \text{最小值}_{i,j} M_{ij}$。若存在某个 $i^* \in [q]$，使得 $M_{i^*j} > m^*$ 对所有 $j \in [q]$，以及 $i_1^\dagger \neq i_2^\dagger \in [q]$，$j_1^\dagger, j_2^\dagger \in [q]$，均有$M_{i_1^\dagger j_1^\dagger} = M_{i_2^\dagger j_2^\dagger} = m^*$，则 $\texttt{Pl-GH}(M)$ 是#*P*-困难的。

证明。我们首先使用引理 7 找到整数 (x_{ij})，使得 $M_{ij} < M_{i'j'} \iff x_{ij} < x_{i'j'}$。令$x^* = \text{最小值}_{i,j} x_{ij}$，则 $x_{ij} = x^* \iff M_{ij} = m^*$。与定理 23 的证明一样，我们可以假设 $x^* = 0$，因为 Pl-GH($z^{-x^*}\widehat{\mathcal{T}}_M(z)$) ≡ Pl-GH($\widehat{\mathcal{T}}_M(z)$)。我们还从引理 7 得知，det($\widehat{\mathcal{T}}_M(z)$)^不是零多项式。因此，存在某个 $z^* \in \mathbb{R}$，使得对所有 $z > z^*$，$\det(\mathcal{T}_M(z)) \neq 0$。我们还注意到，由于 M 是强对角互异的，因此 $x_{i_1 i_1} \notin \{x_{i_2 j} :$ 对所有 $i_1 \neq i_2 \in [q]$，都有 $j \in [q]\}$。所以，对所有 $i_1 \neq i_2 \in [q]$，$f_{i_1 i_2}(z) = \sum_j z^{2x_{i_1 j}} - \sum_j z^{2x_{i_2 j}}$ 都不是零多项式。因此，必定存在某个 z^{**}，使得对所有 $z > z^{**}$，$f_{i_1 i_2}(z) \neq 0$ 对所有 $i_1 \neq i_2 \in [q]$均成立。

现在我们选取一个素数 $p > \max(q, z^*, z^{**})$。根据我们对 $p > z^*$ 的选择，可知$M' = \mathbf{S_2}(\widehat{\mathcal{T}}_M(p)) = (\widehat{\mathcal{T}}_M(p))^2 \in$对称矩阵空间$\mathbb{Z}_q^{\mathrm{pd}}(\mathbb{Z}_{>0})$。对于任意 $i \in [q]$，令 $c(i) = |\{j \in [q] : M_{ij} = m^*\}|$。于是可得 $M'_{ii} \equiv c(i) \bmod p$。根据我们对 M和 $p > q$的选择，可知 $M'_{i^*i^*} \equiv 0 \bmod p$，且 $M'_{i_1^\dagger i_1^\dagger} \neq 0 \bmod p$，以及 $M'_{i_2^\dagger i_2^\dagger} \neq 0 \bmod p$。我们令 $\{g_t\}_{t \in [d]}$为整除 M' 的对角元的素数集合。我们将其命名为 $g_1 = p$，并考虑 $M'' = \mathcal{L}^*_{M'}(0, 1, \ldots, 1)$。

我们考虑 N M' 的主子矩阵，该子矩阵由集合 $I(N) = \{i \in [q]$ 中的行和列构成：$M'_{ii} \neq 0$ 模 $p\}$。注意到 $i^* \notin I(N)$，且 $i_1^\dagger, i_2^\dagger \in I(N)$，因此 $2 \leq |I(N)| < q$。由于 $M' \in \mathrm{Sym}_q^{\mathrm{pd}}(\mathbb{R}_{>0})$，$N \in \mathrm{Sym}^{\mathrm{pd}}_{|I(N)|}(\mathbb{R}_{>0})$，并且根据我们对 $p > z^{**}$ 的选择，我们还发现 M'（因此 N）是对角相异的。因此，由归纳假设（t），可知 Pl-GH(N) ≡Pl-GH(M'') ≤Pl-GH(M) 是 #P-困难的。 □

现在我们将证明引理 27，但首先需要以下引理：

引理 46。设 $M \in Sym_q^{\mathrm{pd}}(\mathbb{R}_{>0})$ 是对角元互异的。设 $\mathcal{F}$ 是 $Sym_q(\mathbb{R})$-多项式的某个可数族，满足对所有 $\rho \in \mathcal{F}$，均有 $\rho(M) \neq 0$。那么，存在某个行内互异的 $N \in Sym_q^{\mathrm{pd}}(\mathbb{R}_{>0})$，使得对所有，均有 $(N) \neq 0$，并且 $\texttt{Pl-GH}(N) \leq \texttt{Pl-GH}(M)$。

证明。 由于 M 是对角元互异的，我们可以假设 $\phi_{\mathrm{diag}} \in \mathcal{F}$ (函数 ϕ_{diag} 来自 式 (4)）。现在我们考虑 $\mathbf{Ln}(M)$ 对于 $n \geq 1$。我们注意到，对于所有 $i \in [q]$，以及 $j_1 \neq j_2 \in [q]$，

$$\frac{\mathbf{L_n}(M)_{ij_1}}{\mathbf{L_n}(M)_{ij_2}} = \frac{M_{ij_1}(M_{ii} \cdot M_{j_1 j_1})^n}{M_{ij_2}(M_{ii} \cdot M_{j_2 j_2})^n} = \frac{M_{ij_1}}{M_{ij_2}} \left(\frac{M_{j_1 j_1}}{M_{j_2 j_2}}\right)^n.$$

由于 M 是对角元互异的，我们注意到 $(M_{j_1 j_1}/M_{j_2 j_2}) \neq 1$。因此，对于足够大的 n，$\mathbf{Ln}(M)_{ij_1} \neq \mathbf{Ln}(M)_{ij_2}$。这意味着，对于每个 $i \in [q]$和 $j_1 \neq j_2 \in [q]$，都存在某个 $\theta_{ij_1 j_2} \in \mathbb{R}$，使得 $(\mathcal{L}_M(\theta_{ij_1 j_2}))_{ij_1} - (\mathcal{L}_M(\theta_{ij_1 j_2}))_{ij_2} \neq 0$。令 $\zeta_{i,\, j_1,\, j_2}$：对于所有 $i \in [q]$，$j_1 \neq j_2 \in [q]$，$A \mapsto (A_{ij_1} - A_{ij_2})$。

由于 $M \in \mathrm{Sym}_q^{\mathrm{pd}}(\mathbb{R}_{>0})$，且特征值是矩阵元素的连续函数，并且 $\mathcal{L}_M(0) = M$，我们知道存在一个开邻域 $\mathcal{O}$，其围绕 $\theta = 0$，使得对于

所有 $\theta \in \mathcal{O}$, $\mathcal{L}_M(\theta) \in \mathrm{Sym}_q^{\mathrm{pd}}(\mathbb{R}_{>0})$。现在我们可以使用引理18找到 $\theta^* \in \mathcal{O}$，使得 $N = \mathcal{L}_M(\theta^*) \in \mathrm{Sym}_q^{\mathrm{pd}}(\mathbb{R}_{>0})$ 满足：对于所有 $\rho \in \mathcal{F}$, $\zeta_{ij_1j_2}(N)$, $\rho(N) \neq 0$；对于所有 $i \in [q], j_1 \neq j_2 \in [q]$，并且 Pl-GH$(N) \leq$Pl-GH$(M)$。因此，$\phi_{\mathrm{row}}(N) = \prod_{i\in[q]} \prod_{j_1<j_2\in[q]} \zeta_{ij_1j_2}(N) \neq 0$，即 N是行内互异的。所以，N 就是所需的矩阵。 □

引理 27. 设 $M \in$ 对称矩阵空间$_q^{\mathrm{pd}}(\mathbb{R}_{>0})$ 是对角相异的。那么，要么 Pl-GH(M) 是#*P*-困难的；要么存在一个 *I*-接近（因此对角占优）、强对角互异且行内互异的$N \in$对称矩阵空间$_q^{\mathrm{pd}}(\mathbb{R}_{>0})$，使得 Pl-GH$(N) \leq$Pl-GH$(M)$。

证明。根据引理 46，存在一个对角相异且行内互异的 $M' \in$ 对称矩阵空间$_q^{\mathrm{pd}}(\mathbb{R}_{>0})$，满足 Pl-GH($M'$) $\leq$Pl-GH(M)。利用引理 20，我们得到一个对角相异、行内互异且 I-接近的 $N \in$对称矩阵空间$_q^{\mathrm{pd}}(\mathbb{R}_{>0})$，满足 Pl-GH$(N) \leq$Pl-GH($M'$) $\leq$Pl-GH(M)。由于 N_{ii}都互不相同，且严格大于所有非对角元，因此 N 也强对角互异。所以，这个 N 就是所需的矩阵。

□

现在，我们开始证明定理 28。我们将此定理拆分为若干个较小的引理。

引理 47. 设 $N \in$对称矩阵空间$_q^{\mathrm{pd}}(\mathbb{R}_{>0})$ 是对角占优、强对角互异且行内互异的。那么，要么 Pl-GH(N) 是#*P*-困难的，要么经过行列同时置换后，

(I) $N_{ii^{\mathrm{R}}} = \min_{i,j\in[q]} N_{ij}$ *for all* $i \in [q]$, *where* $i^{\mathrm{R}} = q + 1 - i$.

证明。设 $m^* = \min_{i,j\in[q]} N_{ij}$。由于 N 是对角占优的，m^* 必定出现在非对角线位置，即存在互不相同的 $i^\dagger \neq j^\dagger$ 使得 $N_{i^\dagger j^\dagger} = N_{j^\dagger i^\dagger} = m^*$. 若存在 i^* 使得 $N_{i^*j} > m^*$ 对所有 j均成立，那么根据 定理 25, Pl-GH$(N) \leq$ Pl-GH(M) 是#P-困难的。

否则，N 的每一行都必须至少出现一次 m^*。由于 N 行内互异且对称，这次出现是唯一的：对每个 $i \in [q]$，都存在唯一的 $r(i) \neq i$使得 $N_{ir(i)} = m^*$。最后，为了得到 (I)，我们重新命名定义域元素 $[q]$，使得$r(i) = q + 1 - i = i^{\mathrm{R}}$。由于 $r(1) \neq 1$，我们重新命名 $\{2, \ldots, q\}$，即对行和列同时置换，使得 $r(1) = q$。若 $q > 2$，则 $r(2) \neq 1, 2, q$，因为 N行内互异且对称。接着，我们重新命名 $\{3, \ldots, q-1\}$，得到 $r(2) = q - 1$。归纳下去，对所有 $i \in [q]$，都有 $r(i) = i^{\mathrm{R}}$。

□

引理 48. 设 N 满足 引理 47的所有性质。则，要么 Pl-GH(N) 是 #*P*-难的；要么经过行列同时置换后，N 也满足：

(II) $\exists d \in \mathbb{R}$ 对所有 i，均有 $N_{ii}N_{i^{\mathrm{R}}i^{\mathrm{R}}} = d$，

(III) $\forall i \in [q]$、$\exists c_i \in \mathbb{R}$，使得对所有 j，均有 $N_{ij}N_{ij^{\mathrm{R}}} = c_i$，

(IV) $N_{11} > N_{22} > \cdots > N_{qq}$。

证明。定义 δ：对称矩阵空间$_q(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ 为：

$$\delta(A) = \min_{i\in[q]} \left(\left(\min_{j\neq i^{\mathrm{R}}\in[q]} A_{ij} \right) - A_{ii^{\mathrm{R}}} \right).$$

由于 N 是行内互异的，并且满足(I)， $\delta(N) > 0$。

考虑构件 $\mathcal{L}_N(\theta)$ 来自定义 12。由于其元素在 θ 和 $\mathcal{L}_N(0) = N$中连续变化，存在一个 $\mathcal{O}$ 包含0的开邻域，使得 $\delta(\mathcal{L}_N(\theta)) > 0$，且 $\mathcal{L}_N(\theta) \in$对称矩阵空间$_q^{\mathrm{pd}}(\mathbb{R}_{>0})$对所有 $\theta \in \mathcal{O}$均成立。

假设存在某个 $\theta \in \mathbb{R}$，以及 $i \neq j$，满足 $(\mathcal{L}_N(\theta))_{ii^{\mathrm{R}}} \neq (\mathcal{L}_N(\theta))_{jj^{\mathrm{R}}}$。注意，$\zeta : A \mapsto A_{ii^{\mathrm{R}}} - A_{jj^{\mathrm{R}}}$ 是一个 Sym$_q(\mathbb{R})$- 多项式。因此，根据引理 18，我们可以选择 $\theta^* \in \mathcal{O}$，使得 $N' = \mathcal{L}_N(\theta^*)$ 满足： $\rho(N') \neq 0$ 对所有 $\rho \in \{\psi_{\mathrm{diag}}, \phi_{\mathrm{row}}, \zeta\}$ 均成立，其中 ψ_{diag}、ϕ_{row} 如方程 (4) 和 (5) 所示。由于 $\theta^* \in \mathcal{O}$，我们选择的 $\mathcal{O}$ 确保 $\delta(N') > 0$，因此 N' 的最小元素 m^* 出现在某个反对角线元素上，因为所有不在反对角线上的元素都大于另一个元素。现在令 $i^* = \arg\max_{i \in [q]} N'_{ii^{\mathrm{R}}}$（平局时任意选择）。由于 $\zeta(N') \neq 0$，我们有 $N'_{i^*(i^*)_{\mathrm{R}}} > m^*$。由于 $\delta(N') > 0$，对所有 $j \in [q]$，我们有 $N'_{i^*j} \geq N'_{i^*(i^*)^{\mathrm{R}}}$。因此，对所有$j \in [q]$，$N'_{i^*j} > m^*$ 均成立。根据定理 25，Pl-GH(N') $\leq$Pl-GH(N) 是 #P-困难。

否则，对于所有 i、j、θ，我们有 $(\mathcal{L}_N(\theta))_{ii^{\mathrm{R}}} = (\mathcal{L}_N(\theta))_{jj^{\mathrm{R}}}$。于是，对于所有 i、j、θ，

$$(N_{ii}N_{i^{\mathrm{R}}i^{\mathrm{R}}})^\theta N_{ii^{\mathrm{R}}} = (N_{jj}N_{j^{\mathrm{R}}j^{\mathrm{R}}})^\theta N_{jj^{\mathrm{R}}},$$

这意味着存在一个常数 d，使得 $N_{ii}N_{i^{\mathrm{R}}i^{\mathrm{R}}} = d$ 对所有 i均成立，从而证明了 (II)。

现在考虑定义 10 中的构件 $\mathcal{B}_N(\theta)$。固定任意一对 j、$j' \in [q]$，并假设对于某个 θ，$(\mathcal{B}_N(\theta))_{jj^{\mathrm{R}}} \neq (\mathcal{B}_N(\theta))_{j'(j')^{\mathrm{R}}}$成立。我们注意到 $\mathcal{B}_N(1) = N^3 \in$对称矩阵空间$_q^{\mathrm{pd}}(\mathbb{R}_{>0})$。由于 $\mathcal{B}_N(\theta)$ 的元素在 θ 中连续变化，我们注意到存在一个包含 1 的开邻域 $\mathcal{O}'$，使得对于所有 $\mathcal{B}_N$，$\theta \in$对称矩阵空间$_q^{\mathrm{pd}}(\mathbb{R}_{>0})$。因此，对于所有 $\theta \in \mathcal{O}'$，矩阵 $\mathcal{S}_{\mathcal{B}_N(\theta)}(1/3)$ 都定义良好，并且其元素关于 θ 连续变化。由于 $\mathcal{S}_{\mathcal{B}_N}(1)(1/3) = N$，我们看到存在一个包含 1 的开邻域 $\mathcal{O}'' \subset \mathcal{O}'$，使得对于所有 $\theta \in \mathcal{O}''$，$\mathcal{S}_{\mathcal{B}_N(\theta)}(1/3) \in$ 对称矩阵空间$_q^{\mathrm{pd}}(\mathbb{R}_{>0})$，且 $\delta(\mathcal{S}_{\mathcal{B}_N(\theta)}(1/3)) > 0$。

现在，由于根据我们的假设，$(\mathcal{B}_N(\theta))_{jj^{\mathrm{R}}} \neq (\mathcal{B}_N(\theta))_{j'(j')^{\mathrm{R}}}$对某个 θ成立，我们可以使用引理18找到某个 $\theta' \in \mathcal{O}''$，使得 $N' = \mathcal{B}_N(\theta')$满足：$(N')_{jj^{\mathrm{R}}} \neq (N')_{j'(j')^{\mathrm{R}}}$。注意，根据我们对 $\mathcal{O}''$的选择，$N' \in$属于对称矩阵空间$_q^{\mathrm{pd}}(\mathbb{R}_{>0})$，$\mathcal{S}_{N'}(1/3)$属于对称矩阵空间 $\in (_q^{\mathrm{pd}})$，并且 $\delta(\mathcal{S}_{N'}(1/3)) > 0$。现在，由于 $\mathcal{S}_{N'}(\theta)$的元素关于 θ连续，我们注意到存在 $1/3$的某个开邻域 $\mathcal{O}'''$，使得对所有 $\theta \in \mathcal{O}'''$，$\mathcal{S}_{N'}(\theta)$属于对称矩阵空间 $\in (_q^{\mathrm{pd}})$，且 $\delta(\mathcal{S}_{N'}(\theta)) > 0$。因此，我们可以再次使用引理18，找到某个 $\theta^* \in \mathcal{O}'''$，使得 $N'' = \mathcal{S}_{N'}(\theta^*)$属于对称矩阵空间 $\in (_q^{\mathrm{pd}})\mathbb{R}_{>0}$并满足： $\delta(N'') > 0$，且$(N'')_{jj^{\mathrm{R}}} \neq (N'')_{j'(j')^{\mathrm{R}}}$。接下来，我们可以沿用处理 $\mathcal{L}_N(\theta)$时的相同论证，证明 Pl-GH(N)是#P-困难的。

Ot否则，我们假设对于所有 θ，等式 $(\mathcal{B}_N(\theta))_{jj^{\mathrm{R}}} = (\mathcal{B}_N(\theta))_{j'(j')^{\mathrm{R}}}$ 均成立，从而得到

$$\sum_{x,y \in [q]} N_{xj}N_{yj^{\mathrm{R}}}(N_{xy})^\theta = \sum_{x,y \in [q]} N_{xj'}N_{y(j')^{\mathrm{R}}}(N_{xy})^\theta.$$

由于 N 是强对角互异的，对所有 θ 成立的等式都$(N_{ii})^\theta$项的系数相等。为说明这一点，我们可以将系数为 $(N_{ii})^\theta$ 的项 $)^{\mathrm{R}}$ 移到等式一边，其余项留在另一边。若该系数非零，那么无论等式另一边发生怎样的抵消，都无法恰好匹配 $(N_{ii})^\theta$ 的次序，因为 $\theta \to \infty$。因此，对所有 $N_{ij}N_{ij^{\mathrm{R}}} = N_{ij'}N_{i(j')^{\mathrm{R}}}$ 都成立；又由于这对所有$j, j' \in [q]$都成立，我们由此证明了 (III)。

现在，我们通过重命名定义域元素 $[q]$，利用 (II) 证明 (IV)。若 $q = 1$，则性质 (IV) 平凡；因此我们可以假设 $q \geq 2$。令 $j = \arg\max_i(N_{ii})$；由于 N 对角相异，这个j 唯一定义。于是，(II) 蕴含 $\arg\min_i(N_{ii}) = j^{\mathrm{R}}$。由于 N 对角相异，$j^{\mathrm{R}} \neq j$。现在，我们用 $\sigma \in S_q$ 对 N 的行/列进行置换，使得 $\sigma(1) = j$、$\sigma(j) = 1$、$\sigma(q) = j^{\mathrm{R}}$、$\sigma(j^{\mathrm{R}}) = q$，并且对所有其他 $i \in [q]$，$\sigma(i) = i$。（注意，若 $j = 1$，则此 σ 是恒等映射。若$j = q$，这四个方程可简化为 $\sigma(1) = q$ 和 $\sigma(q) = 1$。由于 $j \neq j^{\mathrm{R}}$，这些方程在所有情形下都相容。）注意，经过这次置换后，矩阵 N 仍满足 (I)、(II)、(III)，并且对 $2 \leq i \leq q-1$ 也满足 $N_{11} > N_{ii} > N_{qq}$。继续归纳下去，我们便得到 (IV)。 □

引理 49. 设 N 满足 引理 *48*的性质。则 Pl-GH(N) 是 #*P*-困难的，除非 N也满足以下条件：存在某个 $\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$，使得：

(V) $\mathcal{L}_N(\alpha)$ 满足 (I) – (IV)、(
VI) $\mathcal{L}_N(\alpha)_{iq} = \mathcal{L}_N(\alpha)_{qq}$对所有 $i \in [q]$,
(VII) $\mathcal{L}_N(\alpha)_{i1} = \mathcal{L}_N(\alpha)_{ii}$对所有 $i \in [q]$。

证明。考虑 $\mathcal{L}_N(\theta)$，它来自 定义 12。设

$$\delta(\theta) := \frac{\mathcal{L}_N(\theta)_{1q}}{\mathcal{L}_N(\theta)_{qq}} = \frac{N_{1q}(N_{11}N_{qq})^{\theta}}{N_{qq}(N_{qq}N_{qq})^{\theta}} = \frac{N_{1q}}{N_{qq}}\left(\frac{N_{11}}{N_{qq}}\right)^{\theta}.$$

由于 N 满足 (IV)，且有 $q > 1$，因此当 θ 足够大时，有 $\delta(\theta) > 1$。此外，由于 N满足 (I)，并且 N 是行内互异的，因此有 $N_{1q} < N_{qq}$。所以，我们看到 $\delta(0) < 1$。因此，介值定理意味着必定存在某个 $\alpha > 0$，使得 $\delta(\alpha) = 1$，即$\mathcal{L}_N(\alpha)_{1q} = \mathcal{L}_N(\alpha)_{qq}$。

我们暂且假设以下命题成立，稍后将予以证明：

命题 50。 除非 Pl-GH(N) 是 #*P-hard*，否则 $\mathcal{L}_N(\alpha)$ 满足(I)–(IV)。

现在我们假设命题 50成立。注意，N 满足(V)，而这是引理中的假设。因此，由于 $\mathcal{L}_N(\alpha)$ 对行 (III) 满足条件 q，我们看到，对于所选的 α，

$$\mathcal{L}_N(\alpha)_{iq} \cdot \mathcal{L}_N(\alpha)_{i^{\mathrm{R}}q} = \mathcal{L}_N(\alpha)_{1q} \cdot \mathcal{L}_N(\alpha)_{qq} = \left(\mathcal{L}_N(\alpha)_{qq}\right)^2,$$

对所有 $i \in [q]$ 均成立。由于 $\mathcal{L}_N(\alpha)$ 满足 (I)，我们看到 $\min_{i,\,j} \mathcal{L}_N(\alpha)_{ij} = \mathcal{L}_N(\alpha)_{1q}$，并且根据$\alpha$的选择，还有 $\mathcal{L}_N(\alpha)_{1q} = \mathcal{L}_N(\alpha)_{qq}$。于是，$\mathcal{L}_N(\alpha)_{iq} \cdot \mathcal{L}_N(\alpha)_{i^{\mathrm{R}}q}$是两个正因子的乘积，二者均为 $\geq \mathcal{L}_N(\alpha)_{qq}$，然而该乘积等于其平方。这意味着

$$\mathcal{L}_N(\alpha)_{iq} = \mathcal{L}_N(\alpha)_{i^{\mathrm{R}}q} = \mathcal{L}_N(\alpha)_{qq}, \qquad \text{for all } i \in [q].$$

因此，我们看到 它满足 N满足 (VI)，即，对于所选的 α，$\mathcal{L}_N(\alpha)_{iq} = \mathcal{L}_N(\alpha)_{qq}$对所有 $i \in [q\ ]$.
此外，由于 $\mathcal{L}_N(\alpha)$ 满足第 (III) 条性质，针对行 i，我们还可以得出

$$\mathcal{L}_N(\alpha)_{iq} \cdot \mathcal{L}_N(\alpha)_{i1} = \mathcal{L}_N(\alpha)_{ii} \cdot \mathcal{L}_N(\alpha)_{ii^{\mathrm{R}}},$$

对所有 $i \in [q]$。由于 $\mathcal{L}_N(\alpha)$ 满足 (I) 和 (VI)，我们还知道

$$\mathcal{L}_N(\alpha)_{ii^{\mathrm{R}}} = \mathcal{L}_N(\alpha)_{1q} = \mathcal{L}_N(\alpha)_{qq} = \mathcal{L}_N(\alpha)_{iq},$$

对所有 $i \in [q]$。因此，通过在上面的等式两边消去这个正因子，我们发现 N 也满足(VII)，也就是说，对于选定的 α， $\mathcal{L}_N(\alpha)_{i1} = \mathcal{L}_N(\alpha)_{ii}$对所有 $i \in [q]$ 都成立。 □

现在我们将证明命题 50。

命题 50。 除非 Pl-GH(N) 是 *#P-hard*， $\mathcal{L}_N(\alpha)$ 满足以下所有条件： (I)–(IV)。

证明。 由于 $\alpha > 0$，我们看到

$$N_{ii} > N_{jj} \iff \mathcal{L}_N(\alpha)_{ii} = (N_{ii})^{2\alpha+1} > (N_{jj})^{2\alpha+1} = \mathcal{L}_N(\alpha)_{jj}.$$

由于 N 满足 (IV)，平凡地可知 $\mathcal{L}_N(\alpha)$ 也满足 (IV) 。

现在假设 $\mathcal{L}_N(\alpha)$ 不满足以下方程之一:

$$\begin{aligned}
&\sum_{i\in[q]} \left(\mathcal{L}_N(\alpha)_{1q} - \mathcal{L}_N(\alpha)_{ii^{\mathrm{R}}}\right)^2 = 0,\\
&\sum_{i\in[q]} \left(\mathcal{L}_N(\alpha)_{11}\mathcal{L}_N(\alpha)_{qq} - \mathcal{L}_N(\alpha)_{ii}\mathcal{L}_N(\alpha)_{i^{\mathrm{R}}i^{\mathrm{R}}}\right)^2 = 0,\\
&\sum_{i\in[q]}\sum_{j\in[q]} \left(\mathcal{L}_N(\alpha)_{i1}\mathcal{L}_N(\alpha)_{iq} - \mathcal{L}_N(\alpha)_{ij}\mathcal{L}_N(\alpha)_{ij^{\mathrm{R}}}\right)^2 = 0.
\end{aligned} \tag{14}$$

注意，如果 $\mathcal{L}_N(\alpha)$ 不满足这些方程中的任何一个，那么 $\mathcal{L}_N(\alpha)$ 必定不满足 (I)、(II) 或 (III) 中至少一个。令 ζ 为与（任意一个）不满足条件的方程相对应的 $\mathrm{Sym}_q(\mathbb{R})$-多项式，使得 $\zeta(\mathcal{L}_N(\alpha)) \neq 0$。注意，由于 N 是强对角互异且行内互异的，根据方程 (4) 和 (5)，对于 $\rho \in \{\psi_{\mathrm{diag}}, \phi_{\mathrm{row}}\}$，有 $\rho(\mathcal{L}_N(0)) = \rho(N) \neq 0$。此外，由于 $N \in \mathrm{Sym}_q^{\mathrm{pd}}(\mathbb{R}_{>0})$，且 N 对角占优，我们知道存在 0 的某个开邻域$\mathcal{O}$，使得对于所有 $\theta \in \mathcal{O}$， $\mathcal{L}_N(\alpha) \in \mathrm{Sym}_q^{\mathrm{pd}}(\mathbb{R}_{>0})$ 也对角占优。

但此时，引理18立即推出，我们可以找到某个 $\theta^* \in \mathcal{O}$，使得 $\mathcal{L}_N(\theta^*) \in \mathrm{Sym}_q^{\mathrm{pd}}(\mathbb{R}_{>0})$ 对角占优且行内互异，同时还满足条件 $\zeta(\mathcal{L}_N(\theta^*)) \neq 0$。但根据引理 48，我们有 Pl-GH($\mathcal{L}_N(\theta^*)$) $\leq$ Pl-GH(N) 是 #P-困难的。

现在我们假设 $\mathcal{L}_N(\alpha)$ 满足方程 (14)。那么， $\mathcal{L}_N(\alpha)$ 不满足 (I)–(IV) 中所有条件的唯一情形是 $\min_{i,j\in[q]} \mathcal{L}_N(\alpha)_{ij} \neq \mathcal{L}_N(\alpha)_{1q}$。由于我们无法将这一性质表示为$[F(A) \neq 0]$，其中 F 是某个对称矩阵空间$_q(\mathbb{R})$-多项式，因此必须以不同方式处理这种情形。我们注意到，由于无法保证 $\mathcal{L}_N(\alpha)$ 是强对角互异的，甚至无法保证 $\mathcal{L}_N(\alpha) \in$对称矩阵空间$_q^{\mathrm{F}}(\mathbb{R}_{>0})$，因此不能指望直接使用定理 25 来证明 Pl-GH($\mathcal{L}_N(\alpha)$) 的困难性。

相反，我们定义 δ： 对称矩阵空间$_q(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$，使得，

$$\delta(A) = \min\left\{\min_{i\in[q]} A_{ii}, \min_{i\in[q]} A_{i1}\right\} - \min_{i,j\in[q]} A_{ij}.$$

注意，根据我们对 α, $\mathcal{L}_N(\alpha)_{qq} = \mathcal{L}_N(\alpha)_{1q}$的选择。因此，我们从关于 $\mathcal{L}_N(\alpha)$的假设，以及 $\mathcal{L}_N(\alpha)$ 满足 (IV)这一事实可以得出，

$$\min_{i,j} \mathcal{L}_N(\alpha)_{ij} < \mathcal{L}_N(\alpha)_{1q} = \mathcal{L}_N(\alpha)_{qq} \leq \mathcal{L}_N(\alpha)_{ii}, \quad \text{for all } i \in [q].$$

同样，注意到由于 N 满足 (I) 和 (IV)，且行内互异，$N_{1q} < N_{i1}$ 对所有$i \in [q-1]$均成立。因此，

$$\mathcal{L}_N(\alpha)_{1q} = N_{1q}\left(N_{11}N_{qq}\right)^{\alpha} < N_{1i}\left(N_{11}N_{ii}\right)^{\alpha} = \mathcal{L}_N(\alpha)_{1i}, \quad \text{for all } i \in [q-1].$$

So,

$$\min_{i,j} \mathcal{L}_N(\alpha)_{ij} < \mathcal{L}_N(\alpha)_{1q} \leq \mathcal{L}_N(\alpha)_{i1}, \quad \text{for all } i \in [q].$$

因此，我们看到 $\delta(\mathcal{L}_N(\alpha)) > 0$。

现在我们将 $\mathcal{L}_N(\theta)$ 视为关于 θ 的函数。由于 $\mathcal{L}_N(\theta)$ 的元素关于 θ 连续，因此存在一个以 α 为中心的开邻域 $\mathcal{O}'$，使得对所有 $\theta \in \mathcal{O}'$，$\delta(\mathcal{L}_N(\theta)) > 0$。由于 N 强对角互异且行内互异，我们还看到，对所有 $\rho \in \{\psi_{\text{diag}}, \phi_{\text{row}}\}$，$\rho(\mathcal{L}_N(0)) = \rho(N) \neq 0$。此外，注意到由于 $N \in \mathsf{Sym}_q^{\text{pd}}(\mathbb{R}_{>0})$，$\det(\mathcal{L}_N(0)) \neq 0$。因此，根据引理18，我们可以找到某个 $\theta^* \in \mathcal{O}'$，使得满足以下条件：$N' = \mathcal{L}_N(\theta^*) \in \mathsf{Sym}_q^{\text{F}}(\mathbb{R}_{>0})$：对所有 $\rho \in \{\psi_{\text{diag}}, \phi_{\text{row}}\}$，$\rho(N') \neq 0$；$\delta(N') > 0$；并且 $\mathsf{Pl\text{-}GH}(N') \leq \mathsf{Pl\text{-}GH}(N)$。

令 $m^* = \min_{i,j}(N')_{ij}$。由于 $\delta(N') > 0$，我们注意到，对于第 1 行，$(N')_{i1} > m^*$对所有 $i \in [q]$均成立。此外，由于 $(N')_{ii} > m^*$对所有 $i \in [q]$均成立，因此必定存在某个 $i^\dagger \neq j^\dagger$，使得 $(N')_{i^\dagger j^\dagger} = m^*$。因此，定理 25 表明，除非 $\mathcal{L}_N(\alpha)$ 满足 (I) – (IV)，否则 $\mathsf{Pl\text{-}GH}(N') \leq \mathsf{Pl\text{-}GH}(N)$ 是 #P-困难的。 □

引理51。令 N 满足 引理 *49*的性质。则，$\texttt{Pl-GH}(N)$ 是$\#P$-困难的，除非 N还满足以下条件（对于相同的 $\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$，该条件来自 引理 *49*）：

(VIII) $|\{i \in [q] : \mathcal{L}_N(\alpha)_{(q-1)i} = \mathcal{L}_N(\alpha)_{qq}\}| = q/2$。

(IX) $|\{i \in [q] : \mathcal{L}_N(\alpha)_{(q-1)i} = \mathcal{L}_N(\alpha)_{(q-1)(q-1)}\}| = q/2$.

证明。注意到，由于 $N \in$对称矩阵空间$_q^{\text{pd}}(\mathbb{R}_{>0})$，且 $\mathcal{S}_N(1) = N$，因此存在一个以 1 为中心的开球 $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}$，使得对于所有 $\theta \in \mathcal{O}$，$\mathcal{S}_N(\theta) \in$对称矩阵空间$_q^{\text{pd}}(\mathbb{R}_{>0})$。我们考虑如下定义的 $\mathcal{K}_N$：$\mathcal{O} \times \mathbb{R}^2 \to$对称矩阵空间$_q(\mathbb{R}_{>0})$

$$\mathcal{K}_N(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = \left(\mathcal{T}_{\mathcal{L}_{(\mathcal{S}_N(\theta_1))}(\theta_2)}(\theta_3)\right).$$

由于对于所有 $\theta_1 \in \mathcal{O}$，$\mathcal{S}_N(\theta_1) \in$对称矩阵空间$_q(\mathbb{R}_{>0})$，我们看到，对于所有 i，$j \in [q]$，$\mathcal{K}_N(\theta_1, \theta_2, \theta_3)_{ij}$是一个定义良好的解析函数。

现在固定取自引理 49 的 α，并将 $\mathbf{S_2}(\mathcal{K}_N(1, \alpha, \theta))$ 视为 θ 的函数。注意到 $\mathcal{S}_N(1) = N$，且对于所有 $\theta \in \mathbb{R}$，$\mathcal{K}_N(1, \alpha, \theta) = \mathcal{T}_{\mathcal{L}_N(\alpha)}(\theta)$。由 (VI) 可知，对于所有 $i \in [q]$，$\mathcal{L}_N(\alpha)_{qi} = \mathcal{L}_N(\alpha)_{qq} = (N_{qq})^{2\alpha+1}$。由 (VII) 我们还知道，对于所有 $i \in [q]$，$\mathcal{L}_N(\alpha)_{1i} = \mathcal{L}_N(\alpha)_{ii} = (N_{ii})^{2\alpha+1}$。因此，

$$\mathbf{S_2}(\mathcal{K}_N(1, \alpha, \theta))_{qq} = \sum_{i \in [q]} (\mathcal{L}_N(\alpha)_{qi})^{2\theta} = q N_{qq}^{2\theta(2\alpha+1)},$$

$$\mathbf{S_2}(\mathcal{K}_N(1, \alpha, \theta))_{11} = \sum_{i \in [q]} (\mathcal{L}_N(\alpha)_{1i})^{2\theta} = \sum_{i \in [q]} N_{ii}^{2\theta(2\alpha+1)}.$$

我们还知道 N 满足(IV)。因此，

$$\frac{\mathbf{S_2}(\mathcal{K}_N(1, \alpha, \theta))_{qq}}{(N_{qq})^{2\theta(2\alpha+1)}} = q, \text{ and}$$

$$\lim_{\theta\to-\infty}\frac{\mathbf{S_2}(\mathcal{K}_N(1,\alpha,\theta))_{11}}{(N_{qq})^{2\theta(2\alpha+1)}}=1+\lim_{\theta\to-\infty}\sum_{i<q}(N_{ii}/N_{qq})^{2\theta(2\alpha+1)}=1.$$

我们暂且假设以下断言成立，稍后再证明：

断言 52。 除非 Pl-GH(N) 是 $\#P$ 困难的，$\mathbf{S_2}(\mathcal{K}_N(1,\alpha,\theta))$ 满足 *(II)* 对所有 $\theta\in\mathbb{R}$。

现在，断言 52 意味着（回想 $1^{\mathrm{R}}=q$ 和 $2^{\mathrm{R}}=q-1$）

$$\lim_{\theta\to-\infty}\frac{\mathbf{S_2}(\mathcal{K}_N(1,\alpha,\theta))_{11}\cdot\mathbf{S_2}(\mathcal{K}_N(1,\alpha,\theta))_{qq}}{(N_{qq})^{4\theta(2\alpha+1)}}=q=\lim_{\theta\to-\infty}\frac{\mathbf{S_2}(\mathcal{K}_N(1,\alpha,\theta))_{22}\cdot\mathbf{S_2}(\mathcal{K}_N(1,\alpha,\theta))_{2^{\mathrm{R}}2^{\mathrm{R}}}}{(N_{qq})^{4\theta(2\alpha+1)}}. \tag{15}$$

现在让我们关注 2 的第 $\mathcal{L}_N(\alpha)$。由于 N 满足 (I)，且行内互异，我们知道$N_{22^{\mathrm{R}}}<N_{2i}$ 对所有 $i\neq 2^{\mathrm{R}}\in[q]$。此外，由于 N 满足 (IV)，我们还知道 $N_{ii}>N_{2^{\mathrm{R}}2^{\mathrm{R}}}$对所有 $i\in[q-2]$。因此，

$$\mathcal{L}_N(\alpha)_{22^{\mathrm{R}}}=N_{22^{\mathrm{R}}}(N_{22}N_{2^{\mathrm{R}}2^{\mathrm{R}}})^{\alpha}<N_{2i}(N_{22}N_{ii})^{\alpha}=\mathcal{L}_N(\alpha)_{2i},\quad\text{for all } i\in[q-2].$$

由于 $\mathcal{L}_N(\alpha)$ 满足 (I)，且 (VI)，我们还知道 $\mathcal{L}_N(\alpha)_{22^{\mathrm{R}}}=\mathcal{L}_N(\alpha)_{1q}=\mathcal{L}_N(\alpha)_{2q}=\mathcal{L}_N(\alpha)_{qq}=(N_{qq})^{2\alpha+1}$。所以我们看到

$$\lim_{\theta\to-\infty}\frac{\mathbf{S_2}(\mathcal{K}_N(1,\alpha,\theta))_{22}}{(N_{qq})^{2\theta(2\alpha+1)}}=2.$$

因此，式（15）意味着

$$\lim_{\theta\to-\infty}\frac{\mathbf{S_2}(\mathcal{K}_N(1,\alpha,\theta))_{2^{\mathrm{R}}2^{\mathrm{R}}}}{(N_{qq})^{2\theta(2\alpha+1)}}=\frac{q}{2}.$$

但这意味着 $|\{i\in[q]:\ \mathcal{L}_N(\alpha)_{i(q-1)}=\mathcal{L}_N(\alpha)_{qq}\}|=q/2$，从而证明了 (VIII)。由 (VIII) 还可推出，如果 q 是奇数，那么，Pl-GH(N) 是 #P-困难的。因此，q 必为偶数。这意味着对于所有 $i\in[q]$, $i\neq q+1-i=i^{\mathrm{R}}$。

由 (V)，我们知道 $\mathcal{L}_N(\alpha)$ 满足 (III) 对行 $(q-1)$成立。因此，对于所有 $i\in[q]$,

$$\mathcal{L}_N(\alpha)_{i(q-1)}\mathcal{L}_N(\alpha)_{i^{\mathrm{R}}(q-1)}=\mathcal{L}_N(\alpha)_{(q-1)(q-1)}\mathcal{L}_N(\alpha)_{2(q-1)}=\mathcal{L}_N(\alpha)_{(q-1)(q-1)}\mathcal{L}_N(\alpha)_{qq}.$$

由于 $\mathcal{L}_N(\alpha)$ 满足 (IV)，我们知道 $\mathcal{L}_N(\alpha)_{(q-1)(q-1)}>\mathcal{L}_N(\alpha)^{qq}$。因此，我们看到不可能出现这种情况：

$$\mathcal{L}_N(\alpha)_{i(q-1)}=\mathcal{L}_N(\alpha)_{i^{\mathrm{R}}(q-1)}=\mathcal{L}_N(\alpha)_{qq},$$

因为这将意味着 $\mathcal{L}_N(\alpha)_{i(q-1)}\mathcal{L}_N(\alpha)_{i^{\mathrm{R}}(q-1)}=(\mathcal{L}_N(\alpha)_{qq})^2<\mathcal{L}_N(\alpha)_{(q-1)(q-1)}\mathcal{L}_N(\alpha)_{qq}$。因此，每一对 $\{\mathcal{L}_N(\alpha)_{i(q-1)},\mathcal{L}_N(\alpha)_{i^{\mathrm{R}}(q-1)}\}$中至多有一个元素等于 $\mathcal{L}_N(\alpha)_{qq}$。现在，(VIII) 表明总数为 $q/2$；因此，每一对 $\{\mathcal{L}_N(\alpha)_{i(q-1)},\mathcal{L}_N(\alpha)_{i^{\mathrm{R}}(q-1)}\}$中恰有一个元素等于$\mathcal{L}_N(\alpha)_{qq}$。因此，该对中的另一个元素必定等于 $\mathcal{L}_N(\alpha)_{(q-1)(q-1)}$。这就证明了 (IX)。 □

现在，我们完成断言 52的证明。

断言 52。 除非 Pl-GH(N) 是 $\#P$-困难的，$\mathbf{S_2}(\mathcal{K}_N(1,\alpha,\theta))$ 对所有 $\theta\in\mathbb{R}$都满足 *(II)*。

证明。 我们定义 δ：对称矩阵空间$_q(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ 如下：

$$\delta(A) = \min\left\{\left(\min_{i\in[q-1]}\left(A_{ii} - A_{(i+1)(i+1)}\right)\right), \left(\min_{i\in[q]} A_{ii} - \max_{i\in[q],j\neq i\in[q]} A_{ij}\right)\right\}.$$

由于 N 满足 (IV)，且是对角占优的，因此 $\delta(N) > 0$。由于 $\mathcal{K}_N(1,0,1) = N$，并且 $\mathcal{K}_N(\theta_1,\theta_2,\theta_3)$ 的元素关于 $(\theta_1,\theta_2,\theta_3)$ 连续，我们可以假设存在一个开立方体 $\mathcal{O}_1\times\mathcal{O}_2\times\mathcal{O}_3 \subset \mathcal{O}\times\mathbb{R}^2$，使得 $\delta(\mathcal{K}_N(\theta_1,\theta_2,\theta_3)) > 0$，且对于所有 $(\theta_1,\theta_2,\theta_3) \in \mathcal{O}_1\times\mathcal{O}_2\times\mathcal{O}_3$，都有 $\mathcal{K}_N(\theta_1,\theta_2,\theta_3) \in$对称矩阵空间$_q^{\mathrm{pd}}(\mathbb{R}_{>0})$。现在我们定义 ψ'_{diag}：$A \mapsto \psi_{\mathrm{diag}}(A^2)$，以及 ϕ'_{row}：$A \mapsto \phi_{\mathrm{row}}(A^2)$，其中$\psi_{\mathrm{diag}}$、$\phi_{\mathrm{row}}$取自式（4）和式（5）。由于对于 $\rho \in \{\psi'_{\mathrm{diag}}, \phi'_{\mathrm{row}}\}$，$\rho(\mathcal{S}_N(1/2)) \neq 0$，我们可以使用引理18找到 $\theta' \in \mathcal{O}$，使得对于两者 $\rho \in \{\psi'_{\mathrm{diag}}, \phi'_{\mathrm{row}}\}$，都有 $\rho(\mathcal{S}_N(\theta')) \neq 0$。换言之，对于两者 $\rho \in \{\psi'_{\mathrm{diag}}, \phi'_{\mathrm{row}}\}$，都有 $\rho(\mathcal{K}_N(\theta',0,1)) \neq 0$。

现在我们假设 $\mathbf{S_2}(\mathcal{K}_N(1,\alpha,\theta))$ 不满足 (II)。因此，对于 ζ：$A \mapsto \sum_i (A_{11}A_{qq} - A_{ii}A_{i^{\mathrm{R}}i^{\mathrm{R}}})^2$，$\zeta(\mathbf{S_2}(\mathcal{K}_N(1,\alpha,\theta))) \neq 0$。现在我们可以定义 ζ_2：$A \mapsto \zeta(A^2)$。显然，$\zeta_2(\mathcal{K}_N(1,\alpha,\theta)) \neq 0$。

现在我们可以使用引理18找到某个 $(\theta_1^*,\theta_2^*,\theta_3^*) \in \mathcal{O}_1\times\mathcal{O}_2\times\mathcal{O}_3$，使得 $N' = \mathcal{K}_N(\theta_1^*,\theta_2^*,\theta_3^*) \in$对称矩阵空间$_q^{\mathrm{pd}}(\mathbb{R}_{>0})$ 满足：对于所有 $\rho \in \{\psi'_{\mathrm{diag}}, \phi'_{\mathrm{row}}, \zeta_2\}$，$\rho(N') \neq 0$，并且 $\delta(N') > 0$。

因此，$\mathbf{S_2}(N') \in$对称矩阵空间$_q^{\mathrm{pd}}(\mathbb{R}_{>0})$满足：$\rho(\mathbf{S_2}(N')) \neq 0$ 对所有 $\rho \in \{\psi_{\mathrm{diag}}, \phi_{\mathrm{row}}, \zeta\}$成立。我们注意到，由于 $N' \in$对称矩阵空间$_q^{\mathrm{pd}}(\mathbb{R}_{>0})$，故有$\mathcal{S}_{\mathbf{S_2}(N')}(1/2) = N'$。由于 $\delta(N') > 0$，且 $N' \in$对称矩阵空间$_q^{\mathrm{pd}}(\mathbb{R}_{>0})$，我们知道存在 $1/2$的某个开邻域 $\mathcal{O}'$，使得$\mathcal{S}_{\mathbf{S_2}(N')}(\theta) \in$ 对称矩阵空间$_q^{\mathrm{pd}}(\mathbb{R}_{>0})$，并且 $\delta(\mathcal{S}_{\mathbf{S_2}(N')}(\theta)) > 0$对所有 $\theta \in \mathcal{O}'$成立。我们再次使用引理18，找到某个 $\theta^* \in \mathcal{O}'$，使得$N'' = \mathcal{S}_{\mathbf{S_2}(N')}(\theta^*) \in$对称矩阵空间$_q^{\mathrm{pd}}(\mathbb{R}_{>0})$满足条件：$\rho(N'') \neq 0$对 $\rho \in \{\psi_{\mathrm{diag}}, \phi_{\mathrm{row}}, \zeta\}$成立，且$\delta(N'') > 0$。由我们对 δ的选择可知，这意味着 N''是对角占优的，并且$(N'')_{11} > (N'')_{22} > \cdots > (N'')_{qq}$。现在，假设存在 $[q]$的某个置换 σ，使得$(N'')^\sigma$满足(IV)。但这样一来，$(N'')_{11} > \cdots > (N'')_{qq}$意味着 σ必须是平凡的恒等置换。但我们在定义 N''时已经观察到 $\zeta(N'') \neq 0$。因此，由引理48可知，Pl-GH(N'') $\leq$Pl-GH(N') $\leq$Pl-GH(N)是#P-困难的。 □

引理 53。 设 N 满足 引理*51*的性质。那么，Pl-GH(N) 是 #*P*-困难的，除非 N也满足：

(X) $\aleph(N) = 0$，其中 $\aleph$： 对称矩阵空间$_q(\mathbb{R}_{>0}) \to \mathbb{R}$ 定义如下：

$$\aleph(A) = \Big(\ln(A_{1q}) - \ln(A_{qq})\Big)\Big(\ln(A_{(q-1)(q-1)}) - \ln(A_{qq})\Big) - \Big(\ln(A_{11}) - \ln(A_{qq})\Big)\Big(\ln(A_{(q-1)q}) - \ln(A_{qq})\Big).$$

证明。 首先，我们注意到 $N \in$ 对称矩阵空间$_q^{\mathrm{pd}}(\mathbb{R}_{>0})$ 满足 (IV)，因此 $\ln(N_{ii}) - \ln(N_{qq}) > 0$ 对所有 $i \in [q-1]$均成立。现在，由于 N满足 (VI)，即 $\mathcal{L}_N(\alpha)_{iq} = \mathcal{L}_N(\alpha)_{qq}$，（且其为正，因此下文的分数均有定义）我们可知

$$1 = \frac{\mathcal{L}_N(\alpha)_{iq}}{\mathcal{L}_N(\alpha)_{qq}} = \frac{N_{iq}(N_{ii}N_{qq})^\alpha}{N_{qq}(N_{qq}N_{qq})^\alpha} = \frac{N_{iq}}{N_{qq}}\left(\frac{N_{ii}}{N_{qq}}\right)^\alpha, \quad \text{for all } i \in [q].$$

So,

$$\alpha = \frac{(\ln(N_{qq}) - \ln(N_{iq}))}{(\ln(N_{ii}) - \ln(N_{qq}))}, \quad \text{for all } i \in [q-1].$$

这意味着

$$\frac{(\ln(N_{1q})-\ln(N_{qq}))}{(\ln(N_{11})-\ln(N_{qq}))}=-\alpha=\frac{\big(\ln(N_{(q-1)q})-\ln(N_{qq})\big)}{\big(\ln(N_{(q-1)(q-1)})-\ln(N_{qq})\big)}.$$

因此， $\aleph(N)=0$。 □

我们已完成定理 28的证明。现在，为完成定理 30的证明，我们证明引理 29。

引理 29。 设 $N\in$对称矩阵空间$_q^{\mathrm{pd}}(\mathbb{R}_{>0})$ 是 I-接近的、强对角互异的且行内互异的，并满足定理 28中的所有限制条件。那么存在某个 $N'\in$ 对称矩阵空间$_q^{\mathrm{pd}}(\mathbb{R}_{>0})$，使得$\texttt{Pl-GH}(N')\leq\texttt{Pl-GH}(N)$，且其为对角占优、强对角互异并且行内互异，但不 同时满足定理 28中的所有限制条件。

证明。 注意，由于 $N\in$对称矩阵空间$_q^{\mathrm{pd}}(\mathbb{R}_{>0})$，且 $\mathcal{S}_N(1)=N$，存在一个以 1 为中心的开球 $\mathcal{O}\subset\mathbb{R}$，使得对于所有 $\theta\in\mathcal{O}$， $\mathcal{S}_N(\theta)\in$对称矩阵空间$_q^{\mathrm{pd}}(\mathbb{R}_{>0})$。我们考虑 $\mathcal{K}_N$： $\mathcal{O}\times\mathbb{R}^2\to$对称矩阵空间$_q(\mathbb{R}_{>0})$，定义为

$$\mathcal{K}_N(\theta_1,\theta_2,\theta_3)=\mathcal{T}_{\mathcal{L}_{(\mathcal{S}_N(\theta_1))}(\theta_2)}(\theta_3).$$

由于对所有 $\theta_1\in\mathcal{O}$， $\mathcal{S}_N(\theta_1)\in$对称矩阵空间$_q(\mathbb{R}_{>0})$，因此我们看到，对于所有 $i,j\in[q]$， $\mathcal{K}_N(\theta_1,\theta_2,\theta_3)_{ij}$ 是一个定义良好的解析函数。此外，我们注意到 $\mathcal{K}_N(1,0,1)=N$。对于式（4）和式（5）中的 $\psi_{\mathrm{diag}},\phi_{\mathrm{row}}$，我们定义 ψ'_{diag}： $A\mapsto\psi_{\mathrm{diag}}(A^2)$，以及 ϕ'_{row}： $A\mapsto\phi_{\mathrm{row}}(A^2)$。由于当 $\rho\in\{\psi'_{\mathrm{diag}},\phi'_{\mathrm{row}}\}$ 时， $\rho(\mathcal{S}_N(1/2))\neq0$，我们可以利用引理18找到 $\theta'\in\mathcal{O}$，使得对于两者 $\rho\in\{\psi'_{\mathrm{diag}},\phi'_{\mathrm{row}}\}$， $\rho(\mathcal{S}_N(\theta'))\neq0$。这也意味着存在某个 $\theta'\in\mathcal{O}$，使得对于两者 $\rho\in\{\psi'_{\mathrm{diag}},\phi'_{\mathrm{row}}\}$， $\rho(\mathcal{K}_N(\theta',0,1))\neq0$。

暂且不论这一点，我们回顾到，作为引理 53的推论，$\texttt{Pl-GH}(N)$ 是#P-困难的，除非N 满足(I) – (X)。令 $\alpha\in\mathbb{R}_{>0}$ 为满足(V) – (IX) 的实数，对应于矩阵 N。我们现在暂时假设以下断言成立，稍后将予以证明。

断言 54. 存在某个 $\theta^*\in\mathbb{R}$，使得 $\aleph\Big(\mathbf{S_2}\big(\mathcal{K}_N(1,\alpha,\theta^*)\big)\Big)\neq0$。

我们现在将 δ_1： 对称矩阵空间$_q(\mathbb{R}_{>0})\to\mathbb{R}$ 定义为:

$$\delta_1(A)=\min_{\substack{i\in[q],i_1,j_1\in[q]\\ i_2\neq j_2\in[q]}}\left(\frac{A_{ii}^2}{A_{i_1j_1}A_{i_2j_2}}\right),$$

以及 δ_2： 对称矩阵空间$_q(\mathbb{R}_{>0})\to\mathbb{R}$ 为:

$$\delta_2(A)=\min_{i\in[q-1],j\in[q]}\left(\frac{A_{ii}}{A_{(i+1)j}}\right)^2.$$

由于 N 是I-接近的，我们由定义 19可知， $N_{ii}^2>(2/3)^2=4/9$ 对所有 $i\in[q]$成立。此外， $N_{i_1j_1}<(4/3)$，并且由于 $i_2\neq j_2$， $N_{i_2j_2}<(1/3)$。因此， $N_{i_1j_1}N_{i_2j_2}<(4/3)(1/3)=4/9$ 对所有 i_1、 $j_1\in[q]$、 $i_2\neq j_2\in[q]$成立。因此， $\delta_1(N)>1$。由于 N满足(IV)且是对角占优的，我们还可以看出$\delta_2(N)>1$。

由于 $\delta_1(A)$ $\delta_2(A)$ 关于 A 的元素连续，我们知道存在一个开邻域 $\mathcal{O}_1\times\mathcal{O}_2\subset\mathcal{O}\times\mathbb{R}$，包含 $(1,0)$，使得对于两者 $\rho\in\{\delta_1,\delta_2\}$，数量

$\rho(\mathcal{L}_{\mathcal{S}_N(\theta_1)}(\theta_2))$ 与大于 1 的量 $\rho(N)$ 足够接近。具体而言，我们可以令 $\mu = \min\left((\delta_1(N))^{1/2}, (\delta_2(N))^{1/2}\right)$。由于 $\delta_1(N) > 1$，且 $\delta_2(N) > 1$，我们可知$\mu > 1$，并且还可知，对于 $\rho \in \{\delta_1, \delta_2\}$，$\mu < \rho(N)$。因此，我们可以假设，对于所有 $(\theta_1, \theta_2) \in \mathcal{O}_1 \times \mathcal{O}_2$，$\rho(\mathcal{L}_{\mathcal{S}_N(\theta_1)}(\theta_2)) > \mu$。此外，我们可以假设，对于所有 $(\theta_1, \theta_2) \in \mathcal{O}_1 \times \mathcal{O}_2$，$\mathcal{L}_{\mathcal{S}_N(\theta_1)}(\theta_2) \in$对称矩阵空间$\mathrm{Sym}_q^{\mathrm{pd}}(\mathbb{R}_{>0})$。

现在令$U = \{\mathcal{L}_{\mathcal{S}_N(\theta_1)}(\theta_2) : (\theta_1, \theta_2) \in \mathcal{O}_1 \times \mathcal{O}_2\}$，并考虑 $A \in U$ 的 $\mathcal{T}_A(\theta)$ 中的 $\mathbf{S_2}$。根据我们对 U 的选择，可知 $\delta_1(A) > \mu$，且对所有 $A \in U$，$\delta_2(A) > \mu$。现在可知，对所有 $A \in U$，且对所有 $i \in [q-1]$,

$$\frac{\mathbf{S_2}(\mathcal{T}_A(\theta))_{ii}}{\mathbf{S_2}(\mathcal{T}_A(\theta))_{(i+1)(i+1)}} = \frac{\sum_{j\in[q]}(A_{ij})^{2\theta}}{\sum_{j\in[q]}(A_{(i+1)j})^{2\theta}} = \frac{1+\sum_{j\neq i\in[q]}(A_{ij}/A_{ii})^{2\theta}}{\sum_{j\in[q]}(A_{(i+1)j}/A_{ii})^{2\theta}} \geq \frac{1}{\sum_{j\in[q]}(A_{(i+1)j}/A_{ii})^{2\theta}} > \frac{\mu^\theta}{q}.$$

这里的最后一个不等式由以下事实得出：对所有 $i \in [q-1]$,$j \in [q]$，$(A_{ii}/A_{(i+1)j})^2 \geq \delta_2(A) > \mu$。

我们还可知，对所有 $i, j_1 \neq j_2 \in [q]$,

$$\frac{\mathbf{S_2}(\mathcal{T}_A(\theta))_{ii}}{\mathbf{S_2}(\mathcal{T}_A(\theta))_{j_1j_2}} = \frac{\sum_{k\in[q]}(A_{ik})^{2\theta}}{\sum_{k\in[q]}(A_{j_1k}A_{j_2k})^{\theta}} = \frac{1+\sum_{k\neq i\in[q]}(A_{ik}/A_{ii})^{2\theta}}{\sum_{k\in[q]}(A_{j_1k}A_{j_2k}/A_{ii}^2)^{\theta}} \geq \frac{1}{\sum_{k\in[q]}(A_{j_1k}A_{j_2k}/A_{ii}^2)^{\theta}} > \frac{\mu^\theta}{q}.$$

这里的最后一个不等式由以下事实得出：对所有 $i \in [q]$,$j_1 \neq j_2 \in [q]$，$(A_{ii}^2/A_{j_1k}A_{j_2k}) \geq \delta_1(A) > \mu$。

类似地，我们也可以看到，对于所有 $i \in [q]$,

$$\frac{\mathbf{S_2}(\mathcal{T}_A(\theta))_{ii}}{\sum_{j\neq i}\mathbf{S_2}(\mathcal{T}_A(\theta))_{ij}} = \frac{\sum_{k\in[q]}(A_{ik})^{2\theta}}{\sum_{j\neq i\in[q]}\sum_{k\in[q]}(A_{ik}A_{jk})^{\theta}} = \frac{1+\sum_{k\neq i\in[q]}(A_{ik}/A_{ii})^{2\theta}}{\sum_{j\neq i\in[q]}\sum_{k\in[q]}(A_{ik}A_{jk}/A_{ii}^2)^{\theta}} > \frac{\mu^\theta}{q(q-1)}.$$

因此，存在某个 $\theta \in \bar{\mathbb{R}}$，使得对于所有 $\theta > \theta$ 和 $\bar{A} \in U$,

$$\frac{\mathbf{S_2}(\mathcal{T}_A(\theta))_{ii}}{\mathbf{S_2}(\mathcal{T}_A(\theta))_{(i+1)(i+1)}} > 1 \text{ for all } i \in [q-1], \tag{16}$$

$$\frac{\mathbf{S_2}(\mathcal{T}_A(\theta))_{ii}}{\mathbf{S_2}(\mathcal{T}_A(\theta))_{j_1j_2}} > 1 \text{ for all } i \in [q], j_1 \neq j_2 \in [q], \tag{17}$$

$$\frac{\mathbf{S_2}(\mathcal{T}_A(\theta))_{ii}}{\sum_{j\neq i}\mathbf{S_2}(\mathcal{T}_A(\theta))_{ij}} > 1, \text{ for all } i \in [q]. \tag{18}$$

由于 $\aleph$ 是一个 $\mathrm{Sym}_q(\mathbb{R}_{>0})$-解析函数，我们可以构造一个新的 $\mathrm{Sym}_q(\mathbb{R}_{>0})$-解析函数$\aleph_2$：$A \mapsto \aleph(A^2)$。现在，断言 54 表明，对于某个 $\theta^* \in \mathbb{R}$，$\aleph_2(\mathcal{K}_N(\mathbf{1}, \alpha, \theta^*)) \neq 0$。我们还记得，在本证明开头（陈述断言 54 之前），我们找到了某个 $\theta' \in \mathcal{O}$，使得对于所有 $\rho \in \{\psi'_{\mathrm{diag}}, \phi'_{\mathrm{row}}\}$，$\rho(\mathcal{K}_N(\theta', \mathbf{0}, \mathbf{1})) \neq 0$。

因此，我们可以使用引理18找到某个 $(\theta_1^*, \theta_2^*, \theta_3^*) \in \mathcal{O}_1 \times \mathcal{O}_2 \times (\theta, \infty)^-$，使得 $\mathcal{K}_N(\theta_1^*, \theta_2^*, \theta_3^*) \in$对称矩阵空间$q(\mathbb{R}_{>0})$ 满足：$\rho(\mathcal{K}_N(\theta_1^*, \theta_2^*, \theta_3^*)) \neq 0$对 $\rho \in \{\aleph_2, \psi'_{\mathrm{diag}}, \phi'_{\mathrm{row}}\}$成立，且 $\text{Pl-GH}(\mathcal{K}_N(\theta_1^*, \theta_2^*, \theta_3^*)) \leq \text{Pl-GH}(N)$。

现在令 $N' = \mathbf{S_2}(\mathcal{K}_N(\theta_1^*, \theta_2^*, \theta_3^*))$。我们看到 $\rho(N') \neq 0$ 对 $\rho \in \{\aleph, \psi_{\mathrm{diag}}, \phi_{\mathrm{row}}\}$ 成立。此外，根据我们对 θ 的选择（方程 (18)），我们确保对于所有 $i \in [q]$，$(N')_{ii} > \sum_{j \neq i \in [q]} |(N')_{ij}|$。因此，根据格尔什戈林圆盘定理，$N' \in$ 属于对称矩阵空间 $\mathrm{pd}_q(\mathbb{R}_{>0})$。我们还看到（方程 (16) 和 (17)）

$$(N')_{11} > (N')_{22} > \cdots > (N')_{qq} > (N')_{ij} \text{ for all } i \neq j \in [q].$$

因此，N' 是对角占优、强对角互异且行内互异的。现在，假设存在某个置换 $\sigma \in S_q$，使得 $(N')^\sigma$ 满足 (IV)。但我们注意到 $(N')_{11} > \cdots > (N')_{qq}$ 不使用置换 σ。因此，要使 $(N')^\sigma$ 满足 (IV)，该置换 σ 必须是平凡的恒等置换。但这样一来，$\aleph(N') \neq 0$。因此，$N' \in$ 对称矩阵空间 $\mathrm{pd}_q(\mathbb{R}_{>0})$ 是一个对角占优、强对角互异、行内互异的矩阵，它要么不满足 (IV)，要么不满足(X)。

□

为了完成引理 29的证明，我们现在证明断言 54。

断言 54. 存在某个 $\theta^* \in \mathbb{R}$，使得 $\aleph\left(\mathbf{S_2}\left(\mathcal{K}_N(1, \alpha, \theta^*)\right)\right) \neq 0$。

证明。令 $N' = \mathcal{L}_N(\alpha)$。为方便起见，我们将 $N'_{ii} = x_i$ 重命名。由于 N 满足 (V)，我们知道 $x_1 > x_2 > \cdots > x_q$。由于 N 满足 (VII)，且满足 (VI)，我们看到，对于所有 $i \in [q]$，$(N')_{i1} = x_i$；对于所有 $i \in [q]$，$(N')_{iq} = x_q$。由于 N 满足 (VIII)，且满足 (IX)，我们还看到 $|\{i \in [q] : (N')_{(q-1)i} = x_q\}| = q/2$，以及 $|\{i \in [q] : (N')_{(q-1)i} = x_{q-1}\}| = q/2$。因此，

$$(\mathcal{T}_{N'}(\theta)^2)_{11} = \sum_{i \in [q]} (x_i)^{2\theta}, \quad (\mathcal{T}_{N'}(\theta)^2)_{qq} = q(x_q)^{2\theta}, \quad (\mathcal{T}_{N'}(\theta)^2)_{(q-1)(q-1)} = \frac{q}{2}(x_q)^{2\theta} + \frac{q}{2}(x_{q-1})^{2\theta},$$

$$(\mathcal{T}_{N'}(\theta)^2)_{1q} = (x_q)^\theta \sum_{i \in [q]} (x_i)^\theta, \quad (\mathcal{T}_{N'}(\theta)^2)_{(q-1)q} = \frac{q}{2}(x_q)^{2\theta} + \frac{q}{2}(x_q x_{q-1})^\theta.$$

为方便起见，我们令

$$S_1(\theta) = \sum_{i \in [q]} (x_i)^\theta, \quad S_2(\theta) = \sum_{i \in [q]} (x_i)^{2\theta}.$$

因此，我们看到

$$\begin{aligned}
\aleph(\mathcal{T}_{N'}(\theta)^2) = &\left(\ln\left((x_q)^\theta S_1(\theta)\right) - \ln\left(q(x_q)^{2\theta}\right)\right)\left(\ln\left(\frac{q}{2}(x_q)^{2\theta} + \frac{q}{2}(x_{q-1})^{2\theta}\right) - \ln\left(q(x_q)^{2\theta}\right)\right) \\
&- \left(\ln\left(S_2(\theta)\right) - \ln\left(q(x_q)^{2\theta}\right)\right)\left(\ln\left(\frac{q}{2}(x_q)^{2\theta} + \frac{q}{2}(x_q x_{q-1})^{\theta}\right) - \ln\left(q(x_q)^{2\theta}\right)\right) \\
= &\left(\ln\left(\sum_{i \in [q]} (x_i/x_q)^\theta\right) - \ln(q)\right)\left(\ln\left(1 + (x_{q-1}/x_q)^{2\theta}\right) - \ln(2)\right) \\
&- \left(\ln\left(\sum_{i \in [q]} (x_i/x_q)^{2\theta}\right) - \ln(q)\right)\left(\ln\left(1 + (x_{q-1}/x_q)^{\theta}\right) - \ln(2)\right).
\end{aligned}$$

现在，假设对于所有 $\theta \in \mathbb{R}$，$\aleph(\mathbf{S_2}(\mathcal{K}_N(\mathbf{1}, \alpha, \theta))) = 0$。这意味着对于所有 $\theta \in \mathbb{R}$，$\aleph(\mathcal{T}_{N'}(\theta)^2) = 0$。这意味着对于所有 $\theta \in \mathbb{R}$，$L_1(\theta)D_2(\theta) = L_2(\theta)D_1(\theta)$，其中 $L_1(\theta) =$

$\ln(\sum_i (x_i/x_q)^\theta) - \ln(q)$，$L_2(\theta) = \ln(\sum_i (x_i/x_q)^{2\theta}) - \ln(q)$，$D_1(\theta) = \ln(1 + (x_{q-1}/x_q)^\theta) - \ln(2)$，且$D_2(\theta) = \ln(1 + (x_{q-1}/x_q)^{2\theta}) - \ln(2)$。

现在我们来考察当 $\theta \to -\infty$ 时，$L_1(\theta)$ $L_2(\theta)$ $D_1(\theta)$ $D_2(\theta)$ 的渐近行为。令$\epsilon(\theta) = (x_{q-1}/x_q)^\theta$。那么，$D_1(\theta)$ 和 $D_2(\theta)$ 的泰勒级数展开告诉我们

$$D_1(\theta) = \epsilon(\theta) + o(\epsilon(\theta)) - \ln(2), \qquad D_2(\theta) = \epsilon(\theta)^2 + o(\epsilon(\theta)^2) - \ln(2).$$

由于 $x_1 > \cdots > x_{q-1} > x_q$，我们可以看到，对所有 $i \in [q-2]$，都有 $(x_i/x_q)^\theta = o(\epsilon(\theta))$。因此，$L_1(\theta)$ 和 $L_2(\theta)$ 的泰勒级数展开告诉我们

$$L_1(\theta) = \epsilon(\theta) + o(\epsilon(\theta)) - \ln(q), \qquad L_2(\theta) = \epsilon(\theta)^2 + o(\epsilon(\theta)^2) - \ln(q).$$

因此，我们得到

$$L_1(\theta)D_2(\theta) = \ln(2)\ln(q) - \ln(2)\epsilon(\theta) + o(\epsilon(\theta)), \qquad L_2(\theta)D_1(\theta) = \ln(2)\ln(q) - \ln(q)\epsilon(\theta) + o(\epsilon(\theta)).$$

但由于 $q \geq 3$，我们知道 $\ln(2) \neq \ln(q)$。这就证明了该结论。 □

至此，定理 30 的证明完成。

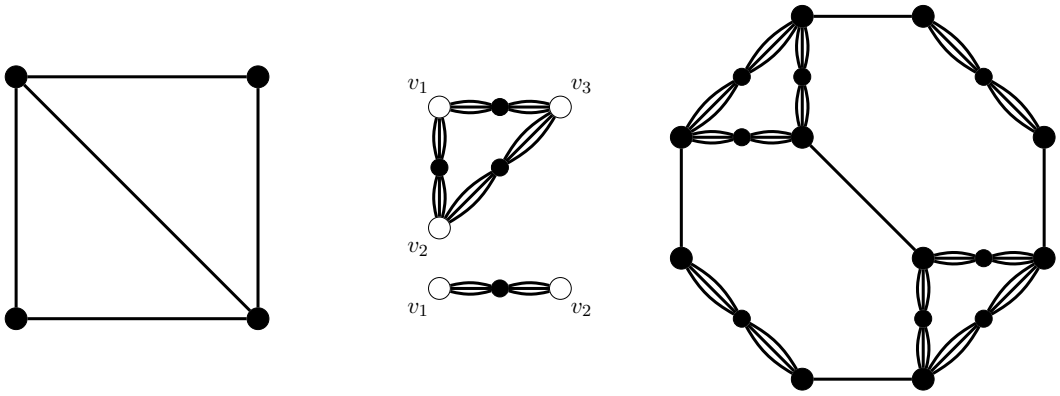


图5：一个图 G、定义在度为 3 和 2 的顶点上的环形构件 $\mathbf{R}_{2,3}$ ， 以及$\mathbf{R}_{2,3}G$。

G 对角元互异矩阵的二分定理

G.1 满秩矩阵的困难性。 我们首先证明 引理31。

引理31。 设 $M \in \mathit{Sym}_q^{\mathrm{F}}(\mathbb{R}_{>0})$ 为对角元互异（对于 $q \geq 2$）。那么，$\texttt{Pl-GH}(M)$ 是#*P-hard* .

证明。 由于 M是对角相异的，我们不妨假设 $M_{11} > M_{22} > \cdots > M_{qq}$。因此，我们看到

$$\lim_{\theta\to\infty}\left(\frac{(\mathcal{L}_M(\theta)^2)_{ii}}{(M_{11}M_{ii})^{2\theta}}\right) = M_{i1}^2, \quad \text{for all } i \in [q].$$

这意味着

$$\lim_{\theta\to\infty}\frac{(\mathcal{L}_M(\theta)^2)_{jj}}{(\mathcal{L}_M(\theta)^2)_{ii}} = 0, \quad \text{for all } i < j \in [q].$$

由于 $\det(\mathcal{L}_M(0)) = \det(M) \neq 0$，根据引理18，我们可以选取一个足够大的 θ^*，使得 $\mathcal{L}_M(\theta^*)$ 是满秩的； $N = \mathsf{S}_2(\mathcal{L}_M(\theta^*))$ 是一个满秩对称矩阵的平方，因而是正定的，从而$N \in$ 对称矩阵空间$\mathbb{Q}_q^{\mathrm{pd}}(\mathbb{R}_{>0})$，并且对角元互异。根据定理 30，$\text{Pl-GH}(N) \leq \text{Pl-GH}(M)$ 是 #P-困难的。

□

G.2 正值矩阵的二分定理。 我们首先简要讨论 [GCD20]中使用的构件。给定一个具有平面嵌入的平面多重图 $G = (V, E)$，图 $\mathbf{R}_{1,1}G$ 的构造如下：

我们首先按顺时针方向为每个顶点的关联边标号。对于每个顶点 $v \in V$，我们任意选取一条关联边并将其标为 1。绕 v 按顺时针方向，我们将剩余的边依次标为 $2, 3, \ldots, \deg(v)$。由此定义一个标记函数

$$\ell_v : \{(u, v) \in E\} \to [\deg(v)],$$

我们将其应用于所有顶点 $v \in V$。

然后，我们通过将每个顶点 $v \in V$ 替换为一个长度为 $\deg(v)$ 的简单环来构造 $\mathbf{R}_{1,1}G$ 。该环的顶点记为 $(v_1, v_2, \ldots, v_{\deg(v)})$，按照 ℓ_v顺时针排序。直观地说，这个环围绕着 v形成一个“环带”，其中每个 v_i 对应于 v的一条关联边。

对于每条边 $(u,v) \in E$，设 $\ell_u((u,v)) = i$ 以及 $\ell_v((u,v)) = j$。然后，我们用一条边连接 u_i 和 v_j，以替代原来的边 (u,v)。通过将这些环设置得足够小，可以在整体上保持平面性。因此，$\mathbf{R_{1,1}}G$ 是一个平面多重图。

现在，我们可以如下构造$\mathbf{R_{m,\,n}}G$ 对于 $m,\ n \geq 1$：首先，构造$\mathbf{R_{1,\,1}}G$。然后，将简单环上的每条边（即排除 G 中已有的边）替换为一条长度为 m的路径，再将每条路径上的每条 m 边替换为 n 条平行边。显然，$\mathbf{R_{m,\,n}}G$ 也是一个平面多重图。

这意味着，[GCD20] 中所有使用$\mathbf{R_{m,\,n}}G$ 小工具构造来证明$\texttt{GH}(N) \leq \texttt{GH}(M)$的证明，都可以毫不费力地加强为证明$\texttt{Pl-GH}(N) \leq \texttt{Pl-GH}(M)$。现在我们将讨论 [GCD20]中的一些结果。

记号 55。 令 $M \in$ 对称矩阵空间$_q(\mathbb{R}_{>0})$。对于 $i,j \in [q]$，若存在一个常数 c，使得对所有 $k \in [q]$ 都有 $M_{ik} = c \cdot M_{jk}$，则记为 $i \sim j$。我们将 $\mathcal{I}(M)$ 定义为 $[q]$ 上由这一关系所划分出的等价类。

我们注意到，对于任意 $M \in$对称矩阵空间$_q(\mathbb{R}_{>0})$，秩$(M) \leq |\mathcal{I}(M)| \leq q$。现在我们可以定义 ι：$\mathcal{I}(M) \to [q]$ 为 $\iota(I) = i$，其中 $i \in I$ 任意。注意，我们对 ι 的选择可以是任意的，但一旦固定了这个 ι，我们现在就可以定义如下内容：

定义 56。 令 $M \in$对称矩阵空间$_q(\mathbb{R}_{>0})$，其中 $\mathcal{I}(M)$ 以及 ι： $\mathcal{I}(M) \to [q]$ 如上定义。现在我们定义 w_θ： $\mathcal{I}(M) \to \mathbb{R}$ 如下：

$$w_\theta(I) = \sum_{i \in I} \left(\frac{M_{ii}}{M_{\iota(I)\iota(I)}} \right)^\theta .$$

于是，我们定义 $\mathcal{R}_M(\theta) \in$ 对称矩阵空间$_{|\mathcal{I}(M)|}(\mathbb{R}_{>0})$，使得

$$\mathcal{R}_M(\theta)_{IJ} = M_{\iota(I)\iota(J)} \left(\frac{w_{(2\theta+1)}(I)}{w_{2\theta}(I)} \right) \left(\frac{w_{(2\theta+1)}(J)}{w_{2\theta}(J)} \right).$$

备注。 注意， $\mathcal{R}_M(\theta)$ 取决于 ι的选择，但对于任意固定的 ι， $\mathcal{R}_M(\theta)$ 都有良好定义。

下面的定理是 [GCD20] 中定理 3.1 所证明的技术性陈述。

定理 *57*（[最大公约数20]）。设 $M \in$对称矩阵空间$_q(\mathbb{R}_{>0})$。那么，存在某个 $n^* \in \mathbb{Z}_{>0}$，使得对所有整数 $n > n^*$, $\mathcal{R}_M(n) \in$对称矩阵空间$^{\mathrm{F}}_{|\mathcal{I}(M)|}(\mathbb{R}_{>0})$，均有 *Pl-GH*$(\mathcal{R}_M(n)) \leq$*Pl-GH*$(M)$。

备注。 我们再次指出，对 n^* 的这一选择取决于 ι，但无论我们如何选择 ι，定理 *57* 都证明了某个 $n^* \in \mathbb{Z}_{>0}$ 存在。

现在我们可以证明以下二分定理。

定理 32. 设 $M \in Sym_q(\mathbb{R}_{>0})$ 是对角元互异的。那么，当 M 的秩为1时，$\texttt{Pl-GH}(M)$ 是多项式时间可解的。在所有其他情形下，$\texttt{Pl-GH}(M)$ 是#*P*-困难的。

证明. 首先，我们假设 $M = \mathbf{x}\mathbf{x}^{\mathsf{T}}$，其中某个 $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_q)$。那么，给定任意图 $G = (V, E)$，

$$Z_M(G) = \sum_{\sigma: V \to [q]} \prod_{(u,v) \in E} (x_{\sigma(u)} x_{\sigma(v)}) = \prod_{v \in V} \left(\sum_{i \in [q]} x_i^{\deg(v)} \right)$$

可在多项式时间内计算。因此，Pl-GH(M)（以及 GH(M）是多项式时间可解的。

现在，假设 M 的秩为 ≥ 2。那么，$|\mathcal{I}(M)| \geq 2$。由于 ι 的选择可以是任意的，我们可以选择 ι，使得 $\iota(I) = \arg\max_{i \in I} M_{ii}$。注意，由于 M 是对角元互异的，因此 ι 是唯一确定的。现在，对于所有 $I \in \mathcal{I}(M)$，

$$\lim_{\theta \to \infty} w_\theta(I) = \lim_{\theta \to \infty} \left(1 + \sum_{i \in I : i \neq \iota(I)} (M_{ii} / M_{\iota(I)\iota(I)})^\theta \right) = 1.$$

这意味着对于所有 $I \neq J \in \mathcal{I}(M)$，

$$\lim_{\theta \to \infty} \frac{\mathcal{R}_M(\theta)_{II}}{\mathcal{R}_M(\theta)_{JJ}} = \lim_{\theta \to \infty} \frac{M_{\iota(I)\iota(I)}}{M_{\iota(J)\iota(J)}} \left(\frac{w_{(2\theta+1)}(I)}{w_{2\theta}(I)} \right)^2 \left(\frac{w_{2\theta}(J)}{w_{(2\theta+1)}(J)} \right)^2 = \frac{M_{\iota(I)\iota(I)}}{M_{\iota(J)\iota(J)}} \neq 1.$$

因此，我们可以找到某个整数 $n > n^*$ 使得 $\mathcal{R}_M(n) \in$ 对称矩阵空间$^{\mathrm{F}}_{|\mathcal{I}(M)|}(\mathbb{R}_{>0})$ 是对角元互异的。因此，引理31 和 定理 57 推出 Pl-GH($\mathcal{R}_M(n)$) $\leq$ Pl-GH(M) 是 #P-难的。 □

G.3 非负值矩阵的二分定理。 现在我们将以证明 定理 33 结束本节。注意，[CCL13] 中一个引理的证明在平面情形下同样适用，并可重述如下。

定理 *58*（[*CCL*13]（引理*4.6*，第*940*页，其证明使用了引理*4.1*，第*937*页，称为第一个钉扎引理））。设 $M \cong M_1 \oplus \cdots \oplus M_r \in$ 对称矩阵空间$_q(\mathbb{R})$。如果所有 *Pl-GH*(M_i) 都是多项式时间可解的，则 *Pl-GH*(M) 是多项式时间可解的；如果对于某个 $i \in [r]$，*Pl-GH*(M_i) 是#*P*-困难的，则 *Pl-GH*(M) 是#*P*-困难的。

为了证明定理 33，我们还需要以下引理。

引理59。 设 $M \in$ 对称矩阵空间$_q(\mathbb{R}_{\geq 0})$ 的对角元互异。则存在 θ_1、$\theta_2 \in \mathbb{R}$，使得$\mathcal{B}_{\mathcal{T}_M(\theta_1)}(\theta_2) \in$ 对称矩阵空间$_q(\mathbb{R}_{\geq 0})$ 的对角元也互异。

证明。 我们将 Θ 写作 $(\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{R}^2$。令 $\mathcal{K}_M(\Theta) = \mathcal{B}_{\mathcal{T}_M(\theta_1)}(\theta_2)$。注意，对于所有 $i, j \in [q]$，

$$\mathcal{K}_M(\Theta)_{ij} = \sum_{x,y \in [q]} (M_{ix} M_{jy})^{\theta_1} (M_{xy})^{\theta_1 \theta_2}.$$

令任意的 $i \neq j \in [q]$ 固定。假设对于所有 $\Theta \in \mathbb{R}^2$, $\mathcal{K}_M(\Theta)_{ii} = \mathcal{K}_M(\Theta)_{jj}$。对于所有 $k \in [q]$，这意味着 $(M_{kk})^{\theta_1 \theta_2}$ 的系数必须相等。因此，

$$\sum_{\substack{(a,b) \in [q]: \\ M_{ab} = M_{kk}}} (M_{ia} M_{ib})^{\theta_1} = \sum_{\substack{(a,b) \in [q]: \\ M_{ab} = M_{kk}}} (M_{ja} M_{jb})^{\theta_1}.$$

但是，由于 M 的对角元互异，我们看到 $M_{ab} = M_{kk}$ 意味着以下两者之一：$(a, b) = (k, k)$，或者 $a \neq b$。换言之，我们有

$$(M_{ik})^{2\theta_1} + \sum_{\substack{a < b \in [q]: \\ M_{ab} = M_{kk}}} 2(M_{ia}M_{ib})^{\theta_1} = (M_{jk})^{2\theta_1} + \sum_{\substack{a < b \in [q]: \\ M_{ab} = M_{kk}}} 2(M_{ja}M_{jb})^{\theta_1}.$$

项 $(M_{ik})^{2\theta_1}$ 在可能与方程左侧其他相等项合并之后，具有奇数系数。若该项与方程右侧的项 $(M_{jk})^{2\theta_1}$ 不重合，则该项将具有偶数系数，从而产生矛盾。因此，由于这对所有 $\theta_1 \in \mathbb{R}$ 都成立，必然是情形 $M_{ik} = M_{jk}$。但由于这对所有 $k \in [q]$ 都成立，我们得到 $M_{ii} = M_{ji} = M_{ij} = M_{jj}$，这与我们关于 M 是对角元互异的假设相矛盾。因此，对所有 $i, j \in [q]$，存在某个 $\Theta_{ij} = (\theta_{ij,1}, \theta_{ij,2}) \in \mathbb{R}^2$，使得 $\mathcal{K}_M(\Theta_{ij})_{ii} \neq \mathcal{K}_M(\Theta_{ij})_{jj}$。

现在我们可以对 $i \neq j \in [q]$ 定义对称矩阵空间 q(ℝ)-多项式 ζ_{ij}，使得 ζ_{ij}： $A \mapsto (A_{ii} - A_{jj})$。现在，我们可以利用引理18找到 $\Theta^* = (\theta_1^*, \theta_2^*) \in \mathbb{R}^2$，使得对所有 $i \neq j \in [q]$ 都有 $\zeta_{ij}(\mathcal{K}_M(\Theta^*)) \neq 0$。这个 $\mathcal{K}_M(\Theta^*)$ 就是所需的对角元互异矩阵。 □

定理 33。设 $M \in$ 对称矩阵空间 q（$\mathbb{R}_{\geq 0}$）的对角元互异。则 Pl-GH（M）在（将 $[q]$ 重命名后）对于秩为0 或秩为1 的矩阵 M_i 时是多项式时间可解的。在所有其他情形下，Pl-GH（M）是#*P*-困难的。

证明。当 $q = 1$ 时，定理显然成立。因此我们假设 $q \geq 2$。

记 $M \cong M'$ 为：对某个置换 $\sigma \in S_q$，有 $M^{(\sigma)} = M'$，其中矩阵 $M^{(\sigma)}$ 是通过按照 σ 同时置换 M 的行和列得到的。由定理58 可知，如果 $M \cong M_1 \oplus \cdots \oplus M_r$ 对于秩为 1 或秩为 0 的矩阵 M_i 成立，则 Pl-GH（M）是多项式时间可解的。现在，我们假设，如果 $M \cong M_1 \oplus \cdots \oplus M_r$，那么 M_i 中至少有一个的秩不小于 2。

假设 M 有一行/列的所有元素均为 0。由于 M 的对角元互异，它至多有一行/列满足这一条件。我们可以对 M 的行和列进行置换，使该全零行/列成为最后一行/列。在这种情形下，$M = M' \oplus \mathbf{0}$ 对于某个 $M' \in \mathrm{Sym}^{q-1}(\mathbb{R}_{\geq 0})$ 和 $\mathbf{0} \in \mathrm{Sym}^1(\mathbb{R})$ 是仅含一个零元素的矩阵。显然，Pl-GH(M) ≡Pl-GH(M')。对于 M 的定理二分性结论与对于 M' 的相应结论是等价的。因此，我们可以将矩阵 M 替换为 M'，使得 M 没有包含全零元素的行/列。

现在我们在 $[q]$ 上定义一个图（允许有自环） Γ： 当且仅当 $M_{i,\ j} \neq 0$ 时，边 $(i,\ j) \in [q] \times [q]$ 存在。注意，允许 $i = j$，并且当 $M_{i,\ i} \neq 0$ 时，它是一个自环。由于 M 的对角元互异， Γ 的所有顶点都有自环，至多有一个例外（若存在这样的顶点，我们将其命名为 q）。我们可以将 M 分解为与 Γ 的连通分量相对应的块的直和。因此， $M \cong M_1 \oplus \cdots \oplus M_r$ 对于某个 $r \leq q$ 成立，其中每个 $M_i \in \mathrm{Sym}^{q_i}(\mathbb{R}_{\geq 0})$，且 $\sum_i q_i = q$。

我们断言， i 和 j 属于 Γ 的同一个连通分量，当且仅当 $(M^q)_{ij} > 0$。反向显然成立。下面证明正向结论。如果每个顶点都有自环，这也显然成立。假设顶点 q 没有自环。如果 $i \neq j$ 或 $i = j \neq q$，那么 i 或 j 中至少有一个有自环，因此 $(M^q)_{ij} > 0$。如果 $i = j = q$，由于第 q 行不全为 0，存在某个

$i \neq q$，使得 $M_{iq} > 0$。于是，由于 $q \geq 2$，当 q 为奇数时利用 i 处的自环，我们可得 $(M^q)_{qq} > 0$。因此，我们得到 $M^s \cong M_1^s \oplus \cdots \oplus M_r^s$，其中对所有 $s \geq q$，$M_i^s \in \mathrm{Sym}^{q_i}(\mathbb{R}_{>0})$。

回想一下，我们曾假设，若 $M \cong M_1 \oplus \cdots \oplus M_r$，则至少有一个 M_i 的秩至少为 2。不失一般性，我们可以假设 $\mathrm{rank}(M_1) \geq 2$。特别地，$q_1 \geq 2$。

令 $\Theta = (\theta_1, \theta_2)$。现在我们考虑 $\mathcal{K}_M(\Theta) = \mathcal{B}_{\tau_M(\theta_1)}(\theta_2)$。注意，对所有 $\Theta \in \mathbb{R}^2$，$\mathcal{K}_M(\Theta) \cong \mathcal{K}_{M_1}(\Theta) \oplus \cdots \oplus \mathcal{K}_{M_r}(\Theta)$。注意，$\mathcal{K}_{M_1}(\Theta)$ 的元素关于 θ_1 和 θ_2 连续，而矩阵的特征值是矩阵元素的连续函数。此外，由于 $\mathcal{K}_{M_1}(1,1) = M_1^3$，我们看到 $\mathrm{rank}(\mathcal{K}_{M_1}(1,1)) = \mathrm{rank}(M_1^3) = \mathrm{rank}(M_1) \geq 2$，（等式 $\mathrm{rank}(M_1^3) = \mathrm{rank}(M_1)$ 成立，这可由实对称矩阵的谱分解轻易看出）。我们看到，存在一个以 $(1,1)$ 为中心的开邻域 $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^2$，使得对所有 $\Theta \in \mathcal{O}$，$\mathrm{rank}(\mathcal{K}_{M_1}(\Theta)) = \mathrm{rank}(\mathcal{K}_{M_1}(1,1)) \geq 2$。

给定任意 $B \in$对称矩阵空间$_q(\mathbb{R}_{\geq 0})$，我们定义一个对称矩阵空间$_q(\mathbb{R})$-多项式

$$\zeta_B : A \mapsto \prod_{\substack{i,j \in [q]: \\ B_{ij} > 0}} (A_{ij}).$$

由于 $\mathcal{K}_M(1,1) = M^3$，我们平凡地看到，$\zeta_{M^3}(\mathcal{K}_M(1,1)) \neq 0$。因此，利用引理59，我们可以找到某个 $\Theta^* = (\theta_1^*, \theta_2^*) \in \mathcal{O}$，使得 $N_1 = \mathcal{K}_M(\Theta^*) \in$对称矩阵空间$_q(\mathbb{R}_{\geq 0})$满足：$N_1 \cong N_{1,1} \oplus \cdots \oplus N_{1,r}$对于$N_1$，$_i \in$ 对称矩阵空间$_{q_i}(\mathbb{R}_{\geq 0})$，$\phi_{\mathrm{diag}}(N_1) \neq 0$, $\zeta_{M^3}(N_1) \neq 0$，秩$(N_{1,}1) \geq 2$，以及Pl-GH$(N_1) \leq$ Pl-GH(M)。由我们对图 Γ的构造可知，$(M^3)_{ij} > 0$ 当且仅当 i 与 j 在 Γ 中通过一条长度为3的路径连通。因此，我们看到，由于 $\zeta_{M^3}(N_1) \neq 0$，只要 Γ 在 i 与 j之间有一条长度为3的路径，就有$(N_1)_{ij} > 0$ 。

现在，我们用 N_1 替换 M，重新重复这一过程，找到 $N_2 \in$ 对称矩阵空间$_q(\mathbb{R}_{\geq 0})$，使得 $N_2 \cong N_{2,1} \oplus \cdots \oplus N_{2,r}$, $\phi_{\mathrm{diag}}(N_2) \neq 0$, $\zeta_{(N_1)^3}(N_2) \neq 0$，$\mathrm{rank}(N_{2,}1) \geq 2$，且 Pl-GH$(N_2) \leq$Pl-GH$(N_1) \leq$ Pl-GH(M)。回顾一下，只要 Γ 在 i和 j之间有一条长度为3的路径，$(N_1)_{ij} > 0$ 就成立。因此，只要 Γ 在 i 和 j 之间有一条长度为9的路径，$(((N_1)^3)_{ij} > 0$ 就成立。因此，$\zeta_{(N_1)^3}(N_2) \neq 0$ 蕴含 $\zeta_{M^9}(N_2) \neq 0$。

实际上，我们发现，如果将这一过程重复至多 $t = \lceil \log_3(q) \rceil$ 次，就能构造出 $N_t \cong N_{t,1} \oplus \cdots \oplus N_{t,r}$，使得 $\phi_{\mathrm{diag}}(N_t) \neq 0, \zeta_{M^{(3^t)}}(N_t) \neq 0$，$\mathrm{rank}(N_{t,1}) \geq 2$，且 Pl-GH$(N_t) \leq$Pl-GH$(M)$。

由于根据我们对 t 的选择，$(M_1)^{(3^t)} \in$对称矩阵空间$_{q_1}(\mathbb{R}_{>0})$，因此我们看到 $N_{t,1} \in$ 对称矩阵空间$_{q_1}(\mathbb{R}_{>0})$，其秩$(N_{t,}1) \geq 2$；并且由于 $\phi_{\mathrm{diag}}(N_t) \neq 0$, $N_{t,}1$ 的对角元互异。因此，根据定理 32，我们看到 Pl-GH$(N_{t,}1)$ 是 #P-困难。因此，根据定理58，我们看到 Pl-GH$(N_t) \leq$ Pl-GH(M) 也为 #P-困难。

□

H 对角相异性与量子自同构

在本节中，我们证明第 6 节中的结果。在证明定理 34之前，我们先简要介绍Qut(M)的理论。

H.1 量子自同构群。 为了应用 [MR20；CY24], 的理论，我们需要对边构件给出一个更一般的定义，其中标记顶点可以相同，且签名可以不是对称的。一个2-双标记图或二元构件$\mathbf{K}$ 是一个带有指定顶点 ℓ_1， $\ell_2 \in V(\mathbf{K})$的图，可能还带有 $\ell_1 = \ell_2$。定义$\mathbf{K}(M)$ 的方式与公式 (1)中相同。注意，若 $\ell_1 = \ell_2$，则$\mathbf{K}(M)$ 是对角的。

定义60($\mathfrak{B}(M)$，Pl-$\mathfrak{B}(M)$)。对于 $M \in$对称矩阵空间$_q(\mathbb{R})$，令 $\mathfrak{B}(M) := \{\mathbf{K}(M)$：二元构件 $\mathbf{K}\}$，并定义 Pl-$\mathfrak{B}(M) \subset \mathfrak{B}(M)$ 为平面二元构件的签名。

回顾一下， I 和 J 分别是单位矩阵和全1矩阵。

命题 61。对于任意 M，有 $I, J \in$Pl-$\mathfrak{B}(M)$。任何没有边的$\mathbf{K}$ 都满足$\mathbf{K}(M) \in$张成空间$_{\mathbb{R}}(I, J)$。

证明。 任何没有边的$\mathbf{K}$都由孤立顶点组成。如果$\mathbf{K}$的两个标签位于互异顶点上，那么$\mathbf{K}(M) = q^k J$；如果两个标签位于同一顶点上，那么$\mathbf{K}(M) = q^k I$，其中 k是未标记孤立顶点的数量。 □

我们简要介绍 Qut(M) 及其轨道和轨道关系。关于这些主题的更多背景信息，请参阅 [MR20]。量子置换矩阵 $\mathcal{U} = (u_{ij})_{i,\ j=1}^{q}$ 是一个元素取自某个 C^*- 代数的矩阵（注意，某个希尔伯特空间上有界线性算子的代数是一个典型的 C^*-代数；例如，在定义量子同构的非局域博弈中， $\mathcal{U}$ 的元素就是量子参与者的测量算子 [Ats+19]），并满足

$$\text{(i)}\ \ u_{ij}^* = u_{ij} \qquad \text{(ii)}\ \ \sum_j u_{ij} = \sum_i u_{ij} = \mathbf{1} \qquad \text{(iii)}\ \ u_{ij}u_{ij'} = \delta_{jj'}u_{ij} \ \text{ and } \ u_{ij}u_{i'j} = \delta_{ii'}u_{ij},$$

其中$\mathbf{1}$ 是 C^*-代数的单位元。关键的是， $\mathcal{U}$的元素不一定彼此可交换。不过，如果 $\mathcal{U}$ 的元素来自 $\mathbb{C}$，那么关系 (i)、(ii)、(iii) 会迫使 $\mathcal{U}$ 成为一个普通的（取值为 0-1 的）置换矩阵。

该量子自同构群Qut(M) 的 M 是一个高度抽象的对象，此处我们不会对其作精确定义。只需指出，Qut(M) 由其基本表示——一个量子置换矩阵 $\mathcal{U}$ 以及附加约束 $\mathcal{U}\,M = M\,\mathcal{U}$ [CY24], 所确定；这与以下事实类似：普通置换矩阵 P 表示M的经典自同构，当且仅当 $PM = MP$。沿着这一类比，我们考虑以下构造。

定义*62* (*[LMR20*，引理*3.2*，引理*3.4*，定义*3.5]*) 。令 $M \in$*Sym*$_q(\mathbb{R})$，且 $\mathcal{U}$ 为 *Qut(M)* 的基本表示。在 $[q]$ 上由 $i \sim_1 j \iff u_{ij} \neq 0$ 和 $\sim_2$ 定义的关系 $\sim_1$，以及在 $[q] \times [q]$ 上由 $(i, i')\ \sim_2\ (j, j') \iff u_{ij}u_{i'j'} \neq 0$ 定义的关系，都是等价关系。分别将 *Qut(M)* 的轨道和轨道关系定义为 $\sim_1$ 和 $\sim_2$ 的等价类。

下一个陈述是 [LMR20，定理3。10] 的一个特例。

引理 63。令 $\mathcal{U}$ 为$\mathrm{Qut}(M)$ 的基本表示，且 $K \in$ 矩阵空间$_q(\mathbb{R})$。当且仅当 K 在$\mathrm{Qut}(M)$的轨道上为常数时，我们有$\mathcal{U}\,K = K\,\mathcal{U}$。

这意味着 K 在 $\mathrm{Qut}(M)$ 的轨道关系上为常数，即 $(i,\ i') \sim_2 (j,\ j')$ 蕴含 $K_{ii'} = K_{jj'}$。以下定理是 [CY24 定理 4] 的特例。它表明，平面二元构件签名的张成空间恰好刻画了这些“在 $\mathrm{Qut}(M)$ 下不变”的矩阵。

定理 64。令 $\mathcal{U}$ 为$\mathrm{Qut}(M)$ 的基本表示，且 $K \in$ 矩阵空间$_q(\mathbb{C})$。当且仅当 $K \in$ 属于$\mathbb{C}(\mathtt{Pl}\text{-}\mathfrak{B}(M))$ 的张成空间时，我们有$\mathcal{U}\,K = K\,\mathcal{U}$。

量子对称群的基本表示 $\mathcal{U}$ S_q^+除了使 $\mathcal{U}$ 成为量子置换矩阵的关系 (i)、(ii)、(iii) 外，不受其他关系约束。等价地，$S_q^+ =\mathrm{Qut}(\mathbf{0})$（其中 $\mathbf{0} \in$ 对称矩阵空间$_q(\mathbb{R})$ 表示全零矩阵），因为 $\mathcal{U}\,\mathbf{0} = \mathbf{0}\,\mathcal{U}$ 总是成立。现在我们证明 命题 38 的以下加强版本。

命题 65. 设 $M \in Sym_q(\mathbb{R}_{\geq 0})$。则以下各项等价。

(1) $\mathrm{Qut}(M) = S_q^+$，(2) Pl-$\mathfrak{E}(M)$ $\subset$张成空间$_{\mathbb{R}}(I,\ J)$，(3) $M \in$张成空间$_{\mathbb{R}}(I,\ J)$。

证明。我们证明 (1) $\Longrightarrow$(2) $\Longrightarrow$(3) $\Longrightarrow$(1)。设 $\mathrm{Qut}(M) = S_q^+$。那么 $\mathrm{Qut}(M)$ 和$S_q^+ = \mathrm{Qut}(0)$ 具有相同的基本表示，因此根据定理 64，张成空间$_{\mathbb{C}}$(Pl-$\mathfrak{B}(M)$) =张成空间$_{\mathbb{C}}$(Pl-$\mathfrak{B}(0)$)。若二元构件 K 满足 K(0) $\neq \mathbf{0}$，则 K 必然没有边，因此根据命题 61，K(0) $\in$张成空间$_{\mathbb{R}}(I, J)$。因此 Pl-$\mathfrak{E}(M)$ $\subset$Pl-$\mathfrak{B}(M)$ $\subset$ 张成空间 $_{\mathbb{C}}$(Pl-$\mathfrak{B}(M)$) = 张成空间 $_{\mathbb{C}}(I, J)$，并且由于 M 是实值的，Pl-$\mathfrak{E}(M)$ $\subset$ 张成空间 $_{\mathbb{R}}(I, J)$。

假设 Pl-$\mathfrak{E}(M)$ $\subset$张成空间$_{\mathbb{R}}(I,\ J)$。由一条边及其两个带标签端点构成的构件，其签名为 $M \in$Pl-$\mathfrak{E}(M)$，因此 $M \in$张成空间$_{\mathbb{R}}(I,\ J)$。

最后，假设 $M \in$张成空间$_{\mathbb{R}}(I,\ J)$。已知 I和 J，因此张成空间$_{\mathbb{R}}(I,\ J)$中的所有矩阵都与任意量子置换矩阵 $\mathcal{U}$ 可交换（例如参见 [LMR20，定理 3。10]；这也可由 命题 61 或直接计算得出）。因此，关系 $\mathcal{U}\,M = M\,\mathcal{U}$ 不会对 $\mathcal{U}$施加任何新约束，所以 $\mathrm{Qut}(M) = S_q^+$。

□

已知 $i, j \in [q]$ 属于 $\mathrm{Qut}(M)$ 的同一轨道，当且仅当它们无法被一元平面图样 [区分（CY24，引理 10]）。对于对角线对 (i, i) 和 (j, j)，轨道与轨道关系的概念相同：$(i, i) \sim_2 (j, j)$ 当且仅当 $i \sim_1 j$，如 $u_{ij}u_{ij} = u_{ij}$。因此，以轨道关系代替轨道进行类似推理，可得关于二元平面图样的类似结果。

引理 66。设 $M \in$ 对称矩阵空间$_q(\mathbb{R})$。那么，对于每个 $\mathbf{K}(M) \in \mathtt{Pl}\text{-}\mathfrak{B}(M)$，$\mathbf{K}(M)_{ii} = \mathbf{K}(M)_{jj}$ 当且仅当 i 和 j 属于 $\mathrm{Qut}(M)$的同一轨道。

证明。 ($\Leftarrow$): 假设 $u_{ij} \neq 0$, 并令 $\mathbf{K}(M) \in \texttt{Pl-}\mathfrak{B}(M)$。 定理 64 给出 $\mathcal{U}\mathbf{K}(M) = \mathbf{K}(M)\,\mathcal{U}$。因此

$$\sum_{\ell} u_{i\ell}\mathbf{K}(M)_{\ell j} = (\mathcal{U}\,\mathbf{K}(M))_{ij} = (\mathbf{K}(M)\,\mathcal{U})_{ij} = \sum_{\ell} \mathbf{K}(M)_{i\ell}u_{\ell j}. \tag{19}$$

将式 (19) 两边左乘 $u_{ij} \neq 0$, 并应用量子置换矩阵的性质 (iii), 可得

$$u_{ij}\mathbf{K}(M)_{jj} = \sum_{\ell} u_{ij}u_{i\ell}\mathbf{K}(M)_{\ell j} = \sum_{\ell} \mathbf{K}(M)_{i\ell}u_{ij}u_{\ell j} = \mathbf{K}(M)_{ii}u_{ij},$$

由此可得 $\mathbf{K}(M)_{ii} = \mathbf{K}(M)_{jj}$。

($\Rightarrow$): 我们证明其逆否命题。假设 i 与 j 位于 $\mathrm{Qut}(M)$ 的不同轨道中。则 (i,i) 与 (j,j) 位于 $\mathrm{Qut}(M)$ 的不同轨道中, 因为 $u_{ij}u_{ij} = u_{ij} = 0$。定义 $L \in$ 矩阵空间$_q(\mathbb{R})$ 为

$$L_{xy} = \begin{cases} 1 & (x,y) \sim_2 (i,i) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}.$$

根据定义, L 在 $\mathrm{Qut}(M)$ 的轨道上为常数, 因此引理 63 和定理 64 给出 $L \in$张成空间$_{\mathbb{C}}(\texttt{Pl-}\mathfrak{B}(M))$: 存在 c_1, ..., $c_r \in \mathbb{C}$ 以及 $\mathrm{K}_1(M)$ ....., $\mathrm{K}_r(M) \in \texttt{Pl-}\mathfrak{B}(M)$, 使得 $L = \sum_{\ell=1}^{r} c_\ell \cdot \mathrm{K}_\ell(M)$。现在

$$\sum_{\ell=1}^{r} c_\ell \cdot \mathbf{K}_\ell(M)_{ii} = L_{ii} = 1 \neq 0 = L_{jj} = \sum_{\ell=1}^{r} c_\ell \cdot \mathbf{K}_\ell(M)_{jj},$$

因此存在某个 $\mathbf{K}_\ell(M)$, 使得 $\mathbf{K}_\ell(M)_{ii} \neq \mathbf{K}_\ell(M)_{jj}$。 □

如果 $M \in$对称矩阵空间$_q(\mathbb{R}_{\geq 0})$, 那么只需考虑对称平面边缘构件签名。

定理 36. 设 $M \in$ 对称矩阵空间$_q(\mathbb{R}_{\geq 0})$。那么对于每个$\mathbf{K}(M) \in \texttt{Pl-}\mathfrak{C}(M)$, $\mathbf{K}(M)_{ii} = \mathbf{K}(M)_{jj}$ 当且仅当 i 和 j 属于$\mathrm{Qut}(M)$的同一轨道。

证明。根据引理 66, 只需证明: 若对于某个 $\mathrm{K}'(M) \in \texttt{Pl-}\mathfrak{B}(M)$, 有 $\mathrm{K}'(M)_{ii} \neq \mathrm{K}'(M)_{jj}$, 那么存在一个 $\mathrm{K}(M) \in \texttt{Pl-}\mathfrak{C}(M)$, 使得 $\mathrm{K}(M)_{ii} \neq \mathrm{K}(M)_{jj}$。首先注意到, $\mathrm{K}'(M)$ 的元素均非负, 因为它们是 M的元素之积的和。$\mathrm{K}'(M)$ 可能因两种情况而不属于 $\texttt{Pl-}\mathfrak{C}(M)$: 其底层二元构件 K' 可能在同一个顶点上带有两个标签, 或者 $\mathrm{K}'(M)$ 可能不是对称的。在第一种情形下, 有 $\mathrm{K}'(M) = \mathrm{diag}(\mathbf{x})$, 其中某个 $\mathbf{x} \in (\mathbb{R}_{\geq 0})^q$。构造一个边构件 K, 使其为两个 K'副本的不交并, 但将 K' 中原先带有双重标签的顶点, 在第一个副本中标记为 ℓ_1 , 在第二个副本中标记为 ℓ_2 。现在 $\mathrm{K}(M) := \mathbf{x}\mathbf{x}^{\mathsf{T}} \in \texttt{Pl-}\mathfrak{C}(M)$, 并且由非负性, $\mathrm{K}(M)_{ii} = (\mathrm{K}'(M)_{ii})^2 \neq (\mathrm{K}'(M)_{jj})^2 = \mathrm{K}(M)_{jj}$。

在第二种情形中, $\mathrm{K}'(M)$ 是非对称的, 因此 K' 的两个标签位于互异顶点上。通过再次创建两个副本 K' 来构造 K, 然后将第一个副本的 ℓ_1 与第二个副本的 ℓ_2 合并, 反之亦然。现在 $\mathrm{K}(M) \in$对称矩阵空间$_q(\mathbb{R}_{\geq 0})$, 使得对所有 $i,j \in [q]$, 均有 $\mathrm{K}(M)_{ij} = \mathrm{K}'(M)_{ij} \cdot \mathrm{K}'(M)_{ji}$。因此, $\mathrm{K}(M) \in \texttt{Pl-}\mathfrak{C}(M)$。同样, $\mathrm{K}(M)_{ii} = (\mathrm{K}'(M)_{ii})^2 \neq (\mathrm{K}'(M)_{jj})^2 = \mathrm{K}(M)_{jj}$。 □

对于命题 35，即定理 36的经典版本，我们应用以下定理 64的经典版本，它是 [You22中的定理 5] 的一个特例（另见 [Lov06，引理 2.5]）[1]。在此，我们将$\mathrm{Aut}(M)$ 视为表示$\mathrm{Aut}(M)$中置换的置换矩阵群。

定理 67 ([You22])。 设 $K \in$ 矩阵空间$q(\mathbb{R})$。我们有 $PK = KP$对每个 $P \in \mathrm{Aut}(M)$ 当且仅当 $K \in$ 张成空间$\mathbb{C}(\mathfrak{B}(M))$。

现在，接着，按照 [You22的证明，引理 5], 我们得到 引理 66 的一个经典版本 .

引理 68. 设 $M \in$对称矩阵空间$q(\mathbb{R})$。那么 $\mathbf{K}(M)_{ii} = \mathbf{K}(M)_{jj}$对每个 $\mathbf{K}(M) \in \mathfrak{B}(M)$ 成立，当且仅当i 和 j 属于 $\mathrm{Aut}(M)$的同一轨道。

证明。 ($\Leftarrow$)显然成立。反过来，假设 i 和 j 属于 Aut(M)的不同轨道，并定义对角矩阵 $L \in$矩阵空间$q(\mathbb{R})$如下：

$$L_{xx} = \begin{cases} 1 & x \sim i \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}.$$

根据定义， L 在 Aut(M)的各轨道上为常数，因此对每个 $P \in$Aut(M)都有 $PL = LP$。于是定理 67 给出 $L \in$ 张成空间$\mathbb{C}(\mathfrak{B}(M))$，因此如同定理 36 的证明，其中 L 的某一项 $\mathrm{K}(M)_{ii} \neq \mathrm{K}(M)_{jj}$ 必须满足 $\mathrm{K}(M)_{ii} \neq \mathrm{K}(M)_{jj}$。 □

现在，根据 第 6 节中的断言，利用 引理 68 ，采用与 定理 36由 引理 66推出时相同的论证，得到以下结果。

命题 35. 设 $M \in$对称矩阵空间$q(\mathbb{R}_{\geq 0})$。那么，对于每个 $\mathbf{K}(M)_{ii} = \mathbf{K}(M)_{jj}$，$\mathbf{K}(M) \in \mathfrak{E}(M)$ 成立，当且仅当 i 和 j 属于 $\mathrm{Aut}(M)$的同一轨道。

H.2 从两两可区分性推出对角元互异。 本小节中，我们将证明 定理 34。在证明对所有 $M \in$ 对称矩阵空间$q(\mathbb{R}_{\geq 0})$的二分定理之前，先来证明 $M \in$对称矩阵空间$q(\mathbb{R}_{>0})$的二分定理。

引理 *69.* 设 $M \in$ 对称矩阵空间$q(\mathbb{R}_{\geq 0})$。假设对所有 $x < y \in [q]$，都存在一个 $K^{xy}(M) \in$ *Pl-*$\mathfrak{E}(M)$，使得 $K^{xy}(M)_{xx} \neq K^{xy}(M)_{yy}$，并且对每个 $i \in [q]$都有 $K^{xy}(M)_{ii} > 0$。那么存在一个对角元互异的 $K(M) \in$*Pl-*$\mathfrak{E}(M)$。

证明。给定 $\mathbf{z} = (z_{xy})_{x<y\in[q]} \in (\mathbb{Z}_{>0})^{q(q-1)/2}$，我们通过将每个$\mathbf{K}^{xy}$ 的 z_{xy} 个副本中标记为 ℓ_1 的所有顶点合并，再将标记为 ℓ_2 的所有顶点合并，从不交并构造边构件 $\mathbf{K}_{\mathbf{z}}$。等价地，可从针对 $n = \sum_{x<y} z_{xy}$ 的加粗构件 $\mathbf{T}_{\mathbf{n}}$ 构造$\mathbf{K}_{\mathbf{z}}$，方法是将每条边替换为相应的$\mathbf{K}^{xy}$。显然，$\mathbf{K}_{\mathbf{z}}$是一个平面构件，并且对于所有$\mathbf{z}$，$\mathbf{K}_{\mathbf{z}}(M) \in$Pl-$\mathfrak{E}(M)$。由此可得，对于所有 $i, j \in [q]$,

$$\mathbf{K}_{\mathbf{z}}(M)_{ij} = \prod_{x<y\in[q]} \left((\mathbf{K}_{\mathbf{xy}}(M))_{ij}\right)^{z_{ij}}.$$

[1]Lov´asz [Lov06] 仅考虑标签位于互异顶点上的 2-标记图。因此， [Lov06，引理 2。5]仅适用于无孪生 M。

每个$\mathbf{K}^{\mathbf{xy}}(M)$的对角元均为正，因此，对于每个$\mathbf{z} \in (\mathbb{Z}_{>0})^{q(q-1)/2}$，$\mathbf{K}_{\mathbf{z}}(M)_{ii} > 0$对所有$i \in [q]$均成立。

现在我们将证明，存在某个$\mathbf{z}^*$，使得$\mathbf{K}_{\mathbf{z}^*}(M)$的对角元互异。注意，对于 $i \in [q]$，$\mathbf{K}_{\mathbf{z}}(M)_{ii}$的两两不同等价于这些值$\log(\mathbf{K}_{\mathbf{z}}(M)_{ii}) = \sum_{x<y} z_{xy} \cdot \log(\mathbf{K}^{\mathbf{xy}}(M)_{ii})$两两不同。这又等价于选择一个$\mathbf{z}^*$，使多项式

$$\begin{aligned}\zeta(\mathbf{z}) &= \prod_{i<j\in[q]} \left(\sum_{x<y\in[q]} z_{xy} \cdot \log(\mathbf{K}_{\mathbf{xy}}(M)_{ii}) - \sum_{x<y\in[q]} z_{xy} \cdot \log(\mathbf{K}_{\mathbf{xy}}(M)_{jj}) \right) \\ &= \prod_{i<j\in[q]} \sum_{x<y\in[q]} z_{xy} \cdot \left(\log(\mathbf{K}_{\mathbf{xy}}(M)_{ii}) - \log(\mathbf{K}_{\mathbf{xy}}(M)_{jj}) \right)\end{aligned}$$

不为零。对于任意 $i < j \in [q]$，根据我们对构件$\mathbf{K}^{ij}(M)$的假设，我们可知z_{ij} 在

$$\sum_{x<y\in[q]} z_{xy} \cdot \left(\log(\mathbf{K}_{\mathbf{xy}}(M)_{ii}) - \log(\mathbf{K}_{\mathbf{xy}}(M)_{jj}) \right)$$

中的系数为：$\log(\mathbf{K}^{ij}(M)_{ii}) - \log(\mathbf{K}^{ij}(M)_{jj}) \neq 0$。因此，$\zeta(\mathbf{z})$的每个因子都不为零，所以$\zeta(\mathbf{z})$不是零多项式。由于$(\mathbb{Z}_{>0})$是无限集，且 ζ 非零，因此它不可能在$(\mathbb{Z}_{>0})^{q(q-1)/2}$的所有点上都为零。因此，存在某个$\mathbf{z}^* \in (\mathbb{Z}_{>0})^{q(q-1)/2}$，使得$\mathbf{K}_{\mathbf{z}^*}(M) \in \text{Pl-}\mathfrak{E}(M)$的对角元互异。 □

现在我们还可以证明以下结论：

定理 70. 设 $M \in$ 对称矩阵空间$_q(\mathbb{R}_{>0})$。假设对于所有 $x < y \in [q]$，都存在某个 $K^{xy}(M) \in Pl\text{-}\mathfrak{E}(M)$，使得 $K^{xy}(M)_{xx} \neq K^{xy}(M)_{yy}$。那么，当 M的秩为 1 时，*Pl-GH*(M) 是多项式时间可解的；其他所有情形下，*Pl-GH*(M) 都是 #*P*-困难的。

证明。 当 秩$(M) = 1$时，我们已经从$\texttt{Pl-GH}(M)$的可处理性得知这一点，参见附录 G 中的 附录 G中的 定理 32 。因此，我们可以假设M的秩 ≥ 2。

注意，由于 $M \in$ 对称矩阵空间$_q(\mathbb{R}_{>0})$，对于所有 $i \in [q]$，每个 $\mathbf{K}^{\mathbf{xy}}(M)_{ii} > 0$ 都成立。因此，根据引理 69，存在某个 $\mathbf{K}(M) \in \text{Pl-}\mathfrak{E}(M)$，使得 $\mathbf{K}(M)$ 对角元互异。给定 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$，我们现在将构造一个构件 $\mathbf{K}_{\mathbf{n}}$：从构件 $\mathbf{T}^{(\mathbf{n+1})}$ 开始，然后将除一条以外的所有平行边都替换为 $\mathbf{K}$ 的副本。显然，$\mathbf{K}_{\mathbf{n}}$ 是平面的，并且对于所有 i、$j \in [q]$，我们有

$$\mathbf{K}_{\mathbf{n}}(M)_{ij} = M_{ij} \cdot \left(\mathbf{K}(M)_{ij}\right)^n.$$

给定任意平面图 $G = (V, E)$，通过对所有 $n \in [|E|]$ 计算 $Z_{\mathbf{K}_{\mathbf{n}}(M)}(G) = Z_M(\mathbf{K}_{\mathbf{n}}G)$，我们得到一个多项式规模的范德蒙德线性方程组。我们可以合并所有相等的项 $\mathbf{K}(M)^{ij}$，从而得到一个满秩的范德蒙德方程组。求解该线性方程组可知，对于所有 $\theta \in \mathbb{R}$，$\text{Pl-GH}(\mathcal{K}_M(\theta)) \leq \text{Pl-GH}(M)$，其中 $\mathcal{K}_M(\theta) \in$对称矩阵空间$_q(\mathbb{R}_{>0})$ 定义如下：$\mathcal{K}_M(\theta)_{ij} = M_{ij} \cdot (\mathbf{K}(M)^{ij})^{\theta}$。

我们注意到 $\mathcal{K}_M(0) = M$，并且根据关于 M 的假设，我们注意到 $\text{rank}(M) \geq 2$。由于 $\mathcal{K}_M(\theta)$ 的元素关于 θ 连续，且特征值关于矩阵的元素连续，因此我们可以得出，存在一个开邻域 $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}$，围绕着

0，使得$\operatorname{rank}(\mathcal{K}_M(\theta)) \geq 2$ 对于所有 $\theta \in \mathcal{O}$。现在，考虑某个 $i \neq j \in [q]$。根据引理 69，不失一般性，我们可以假设$\mathbf{K}(M)_{ii} < \mathbf{K}(M)_{jj}$。于是，

$$\lim_{\theta\to\infty}\left(\frac{\mathcal{K}_M(\theta)_{ii}}{\mathcal{K}_M(\theta)_{jj}}\right) = \left(\frac{M_{ii}}{M_{jj}}\right)\cdot\lim_{\theta\to\infty}\left(\frac{\mathbf{K}(M)_{ii}}{\mathbf{K}(M)_{jj}}\right)^{\theta} = 0.$$

因此，我们看到，对于足够大的 θ、$\phi_{\text{diag}}(\mathcal{K}_M(\theta)) \neq 0$（其中 ϕ_{diag} 如方程（4）所定义）。但是，根据引理18，我们可以找到某个 $\theta^* \in \mathcal{O}$，使得 $N = \mathcal{K}_M(\theta^*) \in$ 对称矩阵空间$_q(\mathbb{R}_{>0})$ 满足：$\phi_{\text{diag}}(N) \neq 0$，并且 Pl-GH$(N) \leq$Pl-GH$(M)$。根据我们对 $\theta^* \in \mathcal{O}$ 的选择，还可知秩$(N) \geq 2$。因此，定理 32 意味着 Pl-GH$(N) \leq$ Pl-GH(M)是 #P-困难的。 □

备注。将二分定理扩展到所有 $M \in$ 对称矩阵空间$_q(\mathbb{R}_{\geq 0})$ 的主要挑战在于，引理 *69* 要求每个 $K_{xy}(M)$ 都具有严格为正的对角元；而当 M 含有 *0* 元素时，这一点可能无法满足。我们需要引理 *69* 给出的 K 具有严格为正的对角元，因为在构造 $K_z(M)$ 的关键步骤中，如果某个构件 $K_{xy}(M)$ 存在一个零对角元：$K_{xy}(M)_{ii} = 0$ 对某个 $i \in [q]$ 成立，那么这会迫使 $K_z(M)_{ii} = 0$。因此，我们需要谨慎避免这种情况。

记号 71. 对于 $M \in$对称矩阵空间$_q(\mathbb{R}_{\geq 0})$，我们用 $\Gamma_M = ([q], E(\Gamma_M))$ 表示 M的底层图，也就是说，当且仅当 $M_{ij} > 0$时，$(i, j) \in E(\Gamma_M)$。

引理 *72.* 设 $M \in$对称矩阵空间$_q(\mathbb{R}_{\geq 0})$（对于 $q \geq 2$），其底层图 Γ_M 是连通的二分图。假设对所有 $x < y \in [q]$，存在一个 $K_{xy}(M) \in$ *Pl-*$\mathfrak{C}(M)$，使得 $K_{xy}(M)_{xx} \neq K_{xy}(M)_{yy}$。那么，对所有 $x < y \in [q]$，$K_{xy} \in$ *Pl-*$\mathfrak{C}(M)$也满足条件：对所有 $i \in [q]$，$K_{xy}(M)_{ii} \neq 0$。

证明. 众所周知，如果从图 H 到二分图 Γ存在至少一个同态，那么 H 必定是二分图。类似地，由于 $\mathbf{K}_{xy}(M)_{xx} \neq \mathbf{K}_{xy}(M)_{yy}$，$\mathbf{K}_{xy}(M)_{xx}$和 $\mathbf{K}_{xy}(M)_{yy}$ 中至少有一个非零，因此 $\mathbf{K}_{xy}$ 必定是二分图。现在，假设 $\mathbf{K}_{xy}$ 的两个标记顶点分别为 ℓ_1 和 ℓ_2。首先，假设它们属于 $\mathbf{K}_{xy}$的同一个连通分量，但处于不同的划分中。由于 $\mathbf{K}_{xy}(M)_{xx}$ 和 $\mathbf{K}_{xy}(M)_{yy}$ 中至少有一个非零，这意味着 $\mathbf{K}_{xy}$ 中从 ℓ_1 到 ℓ_2 的奇数长度路径必定映射为 Γ_M中 x与 x之间，或 y 与 y 之间的偶长度路径。这显然矛盾，因此，如果 ℓ_1 和 ℓ_2 属于 $\mathbf{K}_{xy}$的同一个连通分量，那么 ℓ_1 和 ℓ_2 必定处于 $\mathbf{K}_{xy}$的同一个划分中。

由于 Γ_M 是连通的，我们注意到每个 $i \in [q]$ 都与 Γ_M中的另一个 $j \in [q]$ 相邻。我们注意到，如果 ℓ_1 和 ℓ_2 属于 $\mathbf{K}_{xy}$的不同连通分量，就可以平凡地定义 $\mathbf{K}_{xy}$ 的一个二分划分，使得 ℓ_1 和 ℓ_2 属于同一个划分部分。我们还看到，如果 ℓ_1和 ℓ_2 属于同一个连通分量，那么它们必定属于同一个划分部分。因此，在任何情形下，都存在 $\mathbf{K}_{xy}$ 的一个二分划分，使得 ℓ_1和 ℓ_2 属于同一个划分部分。现在，我们可以定义一个从 $\mathbf{K}_{xy}$ 到 Γ_M 的映射，将包含 ℓ_1 和 ℓ_2 的划分部分映射到 i，并将另一个划分部分映射到 j。我们看到这个映射是一个同态，因此 $\mathbf{K}_{xy}(M)_{ii} \geq (M_{ij})^{|E(\mathbf{K}_{xy})|} > 0$，因为 $M_{ij} > 0$。 □

对于非二分图情形，我们采用 Lov´asz 和 Szegedy [LS09，定理 1。4] 以及 Dvo˘r´ak [Dvo10，引理 11]：通过将 $\mathbf{K}_{xy}$ 的每条边替换为足够长路径的线性组合，我们可以假设底层图存在到 M的同态。

引理 73。设 M ∈对称矩阵空间$_q(\mathbb{R}_{\geq 0})$（对于 $q \geq 2$），使得底层图 Γ_M 连通但非二分。假设对于所有 $x < y \in [q]$，都存在一个 $K^{\mathbf{xy}}(M) \in$ Pl-$\mathfrak{E}(M)$，使得 $K^{\mathbf{xy}}(M)_{xx} \neq K^{\mathbf{xy}}(M)_{yy}$。那么，对于所有 $x < y \in [q]$，存在 $J_{\mathbf{xy}} \in$ Pl-$\mathfrak{E}(M)$，使得 $J^{\mathbf{xy}}(M)_{xx} \neq J^{\mathbf{xy}}(M)_{yy}$，且对于所有 $i \in [q]$，$J^{\mathbf{xy}}(M)_{ii} \neq 0$。

证明。由非负性，$(M^k)_{ii} \neq 0$ 当且仅当在 Γ_M 中存在一条从顶点 i回到自身的长度为k 的游走。由于 Γ_M 是连通的且不是二分的，存在一个最小的 $m \geq 2$，使得对每个 $k \geq m$，每个顶点 i 都有一条长度为k 的回到自身的游走，因此对每个 $i \in [q]$都有$(M^k)_{ii} \neq 0$。我们首先证明

$$M \in \operatorname{span}_{\mathbb{R}}(M^m, \dots M^{m+q}). \tag{20}$$

对正交的 H，记 $M = H\operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_q)H^{\mathsf{T}}$，从而 $M^k = H\operatorname{diag}(\lambda_1^k, \dots, \lambda_q^k)H^{\mathsf{T}}$，因此式（20）等价于$\operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_q)$ ∈张成空间$_{\mathbb{R}}(\operatorname{diag}(\lambda_1^m, \dots, \lambda_q^m) \dots \operatorname{diag}(\lambda_1^{m+q}, \dots, \lambda_q^{m+q}))$。不失一般性，设 $\lambda_1, \dots, \lambda_s$（其中 $s \leq q$）为 M的互异非零特征值。则式（20）等价于

$$\operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_s) \in \operatorname{span}_{\mathbb{R}}(\operatorname{diag}(\lambda_1^m, \dots, \lambda_s^m), \dots \operatorname{diag}(\lambda_1^{m+q}, \dots, \lambda_s^{m+q})). \tag{21}$$

将 m 的第 i 列乘以对每个 $i \in [s]$ 均非零的标量 λ_i^{-m} 后，矩阵

$$L = \begin{bmatrix} \lambda_1^m & \lambda_2^m & \dots & \lambda_s^m \\ \lambda_1^{m+1} & \lambda_2^{m+1} & \dots & \lambda_s^{m+1} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \lambda_1^{m+q} & \lambda_2^{m+q} & \dots & \lambda_s^{m+q} \end{bmatrix}$$

变为一个具有 q 行和 $s \leq q$ 列的范德蒙德矩阵。由于 λ_1、……、λ_s互不相同，L的秩为 s，因此 L 的行张成 $\mathbb{R}^s$。这证明了 公式 (21)，从而也证明了 公式 (20)。

现在令 $M = \sum_{i=0}^{q} c_i M^{m+i}$ 表示 c_0、……、$c_q \in \mathbb{R}_{\neq 0}$。固定 $x < y \in [q]$。对于每个 i, $j \in [q]$代入 公式 (1) 可得

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{\mathbf{xy}}(M)_{ij} &= \sum_{\substack{\tau: V(\mathbf{K}_{\mathbf{xy}}) \to [q] \\ \tau(\ell_1)=i, \tau(\ell_2)=j}} \prod_{(u,v) \in E(\mathbf{K}_{\mathbf{xy}})} \sum_{i=0}^{q} c_i (M^{m+i})_{\tau(u)\tau(v)} \\ &= \sum_{\psi: E(\mathbf{K}_{\mathbf{xy}}) \to \{m, \dots, m+q\}} \left(\prod_{e \in E(\mathbf{K}_{\mathbf{xy}})} c_{\psi(e)-m} \right) \sum_{\substack{\tau: V(\mathbf{K}_{\mathbf{xy}}) \to [q] \\ \tau(\ell_1)=i, \tau(\ell_2)=j}} \prod_{(u,v) \in E(\mathbf{K}_{\mathbf{xy}})} (M^{\psi((u,v))})_{\tau(u)\tau(v)} \\ &= \sum_{\psi: E(\mathbf{K}_{\mathbf{xy}}) \to \{m, \dots, m+q\}} (c_\psi) \mathbf{K}^{\psi}_{\mathbf{xy}}(M)_{ij}, \end{aligned} \tag{22}$$

其中 $c_\psi := \prod_{e \in E(\mathbf{K}^{\mathbf{xy}})} c_{\psi(e)-m} \neq 0$ 且 $\mathbf{K}^{\psi}_{\mathbf{xy}} \in$ Pl-$\mathfrak{B}(M)$ 由将每个 $(u, v) \in E(\mathbf{K}^{\mathbf{xy}})$ 替换为拉伸构件 $\mathbf{S}^{\psi((u,v))}$构造而成，因此，如式（2）所示，

$$\mathbf{K}^{\psi}_{\mathbf{xy}}(M)_{ij} = \sum_{\substack{\tau: V(\mathbf{K}_{\mathbf{xy}}) \to [q] \\ \tau(\ell_1)=i, \tau(\ell_2)=j}} \prod_{(u,v) \in E(\mathbf{K}_{\mathbf{xy}})} (M^{\psi((u,v))})_{\tau(u)\tau(v)}. \tag{23}$$

对于每个 $\psi\colon E(\mathbf{K}_{xy}) \to \{m,\dots,m+q\}$ 以及 $(u,v) \in E(\mathbf{K}_{xy})$，根据定义，$M^{\psi((u,v))}$的对角元均非零。因此，由非负性可知，对于每个$i \in [q]$，$\mathbf{K}^{\psi}_{xy}(M)_{ii} > 0$；这是因为将 $\mathbf{K}_{xy}$ 的每个顶点都映射到 i 的赋值 τ 会在式（23）中产生一个非零项。此外，由式（22）及假设 $\mathbf{K}_{xy}(M)_{xx} \neq \mathbf{K}_{xy}(M)_{yy}$ 可知，存在一个 $\psi\colon E(\mathbf{K}_{xy}) \to \{m,\dots,m+q\}$，使得 $\mathbf{K}^{\psi}_{xy}(M)_{xx} \neq \mathbf{K}^{\psi}_{xy}(M)_{yy}$。这个 $\mathbf{K}^{\psi}_{xy}$ 具有所需的性质。最后，如定理 36 的证明中所示，我们可以用具有所需性质的 $\mathbf{J}_{xy} \in$Pl-$\mathfrak{C}(M)$ 替换 $\mathbf{K}^{\psi}_{xy} \in$ Pl-$\mathfrak{B}(M)$（这需要将 $\mathbf{J}_{xy}(M)$的对角元平方，但这不会改变这些元素是否非零）。

□

利用引理 72和 73 满足 引理 69对于 $M \in$ 对称矩阵空间$^{q}(\mathbb{R}_{\geq 0})$以及连通的 Γ_M所要求的条件，我们现在可以构造一个 $\mathbf{K}(M) \in$Pl-$\mathfrak{C}(M)$ 使得 $\mathbf{K}(M)$ 的对角元互异。

推论 *74*。设 $M \in Sym^{q}(\mathbb{R}_{\geq 0})$，且其底层图 Γ_M 是连通的。假设对于所有 $x < y \in [q]$，存在一个 $\mathbf{K}_{xy}(M) \in$*Pl-*$\mathfrak{C}(M)$，使得 $\mathbf{K}_{xy}(M)_{xx} \neq \mathbf{K}_{xy}(M)_{yy}$。那么存在一个对角元互异的 $\mathbf{K}(M) \in$ *Pl-*$\mathfrak{C}(M)$。

Coro推论 37 现在可由 推论 74 和 定理 36立即推出 .

推论 37。设 $M \in Sym^{q}(\mathbb{R}_{\geq 0})$ 是连通的。当且仅当存在一个对角元互异的 $\mathbf{K}(M) \in$Pl-$\mathfrak{C}(M)$时，$\mathrm{Qut}(M)$ 是平凡的。

自然会想到，引理 72 和 73 是否对所有 $M \in$ 对称矩阵空间$^{q}(\mathbb{R}_{\geq 0})$都成立，即使是那些 Γ_M 不连通的情形。若 Γ_M 的所有连通分支都是二分图，或其所有连通分支都不是二分图，证明仍然成立。然而，我们运用 Dvo$\check{\mathrm{r}}$´ak [Dvo10]的技巧证明，当 Γ_M 包含二分图与非二分图连通分支的混合时，存在一个 $\mathbf{K}_{xy}$能够区分 x 和 y 并不能保证存在所需的 $\mathbf{J}_{xy}$，且其对角元非零（尽管所构造的 M 具有非平凡自同构，因此不满足引理的假设，即所有成对的 $x < y$ 都能彼此区分）。

给定一个图 H，其邻接矩阵为 M，令 $H \times K_2$ 为 H 的二分双覆盖，其邻接矩阵为 $M \otimes \left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right]$。等价地，$H \times K_2$ 的顶点集为 $V(H) \times \{0,1\}$，并且 $((h,b),(h',b')) \in E(H \times K_2)$ 当且仅当 $(h,h') \in E(H)$，且 $b \neq b'$（$H \times K_2$ 在 $\{(h,0) \mid h \in V(H)\}$ 与 $\{(h,1) \mid h \in V(H)\}$ 之间为二分图。令 $H_1 \cup H_2$ 为图 H_1 和 H_2 的不交并。

命题 75。对于任意连通非二分图 H，令 $H_1 := H \cup H$ 和 $H_2 := H \times K_2$，并令 $M \in$对称矩阵空间$^{V(H_1) \sqcup V(H_2)}(\mathbb{R}_{\geq 0})$ 为 $H_1 \cup H_2$ 的邻接矩阵。那么对于每个 $x \in V(H_1)$，都存在一个 $y \in V(H_2)$ 使得

- 存在一个 $\mathbf{K}(M) \in$Pl-$\mathfrak{C}(M)$ 使得 $\mathbf{K}(M)_{xx} \neq \mathbf{K}(M)_{yy}$，但是
- 每个 $\mathbf{J}(M) \in \mathfrak{B}(M)$ 使得 $\mathbf{J}(M)_{xx} \neq \mathbf{J}(M)_{yy}$ 的情况也满足 $\mathbf{J}(M)_{yy} = 0$.

证明。对于 $H_1 = H \cup H$ 的每个顶点 x，都存在一个奇数 r，使得在 H 中存在一条从 x 到其自身、长度为 r 的闭游走。因此，如果 $\mathbf{K}$ 是由两个 C_r 圈的副本组成的边构件，且每个圈各有一个带标记顶点，那么 $\mathbf{K}(M)_{xx} \neq 0$。此外，对于每个 $y \in V$（H_2），都有 $\mathbf{K}(M)_{yy} = 0$，因为 $H_2 = H \times K_2$ 是二分图。这证明了第一个论断。

对于第二个论断，我们可以假设 $\mathbf{J} \in \mathfrak{B}(M)$ 不含没有带标记顶点的连通分量，因为这类分量只会将 $\mathbf{J}(M)_{xx}$ 和 $\mathbf{J}(M)_{yy}$ 同时乘以同一个常数。由于 H_2 不是二分图，任何非二分的 $\mathbf{J}$ 对每个 $y \in V$（H_2）都满足 $\mathbf{J}(M)_{yy} = 0$。因此，假设 $\mathbf{J}$ 是二分图。

Dvořák [Dvo10，定理 13] 表明存在一个保持第二坐标的同构 $f\colon H_1 \times K_2 \to H_2 \times K_2$——也就是说，对于每个 $(h,b) \in V(H_1 \times K_2)$，存在某个 $h' \in V(H_2)$，使得 $f((h,b)) = ((h',b))$——并且，对于任意二分图 J，利用 f 构造一族双射，在集合 Hom(J H_1) 和 Hom(J H_2) 之间建立对应关系；这两个集合分别由从 J 到 H_1 和 H_2 的同态组成（暂且忽略 J 的顶点标记）。每个 $c\colon V(\mathsf{J}) \to \{0,1\}$ 定义的有效二分都可按如下方式导出一个双射。对于 $\beta \in \{1,2\}$，定义 $\pi_1^{H_\beta \times K_2}\colon V(H_\beta \times K_2) \to V(H_\beta)$，令 $\pi_1(h,b) = h$。然后，将 $g_1 \in$ Hom(J H_1) 映射到由下式定义的 $g_2 \in$ Hom(J H_2)

$$g_2(\ell) = \pi_1^{H_2 \times K_2}(f(g_1(\ell), c(\ell))) \tag{24}$$

对于 $\ell \in V$（$\mathbf{J}$）。此映射的逆映射为

$$g_1(\ell) = \pi_1^{H_1 \times K_2}(f^{-1}(g_2(\ell), c(\ell))) \tag{25}$$

对于 $\ell \in V(\mathsf{J})$。令 $\ell_1, \ell_2 \in V(\mathsf{J})$ 为带标记顶点。若 J 中 ℓ_1 与 ℓ_2 之间存在一条奇数长度路径，则同样有 $\mathbf{J}(M)_{yy} = 0$，对每个 $y \in V(K_2)$ 都成立，问题得证。否则，假设不存在这样的路径，因此可以选取 c，使得 $c(\ell_1) = c(\ell_2) = 0$。令 $y := \pi_1^{H_2 \times K_2}(f(x,0)) \in V(H_2)$。若 $g_1(\ell_1) = g_1(\ell_2) = x$，则根据公式 (24)，$g_2(\ell_1) = g_2(\ell_2) = y$。反之，若 $g_2(\ell_1) = g_2(\ell_2) = y$，则根据公式 (25)，

$$g_1(\ell_1) = g_1(\ell_2) = \pi_1^{H_1 \times K_2}(f^{-1}(y,0)) = \pi_1^{H_1 \times K_2}(x,0) = x.$$

因此，Hom($\mathbf{J}$ H_1) 与 Hom($\mathbf{J}$ H_2) 之间的双射，限制后得到 Hom($\mathbf{J}$ H_1) 中将 ℓ_1 和 ℓ_2 映射到 x 的同态，与 Hom($\mathbf{J}$ H_2) 中将 ℓ_1 和 ℓ_2 映射到 y 的同态之间的双射。由于 $\mathbf{J}$ 不含没有带标记顶点的连通分量，任何将 ℓ_1 和 ℓ_2 映射到 x（分别为 y）的从 $\mathbf{J}$ 到 $H_1 \cup H_2$ 的同态，都是从 $\mathbf{J}$ 到 H_1（分别为 H_2）的同态。因此 $\mathbf{J}(M)_{xx} = \mathbf{J}(M)_{yy}$。

□

定理 34然而，只要求推论 74 如所述，对于 Γ_M 连通。

定理 34. 设 $M \in$ 对称矩阵空间$_q(\mathbb{R}_{\geq 0})$。假设对于所有 $x < y \in [q]$，存在某个 $K^{xy}(M) \in$*Pl-*$\mathfrak{C}(M)$，使得 $K^{xy}(M)_{xx} \neq K^{xy}(M)_{yy}$。那么，当（在重命名 $[q]$ 后） $M = M_1 \oplus \cdots \oplus M_r$，对于秩 *0* 、秩 *1* 或二部秩 *2* 矩阵 M_i 时，*Pl-GH*(M) 是多项式时间可解的。在所有其他情形下，*Pl-GH*(M) 是 *#P-* 困难的。

证明。 注意到， Γ_M 可以分解为其各个连通分量，使得（在重命名 $[q]$ 后） $M = M_1 \oplus \cdots \oplus M_r$，其中每个 $M_i \in$ 对称矩阵空间$_{q_i}(\mathbb{R}_{\geq 0})$ 都对应于 Γ_M 的一个连通分量。

我们在定理 32 的证明中已经看到，当 M_i 的秩为0 或秩为1时，Pl-GH(M_i) 是多项式时间可解的。现在，假设 M_i 是二分的，但秩为2。在这种情形下，已有结果（[BG05] 参见定理 6）表明，GH(M_i)（因此，Pl-GH(M_i)）

是多项式时间可解的。现在，定理58 意味着，如果每个 M_i 的秩为0 或秩为1，或者秩为2且为二分图，那么Pl-GH(M) 是多项式时间可解的。

现在我们假设情况并非如此。不失一般性，我们可以假设以下两种情形之一成立：rank(M_1) $\geq$2，且 M_1 不是二分的；或者 rank(M_1) $\geq$ 3 ，且 M_1 是二分的。在这两种情形下，我们都可以利用推论 74 找到某个构件 K，使得 K(M_1) 的对角元互异。当 M_1 不是二分的时，使用与定理 70 中相同的技巧，我们可以构造 $N = \mathcal{K}_M(\theta^*)$，使其满足：$N = N_1 \oplus \cdots \oplus N_r$对于 $N_i \in$Sym$_{q_i}(\mathbb{R}_{\geq 0})$， $\phi_{\text{diag}}(N_1) \neq 0$，Pl-GH$(N)$ $\leq$Pl-GH(M)，且 rank(N_1) =rank(M_1) $\geq$ 2。由定理 33 的二分定理可知，Pl-GH(N_1) 是 #P-困难的，而定理58 进一步推出 Pl-GH(N) $\leq$Pl-GH(M) 也同样是 #P-困难的。

当 M_1 是二分图时，我们注意到，我们在 定理 70 中使用的构造 $\mathcal{K}_M$ 并不完全适用，因为 M 的对角值全为零。我们注意到，由于 Γ_{M_1} 连通，存在某个 $m \geq 1$，使得 $(M_1)^{2m} = M_{1,1} \oplus M_{1,2}$，且 $M_{1,1} \in$ 对称矩阵空间 $_{r_1}(\mathbb{R}_{>0})$，以及 $M_{1,2} \in$ 对称矩阵空间 $_{r_2}(\mathbb{R}_{>0})$（其中 $r_1 + r_2 = q_1$）。此外，由于 rank(M_1) $\geq$ 3，我们可知 $M_{1,1}$ 和 $M_{1,2}$ 中至少有一个的秩不小于 2。不失一般性，我们可以假设 rank$(M_{1,1})$ $\geq$ 2。

现在，我们从 $\mathbf{T^{(n+1)}}$ 开始，构造构件 $\mathbf{K_n}$ ：将除一条外的所有平行边替换为 $\mathbf{K}$ 的一个副本，并将最后一条边替换为 $\mathbf{S_{2m}}$ 的一个副本。因此，

$$\mathbf{K_n}(M_1)_{ij} = ((M_1)^{2m})_{ij} \cdot (\mathbf{K}(M_1)_{ij})^n.$$

现在，我们可以像定理 70 的证明中那样，利用这个构件进行插值，构造出 $\mathcal{K}_M(\theta)$，使得 $\mathcal{K}_M(\theta)_{ij} = (M^{2m})_{ij} \cdot (\mathbf{K}(M)_{ij})^\theta$，并且对所有 $\theta \in \mathbb{R}$，Pl-GH$(\mathcal{K}_M(\theta))$ $\leq$Pl-GH(M)。

现在，我们可以找到一个接近 0 的 θ^*，使得 $N = \mathcal{K}_M(\theta^*)$ 满足： $N = N_1 \oplus \cdots \oplus N_r$,$\phi_{\text{diag}}(N_1) \neq 0$, $N_1 = N_{1,1} \oplus N_{1,2}$, rank$(N_{1,1})$ = rank$(M_{1,1})$ $\geq$ 2。因此，再次由定理 33 和定理 58 可知，Pl-GH(N) $\leq$ Pl-GH(M) 是 #P-困难的。 □

H.3 不可判定性。图 H 和 H' 的邻接矩阵分别为 M 和 M'，若存在一个量子置换矩阵 U使得 $U M = M' U$，则它们量子同构。众所周知，连通图 H 和 H' 经典同构，当且仅当 H 的某个顶点与 H' 的某个顶点属于 Aut$(H \cup H')$ = Aut$(M \oplus M')$ 的同一轨道，其中 $\cup$ 表示不交并。量子类比也成立：对于邻接矩阵分别为 M 和 M'的连通图 H 和 H'，它们量子同构，当且仅当某个 $v \in V(H)$ 和某个 $v' \in V(H')$ 属于 Qut$(M \oplus M')$ [LMR20，定理 4.5] 的同一轨道。此外，图或其补图必有一个是连通的，连通图不可能与非连通图量子同构 [LMR20], ；两个图量子同构，当且仅当它们的补图也同构 [Ats+19]。矩阵 $M \oplus M'$（以及 $H \cup H'$的邻接矩阵）属于 Sym$_{|V(H)|+|V(H')|}(\mathbb{R}_{\geq 0})$，因此我们得到如下结论。

— —

定理 76 ([LMR20])。 图的量子同构可归约为以下问题：给定$q \geq 1$， $M \in$对称矩阵空间$_q(\mathbb{R}_{\geq 0})$ 和 $i, j \in [q]$，判断 i和 j是否处于Qut(M)的同一轨道中。

现在我们得到一个略强的定理 39形式，即使从正定 M 且具有正元素的情形也能得到不可判定性。

定理 77。以下问题是不可判定的：给定 $M \in$ 对称矩阵空间$\mathrm{Sym}_q^{\mathrm{pd}}(\mathbb{R}_{>0})$ 和 $i, j \in [q]$，判定是否存在一个 $\mathbf{K}(M) \in \mathtt{Pl}\text{-}\mathfrak{C}(M)$，使得 $\mathbf{K}(M)_{ii} \neq \mathbf{K}(M)_{jj}$。

证明。我们将定理 76 中的问题归约为这个问题，结论由量子同构 [Ats+19; Slo19] 的不可判定性得出。令 $M \in \mathrm{Sym}_q(\mathbb{R}_{\geq 0})$ 和 $i, j \in [q]$。根据命题 61，$I, J \in \text{Pl-}\mathfrak{B}(M)$。令 λ 为 $M + J$ 的最小特征值，并令 $M' := M + J + (|\lambda| + 1)I$，则 $M' \in \mathrm{Sym}_q^{\mathrm{pd}}(\mathbb{R}_{>0})$。根据定理 64，$\mathrm{Qut}(M)$ 的基本表示 $\mathcal{U}$ 和 $\mathrm{Qut}(M')$ 的基本表示 $\mathcal{U}'$ 都与 J 及 $(|\lambda|+1)I$ 对易。一般而言，若 $\mathcal{V}$ 是 $\mathrm{Qut}(A)$ 的基本表示，则空间 $\{K \mid \mathcal{V}K = K\mathcal{V}\}$（称为 $\mathrm{Qut}(A)$ 的 (1, 1)-交织子空间）在线性组合下封闭，并由 A 以及与 J 和 I 类似、不依赖于 A [的矩阵生成（CY24，引理 5]）。因此，$\mathcal{U}$ 和 $\mathcal{U}'$ 都与 M 和 M' 对易，从而对所有 K，$\mathcal{U}K = K\mathcal{U}$ 当且仅当 $\mathcal{U}'K = K\mathcal{U}'$。现在，由引理 63 可知，$\mathrm{Qut}(M)$ 和 $\mathrm{Qut}(M')$ 具有相同的轨道关系，因此 i 和 j 属于 $\mathrm{Qut}(M)$ 的同一轨道，当且仅当 i 和 j 属于 $\mathrm{Qut}(M')$ 的同一轨道。根据定理 36，这又等价于对每个对称的 $\mathrm{K}(M)$，$\mathrm{K}(M)_{ii} = \mathrm{K}(M)_{jj}$，其中 $\in \text{Pl-}\mathfrak{C}(M')$。

□

我们以类似方式得到一个更强的备注 40。

命题 78. 对于无穷多个 $q \geq 1$，存在 $M \in \mathrm{Sym}_q^{\mathrm{pd}}(\mathbb{R}_{>0})$ 和 $i, j \in [q]$，使得$K_{ii} = K_{jj}$对于每个 $K(M) \in \text{Pl-}\mathfrak{C}(M)$，但存在一个 $K'(M) \in \mathfrak{C}(M)$，使得 $K'(M)_{ii} \neq K'(M)_{jj}$。

证明. Chan 和 Martin [CM24b, 定理 4.3] 证明，任意两个具有相同顶点数的 Hadamard 图 H 和 H'都是量子同构的。他们还指出，如果存在一个阶为 n 的 Hadamard 矩阵，那么就存在顶点数为 $8n$ 的非同构 Hadamard 图。由于存在无穷多个不同阶的 Hadamard 矩阵（例如 Walsh 矩阵），因此存在无穷多对量子同构但不同构的图。设 H, H' 为这样的一对，其邻接矩阵分别为 M, M'。根据定理 76 前的讨论，我们可以在必要时取补图，从而假设H 和 H' 是连通的。因此，存在 $i \in V(H)$ 和 $j \in V(H')$，它们属于 $\mathrm{Qut}(M \oplus M')$ 的同一个轨道，但属于 $\mathrm{Aut}(M \oplus M')$ 的不同轨道。仿照定理 77 的证明，令 λ 为 $(M \oplus M') + J$ 的最小特征值。则 $M'' := (M \oplus M') + J + (|\lambda|+1)I \in \mathrm{Sym}_q^{\mathrm{pd}}(\mathbb{R}_{>0})$，并且 $\mathrm{Qut}(M'')$ 和 $\mathrm{Qut}(M \oplus M')$ 具有相同的轨道。由于邻接矩阵为 I或 J 的图的 $[q]$ 个顶点完全对称，$\mathrm{Aut}(M'')$ 和 $\mathrm{Aut}(M \oplus M')$ 也具有相同的轨道。因此，根据命题 35 和定理 36，M'' 满足所需性质。

□

参考文献

[Ats+19] Albert Atserias、Laura Manˇcinska、David E. Roberson、Robert ˇS´amal、Simone Severini 和 AntoniosVarvitsiotis。“量子图同构与非信号图同构”。载于：组合理论杂志 *B*辑136 (2019)，第289–328页。[Bac17] Miriam Backens。“受量子计算启发的新的 Holant 二分定理”。载于：第*44*届自动机、语言与编程国际研讨会，*ICALP 2017*，*2017*年*7*月*10*日至*14*日，波兰华沙。第80卷。LIPIcs。Schloss Dagstuhl - Leibniz- 信息学中心，2017，16:1–16:14。

[Bac18] Miriam Backens。“复值 Holantˆc 的完整二分分类”。载于：第45届自动机、语言与编程国际研讨会，ICALP 2018，2018年7月9日至13日，捷克共和国布拉格。第107卷。LIPIcs。Schloss Dagstuhl - Leibniz-信息学中心，2018，12:1–12:14。[BG05] Andrei Bulatov 和 Martin Grohe。“配分函数的复杂性”。载于：理论计算机科学 348.2-3 (2005)，第148–186页。[Bul+12] Andrei Bulatov、Martin Dyer、Leslie Ann Goldberg、Markus Jalsenius、Mark Jerrum 和 David Richerby。“加权与非加权 #CSP 的复杂性”。载于：计算机与系统科学杂志 78.2 (2012)，第681–688页。[Bul13] Andrei A. Bulatov。“约束满足问题计数的复杂性”。载于：ACM学报 (JACM) 60.5 (2013)，第1–41页。[CC17] Jin-Yi Cai 和 Xi Chen。“带复权重的计数 CSP 的复杂性”。载于：第四十四届 ACM 计算理论研讨会论文集 (STOC) (2012)，第909–920页。第64(3)卷。ACM学报。2017，第1–39页。[CCL13] Jin-Yi Cai、Xi Chen 和 Pinyan Lu。“复值图同态：一个二分定理”。载于：SIAM计算杂志 42.3 (2013)，第924–1029页。[CCL16] Jin-Yi Cai、Xi Chen 和 Pinyan Lu。“非负加权 # CSP：一个有效的复杂性二分定理”。载于：SIAM计算杂志 45.6 (2016)，第2177–2198页。[CF19] Jin-Yi Cai 和 Zhiguo Fu。“带匹配门的全息算法对于布尔域上的平面 # CSP 是通用的”。载于：SIAM计算杂志 51.2 (2019)，STOC17–50。[CGW16] Jin-Yi Cai、Heng Guo 和 Tyson Williams。“从捕获消失签名中导出的完整二分定理”。载于：SIAM计算杂志 45.5 (2016)，第1671–1728页。[CLX09] Jin-Yi Cai、Pinyan Lu 和 Mingji Xia。“Holant 问题与计数 CSP”。载于：第四十一届 ACM 计算理论研讨会论文集。2009，第715–724页。[CM23] Jin-Yi Cai 和 Ashwin Maran。“域大小为3的平面图同态计数的复杂性”。载于：第55届 ACM 计算理论研讨会论文集。2023，第1285–1297页。[CM24a] Jin-Yi Cai 和 Ashwin Maran。“用于平面图同态复杂性分类的多项式与解析方法”。载于：arXiv 预印本 arXiv:2412.17122 (2024)。[CM24b] Ada Chan 和 William J. Martin。“关联方案中的图的量子同构”。载于：组合理论杂志 B辑 164 (2024)，第340–363页。[CY24] Jin-Yi Cai 和 Ben Young。“平面 #CSP 等式对应于量子同构——Holant 视角”。载于：ACM计算理论汇刊 16.3 (2024年9月)。

[DG00] Martin Dyer 和 Catherine Greenhill. “图同态计数的复杂性（扩展摘要）”。载于：第十一届 ACM-SIAM 离散算法年度研讨会论文集，2000年1月9日至11日，美国加利福尼亚州旧金山。David B. Shmoys 编。ACM/SIAM，2000年，第246–255页。[DR10] Martin E. Dyer 和 David M. Richerby. “#CSP 的复杂性”。载于：第四十二届 ACM 计算理论研讨会论文集。2010年，第725–734页。[DR11] Martin E. Dyer 和 David M. Richerby. “#CSP 二分定理可判定”。载于：第28届理论计算机科学国际研讨会（STACS 2011）。Thomas Schwentick 和 Christoph D¨urr 编。第9卷。德国达格施图尔：Schloss Dagstuhl–Leibniz-Zentrum fuer Informatik，2011年，第261–272页。doi: 10.4230/LIPIcs. STACS.2011.261。[DR13] Martin E. Dyer 和 David M. Richerby. “计数约束满足问题的有效二分性”。载于：SIAM计算杂志 42.3（2013年），第1245–1274页。[Dvo10] Zdenˇek Dvoˇr´ak. “基于同态数量识别图”。载于：《图论杂志》64.4（2010年），第330–342页。[FY14] Zhiguo Fu 和 Fengqin Yang. “秩2基底上的全息算法”。载于：信息处理快报 114.11（2014年），第585–590页。[FYY19] Zhiguo Fu、Fengqin Yang 和 Minghao Yin. “关于分块对称的匹配门签名与高域#CSP”。载于：信息与计算 264（2019年），第1–11页。[GCD20] Artem Govorov、Jin-Yi Cai 和 Martin Dyer. “具有非负权重的有界度图同态的二分定理”。载于：arXiv 预印本 arXiv:2002.02021（2020年）。[Gol+10] Leslie Ann Goldberg、Martin Grohe、Mark Jerrum 和 Marc Thurley. “混合符号配分函数的复杂性二分”。载于：SIAM计算杂志 39.7（2010年），第3336–3402页。[GW20] Heng Guo 和 Tyson Williams. “具有复权重的平面布尔#CSP 的复杂性”。载于：计算机与系统科学杂志 107（2020年），第1–27页。[HJ12] Roger A. Horn 和 Charles R. Johnson.《矩阵分析》。剑桥大学出版社，2012年。[HN04] Pavol Hell 和 Jaroslav Nesetril.《图与同态》。第28卷。牛津大学出版社，2004年。[Jac85] N. Jacobson.《基础代数》。基础代数第2卷。W.H. Freeman，1985年。ISBN：9780716719335

网址： https://books.google.com/books?id=oNmDSAAACAAJ。[Kas61] Pieter W. Kasteleyn. “晶格上的二聚体统计：I. 平方晶格上的二聚体排列数”。载于：*Physica* 27.12 (1961)，第 1209–1225 页。[Kas63] Pieter W. Kasteleyn. “二聚体统计与相变”。载于：《数学物理杂志》4.2 (1963)，第 287–293 页。

[Kas67] Pieter Kasteleyn. “图论与晶体物理学”。载于《图论与理论物理学》（1967），第 43–110 页。[LMR20] Martino Lupini、Laura Manˇcinska 和 David E. Roberson. “非局域游戏与量子置换群”。载于《泛函分析杂志》279.5 (2020)，第 108592 页。[Lov06] L´aszl´o Lov´asz. “连接矩阵的秩与图代数的维数”。载于《组合数学欧洲杂志》27.6 (2006)，第 962–970 页。[Lov12] L´aszl´o Lov´asz.《大型网络与图极限》。第 60 卷。美国数学会，2012。[Lov67] L´aszl´o Lov´asz. “结构上的运算”。载于《匈牙利科学院数学学报》18.3-4 (1967)，第 321–328 页。[LS09] L´aszl´o Lov´asz 和 Bal´azs Szegedy. “图代数的收缩子与连接子”。载于《图论杂志》60.1 (2009)，第 11–30 页。[Mit15] Boris Mityagin. “实解析函数的零点集”。载于 arXiv 预印本 arXiv:1512.07276 (2015)。[MR20] Laura Manˇcinska 和 David E. Roberson. “量子同构等价于来自平面图的同态计数相等”。载于《2020 年 IEEE 第 61 届计算机科学基础年会（FOCS）》。IEEE，2020，第 661–672 页。[Slo19] William Slofstra. “量子关联集合不是闭集”。载于《数学论坛》Pi 7 (2019)。[TF61] Harold NV. Temperley 和 Michael E. Fisher. “统计力学中的二聚体问题——一个精确结果”。载于《哲学杂志》6.68 (1961)，第 1061–1063 页。[Val08] Leslie G Valiant. “全息算法”。载于《SIAM计算杂志》37.5 (2008)，第 1565–1594 页。[Val79] Leslie G. Valiant. “计算永久式的复杂度”。载于《理论计算机科学》8.2 (1979)，第 189–201 页。[Ver05] Dirk Vertigan. “平面图 Tutte 不变量的计算复杂度”。载于《SIAM计算杂志》35.3 (2005)，第 690–712 页。[YF22] Peng Yang 和 Zhiguo Fu. “局部全息变换：可处理性与困难性”。载于《计算机科学前沿》17.2 (2022)，第 1–11 页。[You22] Ben Young. 通过插值与交织算子，从所有 #CSP 实例上的相等性推出约束函数同构。2022。arXiv: 2211.13688 [cs.DM]。