准备投稿至《高能物理杂志》

来自拓扑量子场论引力的拓扑边界条件质量公式

Anatoly Dymarsky[a, b] **和 Alfred Shapere**[b]

[a] 自然科学学院，高等研究院，爱因斯坦大道*1*号，普林斯顿，新泽西州*08540*，美国

[b] 物理与天文学系，肯塔基大学，玫瑰街*505*号，列克星敦，肯塔基州*40506*，美国

电子邮件：a.dymarsky@uky.edu,shapere@g.uky.edu

arXiv:2602.00224v1 [hep-th] 30 Jan 2026

摘要：质量公式用于计算某一类代数结构（如格或码）的加权总数。我们表明，三维拓扑量子场论提供了这一概念的推广：拓扑边界条件的加权总数由对所有闭三维流形取平均后的 TQFT 配分函数给出。我们将这一加权计数称为质量，它可以解释为拓扑量子场论引力的重整化配分函数。对于阿贝尔拓扑量子场论，拓扑边界条件的质量公式可约化为特定码族的质量公式。聚焦于阿贝尔情形，我们展示了如何计算任意玻色理论的质量，并考察了许多具体例子。随后，我们讨论非阿贝尔推广，并计算伊辛模张量范畴的 $n+\bar{n}$ 个副本的质量。最后，我们将这一构造推广至五维，并计算阿贝尔二形式切恩-西蒙斯理论的质量。

目录

1 引言 **2**

2 质量公式的推导 3

2.1 预备知识：阿贝尔拓扑量子场论 32.2 从拓扑求和得到质量公式 52.3 模变换与码 6

3 闭三维流形求和 8

3.1 层级-k 环面码 113.2 $\mathcal{T}_p$，奇素数 p 和 $k = p^m$ 153.3 $k = 2$ 理论 193.4U(1)$_2$ 193.5 $k = 4$ 理论 223.6 $k = 2^m$ 理论 223.7U(1)$_4$ 233.8U(1)$_8$ 24

4 非阿贝尔拓扑量子场论 24 4.1 Vir$_{c=1/2}$ **25 5 五维阿贝尔二形式理论 29 6 总结与展望 33 A** S_h **35 B 的大小在 Sp$(2g, \mathbb{Z}_{p^m})$ 与 Sp$(2g, \mathbb{Z}_p)$ 上的平均 36 C 同余性质与高阶中心荷 37 D (3.24) 和 (3.60) 的证明 38 E 正交群 $O(n, n, \mathbb{Z}_k)$ 40**

1 引言

在数学中，质量公式用于计算码、格或其他代数结构的加权计数总和。[1] 特别是在编码理论中，质量公式用于计算给定类型的码的等价类总数。例如，对于长度为 n，[2] 质量公式具有以下形式 [2, 3]

$$\sum_{[\mathcal{C}]} \frac{1}{|\mathrm{Aut}(\mathcal{C})|} = \frac{\mathcal{N}}{|G|}, \qquad \mathcal{N}(n) = \prod_{i=0}^{n/2-2} (2^i + 1). \tag{1.1}$$

这里的求和遍历码的等价类 $[\mathcal{C}]$。右侧的表达式称为“质量”。它是码的总数 $\mathcal{N}$ 除以码等价群的阶 $|G| = n!$；在此例中，该群就是置换群。将两边乘以 $|G|$后，质量公式可以改写为对所有码 $\mathcal{C}$求和，此时它便简单地统计码的总数，即 $\sum_{\mathcal{C}} 1 = \mathcal{N}$。

快进到三维拓扑量子场论（酉模张量范畴类型）。本文主要关注拓扑边界条件 (TBCs)[4–6], 的计数，我们将其记为 $\mathcal{C}$。在 [7]中，我们证明了拓扑量子场论引力——一种定义为对所有可能的三维拓扑求和、且具有固定边界的拓扑场论 $\mathcal{T}$——与由 $\mathcal{C}$ 标记的边界理论加权系综全息对偶。对于阿贝尔理论 $\mathcal{T}$，对闭流形求和得到以下拓扑边界条件总数的质量公式：

$$\mathcal{N}(\mathcal{T}) = \sum_{\mathcal{C}} 1 = \lim_{g\to\infty} \frac{\mathcal{D}^g}{|\mathrm{Sp}(2g,\mathbb{Z})|} \sum_{\gamma\in \mathrm{Sp}(2g,\mathbb{Z})} {}^g\langle 0|U_\gamma|0\rangle^g. \tag{1.2}$$

我们将在第 2.2 节解释这个公式并回顾其推导，同时在第 $\mathcal{T}$ 节4 探讨其向非阿贝尔情形的推广。右侧的求和是对所有可能的闭连通三维流形取平均的 TQFT 配分函数，这些流形由其海加德分解表示（并乘以总量子维数 $\mathcal{D}$ 的 $\mathcal{T}$某个幂）。我们将其解释为由 $\mathcal{T}$ 所定义的拓扑量子场论引力的重整化配分函数。

当 $\mathcal{T}$为阿贝尔时，其拓扑边界条件 $\mathcal{C}$ 可与经典偶自对偶码对应[8], ，且（1.2）可化为适用于各类自对偶码的传统质量公式。具体而言，（1.1）将由$\mathrm{U}(1)_2^n$ 陈-西蒙斯理论的质量公式推出，详见下文第3.4 节。

[1]质量公式背后一个更一般的概念是同伦基数 [1]。[2]这些是双偶自对偶线性二元码。定义见下文第 3.4 节。

本文的目标之一是说明如何计算（1.2）中对所有闭三维流形求和的结果，适用于任意阿贝尔玻色理论 $\mathcal{T}$。一种成熟的传统方法是用 $\mathbb{S}^3$中的链环来参数化闭三维流形的拓扑，相应的阿贝尔拓扑量子场论配分函数由高斯和给出 [6, 9–13]。我们则改用海加德分解来参数化闭三维流形。在此过程中，我们使用的一种工具是拓扑量子场论希尔伯特空间中的一个特定基；它借鉴了拓扑量子场论与量子稳定子码之间的联系，并简化了映射类群的作用。

我们的论文拓展了 [6] 所提出的思想，该思想将给定的拓扑边界条件与底层理论 $\mathcal{T}$在某些透镜空间上的配分函数联系起来。对于阿贝尔理论， [6] 证明：当且仅当所有此类配分函数均为实数时，拓扑边界条件才存在，也就是说，当且仅当所有高阶中心荷都消失时，拓扑边界条件才存在。作为一个衍生应用，我们将展示这一结果如何从我们的形式体系中得到。

除了阿贝尔情形之外，质量公式可以为任意理论 $\mathcal{T}$定义。在非阿贝尔情形中，权重因子并非平凡，质量并不简单地等于拓扑边界条件的总数。我们将在第 4节讨论这一点，并计算$n+\bar{n}$ 个伊辛范畴副本的质量（n 手征理论和 $\bar{n}$ 反手征理论）。

涉及拓扑量子场论引力的全息对偶可以推广到其他维度 [14]。我们利用这一点，通过在闭五维几何上求和，计算五维二形式陈-西蒙斯理论中二形式对称性的极大无反常子群数量。

本文结构安排如下。在第 2 节中，我们聚焦于阿贝尔玻色型三维拓扑量子场论，并推导质量公式（1.2），同时介绍计算海加德分解求和所需的工具。我们在第 3节说明如何计算这一求和，并讨论许多具体例子。第 4节讨论非阿贝尔情形，而五维阿贝尔理论的推广则在第5节讨论。最后，我们在第 6节作总结。

2 质量公式的推导

2.1 预备知识：阿贝尔拓扑量子场论

我们考虑一个由阿贝尔群 $\mathscr{D}$ 和二次精化 $q:\mathscr{D}\to\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ 指定的阿贝尔 Dijkgraaf-Witten 理论 [15]（玻色阿贝尔陈-西蒙斯理论）$\mathcal{T}$，该二次精化在 $\mathscr{D}\times\mathscr{D}$ 上定义了一个标量积，

$$\langle c,c'\rangle = 2^{-1}(q(c+c')-q(c)-q(c')). \tag{2.1}$$

它可以表示为一个阿贝尔 Chern-Simons 理论，其中 K-矩阵对应于标量积（2.1）；该 K-矩阵是格 Λ 的格拉姆矩阵，其判别群为 $\mathscr{D} = \Lambda^*/\Lambda$。

我们关注允许拓扑边界条件的理论，这要求 $c_- = 0 \bmod 8$。若满足这一条件，我们假设通过加入必要数量的拓扑平凡（E_8）$_1$ 理论 [6]，抵消手征中心荷。

考虑定义在 $\Sigma_g \times \mathbb{R}$ 上的此类理论，其中 Σ_g 是亏格为 g 的黎曼曲面。令X_3 为以 Σ_g 为边界的把手体。我们为定义在 Σ_g [16] 上的希尔伯特空间引入标准的正交基矢量

$$|\vec{c}\rangle \in \mathcal{H}^g, \qquad \vec{c} \in \mathscr{D}^g. \tag{2.2}$$

这里，$|\vec{c}\rangle$ 是在 X_3 上进行的路径积分，其中电荷为 c_i 的威尔逊线缠绕着 Σ_g 中不可收缩的圈。真空态是在 X_3 上进行且不含任何插入的路径积分，记作 $|\vec{0}\rangle \equiv |0\rangle^g$。我们将其归一化，使得 ${}^g\langle 0|0\rangle^g = 1$，即通过粘合两个 X_3 的边界得到的 g 个 $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ 的连通和上的路径积分，等于 ${}^g\langle 0|0\rangle^g \, \mathcal{D}^{g-1} = \mathcal{D}^{g-1}$。这里，$\mathcal{D} = |\mathscr{D}|^{1/2}$ 是 $\mathcal{T}$ 的总量子维数。

在这 个基下，模数据—— T 和 S 矩阵——具有如下形式 m

$$T_{cc'} = \theta_c \, \delta_{cc'}, \qquad \theta_c = e^{2\pi i q(c)} \equiv e^{i\pi\langle c,c\rangle}, \tag{2.3}$$

$$S_{cc'} = \frac{1}{\mathcal{D}} e^{-2\pi i \langle c,c'\rangle}. \tag{2.4}$$

在阿贝尔玻色拓扑量子场论中，拓扑边界条件（TBC）对应于 $\mathscr{D}$ 的拉格朗日子群——无反常极大子群 $\mathcal{C} \subset \mathscr{D}$ [4–6]。拉格朗日条件可改写如下：对于任意 $c \in \mathcal{C}$,

$$\langle c, c\rangle = 2q(c) = 0 \bmod 2, \tag{2.5}$$

$$\langle c, c'\rangle = 0 \bmod 1, \quad \text{iff } c' \in \mathcal{C}. \tag{2.6}$$

这些条件在编码理论中可解释为码的偶性和自对偶性 $\mathcal{C}$ [8]; [3] 下文将讨论若干具体例子。我们注意到，当码为偶码时，它满足（2.5）；此时，自对偶性（2.6）等价于 $\mathcal{C}$ 是 $\mathscr{D}$的极大子群，即阶为 $\mathcal{D}$的子群。

在码的语境中，元素 $c \in \mathcal{C}$ 通常称为码字，而所有可能码字的列表 $\mathscr{D}$ 则称为“字典”。码的语言

[3]将拉格朗日子群解释为码，便可从对称拓扑场论构造出发，直接得到 [8, 17–33],的码共形场论。

在理论是 n 相同副本 $\mathcal{T}^{\otimes n}$的乘积时最为自然；此时，字典（判别群）是 $\mathscr{D}^n$ ，而 $\mathscr{D}$ 通常称为字母表。

拓扑边界条件 $\mathcal{C}$ 定义了一个态

$$|\mathcal{C}\rangle = \sum_{\vec{c}\in\mathcal{C}^g} |\vec{c}\rangle \in \mathcal{H}^g, \tag{2.7}$$

它是圆柱体上的 TQFT 路径积分 $\Sigma_g \times [0,1]$，在一端施加拓扑边界条件 $\mathcal{C}$ 。该态在映射类群 $\mathrm{Sp}(2g,\mathbb{Z})$ 对 Σ 的作用下保持不变。[4] 我们将其归一化，使得 $\langle\mathcal{C}|0\rangle^g = 1$。

2.2 来自拓扑求和的质量公式

我们采用的质量公式思路如下 [7]。以拓扑边界条件定义的态 $|\mathcal{C}\rangle \in \mathcal{H}^g$，在映射类群对 $\mathcal{H}^g$ 的作用下保持不变，

$$U_\gamma|\mathcal{C}\rangle = |\mathcal{C}\rangle, \qquad \gamma \in \mathrm{Sp}(2g,\mathbb{Z}). \tag{2.8}$$

当亏格 g 较小时，态 $|\mathcal{C}\rangle$ 往往线性相关，但当 $g \geq \mathcal{D}$时，它们便线性无关。关键在于，当理论为阿贝尔理论时，人们相信态 $|\mathcal{C}\rangle$ 对于任意 g，都能张成 $\mathcal{H}^g$ 中的模不变量空间。编码文献中称为 Gleason定理 [34, 35]的结果，为此提供了严格论证。[5]

当亏格 g 非常大时，TBC态 $|\mathcal{C}\rangle$彼此正交，并且由于它们张成 $\mathcal{H}^g$中模不变量的空间，密度矩阵

$$\rho = \sum_{\mathcal{C}} \frac{|\mathcal{C}\rangle\langle\mathcal{C}|}{\langle\mathcal{C}|\mathcal{C}\rangle} \in \mathcal{H}^g \otimes \bar{\mathcal{H}}^g \tag{2.9}$$

是投影到 $\mathcal{H}^g$ 内模不变子空间上的投影算符。因此，它可以写成映射类群上的形式平均

$$\rho = \frac{1}{|\mathrm{Sp}(2g,\mathbb{Z})|} \sum_{\gamma\in\mathrm{Sp}(2g,\mathbb{Z})} U_\gamma, \qquad g \to \infty. \tag{2.10}$$

[4]除第4节之外，我们通常将 Σ_g 的映射类群等同于$\mathrm{Sp}(2g,\mathbb{Z})$，即映射类群对其托雷利子群的商群，该子群在一阶同调上作用平凡。后者在阿贝尔情形中作用平凡。[5]为应用Gleason定理，应将态 $|\mathcal{C}\rangle$与该码的完整权枚举多项式等同，参见例如 [36] ，其中对此等同作了详细说明。事实上， [34] 中的证明比所需的稍弱；它所适用的不是态 $|\mathcal{C}\rangle$，而是用特征标写出的波函数。将 [34] 的结果翻译成阿贝尔 Dijkgraaf-Witten 理论的语言将会很有意思。

质量公式（1.2）可通过计算矩阵元 ${}^g\langle 0|\rho|0\rangle^g$ 在这两种不同表示下对于 ρ的取值，并考虑到在阿贝尔情形下$\langle\mathcal{C}|\mathcal{C}\rangle = \mathcal{D}^g$，

$$\mathcal{N}(\mathcal{T}) = \sum_{\mathcal{C}} 1 = \lim_{g\to\infty} \frac{\mathcal{D}^g}{|\mathrm{Sp}(2g,\mathbb{Z})|} \sum_{\gamma\in \mathrm{Sp}(2g,\mathbb{Z})} {}^g\langle 0|U_\gamma|0\rangle^g. \tag{2.11}$$

归根结底，它只是计算 $\mathcal{H}^g$在 $g\to\infty$时模不变子空间的维数。

(2.11)右侧的求和，是将真空态的庞加莱级数 $|0\rangle^g$ 在无限大亏格 g下进行亏格约化的结果。它也可以解释为对闭三维流形所有可能的亏格g 海加德分解求和所得的 TQFT 配分函数。事实上，真空态 $|0\rangle^g$ 是给定把手体 X_3上的 TQFT 路径积分，而 ${}^g\langle 0|U_\gamma|0\rangle^g\mathcal{D}^{g-1}$ 则计算将 X_3 经映射类群变换后与自身粘合所得到的连通闭三维流形上的 TQFT 配分函数 γ。众所周知，在极限 $g\to\infty$ [37]下，所有闭三维流形都可以通过这种方式得到。我们将 (2.11)右侧解释为 TQFT 引力的重整化配分函数——一种基于给定 TQFT、对所有三维拓扑求和的拓扑引力模型。

此外，式（2.11）还有一种形式，它对所有边界固定为 Σ_g 的三维几何求和，表达了拓扑量子场论引力与定义在 Σ_g [7, 36, 38] 上的一组边界理论之间的全息对偶。

计算拓扑边界条件数量的另一种方法是

$$\mathcal{N}(\mathcal{T}) = \lim_{g\to\infty} \frac{1}{|\mathrm{Sp}(2g,\mathbb{Z})|} \sum_{\gamma\in \mathrm{Sp}(2g,\mathbb{Z})} \mathrm{Tr}_{\mathcal{H}^g}\left(U_\gamma\right). \tag{2.12}$$

右端可以解释为拓扑量子场论引力中“惠勒–德威特”时间演化算符的迹。由于该算符等于恒等算符，其迹等于一个封闭“婴儿宇宙”的希尔伯特空间维数。事实上，拓扑边界条件 $\mathcal{C}$应理解为定义了 α-态，其含义见 [39]；详细讨论请参阅 [40] 。

以上讨论适用于阿贝尔理论。关于将这些观察推广到非阿贝尔理论的讨论，将推迟到第4节。

2.3 模变换与码

为了计算（2.11）中的拓扑求和，我们需要更好地理解映射类群对真空态的作用。在允许拓扑边界条件的理论中，U_γ 在 $\mathcal{H}^g$ 上的作用会简化。引入以下

新基较为方便，它由给定的拉格朗日子群（偶自对偶码）$\mathcal{C}_0 \subset \mathscr{D}$定义如下

$$\|(a,b)\rangle\rangle := \frac{1}{\mathcal{D}^{g/2}} \sum_{\vec{c}\in\mathcal{C}_0^g} e^{i\pi\sum_i \langle a_i,b_i\rangle + 2\pi i \sum_i \langle a_i,c_i\rangle} |\vec{c}+\vec{b}\rangle, \tag{2.13}$$

其中 a_i，b_i，$c_i \in \mathscr{D}$和 i取值范围为 1 到 g，因此 $(\vec{a},\ \vec{b}) \in \mathscr{D}^{2g}$。如果 $\mathscr{D}$的阶为偶数，相位因子 $e^{i\pi\sum_i \langle a_i,\ b_i\rangle}$可能未定义。此时 a_i，b_i应~被理解为双覆盖 $\mathscr{D}$ 中的元素 $\mathscr{D}$。第 3.1节将给出一个具体例子。

基（2.13）是超完备的。对应于相同等价类的向量 $[\vec{a}]$，$[\vec{b}] \in \mathscr{G}^g$，其中 $\mathscr{G} = \mathscr{D}/\mathcal{C}_0$，彼此相差一个相位。用新基表示，原真空态可写为如下形式

$$|0\rangle^g = \frac{1}{\mathcal{D}^{g/2}} \sum_{[\vec{a}]\in\mathscr{G}^g} \|(a,0)\rangle\rangle\,. \tag{2.14}$$

此表达式与 $[\vec{a}]$ 在 $\mathscr{D}^g$中的代表元选择无关。

新基的优点在于它简化了映射类群的作用，

$$U_\gamma \|(a,b)\rangle\rangle = \|\gamma(a,b)\rangle\rangle\,, \tag{2.15}$$

其中，$\gamma(a,b)$ 表示 $\gamma \in \mathrm{Sp}(2g,\mathbb{Z})$ 对长度为 $2g$ 的向量 (a,b) 的基本作用。由此可直接推出，映射类群作用于 $\mathcal{H}^g$，其形式为 $\tilde{}\mathrm{Sp}(2g,\mathbb{Z}_k)$，其中 k是 $\mathscr{D}$ 的指数（若 a_i，$b_i \in \mathscr{D}$，则为两倍指数），也就是 $\mathcal{T}$ 的 Frobenius-Schur 指数，即满足对所有 c 都有 $(\theta_c)^k = 1$ 的最小 k。表达式 (2.14) 还清楚表明，$\Gamma_0(k) \subset \mathrm{Sp}(2g,\mathbb{Z})$ 是真空态的稳定子。反过来也成立：若 $\Gamma_0(k) \subset \mathrm{Sp}(2g,\mathbb{Z})$ 是真空态的稳定子，那么阿贝尔理论 $\mathcal{T}$ 就允许存在拓扑边界条件，正如我们在附录 C 中所示。

本节最后补充说明一下如何从码的角度解读这些结构。当 $\mathscr{D}$ 是 $\mathscr{G}$ 与 $\mathcal{C}_0$的直和时，构造会进一步简化。分解 $\mathscr{D} = \mathscr{G} \oplus \mathcal{C}_0$ 并非普遍成立，且可能取决于¯对 $\mathcal{C}_0$的选择。形如 $\mathcal{T}\times\mathcal{T}$的任何理论，在 $\mathcal{C}_0$ 为对角不变量时都允许这样的分解。若 $\mathscr{D} = \mathscr{G} \oplus \mathcal{C}_0$，则可以将 a_i, b_i 限制为 $\mathscr{G}$中的元素；此时 k 是 $\mathscr{G}$ 的指数（某些情况下则是其两倍）。在这种情况下，真空态（2.14）及其在 $\mathrm{Sp}(2g,\mathbb{Z})$作用下的像（忽略归一化）是码

与长度为 $2g$、[6] 的经典辛码 $\mathcal{S} \subset \mathscr{G}^{2g}$ 相关联的态

$$\sum_{i=1}^{g} \langle a_i, b_i' \rangle - \langle a_i', b_i \rangle = 0 \bmod 1, \qquad (a,b),(a',b') \in \mathcal{S}, \tag{2.16}$$

$$|\mathcal{S}\rangle = \sum_{(a,b)\in\mathcal{S}} \|(a,b)\rangle\!\rangle\,. \tag{2.17}$$

注意，(2.7) 和 (2.17) 都是 Calder- bank–Shor–Steane（CSS）类型的量子稳定子态，它们分别由经典码 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{S}$ 定义。在一般情形下，$\mathcal{S}$ 应被理解为 $\mathscr{D}^{2g}$ 中的辛自对偶码，它定义了稳定子态 $|\mathcal{S}\rangle$。在讨论带边界的三维流形上的路径积分时，码和稳定子态的语言尤其有用，见 [7, 36, 38]。

3 对闭三维流形求和

我们的目标是计算式 (2.11) 中的拓扑求和。对于一个 $\mathcal{T}$ 其 Frobenius-Schur 指数为 k的理论，它可以改写为有限和的极限

$$\mathcal{N}(\mathcal{T}) = \lim_{g\to\infty} M_g, \tag{3.1}$$

其中，“亏格-g 质量”为

$$M_g = \frac{\mathcal{D}^g}{|\mathrm{Sp}(2g,\mathbb{Z}_k)|} \sum_{\gamma\in\mathrm{Sp}(2g,\mathbb{Z}_k)} {}^g\langle 0|U_\gamma|0\rangle^g. \tag{3.2}$$

众所周知，任何阿贝尔理论 $\mathcal{T}$都可分解为由不同素数 $\mathcal{T}_{p_i}$ 标记的理论乘积 p_i [41]。由式 (2.15) 和中国剩余定理可知，映射类群的作用也相应地分解，

$$\mathrm{Sp}(2g,\mathbb{Z}_k) = \prod_i \mathrm{Sp}(2g,\mathbb{Z}_{k_i}), \qquad k = \prod_i k_i, \tag{3.3}$$

其中 $\gamma \in \mathrm{Sp}(2g,\mathbb{Z})$ 被映射为 γ模 k_i，并且 k_i 表示 $\mathcal{T}_{p_i}$ 的 Frobenius-Schur 指数。从这里可以立即得出，对 $\mathrm{Sp}(2g,\mathbb{Z}_k)$ 在（2.11）中的求和可因式分解，从而得到众所周知的结果 [6]

$$\mathcal{N}(\mathcal{T}) = \prod_i \mathcal{N}(\mathcal{T}_{p_i}). \tag{3.4}$$

[6]在 [7, 14, 36] 中，这类码记作 $\mathcal{L}$。我们使用 $\mathcal{S}$ 来说明这些是经典辛码。

因此，在下文中，我们可以聚焦于单个理论 $\mathcal{T}_p$，其 Frobenius-Schur 指数为 $k = p^m$，其中 p 为素数。

我们还注意到，当一个理论是 n 个等价副本 $\mathcal{T} \to \mathcal{T}^{\otimes n}$ 的乘积时，质量公式会以简单的方式调整，其中 $\mathcal{D} \to \mathcal{D}^n$ 和

$$ {}^{g}\langle 0|U_\gamma|0\rangle^{g} \to ({}^{g}\langle 0|U_\gamma|0\rangle^{g})^n \,. \tag{3.5}$$

换言之，任意特定理论的结果都可以轻松推广到 n 个副本的张量积。

对于任何具有拓扑边界条件且 Frobenius-Schur 指数为 k 的理论，真空在 $\Gamma_0(k)$ 下保持不变。因此，式 (3.2) 中的平均可以取遍双陪集

$$\mathscr{C}_g = \Gamma_0 \backslash \mathrm{Sp}(2g, \mathbb{Z}_k)/\Gamma_0. \tag{3.6}$$

为了说明这种分解的威力，我们计算一个理论 $\mathcal{T}_p$ 在 $k = p^m$ 下于透镜空间 $L(n,1)$ 上的配分函数：

$$Z_{\mathcal{T}}[\bar{L}(n,1)] = \langle 0|U_{\gamma_n}|0\rangle = \langle 0|S^\dagger T^n S|0\rangle = \mathcal{D}^{-2}\sum_{c\in\mathscr{D}}(\theta_c)^n, \quad \gamma_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{pmatrix}. \tag{3.7}$$

$Z_{\mathcal{T}}[L(n,1)]$ 的相位定义了高阶中心荷 [6, 42, 43]

$$\zeta_n = \frac{\sum_c(\theta_c)^n}{|\sum_c(\theta_c)^n|}. \tag{3.8}$$

通常的手征中心荷对应于 $n = 1$。当 $n = 0$ 模 k 时，γ_n 在 $\mathscr{C}_1$ 中与单位元**1**属于同一个等价类；并且当 n 与 p 互素时，它与**s**属于同一个等价类，其中

$$\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{s} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}_k). \tag{3.9}$$

这意味着

$$Z_{\mathcal{T}}[\bar{L}(n,1)] = Z_{\mathcal{T}}[\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1] = 1, \quad k \mid n, \tag{3.10}$$

and

$$Z_{\mathcal{T}}[\bar{L}(n,1)] = Z_{\mathcal{T}}[\mathbb{S}^3] = \mathcal{D}^{-1}, \quad p \nmid n. \tag{3.11}$$

由此我们立即得出，当 k 整除 n或 p不整除 n时，包括手征中心荷在内的高阶中心荷都必须消失。将一个

一般理论分解为乘积 $\mathcal{T} = \prod_i \mathcal{T}_{p_i}$，并将这一结果应用于每个 $\mathcal{T}_{p_i}$，我们重新推导出 [6] 的以下结果：对于允许拓扑边界条件的阿贝尔玻色理论，若 $n = 0$ 模 k_i 或 $p_i \nmid n$ 对每个 p_i都成立，其中 $k_i = p_i^{m_i}$，则所有中心荷都必须消失。正如 [6] 中所解释的，同一条件也可等价地写为

$$\gcd\left(n, \frac{2|\mathscr{D}|}{\gcd(n, 2|\mathscr{D}|)}\right) = 1. \tag{3.12}$$

反过来也是成立的——对于所有满足 n （3.12）的，平凡的中心荷意味着$\mathcal{N}$（$\mathcal{T}$）> 0。我们在附录 C中证明这一点。

回到任意 $\mathscr{C}_g$ 和 g，以及素数 p 对应的 $k = p^m$，陪集代表元可以选为如下形式

$$\gamma_h(X) = \mathbf{e}(X) \oplus \mathbf{s}^{g-h}, \quad \mathbf{e}(X) = \begin{pmatrix} \mathbb{I}_h & 0 \\ p\,X & \mathbb{I}_h \end{pmatrix}, \tag{3.13}$$

其中，X 是一个取值于 $\mathbb{Z}_{p^{m-1}}$ 的任意对称 $h \times h$ 矩阵。在上面的表达式中，我们假设采用典范嵌入 $\mathrm{Sp}(2h,\ \mathbb{Z}_k) \times \mathrm{Sp}(2(g-h)\ \mathbb{Z}_k) \subset \mathrm{Sp}(2g,\ \mathbb{Z}_k)$。当 $k = p$ 为素数时，代表元可简化为 $\gamma_h = \mathbf{1}^h \oplus \mathbf{s}^{g-h}$。因此，对于 $k = p$，$\mathcal{T}_p$ 在任意连通闭三维流形上的配分函数，等于其在由 h 个 $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ 的连通和上的配分函数；或者当 $h = 0$ 时，等于其在 $\mathbb{S}^3$ 上的配分函数。

Th代表元 $\gamma_h(X)$ 并非唯一确定。X 的同余选择 ，

$$X \sim A\,X\,A^T, \qquad A \in \mathrm{GL}(h, \mathbb{Z}_k), \tag{3.14}$$

属于同一轨道，并产生相同的矩阵元

$$f(X) \equiv {}^h\langle 0|U_{\gamma(X)}|0\rangle^h, \qquad \gamma(X) = \mathbf{e}(X). \tag{3.15}$$

我们定义 S_h 为 Γ_0 的子群，该子群保持 γ_h的形式，同时可能改变 X。其大小在附录A中计算，

$$|S_h| = |\mathrm{GL}(h, \mathbb{Z}_k)||\mathrm{GL}(g-h, \mathbb{Z}_k)|k^{2h(g-h)+h(h+1)/2}. \tag{3.16}$$

现在我们引入测度

$$\mu(h, g, p) = \frac{|\Gamma_0(2g, \mathbb{Z}_k)|^2 p^{(m-1)h(h+1)/2}}{|\mathrm{Sp}(2g, \mathbb{Z}_k)||S_h|} = \frac{p^{(g-h)(g-h+1)/2}}{\prod_{i=1}^g (p^i+1)} \prod_{i=1}^h \frac{p^{g-i+1}-1}{p^i-1}, \tag{3.17}$$

其 m与.....无关，参见附录 B，该处对此作了进一步说明。就 μ 而言，拓扑求和为

$$M_g = \sum_{h=0}^g \mu(h, g, p)\, \mathcal{D}^h\, \mathcal{G}_h, \quad \mathcal{G}_h = p^{(1-m)h(h+1)/2} \sum_X f(X). \tag{3.18}$$

有几种不同的方式来理解 $f(X)$ 以及 X 在 $\mathcal{G}_h$中的拓扑求和。一种方式见附录 B。另一种解释是， $\mathcal{G}_h$ 是上文所讨论的透镜空间配分函数的一种推广

$$f(X) = {}^h\langle 0|U_{\gamma(X)}|0\rangle^h = \frac{1}{\mathcal{D}^{2h}} \sum_{c_i \in \mathscr{D}} e^{i\pi \sum_{ij} p\langle c_i, c_j\rangle X_{ij}}. \tag{3.19}$$

我们可以将 $p\langle c_i, c_j\rangle X_{ij}$ 视为定义在 $\mathscr{D}^g$上的一个二次型，其分类已为人所知。因此，$f(X)$是标准高斯和的组合。非平凡的任务是用 X 的不变量来表示它，以便对任意理论乘积 $\mathcal{T}_p \times \mathcal{T}'_p \times \ldots$显式计算 $\mathcal{G}_h$。对于奇数 p，我们将在下文通过一系列示例来执行这一过程。

在计算上，求值 $\mathcal{G}_h$ 通常更容易的做法是先对 X求和。当 p为奇数时，这将要求只有在以下情况下， $\{c_1, \ldots, c_g\}$的线性组合才有贡献：

$$p\langle c, c\rangle = 0 \bmod 2, \tag{3.20}$$

其中 c 是 c_i的任意线性组合。换句话说， c_i 是 $\mathscr{D}$中的偶加法码的码字，其中偶性由（3.20）定义，参见（2.5）。这种思考方式在简单情形下很有帮助，而且可以立即看出 $\mathcal{G}_h$ 是非负实数，但当 $\mathcal{T}$是许多不同理论的乘积时，统计码字会变得繁琐。

一旦求出 $\mathcal{G}_h$ ，我们就可以取极限 $g \to \infty$ ，并将质量公式写成如下形式

$$\mathcal{N}(\mathcal{T}_p) = \sum_{h=0}^{\infty} \mu(h,p)\, \mathcal{D}^h\, \mathcal{G}_h, \quad \mathcal{G}_h = p^{(1-m)h(h+1)/2} \sum_X f(X), \tag{3.21}$$

$$\mu(h,p) = \lim_{g\to\infty} \mu(h,g,k) = \frac{p^{-h(h+1)/2}}{\prod_{i=1}^{\infty}(1+p^{-i}) \prod_{i=1}^{h}(1-p^{-i})}. \tag{3.22}$$

结合（3.4），这提供了一种通用方法，可用于计算任意阿贝尔玻色理论的拓扑边界条件数量。接下来，我们将通过一系列示例来计算 $\mathcal{G}_h$ 。

3.1 Level-k 环面码

我们的第一个例子是具有 K 矩阵 $k\,\sigma_x$ 的 n 份“k 级环面码”陈-西蒙斯理论，也称为 $\mathbb{Z}_k$ Dijkgraaf-Witten 理论。该理论的 n 份副本的判别群为 $\mathscr{D} = (\mathbb{Z}_k \times \mathbb{Z}_k)^n$，其标量积为

$$\langle c, c\rangle = 2q(c), \quad q(c) = \sum_i \frac{\alpha_i \beta_i}{k}, \qquad c = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_n) \in \mathbb{Z}_k^{2n}. \tag{3.23}$$

该理论的手征中心荷为零，并且对任意 n 都允许拓扑边界条件。拉格朗日子群 $\mathcal{C}$ 是 $\mathbb{Z}_k^{2n}$ 中满足 k^n 阶2.5的子群。对于$p=2$，这些条件定义了一类码，它们由[44]在量子稳定子码方面的开创性工作中提出。在 [35] 的分类中，这些是4^{H+} 型码——具有厄米内积的 F_4 上的自对偶码。偶性条件还进一步要求，这些码作为量子比特上的量子稳定子码时必须是实码。这些码在码共形场论的背景下得到了广泛研究，见[19, 20]。任意 p的推广由 [25, 45] 引入，并在阿贝尔拓扑量子场论引力与 Narain 共形场论系综之间的全息对偶背景下进行了讨论，见 [36, 38]。

层级 k 也是该拓扑量子场论的 Frobenius-Schur 指数。对于任意 n，该理论都允许拓扑边界条件，包括“狄利克雷”边界条件 $\mathcal{C}_0 = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n, 0, \ldots 0)$，其中 $\alpha_i \in \mathbb{Z}_k$。商群 $\mathscr{G} = \mathscr{D}/\mathcal{C}_0$ 满足 $\mathscr{D} = \mathscr{G} \oplus \mathcal{C}_0$，而式 (2.13) 中的 a_i、b_i 是 $\mathscr{G} = \mathbb{Z}_k^n$的元素。该基是非退化的；它与约定基 $|(\alpha,\beta)\rangle$(2.2)通过关于 a [14]的傅里叶变换相关，并将 Sp$(2g, \mathbb{Z}_k)$ 的作用线性化。

我们接下来计算码的数量 $\mathcal{C}$，首先从素数$k=p$的情形开始，此时亏格 g 的质量由下式给出

$$M_g = \sum_{h=0}^{g} \mu(h,g,p)\, \mathcal{D}^h = \prod_{i=1}^{g} \frac{p^i + p^n}{p^i + 1} = p^{gn} \prod_{i=0}^{n-1} \frac{p^i + 1}{p^i + p^g}, \quad \mathcal{D} = p^n. \tag{3.24}$$

最后一个等式在附录 D中得到证明。取 $g \to \infty$ 极限后，测度得到简化，从而得到具有 $\mathcal{T}_p$ 素 Frobenius-Schur 指数的理论的质量公式，

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(\mathcal{T}_p) &= \sum_{h=0}^{\infty} \mu(h,p)\, p^{hn} = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{p^{hn - h(h+1)/2}}{\prod_{i=1}^{\infty}(1+p^{-i}) \prod_{i=1}^{h}(1-p^{-i})} \\ &= \prod_{i=0}^{n-1} (p^i + 1) = |\mathrm{O}(n,n,\mathbb{Z}_p)/\Gamma_0(n,n,\mathbb{Z}_p)|. \end{aligned} \tag{3.25}$$

关于 $\mathcal{N}(\mathcal{T}_p)$ 的陪集表达式最早由 [46] 在轨形群胚的背景下给出，并由 [19, 38]在码共形场论的背景下给出。我们在附录E中简要回顾陪集构造。所得表达式在编码文献中广为人知，它给出了 $\mathbb{Z}_p$ [47]上的自对偶码的数量。

在继续讨论合数 k 的情形之前，我们指出，由 n 份 level-p 环面码组成的理论是仅有的具有奇素数 Frobenius-Schur 指数的拓扑量子场论。这一点将在下文证明。

当 $k = p^2$ 时，我们需要求值

$$f(X) = \frac{1}{p^{4h}} \sum_{\alpha,\beta \in \mathbb{Z}_k^h} e^{\frac{2\pi i}{p} \alpha^T X \beta}. \tag{3.26}$$

我们可以写成 $\alpha = \alpha_0 + p\alpha_1$，类似地有 β，其中 α_0，$\alpha_1 \in \mathbb{Z}_p^h$。式（3.26）与 α_1、β_1 无关；因此，相应的求和是平凡的。剩下

$$f(X) = \frac{1}{p^{2h}} \sum_{\alpha_0,\beta_0 \in \mathbb{Z}_p^h} e^{\frac{2\pi i}{p} \alpha_0^T X \beta_0} = p^{-r}, \tag{3.27}$$

其中 $r =$ 秩为X。取值于$\mathbb{Z}_p$ 的秩为 r 的 $h \times h$ 对称矩阵的数量为 [48]

$$N(h,r,p) = \frac{\prod_{i=1}^{h}(1-p^{-i})}{\prod_{i=1}^{r}(1-p^{-i}) \prod_{i=1}^{h-r}(1-p^{-i})} p^{hr-r(r-1)/2} \prod_{i=0}^{[(r-1)/2]} \left(1-p^{-(2i+1)}\right),$$

该公式适用于任意素数 p。对于奇数 p，它由 $N(h,\ r,\ p) = \sum_{\ell=0}^{1} N(h,\ r,\ \ell,\ p)$ 得出，其中

$$\begin{aligned} N(h,r,\ell,p) &= \frac{|\mathrm{GL}(h,\mathbb{Z}_p)|}{|\mathrm{O}_\ell(r,\mathbb{Z}_p)||\mathrm{GL}(h-r,\mathbb{Z}_p)|\, p^{r(h-r)}} \\ &= N(h,r,p) \frac{1+(-1)^{\ell+(p-1)/2}\, p^{-r/2} \delta_{2|r}}{2}, \end{aligned} \tag{3.28}$$

这是秩为 r 的二次型数量，其非退化部分的行列式为 ϵ^ℓ，其中 ϵ 是 $\mathbb{Z}_p$ 中的非平方元，而 O_ℓ 是相应二次型的对称群。

因此，我们得到 n 份 $k = p^2$级环面码的拓扑边界条件数量为

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(\mathcal{T}_{k=p^2}) &= \sum_{h=0}^{\infty} \mu(h,p)\, p^{2hn-h(h+1)/2} \sum_{r=0}^{h} N(h,r,p)\, p^{-nr} \\ &= \sum_{\tilde{n}=0}^{n} p^{\tilde{n}(\tilde{n}-1)/2} \sigma(\tilde{n}), \quad \sigma(\tilde{n}) = \prod_{i=1}^{\tilde{n}} \frac{(p^{n-i}+1)(p^{n+1-i}-1)}{(p^i-1)}, \end{aligned} \tag{3.29}$$

与 [14] 一致。这里，$\sigma(\tilde{n})$ 是长度为 n、具有 $\tilde{n}$ 个生成元的偶码 $[n,\tilde{n}]$ 的数量。相同的表达式此前已在编码文献[49]中得到。

现在我们可以考虑 $k = p^m$ 的情形，其中 m 任意。在这种情况下，矩阵 X 可以分解如下

$$X = X_0 + pX_1 + \dots p^{m-1}X_{m-1}, \tag{3.30}$$

类似地， $\alpha = \alpha_0 + p\alpha_1 + \dots$。以及 $\beta = \beta_0 + \dots$。利用不改变 $f(X)$ 的变换 $X \to AXB$，其中 A、$B \in \mathrm{GL}(h, \mathbb{Z}_k)$，我们可以将 X_i 化为如下形式。我们首先将 X_0 对角化，使其左上角分块为可逆对角矩阵 D_{r_0}，大小为 $r_0 = \mathrm{rank}(X_0)$。然后，我们令 X_1的前 r_0 行与列保持任意，同时将其余部分对角化，如 (3.31) 所示。其中，r_1 表示 X_1 右下角、大小为 $h - r_0$的子矩阵的秩。接着，我们令 X_2 的前 $r_0 + r_1$ 列与行保持任意，并将其余部分对角化，依此类推。

$$X_0 = \begin{pmatrix} D_{r_0} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad X_1 = \begin{pmatrix} * & * & * & * \\ * & D_{r_1} & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & D_{r_2} & 0 \\ * & * & 0 & 0 \end{pmatrix}, \dots \tag{3.31}$$

为计算求和 $f(X) = \sum_{\alpha,\beta} e^{2\pi i \alpha^T X \beta / p^{m-1}} / p^{2hm}$，我们注意到指数不依赖于 $\alpha_{m-1}, \beta_{m-1}$。然后我们对 $\alpha_{m-2}, \beta_{m-2}$ 求和，这将迫使 α_0, β_0 的前r_0 个分量为零。对$\alpha_{m-3}, \beta_{m-3}$ 的分量 $r_0 + 1, \dots, r_0 + r_1$ 求和，将迫使 α_0, β_0 接下来的 r_1 个分量为零，依此类推。最终， α_0, β_0 的最后 $(h - r_0 - r_1 - \dots - r_{m-3})$ 个分量将进入求和 $e^{2\pi i \alpha_0^T X_{m-2} \beta_0 / p}$，从而得到 $p^{-r_{m-2}}$。综合以上各项，我们得到

$$f(X) = p^{-\sum_{i=0}^{m-2}(m-1-i)r_i}, \tag{3.32}$$

而 n 份 $k = p^m$ 级环面码的拓扑边界条件数量为

$$\mathcal{N}(\mathcal{T}_{k=p^m}) = \sum_{h=0}^{\infty} \mu(h,p)\, p^{hmn}\, \mathcal{G}_h, \tag{3.33}$$

$$\mathcal{G}_h = \sum_{r_0=0}^{h} p^{-h(h+1)/2} N(h, r_0, p) \sum_{r_1=0}^{h-r_0} p^{-(h-r_0)(h-r_0+1)/2} N(h - r_0, r_1, p) \times$$

$$\cdots \times \sum_{r_{m-2}=0}^{h-\tilde{r}} p^{-(h-\tilde{r})(h-\tilde{r}+1)/2} N(h - \tilde{r}, r_{m-2}, p)\, p^{-n\sum_{i=0}^{m-2}(m-1-i)r_i}, \quad \tilde{r} = r_0 + \dots + r_{m-3}.$$

与 $k = p^2$ 情形（3.29）类似，这个表达式应当可以表示为对 $\mathbb{Z}_k$ 码的求和，如 [50–52]所述。

3.2 $\mathcal{T}_p$ 取奇素数 p 且 $k = p^m$

现在我们转向奇素数 p下的一般理论 $\mathcal{T}_p$。首先，我们假设$k = p$，这意味着对于某个 $\tilde{n}$，有 $\mathscr{D} = \mathbb{Z}_p^{\tilde{n}}$。我们先假设 $\tilde{n} = 1$，然后再考虑这类理论的乘积。对于任意奇素数 p，有两种不同的二次型[41]

$$q(c) = u\frac{c^2}{p}, \quad c \in \mathbb{Z}_p, \tag{3.34}$$

其中，$u = 1$ 或 $u = \epsilon$ 是 $\mathbb{Z}_p$中的非平方元。当 $p = 3$模 4 时，我们可以选择$\epsilon = -1$。当 $p = 1$ 模 4 时，ϵ没有规范的选择。当 $p = 3$ 模 4 时，具有 $u = \pm 1$ 的理论具有手征中心荷 $c_- = \pm 2$。当 $p = 1$ 模 4 时，具有 $u = 1$ 的理论的手征中心荷为 $c_- = 0$，而具有 $u = \epsilon$ 的理论的手征中心荷为 $c_- = 4$。

现在我们考虑任意 $\mathscr{D} = \mathbb{Z}_p^{\tilde{n}}$的情形。若理论要允许拓扑边界条件，则它必须是偶 $\tilde{n} = 2n$，且 $\mathcal{D} = p^n$。不失一般性，我们可以将二次型对角化为

$$q(c) = \frac{1}{p}\left(\sum_{i=1}^{2n-1} c_i^2 + u\, c_{2n}^2\right), \qquad \vec{c} \in \mathbb{Z}_p^{2n}, \tag{3.35}$$

其中，u 与上文相同。根据假设，该理论允许拓扑边界条件，因此其手征中心荷应当模 8 为零。当 $p = 1$ 模 4 时，总中心荷为

$$c_- = \begin{cases} 2n \times 0, & \text{for } u \text{ square}, \\ (2n-1) \times 0 + 4, & \text{for } u \text{ nonsquare}, \end{cases} \tag{3.36}$$

因此 u 是一个平方数。对于 $p = 3$ 模 4，总中心荷为

$$c_- = \begin{cases} 2n \times 2, & \text{for } u \text{ square}, \\ (2n-1) \times 2 - 2, & \text{for } u \text{ nonsquare}. \end{cases} \tag{3.37}$$

因此 u 当 n 为偶数时是平方数，为奇数时不是平方数。在所有情况下，我们发现二次型的行列式 (3.35) 为$(-1)^n$，这意味着它可以化为以下形式

$$q(c) = \frac{1}{p} c^T \eta\, c, \qquad \eta = \begin{pmatrix} 0 & 1_n \\ 1_n & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.38}$$

换句话说，唯一具有 Frobenius-Schur 指数$k = p$的拓扑边界条件、且 p 为奇素数的理论 $\mathcal{T}_p$，是 n 份 level $k = p$ 环面码。

该理论的拉格朗日子群 $\mathcal{C} \in \mathbb{Z}_p^{2n}$可以很容易地解释为长度为 $2n$ 、定义在 $\mathbb{Z}_p$ 上的自对偶码，其标量积为

$$\sum_{i=1}^{2n-1} c_i c_i' + u\, c_{2n} c_{2n}' = 0 \bmod p, \qquad c, c' \in \mathbb{Z}_p^{2n}. \tag{3.39}$$

由于 2 在 $\mathbb{Z}_p$ 中可逆，因此“偶性”（2.5）可由自对偶性推出。 $u = 1$的情形最为自然；文献中已对这类码进行了广泛讨论 [3, 47]。我们注意到，将构造 A 直接应用于自对偶码 $\mathcal{C}$ 会得到一个自对偶但奇的格

$$\Lambda_{\mathcal{C}} = \{\vec{v}/\sqrt{p}\,|\,\vec{v} = (c_1, \ldots, c_{2n}),\ c_i \in \mathbb{Z},\ \vec{v} \bmod p \in \mathcal{C}\} \subset \mathbb{R}^{2n}. \tag{3.40}$$

为了得到定义 Narain共形场论的偶自对偶格，并以玻色CS理论的夹心构造来表述 [8]，，应使用 [25]，中概述的修正构造 A；该构造是根据底层 CS 理论的格 Λ 定义的。

现在我们转向 Frobenius-Schur 指数为 $k = p^2$的理论$\mathcal{T}_{k=p^2}$。与上文类似，当 $\mathscr{D} = \mathbb{Z}_k$ 时，存在两个二次型

$$q(c) = u\frac{c^2}{p^2}, \quad u = \epsilon^l, \quad c \in \mathbb{Z}_{p^2}, \tag{3.41}$$

相应的 K 矩阵为

$$K = \begin{pmatrix} 2u & p \\ p & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.42}$$

对于 u 的两种可能取值，该理论的手征中心荷均为零。满足 $\mathscr{D} = \mathbb{Z}_k^n$ 的理论可以由这两种类型的理论作理论乘积得到，其中，第一个 $n-1$ 理论的 $u = 1$，而第 n 个理论的 $u = 1$ 或 $u = \epsilon$。

现在我们要计算

$$f(X) = \frac{1}{k^h} \sum_{c \in \mathbb{Z}_k^h} e^{2\pi i \frac{u}{p} c^T X c}. \tag{3.43}$$

取值于 $\mathbb{Z}_p$ 的对称矩阵 X 可对角化为

$$X(r, \ell) = \mathrm{diag}(\underbrace{1, \ldots, 1, u_x}_{r}, 0, \ldots, 0), \tag{3.44}$$

其中 u_x 可以是 1 或非平方元 $u_x = \epsilon$，可写为 $u_x = \epsilon^\ell$其中 $\ell = 0$，1。(3.43)中的和现在是标准高斯和的乘积，从而得到

$$f(X) = f(l, r, \ell) = (-1)^{rl+\ell}\, i^{\frac{(p-1)^2 r}{4}} p^{-r/2}. \tag{3.45}$$

为计算 $\mathcal{G}_h$ 对于 n 份理论 (3.41)，我们注意到，由 3.44) 的形式表示、且由 r， ℓ 指定的矩阵总数由 (3.28) 给出，并且

$$\mathcal{G}_h = \sum_{r=0}^{h} \sum_{\ell=0}^{1} p^{-h(h+1)/2} N(h, r, \ell, p) f^n(r, \ell). \tag{3.46}$$

综合所有结果，我们发现拓扑边界条件的数量为

$$\mathcal{N}(\mathcal{T}^n_{k=p^2}) = \sum_{h=0}^{\infty} \mu(h, p)\, p^{hn} \mathcal{G}_h.$$

当 $p = 1$ 模 4 时，理论 $\mathcal{T}_{k=p^2}$ 及其共轭理论 $\mathcal{T}_{k=p^2}$ 是相同的。因此，当 n 为偶数时， $\mathcal{T}^{\otimes n}_{k=p^2}$ 等价于 $n/2$ 个 level $k = p^2$ 环面码的副本。这一等价性明显体现在 f^2 与 ℓ无关这一事实上。更一般地，对于任意p，组合 $\mathcal{T}_{k=p^2} \times \mathcal{T}_{k=p^2}$ 等价于单个 level $k = p^2$ 环面码副本。

值得注意的是，$\mathcal{T}_{k=p^2}$ 理论的一个副本恰好有一个拓扑边界条件，因此对于任意 g ，质量等于 1。这直接由下式得出

$$M_g = \sum_{h=0}^{g} \mu(h, g, p) = 1, \tag{3.47}$$

其中我们使用了这一事实： $\mathcal{G}_h = p^{-h}$，这由（3.46）结合 $n = 1$得到；或者，也可以先对 X取平均，再直接由（3.43）计算得到。该理论给出了一个最简单的例子，其中 $\mathscr{D} = \mathbb{Z}_{p^2}$ 不是直和 $\mathscr{G} \oplus \mathcal{C}$，这可由取 $\mathcal{C} = \mathbb{Z}_p$得到。因此，在（ a 和 b2.13）中的）应定义为$\mathscr{D} = \mathbb{Z}_{p^2}$的元素。这个基多出 p^2 倍，但它将映射类群 $\mathrm{Sp}(2g, \mathbb{Z}_{p^2})$的作用线性化了。

现在我们可以开始考虑一般的 $k = p^m$ 情形。从由二次型定义的理论出发

$$q(c) = u\frac{c^2}{p^m}, \quad u = \epsilon^l, \quad c \in \mathbb{Z}_{p^m}, \tag{3.48}$$

我们希望计算

$$f(X) = \frac{1}{k^h} \sum_{c \in \mathbb{Z}_k^a} e^{2\pi i \frac{up}{k} c^T X c}. \tag{3.49}$$

有两种处理方法。第一种是将 $X = X_0 + pX_1 + p^2X_2 + \ldots$和 $c = c_0 + pc_1 + p^2c_2 + \ldots$分解，并将 X_i化为（3.31）中所述的形式，其中每个

对角矩阵 $D_i = \mathrm{diag}(1, \ldots, 1, \epsilon^{\ell_i})$。然后可以显式地进行求和，从 c_i（其中 $i = m-2$）开始，到 $i = 0$结束。很容易看出，X_1的前r_0行和列，以及 X_2的前 $r_0 + r_1$行和列等，都不会影响结果，只会产生一个因子 $p^{r_0\,(r_0+1)\,/2+r_0\,(h-r_0)\,+\ldots}$。由此得到

$$\mathcal{G}_h = p^{(1-m)h(h+1)/2} \sum_{r_0}^{h} \sum_{\ell_0=0}^{1} N(h, r_0, \ell_0, p) p^{r_0(r_0+1)/2+(h-r_0)r_0} \sum_{r_1=0}^{h-r_0} \sum_{\ell_1} N(h-r_0, r_1, \ell_1, p) \times$$
$$\cdots \times p^{\tilde{r}(\tilde{r}+1)/2+(h-\tilde{r})\tilde{r}} \sum_{r_{m-2}=0}^{a-\tilde{r}} \sum_{\ell_{m-2}} N(h-\tilde{r}, r_{m-2}, \ell_{m-2}, p) f(X), \quad \tilde{r} = r_0 + \cdots + r_{m-3},$$

with

$$f(X) = f(l, \vec{r}, \vec{\ell}) = \prod_{i=0}^{m-2} (-1)^{(r_i l + \ell_i)(m-1-i)}\, i^{\frac{(p-1)^2 r_i \delta_{m-1-i}}{4}}\, p^{-(m-1-i)r_i}, \tag{3.50}$$

其中，当 $\delta_i = 1$ i 为奇数时，以及当 $\delta_i = 0$ i 为偶数时。

得到相同结果的另一种方法是将 X 化为对角形式

$$X = \begin{pmatrix} D_{r_0} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & pD_{r_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & p^{m-2}D_{r_{m-2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.51}$$

其中 $D_{r_i} = \mathrm{diag}(\underbrace{1, \ldots, 1}, \epsilon^{\ell_i})$。与（3.51）合同的矩阵的数量，以$r_i$、$r_0$、$r_1$、……、$r_{m-1}$和 ℓ_0、……、ℓ_{m-2}为参数，由 X 在$\mathrm{GL}(h, \mathbb{Z}_k)$中的稳定子大小给出，

$$N(h, r_0, r_1, \ldots, r_{m-2}, \ell_0, \ldots, \ell_{m-2}) = \tag{3.52}$$
$$\frac{|\mathrm{GL}(n, \mathbb{Z}_{p^{m-1}})| p^{-(m-1)r_0(n-r_0) - m r_1 (n-r_0-r_1) - \cdots - (2m-3) r_{m-2}(n-r_0-\ldots)}}{|\mathrm{O}_{\ell_0}(r_0, \mathbb{Z}_{p^{m-1}})||\mathrm{O}_{\ell_1}(r_1, \mathbb{Z}_{p^{m-2}})| p^{r_1^2} |\mathrm{O}_{\ell_2}(r_2, \mathbb{Z}_{p^{m-3}})| p^{2r_2^2} \ldots |\mathrm{GL}(n-r_0-\ldots, \mathbb{Z}_{p^{m-1}})|}.$$

注意，$|\mathrm{O}^{\ell_j}(r_j, \mathbb{Z}_{p^{m-1-j}})| p^{j r_j^2}$是取值于$Z_{p^{m-1}}$ 且满足 $A(p^j D_j) A^T = p^j D_j \mod p^{m-1}$ 的 $r_j \times r_j$矩阵 A群的阶。经过直接化简后，可将其写为

$$\mathcal{G}_h = \sum_{r_0}^{h} \sum_{\ell_0=0}^{1} p^{-h(h+1)/2} N(h, r_0, \ell_0, p) \sum_{r_1=0}^{h-r_0} \sum_{\ell_1=0}^{1} p^{-(h-r_0)(h-r_0+1)/2} N(h-r_0, r_1, \ell_1, p) \times$$
$$\cdots \times \sum_{r_{m-2}=0}^{h-\tilde{r}} \sum_{\ell_{m-2}=0}^{1} p^{-(h-\tilde{r})(h-\tilde{r}+1)/2+(h-\tilde{r})\tilde{r}} N(h-\tilde{r}, r_{m-2}, \ell_{m-2}, p) f(X). \tag{3.53}$$

至此，我们完成了对一般理论的分析 $\mathcal{T}_p$ （适用于奇素数） p。最一般的理论可由具有不同 Frobenius-Schur 指数$k = p^{m_I}$ 以及由式（3.48）给出的二次型的理论乘积得到。所得理论对应的 $\mathcal{G}_h$ 将由式（3.53）给出，其中 $m = \max_I m_I$ ，而 f（X）则是各个理论的式（3.50）之积（此函数仅取决于前 $m-2$个变量 r_i 和 ℓ_i），

$$f(X) = \prod_I f(l_I, r_1, \ell_1, \ldots, r_{m_i-2}, \ell_{m_i-2}). \tag{3.54}$$

我们通过指出以下事实，完成对奇素数 p 对应的 $\mathcal{T}_p$ 理论的讨论：由于取值于 $\mathbb{Z}_{p^{m-1}}$ 的对称矩阵 X 总能对角化， $\mathcal{T}_p$ 在任意连通闭三维流形上的配分函数，等于其在透镜空间的连通和 $\bar{L}$（n,1）上的配分函数（当 $n < k = p^m$ 时），或其在 $\mathbb{S}^3$ 上的配分函数。

3.3 $k = 2$ 理论

现在我们转向 $p = 2$ 的情形。具有 $k = 2$ 的理论只有 2 级环面码、1 级 WZW Spin(8) 理论及它们的组合。上文已讨论过环面码。用阿贝尔 Chern-Simons 理论的语言，Spin(8)$_1$ 可通过令 K 为 SO(8) 的卡当矩阵来定义。该理论的手征中心荷为 $c_- = 4$。对应的判别群为 $\mathscr{D} = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ ，并且

$$q(c) = (\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)/2, \quad c = (\alpha, \beta) \in \mathscr{D}. \tag{3.55}$$

对于任意满足 $k = 2$ 的理论，拓扑边界条件的数量由（3.25）给出，其中 $n = n_1 + n_2$其中 n_1 是 2 级2级环面码的数量，而 n_2 是 Spin(8)$_1$ 的数量。注意，n_2 必须为偶数；否则，所得理论的手征中心荷将不能被8整除。

3.4 $\mathrm{U}(1)_2$

接下来我们考察 U(1)$_2$ 理论及其共轭理论 U(1)$_{-2}$，这是具有 $k = 4$ 的两个理论示例。我们首先聚焦于 n 个 U(1)$_2$ 的情形。相应的二次型为

$$q(c) = \frac{1}{4}\sum_i c_i^2, \qquad c \in \mathbb{Z}_2^n. \tag{3.56}$$

L U(1)$_2^n$ 的拉格朗日子群是大小为 $2^{n/2}$ 、满足条件$\mathcal{C} \in \mathbb{Z}_2^n$ 的子群 ng

$$\sum_i c_i = 0 \bmod 4, \qquad c \in \mathcal{C}. \tag{3.57}$$

这一条件定义了双偶自对偶二进制码，即所谓的 II 型二进制码，它们在编码文献中已有广泛讨论 [53, 54]。众所周知，这类码仅在 $n = 0$ 模 8时存在，这也是$\mathrm{U}(1)_2^n$ 存在拓扑边界条件的条件。

任意双偶自对偶二进制码都通过构造 A 在 $\mathbb{R}^n$ 上定义一个偶自对偶格。 [17, 18] 曾使用这一构造来构造手征格上的二维共形场论。在 [8] 中，有人将这类共形场论解释为源自一种“夹层”构造，其中该码定义了三维陈-西蒙斯理论中的拓扑边界条件。

双偶自对偶二进制码的数量由（1.1）给出，这一结果众所周知。我们在下面重现这一结果。首先，我们计算

$$f(X) = \frac{1}{2^h} \sum_{c \in \mathbb{Z}_2^h} e^{i\pi c^T X c} \tag{3.58}$$

除非 X 的所有对角元均为零，否则该式为零。因此，

$$\mathcal{G}_h = 2^{-h(h+1)/2} \sum_X \prod_{i=1}^h \delta_{X_{ii},0} = 2^{-h}, \tag{3.59}$$

并且（这一恒等式在附录D中证明）

$$\mathcal{N}(\mathrm{U}(1)_2^n) = \sum_{a=0}^{\infty} \frac{2^{-h(3+h)/2+nh/2}}{\prod_{i=1}^{\infty}(1+2^{-i}) \prod_{i=1}^{h}(1-2^{-i})} = \prod_{i=0}^{n-2}(2^i+1). \tag{3.60}$$

为了系统地进行分析，并允许对任意具有 $k = 4$ 的理论 $\mathcal{T}_2$ 求取 $\mathcal{N}$，我们用 X 的不变量来表示 f（X）$= \prod_{i=1}^h \delta_{X_{ii},\ 0}$。当秩 r 为奇数时，X 可以化为对角形式，其中包含一个 $r \times r$ 单位块，其余位置均为零。共有

$$N(h, r, 2) = \frac{|\mathrm{GL}(h, \mathbb{Z}_2)|}{|\mathrm{O}(r, \mathbb{Z}_2)||\mathrm{GL}(h-r, \mathbb{Z}_2)|2^{r(h-r)}} \tag{3.61}$$

这样的矩阵（这与 (3.28) 中的表达式相同，其中 $p = 2$），其中 $\mathrm{O}(r, \mathbb{Z}_2)$ 定义为所有保持双线性形式 $A \in \mathrm{O}(r, \mathbb{Z}_2)$ 的矩阵组成的群， $AA^T = 1$,

$$|\mathrm{O}(r, \mathbb{Z}_2)| = 2^{\tilde{r}^2} \prod_{i=1}^{\tilde{r}} (p^{2i} - 1), \quad r = 2\tilde{r} + 1. \tag{3.62}$$

当 r 为偶数时，需要考虑两种情况—— X 要么对角化为一个 $r \times r$单位块（其他位置为零），要么对角化为辛形式 $r \times r$ J，表示为

$r/2$ 个 σ_x 的副本。前一种情况在我们的记号中对应于 $\ell=0$，群 O_0 定义为满足 $AA^T=1$ 的矩阵所构成的群。后一种情况对应于 $\ell=1$，O_1 是由所有辛矩阵构成的群，

$$|\mathrm{O}_0(r,\mathbb{Z}_2)| = 2^{\tilde{r}^2}\prod_{i=1}^{\tilde{r}-1}(p^{2i}-1), \tag{3.63}$$

$$|\mathrm{O}_1(r,\mathbb{Z}_2)| = |\mathrm{Sp}(2\tilde{r},\mathbb{Z}_2)| = 2^{\tilde{r}^2}\prod_{i=1}^{\tilde{r}}(p^{2i}-1). \tag{3.64}$$

这类矩阵的数量 X 因此为

$$N(h,r,\ell,2) = \frac{|\mathrm{GL}(h,\mathbb{Z}_2)|}{|\mathrm{O}_\ell(r,\mathbb{Z}_2)||\mathrm{GL}(h-r,\mathbb{Z}_2)|2^{r(h-r)}}, \quad r=2\tilde{r}. \tag{3.65}$$

若对奇数 r定义 $N(h,\ r,\ \ell,\ 2)=(1-\ell)N(h,\ r,\ 2)$，则对任意 r，

$$N(h,r,2) = \sum_{\ell=0}^{1} N(h,r,\ell,2). \tag{3.66}$$

所有 X_{ii} 均为零这一条件意味着，对于 $\ell=1$，

$$\sum_{r=0}^{h} N(h,r,1,2) = \sum_{\tilde{r}=0}^{[h/2]} N(h,2\tilde{r},1,2) = 2^{h(h-1)/2}, \tag{3.67}$$

与（3.59）一致。

对于 $\mathrm{U}(1)_2^n \times \mathrm{U}(1)_{-2}^{\bar{n}}$ 理论，计算过程与 $n \to n+\bar{n}$ 完全相同。相应的二元码通过将汉明重量修改为以下形式，对传统的双偶码进行了推广

$$w(c) = \sum_{i=1}^{n} c_i - \sum_{i=n+1}^{n+\bar{n}} c_i, \quad c=(c_1,\ldots,c_n|c_{n+1},\ldots,c_{n+\bar{n}}), \tag{3.68}$$

在 [23] 中引入并于码共形场论的背景下进行了研究。

我们注意到，式（3.60）假设底层码（拓扑边界条件）存在，而这尤其要求 $n-\bar{n}=0$ 模 8。当该条件不满足时，仍将此公式用于 n，$\bar{n}$ 会导致无意义的结果。本文中找到的其他 $\mathcal{N}$ 表达式也同样如此。

当 $p=2$ 时，Frobenius-Schur 指数通常比 $\mathscr{D}$ 的指数大一倍，而在此情形下后者为 2。为说明这一点，我们考虑 $\mathrm{U}(1)_2 \times \mathrm{U}(1)_{-2}$，它具有唯一的拓扑边界条件（TBC）——带有 $(c_1,c_1)\in\mathcal{C}\subset\mathscr{D}=\mathbb{Z}_2^2$ 的对角不变量。可以定义商群 $\mathscr{G}=\mathscr{D}/\mathcal{C}=\mathbb{Z}_2$，其由形如 $(c_1,0)\in\mathscr{G}$ 的元素组成，因此 $\mathscr{D}=\mathscr{G}\oplus\mathcal{C}$。在 $a,b,\in\mathbb{Z}_2$ 的条件下，由 (2.13) 定义的基 $|\!|(a,b)\rangle\!\rangle$ 是良定义且非退化的，但必须扩展为 $a,b\in\mathbb{Z}_k$，其中 $k=4$，因为 $|\!|(a+2a_1,b+2b_1)\rangle\!\rangle = e^{i\pi(ab_1+a_1b)}|\!|(a,b)\rangle\!\rangle$ 通常不同于 $|\!|(a,b)\rangle\!\rangle$。

3.5 $k = 4$ 理论

存在四种基本理论，其满足 $k = 4$：4 级环面码、$\mathrm{U}(1)_2$ 和$\mathrm{U}(1)_{-2}$，以及一个由二次型定义的 (3.55) 的类似形式

$$q(c) = (\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)/4, \quad c = (\alpha, \beta) \in \mathbb{Z}_4^2. \tag{3.69}$$

该理论的手征中心荷为零，并且存在唯一的拓扑边界条件。为了计算该理论 n个副本的 $\mathcal{N}$，我们需要将其表示为

$$f(X) = \frac{1}{2^{2h}} \sum_{\alpha,\beta\in\mathbb{Z}_2^g} e^{i\pi(\alpha^T X\beta+\alpha^T X\alpha+\beta^T X\beta)} \tag{3.70}$$

关于 X的不变量的形式，其中它是一个对称二元矩阵。我们可以将 X化为典范形式（3.31），其中 D_0 可以是单位矩阵，也可以是 J。在后一种情况下f（X）$= 2^{-r}$，其中 r是 X的秩。在前一种情况下 f（X）$=$（-2）^{r}。综合以上结果，我们得到

$$\mathcal{N} = \sum_{h=0}^{\infty} \mu(h,p)\, 2^{2hn-h(h+1)/2} \sum_{r=0}^{h} N(h,r,2)\,(-1)^{nr} 2^{-nr},$$

这与 $k = 4$ 环面码的结果（3.29）仅相差因子 （-1）^{nr}。因此，$\mathcal{N}$在 n 个环面码副本的情况下，若 n 为偶数，则结果相同；若 n为奇数，则结果不同。对于 $n = 1$，2、3、4、5……，我们得到 $\mathcal{N} = 1$、22、18、36766、2261326、……。

3.6 $k = 2^m$ 理论

具有 $k = 8$ 的理论，除 8级环面码和 $\mathrm{U}(1)_{\pm 4}$ 外，还包括具有二次型 $q(c) = \pm 5c^2/8$、$c \in \mathbb{Z}_{k/2}$，以及类似于理论 (3.55) 和 (3.69) 的理论及其组合。这种模式对所有 $k = 2^m$ 都成立，$m \geq 3$；也就是说，六种基本理论可以 [41] 组合。我们不打算系统地考察所有这些情况，而是概述相应的必要步骤。

关键任务是用以下量的不变量来表示 $f(X)$ 在 (3.19) 中的形式：X。有两种方法可以做到这一点。较为系统的方法是将矩阵 X（其取值于 $\mathbb{Z}_{k/2}$）化为典范形式，然后计算关于 $c_i \in \mathscr{D}$的求和。取值于 $\mathbb{Z}_{2^{m-1}}$ 的对称矩阵的典范形式由 Conway 和 Sloane 研究过[54, 55]。他们的结果表明，X 总可以分块对角化为一个对角矩阵与一组 2×2 块的直和，其形式为 $2^e U$或 $2^e V$，其中 $e < m-1$ 和

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad V = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}. \tag{3.71}$$

对 X不变量的完整刻画（这是推导 3.50) 和 (3.53) 在 $k = 2^m$中的类比结果所必需的）包含在康韦–斯隆标准型中，且相当复杂。因此，关于一般 $f(X)$理论中 $\mathcal{G}_h$ 的显式形式 $k = 2^m$ ，我们留待今后的工作加以研究。

一种更务实的方法是表示 $X = X_0 + 2X_1 + \ldots$，并将矩阵 X_i 逐一化为典范形式，类似于我们在（3.31）中采用的方法。我们没有证明这种方法对于一般的 $k = 2^m$ 理论是充分的，但实践证明它确实可行，以下讨论的$\mathrm{U}(1)_4$ 和$\mathrm{U}(1)_8$的例子说明了这一点。

3.7 $\mathrm{U}(1)_4$

现在我们继续考察 $\mathrm{U}(1)_4^n \times \mathrm{U}(1)_{-4}^{\bar{n}}$ 陈-西蒙斯理论，其中具有 $k = 8$。这个例子类似于上文所考察的 $\mathrm{U}(1)_2$ 情形。拉格朗日子群 $\mathcal{C}$ 可以解释为定义在 $\mathbb{Z}_4$ 上的 II 型码——即所有码字的（如果 $\bar{n} \neq 0$ 则为修正后的）汉明重量都可被 8 [56, 57] 整除的自对偶码。为了计算其数量，我们需要计算

$$f(X) = \frac{1}{4^h} \sum_{c \in \mathbb{Z}_4^h} e^{i\pi c^T X c/2}. \tag{3.72}$$

首先，我们表示 $X = X_0 + 2X_1$，并将 X_0 化为分块对角形式。有两种情况需要考虑：(i) X_0 的非退化块可以化为大小为 r 的单位矩阵；(ii) X_0 的非退化块是辛形式 J。在情况 (i) 中，对于前 r 个变量 c_i ，我们有以下求和，

$$\frac{1}{2} \sum_{c_i \in \mathbb{Z}_2} e^{i\pi c_i^2 (1/2 + (X_1)^{ii})} = 2^{-1/2} e^{(2(X_1)^{ii} - 1) i\pi/4}. \tag{3.73}$$

其余的 $h - r$ 个变量 c_i 给出的结果与（3.59）相同。要使理论 $\mathrm{U}(1)_4^n \times \mathrm{U}(1)_{-4}^{\bar{n}}$ 存在拓扑边界条件， $n - \bar{n}$ 应当能被 8 整除，因此在所得理论中，相位因子 $e^{(2(X_1)^{ii} - 1)(n-\bar{n})^{i\pi/4}}$ 将变为平凡。

对于情况 (ii)，需要计算的求和为

$$\frac{1}{4} \sum_{a_1, a_2 \in \mathbb{Z}_2} e^{i\pi a_1 a_2 + (X_1)^{11} a_1^2 + (X_1)^{22} a_2^2} = 2^{-1} e^{i\pi (X_1)^{11} (X_1)^{22}}. \tag{3.74}$$

并且当 $n - \bar{n} = 0$ 模 8 时，相位因子再次为平凡因子。结合这两种情况，我们得到

$$\mathcal{G}_h = 4^{-h(h+1)/2} \sum_X f(X) = \sum_{r=0}^{h} N(h, r, 2) 2^{-h(h+3)/2 + r} 2^{-(n+\bar{n})r/2}, \tag{3.75}$$

and

$$\mathcal{N}(\mathrm{U}(1)_4^n \times \mathrm{U}(1)_{-4}^{\bar{n}}) = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{2^{-h(h+2)+(n+\bar{n})h} \sum_{r=0}^{h} N(h,r,2) 2^{r(1-(n+\bar{n})/2)}}{\prod_{i=1}^{\infty}(1+2^{-i}) \prod_{i=1}^{h}(1-2^{-i})}. \tag{3.76}$$

这个表达式应当可以表示成与（3.29） [57, 58]类似的形式。对于 $n = \bar{n}$ =1、2、3，.....我们得到 $\mathcal{N}$ = 2、10、134、5662，.....

3.8 $\mathrm{U}(1)_8$

我们的最后一个例子是 $\mathsf{U(1)}_8^n \times \mathsf{U(1)}_{-8}^{\bar{n}}$ 陈-西蒙斯理论，其满足 $k = 16$。我们需要计算

$$f(X) = \frac{1}{8^h} \sum_{c \in \mathbb{Z}_8^h} e^{i\pi c^T (X_0 + 2X_1 + 4X_2)c/4}. \tag{3.77}$$

对角化 X_0 并将 $c = c_0 + 2c_1 + 4c_2$ 按每个 c_0， c_1， $c_2 \in \mathbb{Z}_2^h$ 展开后，我们发现求和项不依赖于 c_2 ，而 c_1 则通过以下组合出现

$$e^{i\pi c_1^T (X_0)(1+c_0)} \tag{3.78}$$

这里我们用到了对于二元变量 $c_1 = c_1^2$。现在，我们像之前一样对 X_0 进行对角化。如果 X_0 的非退化块是单位矩阵，则这会强制 c_0 的前 r_0 个分量都等于 1。反之，如果 X_0 的非退化块是 J，则 c_0 的前几个分量必须为 0。无论哪种情况，涉及 a_0 的前 r 个分量的表达式都变为 1（这里用到了 $n - \bar{n}$ 能被 8 整除）。这给出以下因子$2^{-(n+\bar{n})r}$。其余计算与 $\mathsf{U(1)}_4$, 相同，得到

$$\mathcal{N}(\mathrm{U}(1)_8^n \times \mathrm{U}(1)_{-8}^{\bar{n}}) = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{2^{-3h(h+1)/2+3/2(n+\bar{n})h}}{\prod_{i=1}^{\infty}(1+2^{-i}) \prod_{i=1}^{h}(1-2^{-i})} \times \tag{3.79}$$
$$\sum_{r_0=0}^{h} N(h,r_0,2) 2^{r_0(r_0+1)/2 + r_0(h-r_0) - r_0(n+\bar{n})} \sum_{r_1=0}^{h-r_0} N(h-r_0, r_1, 2) 2^{(r_0+r_1-h) - r_1(n+\bar{n})/2}.$$

对于 $n = \bar{n} = 1, 2, 3, \ldots$ 我们得到 $\mathcal{N} = 3, 34, 1926, \ldots$

4 非阿贝尔拓扑量子场论

第2.2节概述的质量公式推导，以及对 [7] 更一般的构造，在非阿贝尔情形下仍然成立，但需假设 TBC 态$|\mathcal{C}\rangle$ （它们与 $\mathcal{T}$的拉格朗日代数一一对应）在 $\mathcal{H}^g$ 中张成模不变量空间，且 g 足够大。这个假设可以

改述为一种预期：在无限亏格极限下，模不变自举约束足够强大，能够识别具有给定手征代数的所有有理共形场论。重复推导非阿贝尔拓扑量子场论引力与边界共形场论系综之间的全息对偶，可得系综权重与在无限亏格处取值的 TBC 态范数成反比 [7]。一项重要进展是，文献 [40] 证明，在 g较大时，态 $|\mathcal{C}\rangle$ 彼此正交，且 $\langle\mathcal{C}|\mathcal{C}\rangle = \mathcal{D}^{g-1}|\mathrm{Aut}(\mathcal{C})|$，其中 $|\mathrm{Aut}(\mathcal{C})|$ 在 SymTFT 图像中可理解为边界上与 $\mathcal{C}$对应的拓扑线数量。经此简化，质量公式可写为

$$M(\mathcal{T}) = \sum_{\mathcal{C}} \frac{\mathcal{D}}{|\mathrm{Aut}(\mathcal{C})|} = \lim_{g\to\infty} \frac{\mathcal{D}^g}{|\mathrm{MCG}(\Sigma_g)|} \sum_{\gamma\in\mathrm{MCG}(\Sigma_g)} {}^g\langle 0|U_\gamma|0\rangle^g. \tag{4.1}$$

考虑到对所有 $\mathcal{C}$， $|\mathrm{Aut}(\mathcal{C})| = \mathcal{D}$，即可恢复阿贝尔情形。

若要将右端解释为对所有连通三维流形取平均，更自然的归一化方式是重新定义质量 $M \to M/\mathcal{D}$。我们选择采用当前的归一化方式，它给出了阿贝尔理论情形下拓扑边界条件的总数。

在一般的非阿贝尔情形中，映射类群作用于$\mathcal{H}^g$ （对于 $g > 1$）所得到的轨道是无限的；因此，式（4.1）中的平均仅在形式上有定义。当希尔伯特空间 $\mathcal{H}^g$ 是有限维时，式（4.1）中的和仍然是良定义的，因为它是将 $|0\rangle^g$ 投影到 $\mathcal{H}^g$的模不变子空间上所得的结果。

拓扑边界条件的数量也有类似的表达式，

$$\mathcal{N}(\mathcal{T}) = \lim_{g\to\infty} \frac{1}{|\mathrm{MCG}(\Sigma_g)|} \sum_{\gamma\in\mathrm{MCG}(\Sigma_g)} \mathrm{Tr}_{\mathcal{H}^g}(U_\gamma). \tag{4.2}$$

对于非阿贝尔理论， M 和 $\mathcal{N}$ 是不同的。在拓扑量子场论引力的语境下，前者是使边界系综的权重之和为一所需的归一化因子，而后者是婴儿宇宙希尔伯特空间的维数。

将共享同一手征代数的二维共形场论进行加权求和，以此定义质量，这一做法此前已在 [59] 框架顶点算子代数（顶点算子代数）的背景下提出。下面我们通过对拓扑求和来回顾并重现他们的结果。

4.1 $\mathrm{Vir}^{c=1/2}$

让我们考虑三维伊辛范畴——用于计算 $c = 1/2$ 维拉索罗代数 $\mathrm{Vir}^{c=1/2}$ 的保形块的三维拓扑量子场论。与阿贝尔情形一样，我们将考虑 n 份伊辛拓扑量子场论及其共轭理论的 $\bar{n}$ 份，并将这一理论记作 $\mathcal{T}_{n,\,\bar{n}}$。

在这样的理论中，当 $n-\bar{n}$ 可被 16整除时，拓扑边界条件才存在。给定的拓扑边界条件定义了一个中心荷为 $c_L=n/2$，$c_R=\bar{n}/2$ 且手征代数为 $\mathrm{Vir}_{c=1/2}^{\otimes n}\times\mathrm{Vir}_{c=1/2}^{\otimes\bar{n}}$ 的二维共形场论。聚焦于手征情形 $\bar{n}=0$，通过分析相应的顶点算子代数，[59] 得到了质量（采用我们的归一化方式），参见（3.29）和（5.19），

$$M(\mathcal{T})=\sum_{\mathcal{C}}\frac{\mathcal{D}}{|\mathrm{Aut}(\mathcal{C})|}=\sum_{k\geq 1}2^{k(k-1)/2+1}\sigma(k). \tag{4.3}$$

这里 $\sigma(k)$ 是所谓 D-码的数目——线性二元三重偶码 $[n,k]$，长度为 n，且具有 k 个生成元，其中包含 $c_{\vec{1}}=(1,\ldots,1\underbrace{\qquad\qquad}_{n})$ 作为其中一个码字。D-码的出现并不完全令人意外，因为任何框架顶点算子代数（即具有 $c_L=n/2$，$c_R=0$ 和手征代数 $\mathrm{Vir}_{c=1/2}^{\otimes n}$ 的二维共形场论）都定义了这样一个码 [60]。

通过考虑非零的 $\bar{n}$，我们略微推广（4.3），以定义 $\sigma(k)$ 为如下线性二元码的总数：其类型为 $[n+\bar{n},k]$，即长度为 $n+\bar{n}$、恰好具有 k 个生成元，且包含码字

$$c_{\vec{1}}=(\underbrace{1,\ldots,1}_{n}|\underbrace{1,\ldots,1}_{\bar{n}}), \tag{4.4}$$

并且相对于修正汉明重量（3.68）为三重偶，

$$w(c)=\sum_{1}^{n}c_i-\sum_{n+1}^{n+\bar{n}}c_i,\qquad c=(c_1,\ldots,c_n|c_{n+1},\ldots,c_{n+\bar{n}}). \tag{4.5}$$

（4.3）对于 $n,\bar{n}\neq 0$ 情形在场论一侧的论证将另文给出。下面我们由（4.1）通过对拓扑求和推导出这一结果。

伊辛拓扑量子场论的希尔伯特空间 $\mathcal{H}^g$ 由共形块张成，这些共形块可以用 theta 函数 [61],显式表示

$$\|(a,b)\rangle\rangle=\vartheta^{1/2}\begin{bmatrix}b/2\\a/2\end{bmatrix}(\Omega|0)/\Phi(\Omega)/2^{g/2}. \tag{4.6}$$

这里 a，b 是长度为 g，Ω 是黎曼曲面 Σ_g的模参数，且 Φ(Ω) 是某个 a，b无关因子。这些态经过规范归一化，而亏格 g 真空态为，参见（2.14），

$$|0\rangle^g=\frac{1}{\mathcal{D}^{g/2}}\sum_{a\in\mathbb{Z}_2^g}\|(a,0)\rangle\rangle\,,\qquad \mathcal{D}=2. \tag{4.7}$$

与环面码的情况一样，也存在一个类似的基 $|(\alpha,\ \beta)\rangle$，它与 (4.6) 之间的关系由 a 的傅里叶变换给出。相关讨论将在别处进行。

映射类群在 U 上的作用 $\mathcal{H}^g$ 见 [61, 62]。存在一个正合序列

$$1 \to U(H_g) \to U(\mathrm{MCG}(\Sigma_g)) \xrightarrow{\rho} \mathrm{Sp}(2g, \mathbb{Z}_2) \to 1, \tag{4.8}$$

其中 H_g 是MCG(Σ_g) 的子群，它对 $\mathbb{Z}_2$值闭链平凡作用，这些闭链位于$H^1(\Sigma_g, \mathbb{Z}_2)$。在模去相位因子的意义下，群 $\mathrm{Sp}(2g, \mathbb{Z}_2)$ 通过标记上的仿射作用作用于基 (4.6)，

$$(a, b) \to \gamma\,(a, b) + v(\gamma), \qquad \gamma \in \mathrm{Sp}(2g, \mathbb{Z}_2), \tag{4.9}$$

其中 $v(\gamma)$ 是长度为 $2g$ 的二元向量，它仅依赖于 γ，并且所有代数运算均理解为模 2。 ρ 的核是 $U(\mathrm{MCG}(\Sigma_g))$ 的正规子群，它以纯相位作用于基元素 (4.6)。这一作用对后文至关重要。

采用与附录B中相同的逻辑，正合序列 (4.8) 可用于将对 $U(\mathrm{MCG}(\Sigma_g))$ 在 (4.1) 中的平均改写为两个平均，分别关于 $\mathrm{Ker}(\rho)$ 与$\mathrm{Sp}(2g, \mathbb{Z}_2)$。因此，质量可写成如下形式

$$M = \sum_{a=0}^{\infty} \mu(a, 2)\, \mathcal{D}^a \mathcal{G}_a, \qquad \mathcal{D} = 2^{n+\bar{n}}, \tag{4.10}$$

其中

$$\mathcal{D}^h \mathcal{G}_h = \frac{\mathcal{D}^h}{|\mathrm{Ker}(\rho)|} \sum_{U \in \mathrm{Ker}(\rho)} {}^h\langle 0|U|0\rangle^h. \tag{4.11}$$

推导这一结果时，我们利用了以下事实： U_{γ_h}对于 $\gamma_h = \mathbf{e}^h \oplus \mathbf{s}^{g-h}$，其作用于 $\|(a, b)\rangle\rangle$ 时，只需将$a_i \leftrightarrow b_i$ 替换为 $h < i \le g$；而 $\mathbf{Ker}(\rho)$ 中的元素则通过纯相位起作用。

在上式中， $|0\rangle^h$ 表示完整理论 $\mathcal{T}_{n,\bar{n}}$ 中亏格为 h 的真空态。鉴于 $\mathbf{Ker}(\rho)$ 中的元素作用于 $\|(a,\mathbf{0})\rangle\rangle$ 时会产生相位， $\mathcal{D}^h \mathcal{G}_h$ 便等于形如以下形式的态的总数

$$\|(a_1, 0)\rangle\rangle \otimes \cdots \otimes \|(a_n, 0)\rangle\rangle \otimes \overline{\|(a_{n+1}, 0)\rangle\rangle} \otimes \cdots \otimes \overline{\|(a_{n+\bar{n}}, 0)\rangle\rangle}, \quad a_i \in \mathbb{Z}_2^g, \tag{4.12}$$

在所有相位因子作用下保持不变。 $\mathrm{Ker}(\rho)$ 对态（4.12）的作用方式，以及该态在 $\mathrm{Sp}(2g,\ \mathbb{Z}_2)$作用下的轨道，都取决于线性无关差的数量 $a_i - a_j$ 模 2。假设有 k 个线性无关差；那么我们便可在差空间中引入一组基 $e_j \in \mathbb{Z}_2^g$，其中包含$j = 1$、.....、 k，使得

$$a_i = a_1 + \sum_{j=1}^{k} e_j\, G_i^j, \tag{4.13}$$

其中 $G_i \in \mathbb{Z}_2^k$ 且所有代数运算均模 2。选取一组基后，我们可以将 a_i（它们是长度为 g 的二进制串）改写为长度为 k 的二进制串，记作 G_i。因此，态（4.12）由一个 $k \times (n+\bar{n})$ 二进制矩阵 G参数化。 2^{k+1}个生成元属于 $\mathrm{Ker}(\rho)$，每个生成元都使（4.12）乘上一个相位

$$e^{\frac{i\pi w(c)}{8}}, \tag{4.14}$$

其中， $c \in \mathbb{Z}_2^{n+\bar{n}}$是矩阵 G各行的任意线性组合（模 2），并通过附加一行单位矩阵 $c_{\bar{1}}$进行扩展； $w(c)$是公式 (4.5) 中定义的修正汉明重量。附加由 $n+\bar{n}$ 个单位矩阵组成的行很容易理解：将 (4.12) 中的所有态 $\|(a_i, 0)\rangle\rangle$ 同时乘以相同的相位 $e^{i\pi/4}$ 是一种对称性，因为 $n+\bar{n}$ 可被 16 整除（因而也可被 8 整除）。将扩展后的 $(k+1) \times (n+\bar{n})$矩阵视为二进制 $[n+\bar{n}, k+1]$ 码的生成矩阵，所有相位 (4.14) 均为平凡相位意味着该码是三重偶的，即所有码字的修正汉明重量都可被 8 整除。

不难看出，选择不同的差分基 e_j 或在（4.13）中选择不同的“参考元”，例如 $a_j = a_2 + \sum_{j=1}^{k} e_j G_i^j$，会得到一个生成相同码的等价矩阵 G 。考虑一个等价的生成矩阵 G，其中参考元和差分保持不变 e_j，会得到另一个状态（4.12），该状态同样在$\mathrm{Ker}(\rho)$下保持不变。为了计算对应于同一码的状态总数，我们注意到 a_1 可以取为任意一个 2^g 状态， $a_1 + e_1$可以取为任意一个 $2^g - 1$ 状态， $a_1 + e_2$ 可以取为任意一个 $2^g - 2$ 状态，依此类推。因此，对于（4.11），我们得到

$$\mathcal{D}^a \mathcal{G}_a = \sum_{k \geq 0} 2^g \prod_{i=0}^{k-1} (2^g - 2^i) \sigma(k+1). \tag{4.15}$$

目前尚无计算具有 k个生成元的三重偶D码数量的闭式表达式 σ（k），但对于较小的 k 和 $n+\bar{n}$，可以使用计算机代数和以下表示来进行计算

$$\sigma(k+1) = \frac{1}{K \prod_{i=0}^{k-1} (K - 2^i)} \sum_{\substack{n_0 + \cdots + n_{K-1} = n, \\ n_0, \ldots, n_{K-1} \geq 0}} \sum_{\substack{\bar{n}_1 + \cdots + \bar{n}_{K-1} = \bar{n}, \\ \bar{n}_0, \ldots, \bar{n}_{K-1} \geq 0}} \frac{n!}{n_0! \ldots n_{K-1}!} \frac{\bar{n}!}{\bar{n}_0! \ldots \bar{n}_{K-1}!} f(n_\alpha, \bar{n}_\alpha),$$

$$f(n_\alpha, \bar{n}_\alpha) = \begin{cases} 1, & \mathrm{rank}(\mathsf{G}) = k+1, \\ & (n_0 - \bar{n}_0, \ldots, n_{K-1} - \bar{n}_{K-1}) \cdot c = 0 \bmod 8, \text{ for any } c = v^T G \bmod 2,\ v \in \mathbb{Z}_2^{k+1}, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

该公式需要作几点说明。这里 $K = 2^k$，而矩阵 G 是（$k+1$） $\times K$由 $\alpha = 0$，……，$K-1$ 的二进制表示组成，并由码字

长度为 K 的恒等式扩展而成。最后，矩阵 G 仅包含 G 中满足 $n_\alpha + \bar{n}_\alpha > 0$ 的列。其秩(G)应在 $\mathbb{Z}_2$ 上的代数中计算（准确地说，是在伽罗瓦域 F_2 上）。该公式的推导及解释都很直接：n_α，$\bar{n}_\alpha$ 分别表示 $a_1 + e_j\alpha^j$ 出现在集合 $\{a_1, \ldots, a_n\}$ 和 $\{a_{n+1}, \ldots, a_{n+\bar{n}}\}$ 中的次数，其中 α^j 是 α 的二进制表示。

值得注意的是，迄今为止 $g(g+1)/2 \geq 2^g - 1$，即 $g = 1$，2，且对于任意n，$\bar{n}$ (4.15) 与朴素表达式一致，参见 (3.77)，

$$\mathcal{G}_a = \frac{1}{8^{g(g+1)/2}} \sum_X f(X), \quad f(X) = \frac{1}{2^g} \sum_{c \in \mathbb{Z}_2^g} e^{i\pi c^T X c/4}, \tag{4.16}$$

其中求和遍及取值于 $g \times g$ 的对称 X 矩阵 $\mathbb{Z}_8$。该表达式源于映射类群在 $U(1)_1$ 特征标 $\vartheta\left[{}^{b/2}_{a/2}\right](\Omega|0)$上的作用；朴素来看，这表明 $U(\mathrm{MCG}(\Sigma_g))$ 在真空态上的作用为$\mathrm{Sp}(2g, \mathbb{Z}_{16})$。对于$g \geq 3$ 相位生成元的数量 (4.14) 大于$\mathrm{Sp}(2g, \mathbb{Z}_{16})$中的数量，这表明这种说法并不正确。

回到质量公式，利用 (3.25) 可以直接得到

$$\sum_{a=0}^{\infty} \mu(a, 2) 2^a \prod_{i=0}^{k-1} (2^a - 2^i) = 2^{k(k+1)/2+1}, \tag{4.17}$$

从而重新得到 (4.3)。当 $n = \bar{n} = 1$较小时，2，3，4，5，6，.....我们得到

$$\mathcal{N}(\mathcal{T}_{n=\bar{n}}) = 2, 10, 134, 4746, 419862, 88276726, \ldots \tag{4.18}$$

这与通过对所有由凝聚到 n 份环面码中构造出的拓扑边界条件求和而进行的蛮力计算一致，正如 [8] 的补充材料所述。对于 $n = \bar{n} = 1$，2、3（4.3）与 U（1）$_4^n \times U$（1）$_{-4}^{\bar{n}}$ 理论的情形相同，因为对于较小的 $n = \bar{n} \leq 3$，（4.15）与对（3.72）取平均的结果相同。对于具有 $n = 16$、$\bar{n} = 0$ 的手征理论，我们得到 $\mathcal{N}$（$\mathcal{T}_{16}$）$= 140668954142$，这与 [63]，的结果一致；他们计算了该情形下的 σ（k）。

5 五维阿贝尔2形式理论

质量的概念以及通过对所有连通拓扑求和来计算它的方法可以推广到其他维度。这里我们讨论由作用量指定的五维阿贝尔 BF 型二形式理论的情形

$$\frac{K_{ij}}{4\pi} \int B^i \wedge dB^j, \tag{5.1}$$

其中 K_{ij} 是一个 $g \times g$ 整数值反对称矩阵， B^i 是二形式。该理论与三维玻色 Chern-Simons 理论密切相关。类似于三维情形中 K矩阵是格 Λ的格拉姆矩阵，在五维中 K_{ij} 是辛格 $\Lambda \subset \mathbb{R}^g$的格拉姆矩阵，即整数值斜对称形式。与三维类似，该理论的曲面算符由判别群$c \in \mathscr{D} = \Lambda^*/\Lambda$的元素标记，并且（在下文讨论的等同意义下）拓扑边界条件由拉格朗日子群 $\mathcal{S} \subset \mathscr{D}$ 指定——即元素 $c \in \mathcal{S}$ 的极大无反常子群，这些元素具有由 K定义的平凡相互编织。这些子群的大小为 $\mathcal{D} = |\mathscr{D}|^{1/2}$，它必须是整数，拓扑边界条件才能存在。

与三维情形类似，拉格朗日子群 $\mathcal{C}$ 可以解释为经典偶自对偶码；在五维，拉格朗日子群 $\mathcal{S}$ 可以解释为经典辛自对偶码（极大各向同性子空间） [14]。后者定义了作用于 g 个量子位上的量子稳定子码，从而为 $\mathcal{S}$ [14, 64]提供另一种解释。

任意取整数值的反对称 K_{ij} 都可以化为典范形式，此时理论（5.1）分解为若干理论的乘积 $\mathcal{T}_k$ ，其作用量为

$$\frac{k}{4\pi} \int B \wedge dC, \tag{5.2}$$

这在 IIB 弦理论位于 $\mathrm{AdS}_5 \times \mathbb{S}^5$ [65]时的低能极限中十分熟悉。这些理论及其组合已知可以描述四维规范理论的全局对称性。特别地，由 g个（5.2）副本组成的理论，其拉格朗日子群对应于具有规范代数 $su(k)^g$[66, 67]的不同四维杨-米尔斯理论。

在一个符号数为零的四维流形上由 g 个（5.2）副本构成的理论，其第二上同调群的大小为 $|H_2(M_4, \mathbb{Z})| = 2n$ ，与在亏格为 g 的黎曼曲面上由 n 个 k 级环面码副本构成的三维理论密切相关。这一观察可用于量子化五维理论，并定义类似于基（2.13）的基，从而明确展现四维流形的映射类群作用；该映射类群是 $\mathrm{O}(n, n, \mathbb{Z})$ 的子群。类似于（2.15）， $\gamma \in \mathrm{O}(n, n, \mathbb{Z})$ 通过 γ mod k 在 $\mathbb{Z}_k^{2g}$ 中的向量上施加基本作用。 此外，这一五维理论的拉格朗日子群$\mathcal{S}$ 对应于三维环面码的辛码 $\mathcal{S}$ ，这也说明了对二者 [14]采用相同记号的合理性。

拓扑量子场论引力与 g 个五维理论副本（5.2）在拓扑上求和后，与由拉格朗日子群 $\mathcal{S}$ 所规定的边界系综之间的全息对偶，1.2的推广立即给出一个质量公式，

$$\mathcal{N}(\mathcal{T}_k^{\otimes g}) = \sum_{\mathcal{S}} 1 = \lim_{n\to\infty} \frac{\mathcal{D}^n}{|\mathrm{O}(n, n, \mathbb{Z}_k)|} \sum_{\gamma \in \mathrm{O}(n,n,\mathbb{Z}_k)} {}^n\langle 0|U_\gamma|0\rangle^n. \tag{5.3}$$

这里，$|0\rangle^n$ 是真空态，即定义在一个“把手体”上的拓扑量子场论路径积分；该把手体是一个与$\#^n$（$\mathbb{S}^2 \times \mathcal{B}^3$）共边界的流形。因此，除去 [14], 中讨论的细微问题，右端可以解释为对闭连通五维流形求和，从而得到拓扑量子场论引力的重整化配分函数。这些细微问题并不影响对5.3的论证，该论证只依赖于以下事实：由拉格朗日子群（自对偶辛码）$|\mathcal{S}\rangle$ 定义的态 $\mathcal{S}$ 张成了在$\mathrm{O}(n,n,\mathbb{Z}_k)$作用下所有不变量组成的空间。

由此可知，$\mathcal{N}$ 计数的是阿贝尔五维理论的拓扑边界条件数（5.1），这些拓扑边界条件由夹心构造所定义的状态加以标识。也就是说，如果两个拓扑边界条件对应的状态仅相差一个归一化因子，就认为它们等价。

为计算 $\mathcal{N}$，我们首先注意到，与复合 k 的（3.4）分解类似，$\mathrm{O}(n,n,\mathbb{Z}_k)$ 可直接得到

$$\mathcal{N}(\mathcal{T}_k^{\otimes g}) = \prod_i \mathcal{N}(\mathcal{T}_{k_i}^{\otimes g}), \quad k = \prod_i k_i, \tag{5.4}$$

其中 $k_i = p_i^{m_i}$是素数 p_i的幂。因此，在下文中，我们可以假设$k = p^m$ 是素数 p。

真空态 $|0\rangle^n$ 在子群 $\Gamma_0(n,n,\mathbb{Z}_k) \subset \mathrm{O}(n,n,\mathbb{Z}_k)$作用下保持不变。与（3.13）的情形一样，利用 Γ_0 中的任意 $\gamma \in \mathrm{O}(n,n,\mathbb{Z}_k)$相似变换，可将其化为如下形式

$$\gamma_h(X) = \mathbf{e}(X) \oplus \mathbf{s}^{n-h}, \quad \mathbf{e}(X) = \begin{pmatrix} 1_h & 0 \\ pX & 1_h \end{pmatrix}, \quad \mathbf{s}^{n-h} = \begin{pmatrix} 0 & 1_{n-h} \\ 1_{n-h} & 0 \end{pmatrix}, \tag{5.5}$$

其中 X 是反对称的。这意味着 $X_{ii} = 0$，包括 $p = 2$的情形，见附录（E）。现在我们引入测度，参见（3.17），

$$\nu(h,n,p) = \frac{|\Gamma_0(n,n,\mathbb{Z}_k)|^2 p^{(m-1)h(h-1)/2}}{|\mathrm{O}(n,n,\mathbb{Z}_k)||S_h|} = \begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}_p \frac{p^{(n-h)(n-h-1)/2}}{\prod_{i=0}^{n-1}(p^i+1)}, \tag{5.6}$$

其中，S_h 是保持 γ_h（X）形式的 Γ_0 子群，

$$|S_h| = |\mathrm{GL}(h,\mathbb{Z}_k)||\mathrm{GL}(n-h,\mathbb{Z}_k)|k^{h(n-h)} \times k^{h(h-1)/2} \times k^{h(n-h)}. \tag{5.7}$$

与三维情形类似，测度（5.6） m无关。在 $n \to \infty$ 极限下，它还可进一步简化，参见（3.22），

$$\nu(h,p) = \lim_{n\to\infty} \nu(h,n,p) = \frac{p^{-h(h-1)/2}}{\prod_{i=0}^{\infty}(1+p^{-i})\prod_{i=1}^{h}(1-p^{-i})}. \tag{5.8}$$

现在质量公式为

$$\mathcal{N}(\mathcal{T}_k^{\otimes g}) = \sum_{h=0}^{\infty} \nu(h,p)\mathcal{D}^h \mathcal{F}_h, \qquad \mathcal{D} = k^g, \tag{5.9}$$

其中我们引入了

$$\mathcal{F}_h = p^{(1-m)h(h-1)/2} \sum_X (f(X))^g \,. \tag{5.10}$$

Here

$$f(X) = {}^h\langle 0|U_\gamma|0\rangle^h = \frac{1}{k^{2h}} \sum_{a,b\in\mathbb{Z}_k^{\tilde{a}}} e^{\frac{2\pi i p}{k} a^T X b}, \quad k = p^m. \tag{5.11}$$

通过表示 $X = X_0 + pX_1 + \ldots$，然后迭代地将 X_i 化为形式（3.31），其中每个 D_{r_i} 都是大小为 r_i的标准辛形式

$$D_{r_i} = \begin{pmatrix} 0 & -1_{r_i/2} \\ 1_{r_i/2} & 0 \end{pmatrix}. \tag{5.12}$$

大小为 h的秩为 r （必须为偶数）矩阵的数量为

$$N(h,r,p) = \frac{|\mathrm{GL}(h,\mathbb{Z}_p)|}{|\mathrm{Sp}(r,\mathbb{Z}_p)||\mathrm{GL}(h-r,\mathbb{Z}_p)|p^{r(h-r)}} = \tag{5.13}$$

$$\frac{\prod_{i=1}^{h}(1-p^{-i})}{\prod_{i=1}^{h-r}(1-p^{-i})} p^{hr-r(r+1)/2} \prod_{i=0}^{r/2} \left(1-p^{-2i}\right). \tag{5.14}$$

当 r为奇数时，我们可以将此公式扩展为假设 N（h、 r、 p） $= 0$。

将 X 化为（3.31）的形式后，对 a， b 在（5.11）中的求和可以很容易地计算为

$$f(h, r_0, \ldots, r_{m-2}) = p^{-\sum_{i=0}^{m-2}(m-1-i)r_i}, \tag{5.15}$$

从而，参见（3.33），

$$\mathcal{N}(\mathcal{T}_k^{\otimes g}) = \sum_{h=0}^{\infty} \nu(h,p)\, p^{hmg}\, \mathcal{F}_h, \tag{5.16}$$

$$\mathcal{F}_h = \sum_{r_0=0}^{h} p^{-h(h-1)/2} N(h,r_0,p) \sum_{r_1=0}^{h-r_0} p^{-(h-r_0)(h-r_0-1)/2} N(h-r_0,r_1,p) \times$$

$$\cdots \times \sum_{r_{m-2}=0}^{h-\tilde{r}} p^{-(h-\tilde{r})(a-\tilde{r}-1)/2} N(h-\tilde{r},r_{m-2},p)\, p^{-n\sum_{i=0}^{m-2}(m-1-i)r_i}, \quad \tilde{r} = r_0 + \cdots + r_{m-3}.$$

当 $k=p$ 时，我们很容易得到

$$\mathcal{N}(\mathcal{T}_p^{\otimes g}) = \sum_{a=0}^{\infty} \frac{p^{hg-h(h-1)/2}}{\prod_{i=0}^{\infty}(1+p^{-i})\prod_{i=1}^{h}(1-p^{-i})} \tag{5.17}$$

$$= \prod_{i=1}^{g}(p^i+1) = \frac{|\mathrm{Sp}(2g,\mathbb{Z}_p)|}{|\Gamma_0(2g,\mathbb{Z}_p)|}, \tag{5.18}$$

与陪集的大小相匹配，与 [38]一致。

当 $k=p^2$ 我们得到（参见（3.29）时，

$$\mathcal{N}(\mathcal{T}_{p^2}^{\otimes g}) = \sum_{h=0}^{\infty} \nu(h,p)\, p^{2hg-h(h-1)} \sum_{r=0}^{h} N(h,r,p)\, p^{-gr} =$$

$$\sum_{\tilde{g}=0}^{g} p^{\tilde{g}(\tilde{g}+1)/2}\sigma(\tilde{g}), \quad \sigma(\tilde{g}) = \prod_{i=1}^{\tilde{g}} \frac{p^{2(\tilde{g}+1-i)}-1}{p^i-1}, \tag{5.19}$$

其中， $\sigma(\tilde{g})$ 是长度为 g 且恰有 $\tilde{g}$ 个生成元的辛 $[g,\tilde{g}]$ 码的数量。该表达式与 [14]中推导出的 $\mathrm{Sp}(2g,\ \mathbb{Z}_{p^2})$ 的 $g+1$ 轨道之和相匹配。

6 总结与展望

本文提出了三维拓扑量子场论中质量的概念，将其定义为拓扑边界条件的计数，并按照由相关对称群大小所决定的对称性因子进行加权（另见 [40, 59]）。在拓扑量子场论引力——即对所有三维拓扑上的拓扑量子场论求和——与边界共形场论系综之间的全息对偶中，质量由拓扑量子场论配分函数在通过海加德分解得到的所有连通闭三维流形上的平均给出。我们利用这一规定计算了若干类拓扑量子场论的质量。

首先聚焦于阿贝尔情形，此时质量可简化为对拓扑边界条件（TBC）的简单计数。我们展示如何计算任意玻色理论的质量。接着，我们定义非阿贝尔情形下的质量，并计算 $n+\bar{n}$ 个伊辛模张量范畴的质量。最后，我们将这一构造推广至五维，并计算任意五维阿贝尔二形式理论的拉格朗日子群数量。

从概念层面看，本文提出的质量公式推广了关于码、格和 theta 函数的经典质量公式 [54]。特别是，某些自对偶码的情形自然地出现在本文所研究的阿贝尔陈–西蒙斯理论中，

而关于偶自对偶格的类似结果——史密斯–闵可夫斯基–西格尔质量公式——据推测应在陈–西蒙斯能级趋于无穷时出现，这一方向留待未来研究。

我们的结果进一步证实，通过 [7] 中的亏格约化，对所有亥姆霍兹分解求得的引力体积求和是良定义的，并且给出了预期结果。从实践角度而言，本文为玻色阿贝尔理论以及伊辛拓扑量子场论的多个副本中的拓扑边界条件数量，提供了明确且新颖的表示。正如数学中的质量公式可用于对给定类型的所有码或格进行分类 [3, 54, 68], 已知的质量可用于验证给定理论的拓扑边界条件列表是否完备。我们指出，本文推导出的拓扑边界条件数量的显式表达式，隐含地假设拓扑边界条件存在。在不存在拓扑边界条件时使用这些表达式，例如当1.1式中的 n 不能被8整除时，会导致毫无意义的结果。

在一项平行的技术进展中，我们通过证明映射类群在拓扑量子场论希尔伯特空间上的作用可约化为$\mathrm{Sp}(2g,\mathbb{Z}_k)$（其中某个 k满足 $\Gamma_0(2g,\mathbb{Z}_k)$ 稳定真空）当且仅当该理论具有拓扑边界条件，从而扩展了玻色阿贝尔理论的同余性质。作为一项推论，我们还给出了 [6], 所得结果的一种新证明，表明拓扑边界条件存在，当且仅当所有高阶中心荷均为零（见附录C）。我们还证明，阿贝尔玻色理论 $\mathcal{T}_p$在 p 为奇素数时，其在任意连通闭三维流形上的配分函数，等于其在某个特定透镜空间连通和上的配分函数。

我们的工作提出了若干尚待解答的问题。一个紧迫且主要涉及技术细节的问题是，如何通过求出$k=2^m$ 的闭式表达式，完成对 Frobenius-Schur 指数为 $f(X)$ 的理论的分析，以及 $\mathcal{G}_h$。另一个有趣的问题是，从表达式（2.12）出发，计算拓扑边界条件的数量；该表达式计算的是婴儿宇宙希尔伯特空间的维数。一个更具概念性且更具挑战性的方向，是将我们的研究拓展到其他非阿贝尔理论，例如 $SU(2)_k$陈-西蒙斯理论；在该理论中，映射类群的像可能是无限的。归根结底，本文提出的思想或可应用于中心荷较大的维拉索罗拓扑量子场论，从而为三维量子引力带来新的认识。

致谢

我们感谢 Ahmed Barbar、Meng Cheng 和 Sahand Seifnashri 的讨论。A.D. 感谢 IBM 爱因斯坦研究员基金和美国国家科学基金会通过拨款 2310426 提供的支持。

S_h 的大小

在本节中，我们始终假设 $k = p^m$，其中 p 是素数。我们需要知道在 $\mathbb{Z}_k$ 上可逆 $g \times g$ 矩阵群的阶，

$$|\mathrm{GL}(g, \mathbb{Z}_k)| = p^{(m-1)g^2} \prod_{i=0}^{g-1} (p^g - p^i) = p^{(m-1/2)g^2 - g/2} \prod_{i=1}^{g} (p^i - 1). \tag{A.1}$$

群 $\mathrm{Sp}(2g, \mathbb{Z}_k)$ 定义为保持斜对称形式不变的矩阵群

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1_g \\ 1_g & 0 \end{pmatrix}. \tag{A.2}$$

其阶为

$$|\mathrm{Sp}(2g, \mathbb{Z}_k)| = p^{(m-1)g(2g+1)+g^2} \prod_{i=1}^{g} (p^{2i} - 1). \tag{A.3}$$

接下来，我们定义子群 $\Gamma_0(2g, \mathbb{Z}_k)$，它由所有形如以下形式的矩阵构成

$$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} \in \Gamma_0(2g, \mathbb{Z}_k) \subset \mathrm{Sp}(2g, \mathbb{Z}_k). \tag{A.4}$$

该子群是真空态的稳定子（2.14），该态可以写成码态 $|\mathcal{S}_0\rangle$，由辛码定义为 $(a_1, \ldots, a_g, 0, \ldots, 0) \in \mathcal{S}_0$。该群的大小很容易计算，

$$|\Gamma_0(2g, \mathbb{Z}_k)| = |\mathrm{GL}(g, \mathbb{Z}_k)| p^{mg(g+1)/2} = p^{(3m-1)/2g^2 + (m-1)g/2} \prod_{i=1}^{g} (p^i - 1). \tag{A.5}$$

对于 $\gamma_h(X)$ 由（3.13）给出，我们现在将其明确写为

$$\gamma_h(X) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1_h & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0_{g-h} & 0 & -1 \\ \hline pX & 0 & 1_h & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0_{g-h} \end{array}\right), \tag{A.6}$$

我们定义满足以下条件的矩阵子群 $\gamma_0 \in S_a \subset \Gamma_0(2g, \mathbb{Z}_k)$

$$\gamma_h(X)\gamma_0 = \tilde{\gamma}_0 \gamma_h(\tilde{X}) \tag{A.7}$$

˜对于某个 $\tilde{\gamma}_0 \in \Gamma_0(2g,\ \mathbb{Z}_k)$ 和 X。因此我们发现，元素 S_a 是任意形如以下形式的矩阵

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & b_{11} & b_{12} \\ 0 & a_{22} & b_{21} & 0 \\ 0 & 0 & d_{11} & 0 \\ 0 & 0 & d_{21} & d_{22} \end{pmatrix} \in \Gamma_0(2g, \mathbb{Z}_k), \tag{A.8}$$

当 $\tilde{X} = a_{11}^T X a_{11}$ 时。要计算这类矩阵的数量，我们需要考虑到，块 A 是任意可逆的 $g \times g$ 矩阵，而块 $A^{-1}B$ 是对称的，其他方面则任意。因此我们得到

$$|S_h| = |\mathrm{GL}(h, \mathbb{Z}_k)||\mathrm{GL}(g-h, \mathbb{Z}_k)| k^{h(g-h)} \times k^{h(h+1)/2} \times k^{h(g-h)}. \tag{A.9}$$

$$\tag{A.10}$$

这个公式应作如下理解：所有可逆 a_{11}的数量、所有可逆 a_{22}的数量、所有 a_{12}的数量、所有对称 b_{11}的数量、所有可能的b_{12} 的数量（我们统计矩阵 B，而不是 $A^{-1}B$，因为可能矩阵的数量相同）。

$\mu(h,\ g,\ k)$ 的最终表达式涉及高斯二项式系数，其定义如下

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_p = \prod_{i=0}^{k-1} \frac{p^{n-i}-1}{p^{k-i}-1} = \frac{(1-p^n)(1-p^{n-1})\cdots(1-p^{n-k+1})}{(1-p^k)(1-p^{k-1})\cdots(1-p)}. \tag{A.11}$$

B 关于 $\mathrm{Sp}(2g,\ \mathbb{Z}_{p^m})$ 与 $\mathrm{Sp}(2g,\ \mathbb{Z}_p)$ 上的平均

对双陪集 $\mathscr{C}_g = \Gamma_0(2g,\ Z_k)\backslash \mathrm{Sp}(2g,\ \mathbb{Z}_k)/\Gamma_0(2g,\ Z_k)$ 求平均可以采用两种方法。第一种方法（正文中已讨论）是选取形如 $\gamma_a(X) = \mathbf{e}(X) \oplus \mathbf{s}^{g-a}$ 的代表元（见 (3.13)），然后对所有代表元求和。另一种方法是使用正合序列

$$1 \to \Gamma_p^{(m)} \to \mathrm{Sp}(2g, \mathbb{Z}_{p^m}) \xrightarrow{\rho} \mathrm{Sp}(2g, \mathbb{Z}_p) \to 1, \tag{B.1}$$

其中 Γ_p^m 是模 p^m、级别为 p 的主同余子群，即由形如 $\mathbb{I} + pA$ 的矩阵组成的群，其中 A 的元素属于 $\mathbb{Z}_{p^m}$。$\Gamma_p^{(m)}$在 $\mathrm{Sp}(2g,\ \mathbb{Z}_{p^m})$中的像——即映射 ρ 从 $\mathrm{Sp}(2g,\ \mathbb{Z}_{p^m})$到 $\mathrm{Sp}(2g, \mathbb{Z}_p)$的核——是 $\mathrm{Sp}(2g,\ \mathbb{Z}_{p^m})$的正规子群。因此，对 $\mathrm{Sp}(2g,\ \mathbb{Z}_{p^m})$取平均可以分为两个

步骤（顺序不限）：对 $\mathrm{Sp}(2g,\ \mathbb{Z}_p)$取平均，以及对$\Gamma_p^{(m)}$在 $\mathrm{Sp}(2g,\ \mathbb{Z}_{p^m})$中的像取平均，

$$\frac{1}{|\mathrm{Sp}(2g,\mathbb{Z}_{p^m})|}\sum_{\gamma\in Sp(2g,\mathbb{Z}_{p^m})}{}^{g}\langle 0|U_\gamma|0\rangle^{g}=\frac{1}{|\mathrm{Sp}(2g,\mathbb{Z}_p)|}\sum_{\gamma\in Sp(2g,\mathbb{Z}_p)}={}^{g}\langle 0|U_\gamma|\emptyset\rangle^{g},\quad \text{(B.2)}$$

$$|\emptyset\rangle^{g}=\frac{1}{|\mathrm{Ker}(\rho)|}\sum_{\gamma\in\mathrm{Ker}(\rho)}U_\gamma|0\rangle^{g}.\quad \text{(B.3)}$$

对 $\mathrm{Sp}(2g,\ \mathbb{Z}_p)$ 的平均实际上是在陪集 $\Gamma_0(2g,\ \mathbb{Z}_p)\backslash\mathrm{Sp}(2g,\ \mathbb{Z}_p)/\Gamma_0(2g,\ \mathbb{Z}_p)$上进行的，其中代表元为 $\gamma_a=\mathbf{1}^a\oplus\mathbf{s}^{g-a}$。利用真空态的表示式（2.14）以及模作用的显式形式（2.15），我们很容易得到

$${}^{g}\langle 0|U_{\mathbf{1}^h\oplus\mathbf{s}^{g-h}}|\emptyset\rangle^{g}={}^{h}\langle 0|\emptyset\rangle^{h}\,\mathcal{D}^{g-h}.\quad \text{(B.4)}$$

为了计算 $\mathrm{Ker}(\rho)$ 上的平均，我们注意到，只有如下形式的元素会对平均值有所贡献，参见（3.13）：

$$\begin{pmatrix}1_h & 0\\ pX & 1_h\end{pmatrix}\in\Gamma_p^{(m)},\quad \text{(B.5)}$$

因此

$${}^{h}\langle 0|\emptyset\rangle^{h}=p^{(1-m)h(h+1)/2}\sum_X{}^{h}\langle 0|U_{\gamma(X)}|0\rangle^{h}=\mathcal{G}_h.\quad \text{(B.6)}$$

C 同余性质与高阶中心荷

我们从一个阿贝尔理论 $\mathcal{T}_p$ 出发，其中 p 为素数，Frobenius-Schur 指数为 $k=p^m$，并假设真空态 $|0\rangle\in\mathcal{H}^1$（该理论在环面上）在 $\Gamma_0(k)\subset\mathrm{SL}(2,\ \mathbb{Z})$的作用下保持不变。那么，$(\mathrm{SL}(2,\ \mathbb{Z})$ 在（3.2）中的平均可写为

$$\mathcal{D}^{-1}M_1=\mathcal{D}^{-1}+\sum_{n=0}^{k/p-1}\sum_{c\in\mathscr{D}}\theta_c^{pn}.\quad \text{(C.1)}$$

对于每个 c，对 n 求和的结果要么是实数且为正，要么为零（这与 $\mathcal{G}_1\geq 0$ 的陈述相同，我们已在正文中说明过）。因此，$\mathcal{H}^1$ 的模不变子空间非平凡，这意味着该理论允许存在拓扑边界条件。对于任意 g，也可以作出类似论证。因此我们得出结论：在阿贝尔理论中，$\Gamma_0(2g,\mathbb{Z}_k)\subset\mathrm{Sp}(2g,\mathbb{Z}_k)$ 稳定真空态，当且仅当该理论允许存在拓扑边界条件。

现在我们放宽这一假设：理论 $\mathcal{T}_p$ 的真空态 $|0\rangle \in \mathcal{H}^1$ 在 $\Gamma_0(k) \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ 下不变；这必然意味着该理论不允许存在拓扑边界条件。尽管如此，同余性质 [69] 仍保证真空在 $\Gamma_1(k) \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ 下不变。接下来考虑理论 $\mathcal{T}_p \times \mathcal{T}_p$。该理论总是允许对角不变量，因此其真空在 $\mathcal{H}^1$ 中由 $\Gamma_0(k) \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ 稳定。来自 $\Gamma_0(2, Z_k)$ 的任意元素，都可以表示为来自 $\Gamma_1(2,\mathbb{Z}_k)$ 的一个元素与一个对角矩阵相乘（从左侧或右侧）。

$$\gamma(x) = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x^{-1} \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}_k), \tag{C.2}$$

与一个可逆的 $x \in \mathbb{Z}_k$。这些元素通过一个相位作用于 $\mathcal{T}_p$ 的真空；根据假设，该相位对所有可逆的 x都不能是平凡的。因此，对 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$在（3.2）中的平均值为零，这与 $\mathcal{H}^1$中不存在模不变态的预期一致。现在我们考虑 $\mathcal{T}_p$ 在透镜空间 $\bar{L}(n,1)$ 上的配分函数，其中 n与 p互素。相应的 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}_k)$ 元素可以写成如下形式

$$\gamma_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{pmatrix} = \gamma_1 \gamma(n) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tilde{\gamma}_1, \tag{C.3}$$

¯其中 $\gamma_1, \tilde{\gamma}_1 \in \Gamma_1(2,\mathbb{Z}_k)$。由此立即可知， $Z_{\mathcal{T}}[L(n,1)$的相位由 $\langle 0|U_{\gamma(n)}|0\rangle$ 给出，而它对所有可逆的 n 都不能是平凡的。换言之，所有高阶中心荷的消失是真空态的稳定子为 $\Gamma_0(2,\mathbb{Z}_k)$ 的充分条件，因而也是该理论允许拓扑边界条件的充分条件。

D 证明 (3.24)和(3.60)

在本附录中，我们推导第3节中以下质量公式的简化表达式：对于 n 个 p 级环面码（3.24），以及对于 $U(1)_2^n$ 理论（3.60）。

我们的出发点是通过对亏格为 g 的海加德分解取平均而得到的亏格 g质量表达式，

$$M_g = \sum_{h=0}^{g} \mu(h,g,p)\, \mathcal{D}^h \tag{D.1}$$

$$= \sum_{h=0}^{g} \frac{p^{(g-h)(g-h+1)/2}}{\prod_{i=1}^{g}(p^i+1)} \prod_{i=1}^{h} \frac{p^{g-i+1}-1}{p^i-1} p^{nh} \tag{D.2}$$

$$= \frac{1}{\prod_{i=1}^{g}(p^i+1)} \sum_{h=0}^{g} p^{(g-h)(g-h+1)/2+nh} \begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}_p, \tag{D.3}$$

其中 q-二项式系数定义见（A.11）。（在我们的情形下， $q = p$。）利用关系式

$$\begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix}_p = \begin{bmatrix} n \\ n-m \end{bmatrix}_p \tag{D.4}$$

我们可以将（D.3）中的求和改写为

$$\sum_{h=0}^{g} p^{h(h+1)/2+n(g-h)} \begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}_p = p^{gn} \sum_{h=0}^{g} p^{h(h-1)/2} p^{-(n-1)h} \begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}_p \tag{D.5}$$

$$= p^{gn} \prod_{i=0}^{g-1} (1 + p^{i-g+1}), \tag{D.6}$$

其中在第二行我们使用了 q-二项式定理 [70],

$$\sum_{m=0}^{n} q^{m(m-1)/2} \begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix}_q t^m = \prod_{i=0}^{n-1} (1 + tq^i). \tag{D.7}$$

最后，结合（D.3）与（D.6），我们得到

$$M_g = \prod_{i=1}^{g} \frac{p^i + p^n}{p^i + 1} = p^{gn} \prod_{i=0}^{n-1} \frac{p^i + 1}{p^i + p^g}. \tag{D.8}$$

最后一个等式可用对 g的归纳法证明:

$$\prod_{i=1}^{g} \frac{p^i + p^n}{p^i + 1} = \frac{p^g + p^n}{p^g + 1} \prod_{i=1}^{g-1} \frac{p^i + p^n}{p^i + 1} \tag{D.9}$$

$$= \frac{p^g + p^n}{p^g + 1} p^{(g-1)n} \prod_{i=0}^{n-1} \frac{p^i + 1}{p^i + p^{g-1}} \tag{D.10}$$

$$= \frac{p^g + p^n}{p^g + 1} p^{(g-1)n} p^n \prod_{i=0}^{n-1} \frac{p^i + 1}{p^{i+1} + p^g} \tag{D.11}$$

$$= p^{gn} \prod_{i=0}^{n-1} \frac{p^i + 1}{p^i + p^g}. \tag{D.12}$$

方程（3.60）的证明类似。对于有限的 g 和 $k = 2$，根据（3.18）可得

$$M_g = \sum_{h=0}^{g} \mu(h, g, 2)\, \mathcal{D}^h\, \mathcal{G}_h = \sum_{h=0}^{g} \frac{2^{(g-h)(g-h+1)/2}}{\prod_{i=1}^{g} (2^i + 1)} \begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}_2 2^{nh}\, 2^{-h}, \tag{D.13}$$

其中，我们按照（ μ（h， g， p）中的方式将其表示为，并根据（D.3）代入了 $\mathcal{D} = 2^n$和 $\mathcal{G}_h = 2^{-h}$。继续上述推导，我们得到（3.59）

$$M_g = \sum_{h=0}^{g} \frac{2^{h(h+1)/2}}{\prod_{i=1}^{g}(2^i+1)} \begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}_2 2^{(n-1)(g-h)} \tag{D.14}$$

$$= \frac{2^{(n-1)g}}{\prod_{i=1}^{g}(2^i+1)} \sum_{h=0}^{g} 2^{h(h-1)/2} \begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}_2 2^{-(n-2)h} \tag{D.15}$$

$$= \frac{2^{(n-1)g}}{\prod_{i=1}^{g}(2^i+1)} \prod_{i=0}^{g-1}(1+2^{-(n-2)}2^i) \tag{D.16}$$

$$= \prod_{i=1}^{g} \frac{2^i+2^{n-1}}{2^i+1} \tag{D.17}$$

$$= 2^{g(n-1)} \prod_{i=0}^{n-2} \frac{2^i+1}{2^i+2^g} \xrightarrow[g\to\infty]{} \prod_{i=0}^{n-2}(2^i+1)\,. \tag{D.18}$$

E 正交群 $O(n, n, \mathbb{Z}_k)$

对于一般的整数 k，我们将 $\mathsf{O}(n, n, \mathbb{Z}_k)$ 定义为矩阵的对称群

$$\eta = \begin{pmatrix} 0 & 1_n \\ 1_n & 0 \end{pmatrix}, \tag{E.1}$$

但有一个重要的细微之处。对于任意 k，包括 k 为偶数的情况，形式如下的矩阵 $\mathsf{O}(n, n, \mathbb{Z}_k)$

$$\begin{pmatrix} 1_n & B \\ 0 & 1_n \end{pmatrix}, \tag{E.2}$$

应仅包含反对称 B。也就是说，当 k 为偶数时，我们将 $\mathsf{O}(n, n, \mathbb{Z}_k)$ 定义为使 B 的对角元为零，从而确保 $\mathsf{O}(n, n, \mathbb{Z}_k)$ 是相应精化 q(3.23) 的对称性。我们还定义子群 $\Gamma_0(n, n, \mathbb{Z}_k) \subset \mathsf{O}(n, n, \mathbb{Z}_k)$，它由所有形式如下的矩阵组成

$$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} \in \Gamma_0(n, n, \mathbb{Z}_k) \subset \mathrm{O}(n, n, \mathbb{Z}_k). \tag{E.3}$$

k 级环面码总是存在拓扑边界条件，例如狄利克雷边界条件，其拉格朗日子群为 $\mathcal{C}_0 = (\alpha_1, \ldots\ldots, \alpha_n, 0, \ldots\ldots 0)$，其中 $\alpha_i \in \mathbb{Z}_k$ 是任意的。群

$\mathrm{O}(n,\ n,\ \mathbb{Z}_k)$ 将拉格朗日子群（偶自对偶码）映射到彼此，从而将它们划分为若干轨道。子群 Γ_0 可定义为 $\mathcal{C}_0$ 的稳定子。当 $k=p$ 是素数，或者更一般地说，当 k 无平方因子时，只有一个轨道，因此码的总数为 [19, 38]

$$\frac{|\mathrm{O}(n,n,\mathbb{Z}_p)|}{|\Gamma_0(n,n,\mathbb{Z}_p)|}=\prod_{i=0}^{n-1}(p^i+1), \tag{E.4}$$

$$|\mathrm{O}(n,n,\mathbb{Z}_p)|=2(p^n-1)p^{n(n-1)}\prod_{i=1}^{n-1}(p^{2i}-1),\quad |\Gamma_0(n,n,\mathbb{Z}_p)|=|\mathrm{GL}(n,\mathbb{Z}_p)|p^{n(n-1)/2}.$$

参考文献

[1] *J. C. Baez*与*J. Dolan*，从有限集到费曼图，载于*Mathematics unlimited—2001 and beyond*，第*29–50*页。施普林格，*2001*。[2] *F. MacWilliams*、*N. Sloane*与*J. Thompson*，好的自对偶码存在，《离散数学》*3 (1972) 153*。[3] *V. Pless*与*N. Sloane*，论自对偶码的分类与计数，《组合理论杂志*A*辑》*18 (1975) 313*。[4] *A. Kapustin*与*N. Saulina*，阿贝尔 *Chern-Simons* 理论中的拓扑边界条件，《核物理学 *B*》*845 (2011)* 393 [1008。0654]。[5] *A. Kapustin*与*N. Saulina*，三维拓扑场论与二维有理共形场论中的曲面算符，*1012.0911*。[6] *J. Kaidi*、*Z. Komargodski*、*K. Ohmori*、*S. Seifnashri*与*S.-H. Shao*，*2+1*维拓扑量子场论中的高阶中心荷与拓扑边界，*SciPost Phys. 13 (2022)* 067 [2107。13091]。[7] *A. Dymarsky*与*A. Shapere*，拓扑量子场论引力与系综全息，《高能物理杂志》*02 (2025)* 091 [2405。20366]。[8] *A. Barbar*、*A. Dymarsky*与*A. D. Shapere*，全局对称性、码系综与几何求和，《物理评论快报》*134 (2025)* 151603 [2310。13044]。[9] *F. Deloup*，链接型、高斯和互反律与三维流形不变量，《美国数学会会刊》*351 (1999) 1895*。[10] *F. Deloup*，论三维流形中链环的阿贝尔量子不变量，《数学年刊》*319 (2001) 759*。[11] *E. Guadagnini*与*F. Thuillier*，由泛函积分得到的三维流形不变量，《数学物理杂志》*54 (2013)* 082302 [1301。6407]。

[12] *H.-M. Kim*、*P. Mathieu*、*M. Tagaris*与*F. Thuillier*，*U(1)n*陈-西蒙斯理论：配分函数、互反公式与陈-西蒙斯对偶，《数学物理杂志》*66 (2025)* 042301 [2409。10734]。[13] *T. Nicosanti*与*P. Putrov*，对三维流形同调群求和，*2508.02457*。[14] *A. Barbar*、*A. Dymarsky*与*A. Shapere*，四维麦克斯韦理论及其基于码的系综的全息描述，*2510.03392*。[15] *R. Dijkgraaf*与*E. Witten*，拓扑规范理论与群上同调，《数学物理通讯》*129 (1990) 393*。[16] *D. Belov*与*G. W. Moore*，阿贝尔自旋陈-西蒙斯理论的分类，*hep-th/0505235*。[17] *L. Dolan*、*P. Goddard*与*P. Montague*，共形场论、表示与格构造，《数学物理通讯》*179 (1996)* 61 [*hep-th/*9410029]。[18] *L. Dolan*、*P. Goddard*与*P. Montague*，共形场论、三重性与怪兽群，《物理快报 *B*》*236 (1990) 165*。[19] *A. Dymarsky*与*A. Shapere*，量子稳定子码、格与共形场论，《高能物理杂志》*21 (2020)* 160 [2009。01244]。[20] *A. Dymarsky*与*A. Shapere*，来自量子码的模不变自举约束解，《物理评论快报》*126 (2021)* 161602 [2009。01236]。[21] *A. Dymarsky*与*A. Sharon*，来自F_4, 上码的非有理 *Narain* 共形场论，《高能物理杂志》*11 (2021)* 016 [2107。02816]。[22] *J. Henriksson*、*A. Kakkar*与*B. McPeak*，高亏格处的*Narain* 共形场论与量子码，《高能物理杂志》*04 (2023)* 011 [2205。00025]。[23] *J. Henriksson*与*B. McPeak*，对码取平均与一个 $SU(2)$模自举，《高能物理杂志》*11 (2023)* 035 [2208。14457]。[24] *M. Buican*、*A. Dymarsky*与*R. Radhakrishnan*，量子码、共形场论与缺陷，《高能物理杂志》*03 (2023)* 017 [2112。12162]。[25] *N. Angelinos*、*D. Chakraborty*与*A. Dymarsky*，来自码的最优 *Narain* 共形场论，《高能物理杂志》*11 (2022)* 118 [2206。14825]。[26] *Y. Furuta*，*Narain* 共形场论的谱与相关布尔函数性质之间的关系，*2203.11643*。[27] *Y. F. Alam*、*K. Kawabata*、*T. Nishioka*、*T. Okuda*与*S. Yahagi*，来自非二元稳定子码的*Narain* 共形场论，《高能物理杂志》*12 (2023)* 127 [2307。10581]。[28] *Y. Furuta*，论*Narain*共形场论的有理性与编码结构以及简单流*orbifold*，《物理学杂志 *A*》*57 (2024)* 275202 [2307。04190]。

[29] *K. Kawabata* 和 *S. Yahagi*，来自有限域上经典码的费米子共形场论，《高能物理杂志》*05 (2023)* 096 [2303.11613].[30] *K. Kawabata*、*T. Nishioka* 和 *T. Okuda*，来自量子码的 *Narain* 共形场论及其$\mathbb{Z}_2$ 规范化，《高能物理杂志》*05 (2024)* 133 [2308.01579].[31] *K. Kawabata* 和 *S. Yahagi*，来自经典纠错码的椭圆亏格，《高能物理杂志》*01 (2024)* 130 [2308.12592].[32] *M. Buican* 和 *R. Radhakrishnan*，*Qudit* 稳定子码、共形场论与拓扑曲面，物理评论*D 110 (2024)* 085021 [2311.13680].[33] *N. Angelinos*，*1* 级单连 *WZW* 模型的码构造与系综全息，《高能物理杂志》*06 (2025)* 002 [2503.04055].[34] *N. J. A. Sloane*，关于自对偶码的 *Gleason* 定理及其推广，*2006*.[35] *G. Nebe*、*E. M. Rains* 和 *N. J. A. Sloane*，《自对偶码与不变量理论》，数学中的算法与计算，*17*。施普林格海德堡，柏林，海德堡，*2006*年第*1*版，*2006*年版，*2006*.[36] *A. Dymarsky*、*J. Henriksson* 和 *B. McPeak*，来自 *Howe* 对偶的全息对偶：作为码共形场论系综的 *Chern-Simons* 引力，*2504.08724*.[37] *J. Hempel*，《三维流形》，第*349*卷。美国数学会，*2022*.[38] *O. Aharony*、*A. Dymarsky* 和 *A. D. Shapere*，*Narain* 共形场论及其基于码的系综的全息描述，《高能物理杂志》*05 (2024)* 343 [2310.06012].[39] *D. Marolf* 和 *H. Maxfield*，超越系综：婴儿宇宙、时空虫洞与黑洞信息的秩序和无序，《高能物理杂志》*08 (2020) 044*[2002.08950].[40] *A. Barbar*，来自拓扑量子场论引力的自同构加权系综，*2511.04311*.[41] *J. Cano*、*M. Cheng*、*M. Mulligan*、*C. Nayak*、*E. Plamadeala* 和 *J. Yard*，*(2 + 1)*维阿贝尔拓扑相中的体边对应，物理评论*B 89 (2014)* 115116 [1310.5708].[42] *S.-H. Ng*、*A. Schopieray* 和 *Y. Wang*，模范畴的高阶高斯和，*Selecta Mathematica 25 (2019)* .[43] *S.-H. Ng*、*E. C. Rowell*、*Y. Wang* 和 *Q. Zhang*，高阶中心荷与 *Witt* 群，数学进展 *404 (2022) 108388*.[44] *A. R. Calderbank*、*E. M. Rains*、*P. W. Shor* 和 *N. J. A. Sloane*，通过 *GF(4)* 上的码实现量子纠错，*IEEE*信息论汇刊 *44 (1998) 1369*[*quant-ph*/9608006].[45] *S. Yahagi*，有限域上的 *Narain* 共形场论与纠错码，《高能物理杂志》*08 (2022) 058*[2203.10848]。

[46] *D. Gaiotto* 和 *J. Kulp*，轨形群胚，《高能物理杂志》*02 (2021)* 132 [2008.05960].[47] *V. Pless*，有限几何中各向同性子空间的数量，意大利国家猞猁科学院物理、数学与自然科学部学报 *39 (1965) 418*.[48] *J. MacWilliams*，有限域上的正交矩阵，《美国数学月刊》*76 (1969) 152*.[49] *J. M. P. Balmaceda*、*R. A. L. Betty* 和 *F. R. Nemenzo*，*zp2* 上自对偶码的质量公式，《离散数学》*308 (2008) 2984*.[50] *K. Nagata*、*F. Nemenzo* 和 *H. Wada*，自对偶纠错码的构造算法，载于第*11*届代数与组合编码理论国际研讨会，第*215–220*页，*2008*.[51] *K. Nagata*、*F. Nemenzo* 和 *H. Wada*，$e^*_{p^3}$上的自对偶码的数量，《设计、编码与密码学》*50 (2009) 291*.[52] *K. Nagata*、*F. Nemenzo* 和 *H. Wada*，$e^*_{2^s}$上的自对偶码的质量公式与结构，《设计、编码与密码学》*67 (2013) 293*.[53] *G. Nebe*，自对偶码与不变量理论，载于《数字通信的代数方面》，第*23–41*页。*IOS*出版社，*2009*.[54] *J. H. Conway* 和 *N. J. A. Sloane*，《球堆积、格与群》，第*290*卷。施普林格科学与商业媒体，*2013*.[55] *D. Allcock*、*I. Gal* 和 *A. Mark*，*2*进格的 *Conway–Sloane*演算，*arXiv*预印本 *arXiv:1511.04614 (2015)* .[56] *J. Conway* 和 *N. Sloane*，模*4*整数上的自对偶码，《组合理论杂志*A*辑》*62 (1993) 30*.[57] *A. Bonnecaze*、*P. Sole*、*C. Bachoc* 和 *B. Mourrain*，*z/sub 4/* 上的 *II* 型码，《*IEEE*信息论汇刊》*43 (1997) 969*.[58] *P. Gaborit*，*z/sub 4/and f/sub q/+ uf/sub q/rings* 上自对偶码的质量公式，《*IEEE*信息论汇刊》*42 (1996) 1222*.[59] *G. Hoehn*，顶点算子代数的属与三维拓扑量子场论，*2003*.[60] *C. Dong*、*R. L. Griess Jr* 和 *G. H¨ohn*，框架顶点算子代数、码与月光模块，《数学物理通讯》*193 (1998) 407*.[61] *C.-M. Jian*、*A. W. W. Ludwig*、*Z.-X. Luo*、*H.-Y. Sun* 和 *Z. Wang*，利用全属配分函数确立具有伊辛对偶的强耦合三维反德西特量子引力，《高能物理杂志》*10 (2020)* 129 [1907.06656]。

[62] P. M. Gilmer，关于映射类群的 *Witten–Reshetikhin–Turaev* 表示
，《美国数学学会会刊》*127 (1999) 2483–2488.*[63] *R. L. Griess Jr* 和 *G. H¨ohn*，*e_8* 格型顶点算子代数的 *Virasoro* 框架及其稳定子，*arXiv* 预印本 *math/0101054 (2001)* .[64] *R. Radhakrishnan*、*A. Sharon* 和 *N. Tantivasadakarn*，通过不可逆对称性揭示动力学量子纠错码，*2510.09565.*[65] *E. Witten*，*AdS/CFT* 对应与拓扑场论。《高能物理杂志》*12 (1998) 012*[*hep-th/*9812012].[66] *O. Aharony*、*N. Seiberg* 和 *Y. Tachikawa*，解读四维规范理论的弦外之音，《高能物理杂志》*08 (2013)* 115 [1305.0318].[67] *D. Gaiotto*、*A. Kapustin*、*N. Seiberg* 和 *B. Willett*，广义全局对称性，《高能物理杂志》*02 (2015)* 172 [1412.5148].[68] *J. Conway* 和 *V. Pless*，关于自对偶码的计数，《组合理论杂志*A*辑》*28 (1980) 26.*[69] *S.-H. Ng* 和 *X. Lin*，共形场论中的同余性质，*Alg. Numb. Theor. 9 (2015)* 2121 [1201.6644].[70] *V. G. Kac* 和 *P. Cheung*，量子微积分，第*113*卷。施普林格，*2002*年。