arXiv:2602.00178v1 [math.HO] 30 Jan 2026

交错饰带：凯尔特结饰与 Hitomezashi

Katherine A. Seaton

拉筹伯大学，澳大利亚；k.seaton@latrobe.edu.au

摘要

凯尔特编结纹样和一目刺子缝线条带，都可以解释为双面饰带，其中两面的图案相互交错。我们证明了三十一种双面饰带中，哪些可以、哪些不可以通过一目刺子缝线实现，并将此结果与凯尔特结饰的情况进行比较。

双面饰带

带状图案是一条无限延伸的条带，其图案沿条带的轴通过平移周期性重复。我们在当代或古代建筑、家居用品或许多文化的纺织品上看到的实体带状图案，长度都是有限的。为了从数学角度分析带状图案，我们会姑且忽略这一点，并将图案视为在一个维度上无限重复。实体或数学上的带状图案宽度有限，通常我们认为它没有厚度。

带状图案上的图案在一种或多种等距变换下可能看起来保持不变，也就是说具有对称性：旋转 180°，沿条带的长轴（我们将其视为水平方向）或垂直于该轴的反射，以及滑移反射。滑移反射是一种单一变换，其结果是先沿带状图案的轴反射，同时再沿与该轴平行的方向平移（即滑移）。图1所示的两种带状图案改编自Sen和Martinez设计的Hitomezashi壁纸图案 [7], ，它们唯一的对称性是滑移反射。平移和旋转可以实际作用于一个物体，但反射的效果只能在心中想象。符合群公理的等距变换恰好有七种组合，这些组合就是著名的饰带群。

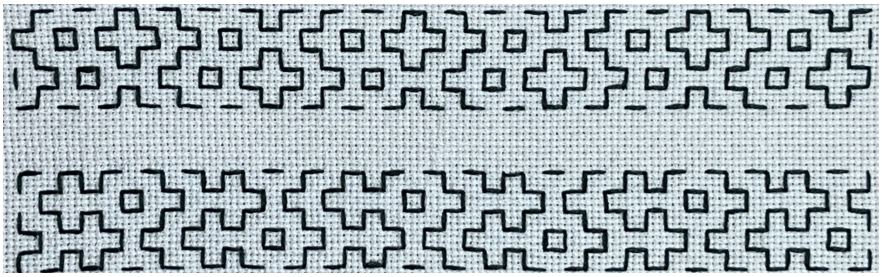

图1：两条具有滑移反射对称的一目刺子饰带。

读者或许也了解双色或反色饰带群，其共有十七种 [8]。较少为人知的是双面饰带的对称群。Farris与Rossing [3]构建并考察了分别代表每一种单色单面饰带的编织绳饰带，同时指出此类分析并未充分捕捉这些交织饰带图案的三维特征。正如Cromwell所指出的，即便在以凯尔特结饰为边饰的彩饰手抄本中，图案的某些部分在我们的感官中仿佛略高于二维页面，而另一些部分则仿佛略低于页面 [1]。对于具有两面的带状图案，还有更多可能的等距变换需要考虑，这些变换会把“正面”带到“背面”。在想象这些变换时，设想此类带状图案的两面之间存在一道微小间隙，或许会有所帮助。饰带平面位于两面的正中间，处于这一间隙之中。

除了熟悉的 180° 绕垂直于饰带平面的轴进行的旋转之外，对于双面饰带，还可以施行 180° 绕饰带平面内的水平轴或垂直线的旋转。另一种可以实际施行的变换是螺旋变换 或旋转平移： 180° 绕水平轴的旋转伴随着与该轴平行的平移。我们也可以设想关于饰带平面的反射。最后，饰带几何允许旋转反射，其中 180° 绕垂直于饰带平面的轴进行的旋转伴随着关于饰带平面的反射。

共有三十一双面饰带群。我们暂不列出它们，因为它们将出现在下文的表1和表2中。本文对它们采用与Cromwell [1], 相同的记号，只是每个标签的首字母改用更为标准的小写字母 p（他使用的是P）。每个标签的形式为p∗∗∗。我们指定三条轴：**a** 位于饰带平面内，并且是带状图案的水平轴；**b** 位于饰带平面内，并且垂直于**a**；**c** 垂直于带状图案所在的平面。在四符号标记法中，第二个位置对应于相对于轴**a**的行为，第三个位置对应于**b**，第四个位置对应于**c**。以下符号用于描述相对于这些轴的对称行为：

- 1 是一个占位符，表示相对于该轴没有特定的对称行为；
- ‘m’表示在垂直于该轴的平面内具有反射对称（注意：不是跨过该轴）；
- ‘a’表示滑移反射对称，其中反射所在的平面垂直于轴，而滑移方向平行于**a**；
- 2 表示绕轴进行二阶旋转对称（即旋转180。度）；
- 2, 表示螺旋变换对称（且只能出现在第二个位置）；
- 2 表示旋转反射对称（且只能出现在第四个位置）。

如果这些符号中有两个适用于同一条轴，则会在相应位置将这两个符号上下堆叠显示。

凯尔特编结饰带

七种双面饰带与单面饰带有着直接的对应关系：两侧关于饰带平面互为镜像，其标记形式为 p ∗∗ m。在编结纹样中，无论是实体的 [3] 还是绘制的 [1], 线股，都会以一定角度彼此交错，上下穿行。由于存在这样的交叉点，编结饰带不可能具有关于饰带平面的反射对称性。

绘制凯尔特编结饰带的一种方法，是借助网格绘制一块由交织线股构成的图案。随后，以规则的方式去除部分交叉点，并在两股线中用弯曲取而代之。线股交错时，编结纹样仍保持严格的交替结构。Cromwell 利用这一特点指出，剩余的二十四种双面饰带对称性中，有另外十四种无法在凯尔特编结纹样中实现 [1]。对于剩下的十种，他分别展示了一个或多个实例；这些实例有的改编自《凯尔经》或凯尔特石雕等历史文物，有的则由他自行设计。他的研究结果汇总于表1。

对于凯尔特编结饰带，两面的图案彼此交错，并非相互独立。一目刺绣缝线的两面之间也存在类似的关系。本文的主要目的，是将 Cromwell 对凯尔特编结纹样的分析，以及 Sen 和 Martinez [7] 对单面一目刺绣墙纸图案的分析，应用于双面一目刺绣饰带。（如果要将一目刺绣墙纸图案作为双面图案进行完整考察，就像 Farris 对锁子甲的讨论 [2], 一样，需要引入八十个层群，这远远超出了八页篇幅的范围！）我们发现，一目刺绣所产生的约束与凯尔特编结纹样的约束并不相同，因此可以实现一些不同的带状图案。表1总结了可以缝制的饰带图案、展示于 [1], 的饰带图案，以及本文和 Cromwell 的研究都无法提供实例的饰带图案。

表1： 双面饰带对称性在凯尔特结饰和 *Hitomezashi* 中的实现 .

仅限 Hitomezashi	仅限凯尔特结饰	Both	都不是
p11a	p121	p111	p2aa p11m
$p11\mathring{a}$	$p1\mathring{a}1$	p112	$pm\mathring{1}1$ p2mm
p1m1	p211	p1a1	$p1\mathring{m}1$ $p11\mathring{m}$
pm11	p222	$p11\tilde{2}$	pm2a p2′am
$pm\mathring{1}1$	p2′22	p2′11	pmma pm2m
p2′ma			pmaa pmmm
pmm2			pmam
pma2			

一目刺饰带

一目刺绣是日本传统刺绣的一种形式，源于江户时代的节俭，如今除了用于可见修补，也用于装饰。近年来，人们开始研究其内在的数学性质，自 [4] 以来发表的相关论文数量也持续逐年增长。与我们即将展开的分析直接相关的是 [5], [6] 和 [7]。

我们已经在图1中见过用 Hitomezashi 绣出的饰带图案。可以看出，它们由方格网格上的水平和垂直平针绣线组成。每条刺绣线上的针脚与间隙严格交替。在网格的每个顶点处，除了饰带图案的顶边和底边之外，一针水平针脚和一针垂直针脚会形成一个直角拐角。

在织物的另一面，正面每个针脚的背后都是一个空隙，而正面每个空隙的背后都是一个针脚。当我们在一块织物的一面绣出任意 Hitomezashi 图案时，另一面也会形成第二个图案。（并非所有形式的刺绣都有这一特性。）这个第二个图案是第一个图案的补图案或对偶图案，而且外观可能大不相同。我们无法选择它的样子，因为它完全由我们在正面所绣的针脚决定。事实上，图1中的饰带图案互为对偶图案！

Hitomezashi 图案有可能在平移 [5] 或旋转 [6, 下自对偶，见第 119]页。也就是说，织物反面上的图案可能是正面图案经过平移或旋转后的副本。因此，将一个图案与其对偶图案一起视为双面饰带，应能给出三十一种双面饰带中至少一部分的实例。图1中的带状图案是 p1a1 的一个例子（除垂直于轴**b**的平面内的滑移反射外，并无其他特殊对称性）。

请注意，为了以正确的相对位置同时展示双面饰带的两面，我把该图案的两个版本上下缝在一起，使正面与反面都朝向观者。这里的“反面”并不是把图1中上方那段 Hitomezashi 拿起翻面后所看到的样子，因为那样会引入一次旋转。相反，下方的针脚是将一面镜子置于上方带状图案之后、再从织物旁侧探看时所见的景象。正面与反面的上、下、左、右彼此保持正确的方位关系。关于对偶性的更完整说明，见 [5] 或 [6, 第 4]章。

两面针脚的补图案特性使一目刺带状图案在某些变换群下不具有对称性。为了证明具体是哪些变换群，采用数学记号来表示一目刺针法图案会很有帮助，相关记号已在 [4] 中介绍。

由于每条缝线中的第一个针脚决定了其余所有针脚，我们只需记录第一个针脚是否存在：正面有针脚记为 1，正面没有针脚记为 0。如果第一个针脚存在（分别地，不存在），那么第三个、第五个针脚等也存在，而第二个、第四个针脚等则不存在（分别地，存在）。使用一个二进制字 x 来表示垂直缝线的状态；对于带状图案，这个单词将是周期性的。第二个有限长度的二进制字 y 可用于表示带状图案中横向缝线的状态。对于这类二进制字 z 的反面，我们记作 z^R；对于二进制补图案（$0 \leftrightarrow 1$ 在 z中），我们记作 z^C；对于 z 的长度，我们记作 $|z|$。

在研究一目刺绣墙纸图案时，Sen 和 Martinez [7] 证明了与以下结论等价的结果：

(I) 对于任意二进制字 $z, z \neq z^C$。此外，如果 $|z|$ 为奇数，则 $z \neq z^{RC}$。

(II) 当且仅当 $x = x^R$ 和 $|x|$ 为偶数时，垂直于一**个** 的平面上存在反射对称 en.

定理 1. 在第四个位置带有符号 *'m'* 的双侧带状图案，没有任何一种能以 *Hitomezashi* 形式实现。

证明。 我们将由 x 和 y 指定的图案，与带状图案另一侧由 x^C 和 y^C 指定的补图案进行比较。根据 (I)，这两者并非同一图案。□

定理 2. *F* 标记形式为 $p2{**}$ 或 $p{*}2{*}$ 的带状图案无法通过 *Hitomezashi* 实现 *i.*

证明。 垂直缝线中的针脚与间隙总数为 $|y| - 1$。绕 **a** 进行 $180°$ 旋转时

$$x \mapsto \begin{cases} x & |y| \text{ even} \\ x^C & |y| \text{ odd} \end{cases} \qquad \text{and} \qquad y \mapsto y^R.$$

我们将由此生成的图案与 x^C 和 y^C指定的图案进行比较。当$|y|$ 为偶数时，根据 (I)，这些图案不可能相同。当 $|y|$ 为奇数时，我们比较 y^R 和 y^C，但根据 (I) 的第二部分，它们并不相等。

绕**b**旋转的情形也可用类似的论证。 □

定理 3。 标记形式为 $pm{*}a$ 的带状图案无法通过 *Hitomezashi* 实现。

证明。 假设此类带状图案可以实现。由于第二个位置上的 'm' 表示反射，根据 (II)，垂直缝线由具有结构 ww^R 的单词重复构成。潜在滑移的长度为 $|w|$ 或 $|x| = 2|w|$（因为变换 'a' 是一个对合）。单词 y 在平行于 **a** 的偶长度平移下保持不变，而在平行于**a**的奇长度平移下映射为 y^C。

应用第四个位置上标记为'a'的变换，滑移量为 $2|w|$:

$$ww^R \mapsto ww^R \qquad \text{and} \qquad y \mapsto y.$$

我们将如此生成的图案与由 $w^C w^{RC}$和 y^C指定的图案进行比较。但根据 (I)， $y \neq y^C$。如果存在这样的图案，滑移量必须为 $|w|$。应用滑移量为此值的相同变换，

$$ww^R \mapsto w^R w \qquad \text{and} \qquad y \mapsto \begin{cases} y & |w| \text{ even} \\ y^C & |w| \text{ odd} \end{cases}.$$

我们将如此生成的图案与由 $w^C w^{RC}$和 y^C指定的图案进行比较。由于根据 (I)， $y \neq y^C$，如果存在这样的图案， $|w|$ 甚至不是偶数。但对于奇数的 $|w|$，根据 (I) 的第二部分， $w \neq w^{RC}$。

因此，这类带状图案无法通过 hitomezashi 创作。 □

这些结果汇总于表 2，排除了三十一种双面饰带中十八种的 hitomezashi 实现。当然，要证明其余饰带图案可以实现，还需要给出存在性证明。作者在图 1–13 中展示了这一证明：这些作品由作者用刺绣线绣在 Aida 绣布上。我们可以在刺绣作品中看到一些传统的 hitomezashi 图案 [5]: 小方格（嘴形）、十字形、城垛形、相连阶梯和山形。图注中的上划线记号表示周期词 x 的重复单元。图 2 展示了 p1m1 类型的带状图案，可与图 1 中的 p1a1 进行有益的比较。图 3–7 展示了五种标签形式为 p11∗ 的带状图案，同样值得对照观赏；它们展示了相对于**c**的各种对称性。这组图案中唯一具有旋转反射˜2 的双面饰带也在其中。图 8–11 展示了具有垂直反射对称性的带状图案。最后，图 11–13 展示了关于螺旋变换对称的带状图案。

表 2： *Two*-边带状图案的对称性与 *Hitomezashi* 约束不兼容或兼容。

不兼容			兼容	
定理 1	定理 2	定理 3		
p2mm			p1a1	pma2
pm2m			p1m1	pmm2
pmmm	p2aa	p211	p11a	pm11
pmam	p222	$\mathrm{pm}^{2}11$	$\mathrm{p11}\bar{a}^{2}$	$\mathrm{p}\bar{m}^{2'}11$
p11m	p121	p2′22	pmma	p112	p2′ma
$\mathrm{p11}\bar{m}^{2}$	$\mathrm{p1}\bar{m}^{2}1$	$\mathrm{p1}\bar{a}^{2}1$	pmaa	$\mathrm{p11}\tilde{2}$	p2′11
p2′am	pm2a		p111	

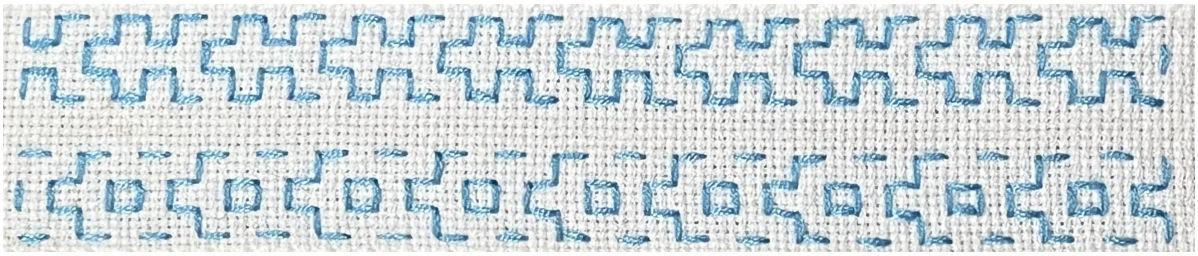

图2： *p1m1* 一目刺子饰带的两侧； $x = 1110$、 $y = \overline{0110}$。与图*1*中的 *p1a1* 相比，其中 $x = 1000110$、 $y = 100110$。

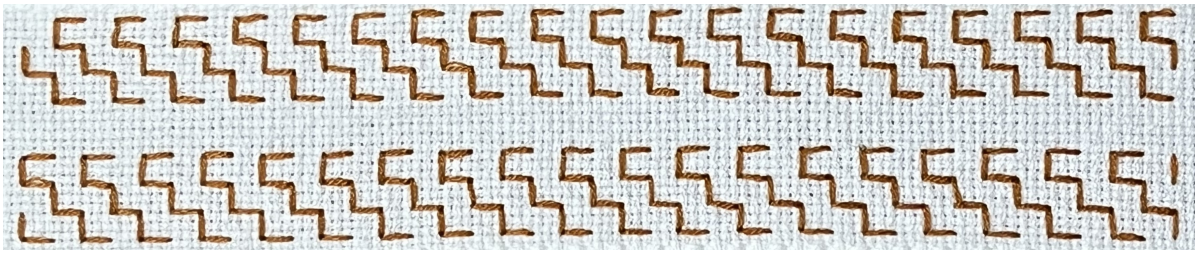

图3： *p11a* 一目刺子饰带的两侧。 $x = 01$、 $y = \overline{0100}$。

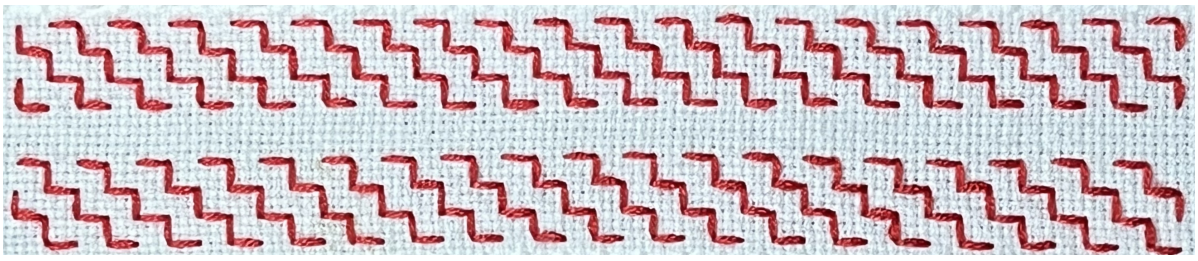

图 4： *p11*^{2}*a* 一目刺子饰带的两面。 $x = 10, y = 1010$。这是传统的段つなぎ（相连阶梯）针法。

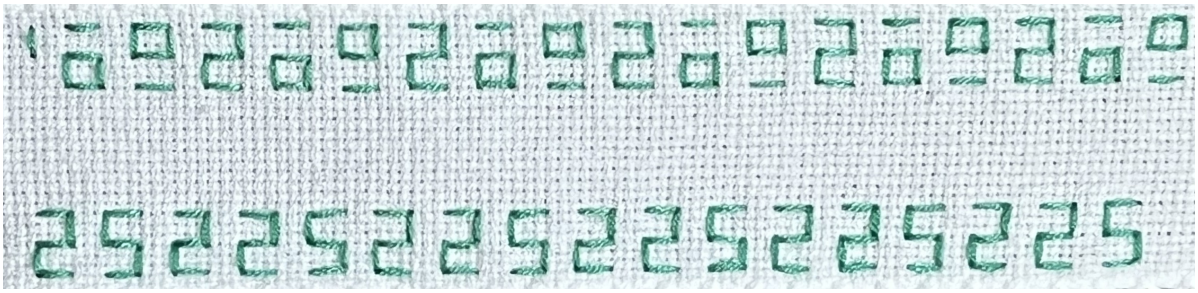

图 5： *p112* 人目刺饰带的两面。 $x = 011001, y = 000$。

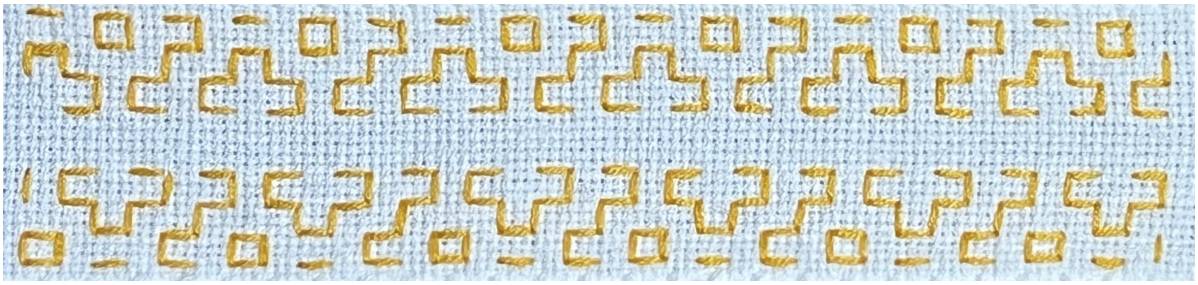

图 6： *p112* 一目刺子饰带的两面。 $x = 001101, y = 0011$。

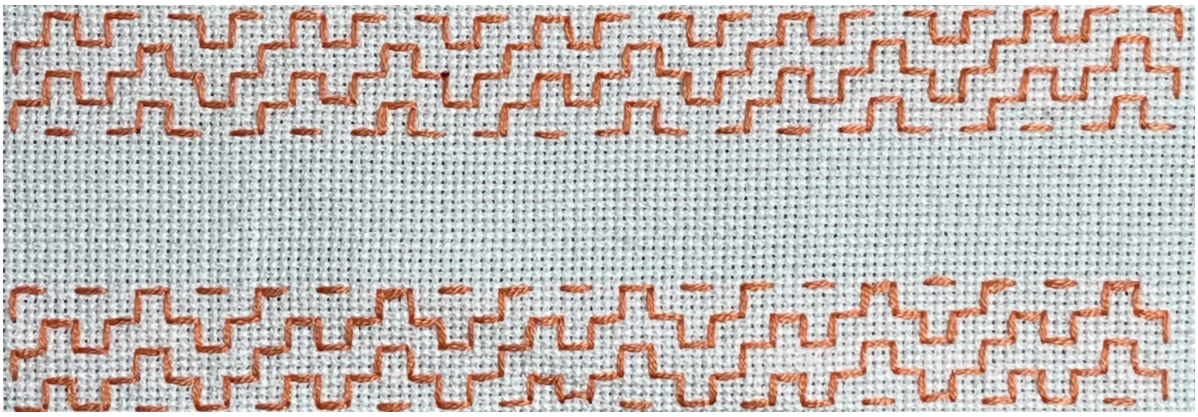

图 7： *p111* 人目刺饰带的两面。 $x = 10001100, y = 01010$。

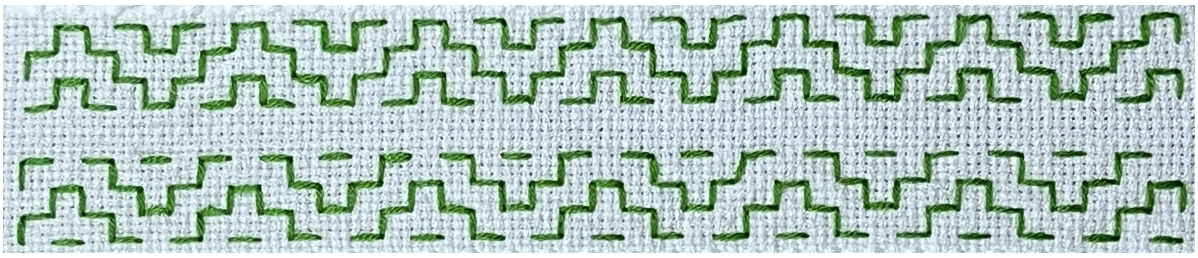

图8： *pma2*—目刺饰带的两侧。 $x = 001, y = 1010$。

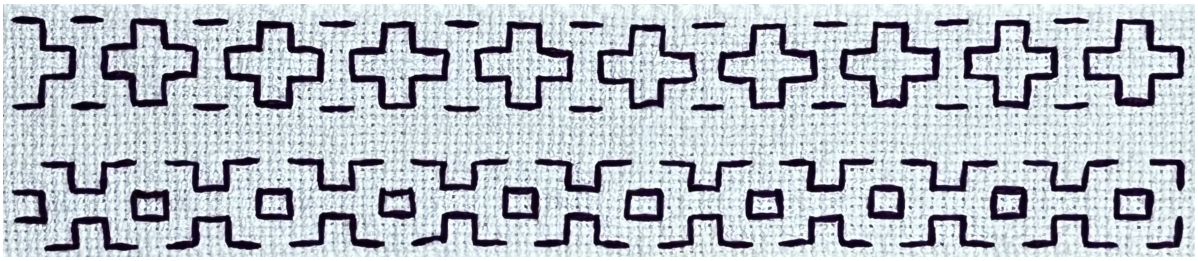

图9： *pmm2*—目刺饰带的两侧。 $x = 1001, y = 1001$。

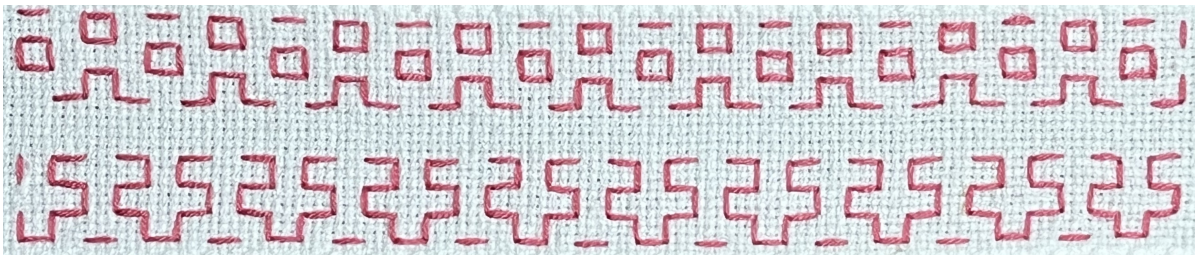

图10： *pm11*—目刺饰带的两侧。 $x = 0011, y = 0111$。

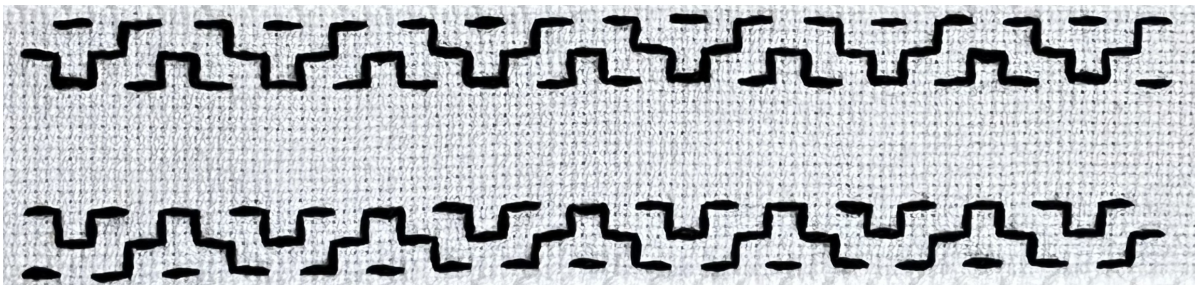

图11： $p^{2'}m11$—目刺子饰带的两侧。 $x = 011, y = 010$。

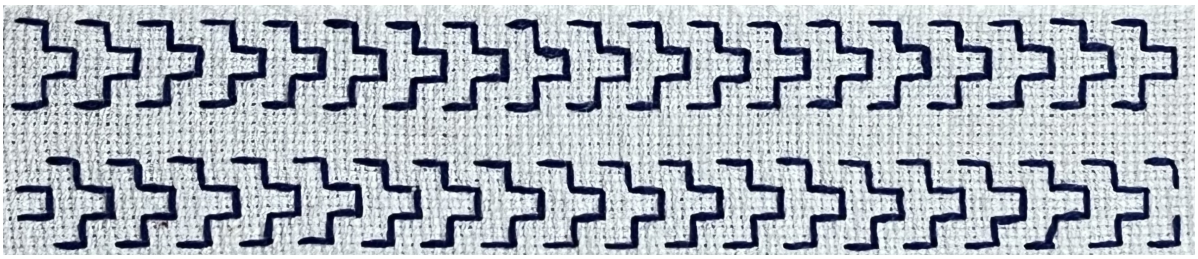

图12： *p2′ma* 一目刺子饰带的两面。 $x = 01, y = 1001$。

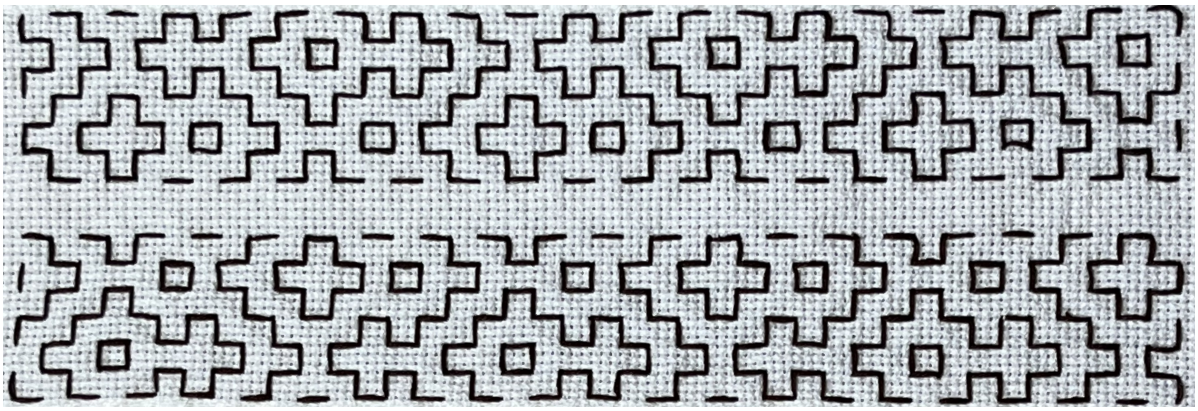

图13： *p2′11* 一目刺子饰带的两面。 $x = 0101100, y = 0\overline{110110}$。

参考文献

[1] P. R. Cromwell. “凯尔特结饰：数学艺术。”《数学情报》，第15卷，第1期，1993年，第36–47页。https://doi.org/10.1007/BF03025256[2] F. Farris. “环绕线股形成的壁纸图案：层群。”*Bridges*会议论文集，线上，2021年8月1日至3日，第71–78页。https://archive.bridgesmathart.org/2021/bridges2021-71.html[3] F. Farris 和 N. K. Rossing. “编织绳饰带。”《数学杂志》，第72卷，第1期，1999年，第32–38页。[4] C. Hayes 和 K. A. Seaton. “刺子绣二维入门。”*Bridges*会议论文集，线上，2020年8月1日至5日，第517–524页。http://www.archive.bridgesmathart.org/2020/bridges2020-517.html[5] K. A. Seaton 和 C. Hayes. “一目刺子图案的数学规范。”《数学与艺术杂志》，第17卷，第1–2期，第156–177页，2023年。https://www.tandfonline.com/doi/full/10.1080/17513472.2023.2187999[6] K. A. Seaton. 一线一针：数学与单针刺子绣，A. K. Peters/CRC出版社，2025年。[7] A. Sen 和 M. Martinez. “广义一目刺子图案中的可实现对称性。”*Bridges*会议论文集，美国弗吉尼亚州里士满，2024年8月1日至5日，第227–234页。https://archive.bridgesmathart.org/2024/bridges2024-227.html[8] D. K. Washburn 和 D. W. Crowe. 文化的对称性：平面图案分析理论与实践，华盛顿大学出版社，1988 年。