arXiv:2602.00404v1 [math.AC] 30 Jan 2026

数值半群不可约分解的长度

PEDRO A. GARC´ÍA-S ´ÁNCHEZ 和 CHRISTOPHER O'NEILL

摘要。数值半群是自然数中的加法子半群，包含零且补集有限。若一个数值半群不能表示为包含它的数值半群之交，则称其为不可约数值半群。已知每个数值半群都可以分解为若干不可约数值半群的交，但即使要求分解不可冗余，这样的分解也可能不止一种。本文研究给定数值半群的所有分解长度构成的集合。有人猜想，分解长度的集合总是一个区间；我们证明了，对于最小正元不超过六的数值半群，这一猜想成立。此外，我们考察了一类近期被证明可以具有任意大的最小分解长度的数值半群，并构造了一族不可约分解，其长度构成一个较大的区间。

1. 引言

数值半群 数值半群 是非负整数的一个子集，它对加法封闭，且在非负整数集合中的补集有限。不属于数值半群 S 的整数集合称为 S 的间隙集；间隙集的基数称为 S 的亏格，记作 $\mathrm{g}(S)$。不属于 S 的最大整数称为其弗罗贝尼乌斯数，记作 $\mathrm{F}(S)$。S 中的最小正整数称为 S 的重数，记作 $\mathrm{m}(S)$。

若一个数值半群不能表示为两个真包含它的数值半群的交，则称其为不可约。不可约数值半群有许多种刻画方式；概述请参见 [10, 第 3] 章。设S 为弗罗贝尼乌斯数为F 的数值半群，则当且仅当它在不包含F的数值半群中按包含关系极大时，S 不可约。若F 为奇数，则

日期：2026年2月3日。2020 数学主题分类。20M14, 20M10, 20M13。关键词与短语。数值半群、不可约数值半群、不可约分解、Ap´ery 集、特殊间隙、普通数值半群。第一作者感谢由 MICIU/AEI/10.13039/501100011033 和欧洲区域发展基金资助的项目 PID2022-138906NB-C21 提供的经费支持，资助项目标语为“建设欧洲的一种方式”；同时感谢西班牙科学与创新部（MICINN）通过“Severo Ochoa 和 Mar´ıa de Maeztu 卓越中心与单位计划”（CEX2020-001105-M）提供的支持。本稿的大部分工作是在第二作者于2025年访问格拉纳达大学期间完成的，该访问由 MICIU/AEI/10.13039/501100011033 的项目 PID2022-138906NB-C21 资助。

当且仅当 $g(S) = \frac{1}{2}(F + 1)$ 时，S 不可约；此时称 S 为对称的（对于每个整数 x，$x / \in S$，当且仅当 $F - x \in S$）。若 F 为偶数，则当且仅当 $g(S) = \frac{1}{2}F + 1$ 时，S 不可约；此时称 S 为伪对称的（对于每个整数 $x \neq \frac{1}{2}F$，$x /\in S$，当且仅当 $F - x \in S$）。

每个数值半群都可以表示为有限个不可约数值半群的交。若$S = S_1 \cap \cdots \cap S_k$ 且每个S_i 均不可约，则称这一表达式为S 分解为不可约元的分解，前提是$S \neq \cap_{i\in I} S_i$ 对每个真子集$I \subsetneq \{1,\ldots\ldots, k\}$ 均成立（也就是说，任何将S 分解为不可约元的分解都必须是不可冗余的）。数k 称为该分解的长度。

本文研究给定数值半群的所有分解长度构成的集合。我们简要地将其与另一种分解形式进行比较：将半群元素表示为极小生成元之和的分解。关于这类分解长度的研究已有大量文献，涉及数值半群及更广泛的领域，并已发展出丰富的组合分解不变量理论 [7]。

相比之下，人们对数值半群的分解长度知之甚少。文献 [9], 给出了最大和最小分解长度的上界与下界，但直到最近才证明，数值半群的最小分解长度可以任意大 [2], ；也证明了对于每个整数 $k \geq 2$，都存在一个数值半群 S，它有长度为 2 和 k [6] 的分解。

另一种看待分解的方式，是将其视为数值半群在交运算下的一种“因子分解”。交运算满足交换律和结合律，但由于它远不满足可消去性，许多经典的因子分解理论无法直接推广。本文所考虑的分解与这一情境下的极小分解概念相契合，该概念由 [3], 引入，不过在此之前已见于 [1]。特别地，由于数值半群关于交运算是幂等的，我们必然要求所考虑的分解满足非冗余性。

以下猜想出现在 [6], 中，是本工作的主要动机。

猜想 1.1. 任意数值半群的分解长度集合都是一个区间 .

在第 3 节中，我们证明，对于重数至多为六的数值半群，该猜想成立。为此，我们开发了一些涉及 Ap´ery 集和数值半群特殊间隙的工具，并在第 2 节中介绍这些工具。我们还在第 4 节中考察了 [2] 中展示的一族数值半群，它们的最小分解长度可以任意大；对于这族中的每个半群，我们都找到了一个较大的分解长度区间。

本文结果所依据的实验是使用GAP [5] 软件包 `NumericalSgps` [4]完成的。

2. AP´ERY集与特殊间隙

本节将分析 Ap´ery 集和特殊间隙在研究数值半群分解为不可约元时的重要性。我们将展示这些概念之间的联系，以及如何利用它们推导分解长度的界。

对于固定的数值半群S，我们可以在 $\mathbb{Z}$上定义整除关系：

$$a \preceq_S b \quad \text{whenever} \quad b - a \in S.$$

这是 $\mathbb{Z}$上的一个偏序。当半群S 可由上下文明确时，我们有时简记为 $\preceq$。

设S 为一个数值半群，并设n 为S的一个非零元素。S 关于n 的*Ap´ery*集定义为

$$\mathrm{Ap}(S;n) = \{s \in S : s - n \notin S\}.$$

众所周知，$\mathrm{Ap}(S;n)$ 的基数为n，并且 $\{0, a_1, \ldots, a_{n-1}\}$，其中每个$a_i$ 是S 中与i 模n同余的最小元素。特别地，

$$s \in S \text{ if and only if } a_i \leq s. \tag{2.1}$$

对每个 $s \in \mathbb{Z}$，满足 $s \equiv i$ 模 n。这一成员判据是本文及其他研究中许多结果的核心。当 n 是S 的重数时，为简便起见，我们有时用 $\mathrm{Ap}(S)$ 代替 $\mathrm{Ap}(S;n)$。

众所周知，不可约数值半群可以用其 Ap´éry 集来刻画。

引理 2.1 ([10, 命题 4.10 和 4.15])。 设 S 是一个数值半群，并固定一个非零的 $m \in S$。假设 $\mathrm{Ap}(S;m) = \{0, a_1, \ldots, a_{m-1}\}$，其中对每个 i，$a_i \equiv i$ 模 m，并令 $a_k = \max \mathrm{Ap}(S;m)$。

(a) 当且仅当对每个 i，$a_i \preceq a_k$ 时，S 是对称的。*(b)* 当且仅当存在某个 j，使得 $2a_j = a_k + m$，且对所有 $i \neq j$ 都有 $a_i \preceq a_k$时，S 是伪对称的。

以下结果是 [8, 引理 3.3]，的直接推论，并刻画了给定集合何时是某个数值半群的 Ap´éry 集。

引理 2.2。 设 $m > 1$ 为一个整数，且 $A = \{0, =_1, \ldots, a_{m-1}\}$，其中 $a_i \equiv i$ (模 m)。则 $S = \langle =A \cup \{m\} \rangle$ 是一个包含 m 的数值半群。此外，$\mathrm{Ap}(S; m) = =A$ 当且仅当对于每个 $i, j, k \in \{1, \ldots, m-1\}$，只要 $i + j \equiv k$ 模 m，就有不等式 $a_i + a_j \geq a_k$ 成立。

固定数值半群S 和T，并固定$m \in S \cap T$。记

$$\mathrm{Ap}(S;m) = \{0, a_1, \ldots, a_{m-1}\} \quad \text{and} \quad \mathrm{Ap}(T;m) = \{0, b_1, \ldots, b_{m-1}\}$$

与一个$_i \equiv b_i \equiv i$ 对每个i模m 。根据成员判据（2.1），可得

$$S \subseteq T \text{ if and only if } b_i \leq a_i \text{ for each } i \in \{1, \ldots, m-1\}, \tag{2.2}$$

因此

$$\mathrm{Ap}(S \cap T; m) = \{0, \max(a_1, b_1), \ldots, \max(a_{m-1}, b_{m-1})\}.$$

若$S \subseteq T$，则我们定义

$$\mathrm{M}_S(T) = \{i \in \{1, \ldots, m-1\} : b_i = a_i\}.$$

容易得到

$$S = T_1 \cap \cdots \cap T_k \text{ if and only if } \{1, \ldots, m-1\} = \bigcup_{i=1}^{k} \mathrm{M}_S(T_i). \tag{2.3}$$

因此，分解$S = T_1 \cap \cdots \cap T_k$是极小的，当且仅当 $\{\mathrm{M}_S(T_i)\}_i$是 $\{1,\ldots,m-1\}$的不可约覆盖。

S 中在 $\preceq_S$ 下极大的间隙集合称为S 的伪弗罗贝尼乌斯数集合，记作 $\mathrm{PF}(S)$。我们记 $\mathrm{t}(S) = \#\,\mathrm{PF}(S)$，称其为$S$ 的型。众所周知，对于数值半群S 以及非零的$m \in S$,

$$\mathrm{PF}(S) = -m + \mathrm{Maximals}_{\preceq_S}(\mathrm{Ap}(S; m)), \tag{2.4}$$

因此，特别地，$\mathrm{t}(S) \leq m - 1$ （例如参见 [10, 命题 2.20]） .

S 的特殊间隙集合（参见 [10,第 4]章）定义为

$$\mathrm{SG}(S) = \{x \in \mathrm{PF}(S) : 2x \in S\}.$$

等价地，$x \in \mathrm{SG}(S)$ 当且仅当$S \cup \{x\}$ 是一个数值半群。注意，由于 $\mathrm{SG}(S) \subseteq \mathrm{PF}(S)$，我们有 $\#\,\mathrm{SG}(S) \leq \mathrm{t}(S) \leq m - 1$。

特殊间隙是研究数值半群分解的核心。如果$S_1, ..., S_k \supseteq S$ 是上半群，那么根据 [10, 命题 4.48],

$$S = S_1 \cap \cdots \cap S_k \text{ if and only if } \mathrm{SG}(S) \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} \mathrm{SG}(S_i). \tag{2.5}$$

此外，表达式 $S = S_1 \cap \cdots \cap S_k$ 是不可冗余的，当且仅当对于每个 S_i，都有 $x \not\in S_i$ ，其中某个 $x \in$ 属于 $\mathrm{SG}(S)$。因此，S 的任意不可约分解的长度至多为 $\#\mathrm{SG}(S)$。

3. 低重数下的分解长度集合

本节分析重数至多为六的数值半群的分解长度集合，并证明它们总是区间。

固定一个数值半群 S，并令 $m = \mathrm{m}(S)$。S 的任何不可冗余分解最多有 $\#\mathrm{SG}(S) \leq m-1$ 个分量。因此，若 $m \leq 4$，则可能的分解长度集合只有 $\{1\}$（若 S 不可约）、$\{2\}$、$\{3\}$ 或 $\{2,3\}$（若 S可约），而这些都是区间。事实上，还可以进一步说明，详见下文的注释。

注 3.1. 事实证明，对于重数为 4 的任何数值半群 S，$\{3\}$ 都不会成为其分解长度集合，因为若 S 可约，则 S 有一个长度为 2 的分解。为此，只需找到一个不可约的 $T \supseteq S$，使得 $\#M_T(S) = 2$，因为这样只需再添加一个分量便可构成 S 的分解。我们声称，只要 $\mathrm{m}(S) = 4$，而不对 S 作其他假设，就存在这样的 T，使得 $M_S(T) \supseteq \{1,3\}$。写作 $\mathrm{Ap}(S;4) = \{0, a_1, a_2, a_3\}$，其中每个$a_i \equiv i$ 模 4。

- 若 $\mathrm{a}_1 \leq \mathrm{a}3$，则令 $\mathrm{b}_2 = \mathrm{a}_3 - \mathrm{a}1$，并取 $\mathrm{T} = \langle 4、\mathrm{a}1、\mathrm{b}2、\mathrm{a}_3\rangle$。由 (2.1)，由于 $\mathrm{a}_1 + \mathrm{a}_2 \geq \mathrm{a}3$，我们得到 $\mathrm{a}_2 \geq \mathrm{b}2$；验证 $2\mathrm{a}_1 \geq \mathrm{a}_2 \geq \mathrm{b}2$、$2\mathrm{a}_3 \geq \mathrm{a}_2 \geq \mathrm{b}2$、$\mathrm{a}_1 + \mathrm{b}_2 = \mathrm{a}3$ 以及 $\mathrm{b}_2 + \mathrm{a}_3 \geq \mathrm{a}_3 \geq \mathrm{a}1$ 后，可应用引理 2.2，得出 T 实际上是一个数值半群，且 T 的阿佩里集为 $= \{0, \mathrm{a}1、\mathrm{b}2、\mathrm{a}_3\}$。由于 $\mathrm{a}_3 = \mathrm{b}_1 + \mathrm{a}2$，根据引理 3.2，T 也是对称的；由 (2.2)，我们有 $\mathrm{S} \subseteq \mathrm{T}$。

- 若 $a_3 \leq a1$，则通过类似地应用引理 2.2，令 $b_2 = a_1 - a3$，并选择 T 使得 T 的阿佩里集 $(T;4) = \{0, a1、b2、a_3\}$。

因此，重数为 4 的数值半群的分解长度集合只有以下几种可能：$\{1\}$、$\{2\}$ 和 $\{2,3\}$。

对于 $m = 5$，还需要做一些工作。我们先给出一个引理，当 S 具有最大特殊间隙数时，该引理可为 $\#\,\mathrm{M}_S(T)$ 给出一个上界。

引理 3.2。假设 $m = \mathrm{m}(S)$，$\#\mathrm{SG}(S) = m-1$，且 T 不可约，并且 $S \subseteq T$。那么 $\#\,\mathrm{M}_S(T) \leq \frac{1}{2}m$。

证明。设 S 的阿佩里集为 $= \{0, \mathrm{a}_1, \ldots, \mathrm{a}_{m-1}\}$，T 的阿佩里集为 $= \{0, \mathrm{b}_1, \ldots, \mathrm{b}_{m-1}\}$，其中每个 $\mathrm{a}_i \equiv \mathrm{b}_i \equiv \mathrm{i} \bmod \mathrm{m}$；并设 $\mathrm{k} \in \{1, \ldots, \mathrm{m}-1\}$，使得 $\mathrm{F(T)} = \mathrm{b}_k - \mathrm{m}$。注意，当 $\mathrm{i,j} \in \mathrm{M}_S\mathrm{(T)}$ 时，我们不可能有 $\mathrm{b}_i + \mathrm{b}^j = \mathrm{b}_k$，因为

$$a_k \leq a_i + a_j = b_i + b_j = b_k \leq a_k$$

这将导致$a_i + a^j = a_k$，与假设$a_i - m \in \mathrm{SG}(S)$ 矛盾，因为$a^j \in S$ 且$(a_i - m) + a^j = a_k - m \notin S$（因此$a_i - m \notin \mathrm{PF}(S)$）。

现在，考虑 $\{0,\ldots\ldots m-1\}$ 的一个划分，其块的形式为 $\{i, j\}$，其中（不一定互不相同的）i、j 满足 $i + j \equiv k$ 模 m。单元素块的数量

取决于方程 $2x \equiv k$ 模m 的解 $x \in \{0, \ldots\ldots, m-1\}$ 的数量。如果 m 是奇数，那么该方程有一个解，因此该划分有 $12(m+1)$ 个块。如果 m 是偶数，那么该方程有零个或两个解。前一种情况下，该划分有 $12m$ 个块；后一种情况下，则有 $12(m+2)$ 个块。

注意，前一段中考虑的每个块至多包含 $\mathrm{M}_S(T)$ 的一个元素，因为若 $\{i,j\} \subseteq \mathrm{M}_S(T)$ 且 $i \neq j$，则会推出$b_i + b_j = b_k$；我们已在第一段中证明这不可能成立。

为导出矛盾，假设 $\#\,\mathrm{M}_S(T) > \frac{1}{2}m$。

- 若 m 为奇数，则这推出 # MS(T) = $\frac{1}{2}$(m + 1)，其中划分的每个块都恰好包含 MS(T) 的一个元素，且只有一个块是单元素块。设 {i} 为这个单元素块。于是，2bi = bk 或 2bi = bk + m。我们已经知道第一种情况不可能成立。块 {0,k} 必须包含 MS(T) 的一个元素，而该元素只能是 k，这意味着 bk = ak。因此，在第二种情况下，ak ≤ 2ai ≤ 2bi = bk = ak。这推出 ak = 2ai，进而 ai + (ai − m) = ak − m，这意味着 ai − m /∈ SG(S)，矛盾。
- 若 m 为偶数，则必有 # MS(T) = $\frac{1}{2}$(m + 2)，且存在两个不同的单元素块 {i} 和 {j}，其中 i, j ∈ MS(T)；这只有在 T 为伪对称半群且满足 {2bi, 2bj} = {bk, bk + m}时才可能，这意味着 2bi = bk 或 2bj = bk，而这两种情况都会导致矛盾。

In 每种情况下都会导致矛盾，因此我们得出 $\#\,\mathrm{M}_S(T) \leq \frac{1}{2}m$。 □

定理3.3. 设 S 是重数为 $m = 5$的数值半群。那么，S 分解为不可约元所得的分解长度集合是一个区间。

证明. 若 S 不可约，则其分解长度集合为 {1}。否则，它包含于 {2, 3, 4}，因此只需证明 S 的分解长度集合不等于 {2, 4}。为此，设 S = $\mathrm{S}_1 \cap \cdots \cap \mathrm{S}_4 = \mathrm{T}_1 \cap \mathrm{T}_2$ 是 S 的分解。由于第一个分解是不可冗余的，根据 (2.5)，# SG(S) = 4。由引理 3.2，$\#\,\mathrm{M}_S(\mathrm{T}_1) \leq 2$ 且 $\#\,\mathrm{M}_S(\mathrm{T}_2) \leq 2$；但由于 $\#(\mathrm{M}_S(\mathrm{T}_1) \cup \mathrm{M}_S(\mathrm{T}_2)) = 4$，我们必有 $\#\,\mathrm{M}_S(\mathrm{T}_1) = \#\,\mathrm{M}_S(\mathrm{T}_2) = 2$。由于集合 $\mathrm{M}_S(\mathrm{S}_i)$ 构成了{1, 2, 3, 4} 的单元素划分，存在不同的 $\mathrm{i}_1, \mathrm{i}_2 \in \{1,2,3,4\}$，使得 S = $\mathrm{T}_1 \cap \mathrm{S}_{i_1} \cap \mathrm{S}_{i_2}$是一个含三个因子的 S 的分解（根据 (2.5)）。□

接下来，我们将关注满足 $\mathrm{m}(S) = 6$ 的数值半群 S。我们首先证明以下技术性引理；与注 3.1 类似，该引理保证存在某些不可约上半群 T，使得集合 $\mathrm{M}_S(T)$ 受到严格控制。

引理 3.4。 固定一个满足 $\mathrm{Ap}(S) = \{0, a_1, \ldots, a_5\}$ 的数值半群 S。
(a) 存在不可约半群 $T, T' \supseteq S$，使得 $2, 5 \in \mathrm{M}_S(T)$ 且 $1, 4 \in \mathrm{M}_S(T')$。

(b) 若 $\#SG(S) \geq 4$，则可以选取 T 与 T'，使得 $\#M_S(T) \leq 3$、$\#M_S(T') \leq 3$，且 $M_S(T) \cup M_S(T') \subseteq \{1,2,4,5\}$。*(c)* 若 $\#SG(S) = 5$，则可以选取 T 与 T'，使得此外 $\#M_S(T) = 2$ 或 $\#M_S(T') = 2$。

证明。我们先构造T。首先假设$a_2 > a_5$。定义b_1,b_3,$b_4 \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$，使得每个$b_i \equiv i$ 模 6,

$$b_3 = a_2 - a_5, \qquad \text{and} \qquad \{2b_1, 2b_4\} = \{a_2, a_2 + 6\},$$

并令$T = \langle 6、b_1, a_2$,b_3,$b_4, a_5 \rangle$。我们用引理 2.2证明

$$\mathrm{Ap}(T) = \{0, b_1, a_2, b_3, b_4, a_5\}.$$

略去$i + j = 6 \equiv 0$ (模 6))的情形，可得

- $b_1 + b_1 \geq a2$，因为 $2b_1 \in \{a2$,$a_2 + 6\}$;
- $b_1 + a_2 \geq b3$，因为$a_2 = b_3 + a_5 \geq b3$;
- $b_1 + b_3 \geq b_1 + 6 \geq b4$，因为 $|b_1 - b_4| = 3$;
- $b_1 + b_4 = \frac{1}{2}(2a_2 + 6) = a_2 + 3 \geq a5$（根据假设 $a_2 > a5$）；
- $a_2 + a_2 \geq a_2 + 6 \geq b4$:
- $a_2 + b_3 \geq a_2 \geq a5$;
- $a_2 + a_5 \geq a_2 + 6 \geq b1$;
- $b_3 + b_4 \geq 6 + b_4 \geq b1$，因为 $|b_1 - b_4| = 3$;
- $b_3 + a_5 = a_2 \geq a2$;
- $b_4 + b_4 \geq a2$，因为 $2b_4 \in \{a2$,$a_2 + 6\}$;
- $b_4 + a_5 \geq b3$，因为 $b_4 \geq \frac{1}{2}a2$（根据定义），且 $4a_5 \geq a2$（由 (2.1)）共同推出 $b_4 + a_5 \geq \frac{1}{2}a_2 + \frac{1}{4}a_2 = a_2 - \frac{1}{4}a_2 \geq a_2 - a_5 = b3$；并且
- $a_5 + a_5 \geq b4$，因为 $2a_5 \geq a4$ 和 $2b_4 \leq a_2 + 6 \leq 2a_4 + 6 = 2(a_4 + 3)$（由 (2.1)）推出 $b_4 \leq a_4 + 3$，而 $b_4 \equiv a_4 \equiv 4$ 模 6 随即得到 $b_4 \leq a4$。

利用这些不等式，我们得出 $\mathrm{Ap}(T) = \{0$,b_1, a_2,b_3,$b_4, a_5\}$。

现在我们证明 $S \subseteq T$，为此，我们通过证明 $b_1 \leq a_1$,$b_3 \leq a_3$，和 $b_4 \leq a_4$ 来使用 (2.2)。我们已经证明了 $b_4 \leq a_4$,，因此接下来关注另外两个不等式。由于 $2b_1 \leq a_2 + 6 \leq 2a_1 + 6 = 2(a_1 + 3)$（这里我们使用了由 (2.1) 得出的 $a_2 \leq 2a_1$），所以 $b_1 \leq a_1 + 3$；二者模 6 都同余于 1，因此 $b_1 \leq a_1$。此外，我们有 $a_3 + a_5 \geq a_2$（由 (2.1) 得出），因此 $a_3 \geq a_2 - a_5 = b_3$。

接下来，我们证明 T 是伪对称的。注意，$b_3 + a_5 = a_2$，因此$b_3 \preceq_S a_2$，且 $a_5 \preceq_S a_2$。我们分两种情况讨论。若 $2b_1 = a_2$,，则 $2b_4 = a_2 + 6$，且$b_1 \preceq_S a_2$。根据引理 2.1，T 是伪对称的。若 $2b_4 = a_2$,，则 $2b_1 = a_2 + 6$，论证方式与前一种情况相同。

现在我们来验证第 (b) 部分中关于此情形下T 的断言。若$b_3 = a_3$,，则$a_2 = a_3 + a_5$。这意味着 $\mathrm{Ap}(S)$ 在 $\preceq_S$ 下至多有三个极大元，因此 $\#\,\mathrm{SG}(S) \leq \#\,\mathrm{PF}(S) \leq 3$。另外，若对$i \in \{1,4\}$有$b_i = a_i$，则 $2(a_i - 6) < a_2$

于是由 (2.1) 可得 $2(a_i - 6) \not\in S$，所以$a_i - 6 \not\in \mathrm{SG}(S)$。我们得出结论：若 $\#\,\mathrm{SG}(S) \geq 4$, 则$a_1 > b_1$ 或$a_4 > b_4$, ，因此 $\#\,\mathrm{M}_S(T) \leq 3$ 且 $3 \not\in \mathrm{M}_S(T)$。我们还注意到

(3.1) $$\text{in this case,} \quad \text{if } \#\mathrm{SG}(S) = 5, \quad \text{then } M_S(T) = \{2, 5\},$$

这将在 (c) 部分的证明中发挥重要作用。

接下来，假设 $a_5 > a_2$。令 $b_3 = a_5 - a_2$, ，并固定 b_1,$b_4 \geq 0$，使得每个 bi 模 6,

$$a_1 \geq b_1 \geq \tfrac{1}{2}a_2, \qquad a_4 \geq b_4 \geq \tfrac{1}{2}a_2, \qquad \text{and} \qquad b_1 + b_4 = a_5;$$

注意，由于 $\mathrm{a}_1 + \mathrm{a}_4 \geq \mathrm{a}_5$ 且 12 $\mathrm{a}_2 + \frac{1}{2}\mathrm{a}_2 = \mathrm{a}_2 \leq \mathrm{a}_5$，这总是可行的。与前一种情况一样，我们断言 T $= \langle 6,\ \mathrm{b}_1, \mathrm{a}_2, \mathrm{b}_3, \mathrm{b}_4, \mathrm{a}_5 \rangle$ 是 S 的一个上半群，且 T 的阿佩里集为 $= \{0, \mathrm{b}_1, \mathrm{a}_2, \mathrm{b}_3, \mathrm{b}_4, \mathrm{a}_5\}$。

我们先借助引理 2.2 证明 $\mathrm{Ap}(T) = \{0, b_1, a_2, b_3, b_4, a_5\}$:

- $b_1 + b_1 \geq a2$，因为 $b_1 \geq \frac{1}{2}a2$;
- $b_1 + a_2 \geq b_1 + (b_4 - a2) = a_5 - a_2 = b3$，因为由 (2.1) 可得 $2a_2 \geq a4$，且 $a_4 \geq b4$;
- $b_1 + b_3 = b_1 + (a_5 - a2) \geq a_5 - b_1 = b4$，因为 $b_3 = a_5 - a2$，且 $b_1 \geq \frac{1}{2}a2$;
- $b_1 + b_4 = a_5 \geq a5$;
- $a_2 + a_2 \geq b4$，因为 $b_4 \leq a4$ 且由 (2.1) 可得 $2a_2 \geq a4$;
- $a_2 + b_3 = a_2 + (a_5 - a2) = a_5 \geq a5$;
- $a_2 + a_5 \geq a_1 \geq b1$，由 (2.1) 得;
- $b_3 + b_4 = (a_5 - a2) + b_4 \geq a_5 - b_4 = b1$，因为 $b_4 \geq \frac{1}{2}a2$;
- $b_3 + a_5 \geq a_5 \geq a2$;
- $b_4 + b_4 \geq a2$，因为 $b_4 \geq \frac{1}{2}a2$;
- $b_4 + a_5 = b_4 + (a_2 + b3) \geq b3$；并且
- $a_5 + a_5 \geq a_4 \geq b4$，由（2.1）得出。

现在，由于 $b_1 \leq a_1$ 和 $b_4 \leq a_4$, ，为了利用（2.2）证明 $S \subseteq T$，只需证明 $b_3 \leq a_3$。这是由以下事实得出的：根据（2.1），$a_3 + a_2 \geq a_5$，因此$a_3 \geq a_5 - a_2 = b_3$。

现在我们证明 T 是对称的。注意，$b_3 + a_2 = a_5$, ，因此$b_3 \preceq_S a_2$ 和$a_5 \preceq_S a_2$ 成立。此外，$b_1 + b_4 = a_5$, ，因此$b_1 \preceq_S a_5$ 且$b_4 \preceq_S a_5$。因此，由引理 2.1 可知，T 是对称的。这证明了第 (a) 部分。

现在我们验证本情形下第 (b) 部分中关于 T 的断言。若 $\mathrm{a}_1 + \mathrm{a}_4 = \mathrm{a}_5$,, 则 # SG(S) $\leq$ # S 的伪弗罗贝尼乌斯数集合 ≤ 3。因此，若 # SG(S) ≥ 4，则由 (2.1) 可得 $\mathrm{a}_1 + \mathrm{a}_4 \geq \mathrm{a}_5 + 6$。此外，注意若 $\mathrm{a}_1 - 6 \not\in$ SG(S) 且 $\mathrm{a}_4 - 6 \not\in$ SG(S)，则 # SG(S) ≤ 3。由于我们假设 # SG(S) ≥ 4，因此 $\mathrm{a}_1 - 6$ 或 $\mathrm{a}_4 - 6$ 至少有一个属于 SG(S)。若对于 $\mathrm{i} \in \{1, 4\}$，$\mathrm{a}_i - 6 \in$ SG(S)，则由 (2.1) 可得 $2(\mathrm{a}_i - 6) \geq \mathrm{a}_2$，因为 $2(\mathrm{a}_i - 6) \in$ S，所以 $\mathrm{a}_i - 6 \geq \frac{1}{2}\mathrm{a}_2$。现在我们逐一考察所有可能的情形。

- 假设 $\mathrm{a}_1 - 6 \in$ SG(S)，且 $\mathrm{a}_4 - 6 \not\in$ SG(S)。取 $\mathrm{b}_1 = \mathrm{a}_1 - 6$，然后取 $\mathrm{b}_4 = \mathrm{a}_5 - \mathrm{b}_1 = \mathrm{a}_5 - \mathrm{a}_1 + 6$，得到 $\mathrm{b}_4 = \mathrm{a}_5 - \mathrm{a}_1 + 6 \leq \mathrm{a}4$，因为 $\mathrm{a}_1 + \mathrm{a}_4 \geq \mathrm{a}_5 + 6$。在这种情况下，$\{2, 5\} \subseteq$ MS(T) $\subseteq \{2, 5, 4\}$，并且 $\{2, 5, 4\} =$ MS(T) 当且仅当 $\mathrm{a}_4 = \mathrm{b}4$，这等价于 $\mathrm{a}_1 + \mathrm{a}_4 = \mathrm{a}_5 + 6$。

• 假设 $a_4-6\in SG(S)$，且 $a_1-6\not\in SG(S)$。取 $b_4=a_4-6$，然后取 $b_1=a_5-b_4=a_5-a_4+6$，得到 $b_1=a_5-a_4+6\le a1$，因为 $a_1+a_4\ge a_5+6$。在这种情况下，$\{2,5\}\subseteq MS(T)\subseteq\{1,2,5\}$，并且 $\{1,2,5\}=MS(T)$ 当且仅当 $a_1=b1$，这等价于 $a_1+a_4=a_5+6$。

• 最后，设 a_1-6，$a_4-6\in SG(S)$。若 $a_1+a_4\ge a_5+12$，则对 $i=1$ 与 $i=4$ 两者均可选取 $bi=ai-6$，从而得到 $MS(T)=\{2,5\}$。另一方面，若 $a_1+a_4=a_5+6$，则我们按前两种情形之一处理：选取 $b_1=a_1-6$ 与 $b_4=a_5-b_1=a_5-a_1+6=a4$，得到 $MS(T)=\{2,5,4\}$；或者选取 $b_4=a_4-6$ 与 $b_1=a_5-b_4=a_5-a_4+6=a1$，得到 $MS(T)=\{1,2,5\}$。

在每种情况下，我们得出：若 $\#SG(S)\ge 4$，则 $\#M_S(T)\le 3$ 且 $3\not\in M_S(T)$。此外，

(3.2)　在这种情况下，若 $\#SG(S)=5$，则 $M_S(T)=\{2,5\}$ 或 $a_1+a_4=a_5+6$，

这将在 (c) 部分的证明中发挥重要作用。

至此，T 的构造完成。要构造 T'，只需将目前证明中所有下标都应用 $\mathbb{Z}_6$ 的非平凡自同构（在此自同构下，条件 $a_2>a_5$ 变为 $a_4>a_1$，而 $a_1+a_4=a_5+6$ 则变为$a_2+a_5=a_1+6$）。

现在已经证明了 (a) 和 (b) 部分，剩下唯一需要证明的结论是：若 $\#SG(S)=5$，则 $\#M_S(T)=2$ 或 $\#M_S(T')=2$。如果无法选取 T 使得 $\#M_S(T)=2$，那么根据 (3.1)，必有 $a_5>a_2$，，因此根据 (3.2)，必有 $a_1+a_4=a_5+6$。特别地，$a_5>a_1$。因此，$a_2+a_5>a_1+6$，这意味着根据构造 T′ 时所用的 (3.1) 和 (3.2)，可以选取 T′ 使得 $\#M_S(T')=2$。□

定理 3.5。 设 S 是一个重数为六的数值半群。

(a) 如果 S 有一个长度为 *5* 的分解，那么 S 有一个长度为 *4* 的分解。*(b)* 如果 S 有一个长度为 *4* 的分解，那么 S 有一个长度为 *3* 的分解。特别地，S 的分解长度集合是一个区间。

证明。Let T 和T' 表示由引理 3.4(a)构造的S 的上半群.

首先，假设 $S=T_1\cap\cdots\cap T_5$ 是一个不可约分解。根据 (2.3) 重新排列后，不妨设对于每个 i，都有 $M_S(T_i)=\{i\}$。由于该分解是不可冗余的，$\#SG(S)=5$（由 (2.5) 得出）。因此，根据引理 3.4(c)，或者 $M_S(T)=\{2,5\}$，此时 $S=T\cap T_1\cap T_3\cap T_4$ 是一个分解；或者 $M_S(T')=\{1,4\}$，此时 $S=T'\cap T_2\cap T_3\cap T_5$ 是一个分解。这证明了 (a) 部分。

接下来，假设 S 有一个长度为四的分解，因此 $\#SG(S)\ge 4$。由引理 3.4(a) 和 (b)，可以选择 T 和 T′，使得 $M_S(T)\cup M_S(T')=\{1,2,4,5\}$。由于 S 存在一个长度为四的分解，(2.3) 表明存在 S 的一个不可约上半群 U，使得 $3\in M_S(U)$，且 $\#M_S(U)\le 2$。因此，我们得到一个长度为 3 的分解 $S=T\cap T'\cap U$，其中根据引理 3.4(b)，T 和 T′ 均不可删去。这就证明了第 (b) 部分。

The 最后一个结论可通过考察 $\{2,3,4,5\}$ 的非区间子集得出。 . □

本节余下部分将给出一些计算结果，探讨小重数下会出现哪些分解长度集合。

例 3.6。 $\{2,3,4\}$ 的每个区间子集都可以作为一个重数为 5 的数值半群的分解长度集合出现。例如，半群

$$S_2 = \langle 5,6,7\rangle, \quad S_3 = \langle 5,6,13,14\rangle, \quad S_4 = \langle 5,11,12,13,14\rangle,$$
$$S_{23} = \langle 5,11,13,19\rangle, \quad S_{34} = \langle 5,12,13,14,16\rangle, \quad S_{234} = \langle 5,21,22,33,34\rangle$$

都能实现这样的分解长度区间。

例 3.7。 定理 3.5 指出了重数为 6 的数值半群的分解长度集合所受的唯一限制。事实上，半群

$$S_2 = \langle 6,7,10\rangle, \quad S_{34} = \langle 6,7,15,16,17\rangle, \quad S_{345} = \langle 6,13,14,15,16,17\rangle,$$
$$S_3 = \langle 6,7,8,17\rangle, \quad S_{234} = \langle 6,8,13,15,17\rangle, \quad S_{2345} = \langle 6,16,14,19,21,23\rangle,$$
$$S_{23} = \langle 6,7,9,17\rangle$$

都能实现 $\{2,3,4,5\}$ 的每个区间子集作为分解长度集合，但定理 3.5 禁止的集合除外。

例 3.8。 $\{2,3,4,5,6\}$ 的每个区间子集都可以作为某个重数为$m = 7$的数值半群的分解长度集合。例如，

$$S_2 = \langle 7,8,9\rangle, S_{234} = \langle 7,15,17,18,26\rangle, S_6 = \langle 7,22,23,24,25,26,27\rangle, S_3 = \langle 7,8,9,10\rangle, S_5 = \langle 7,15,26,27,31,32\rangle, S_{56} = \langle 7,16,17,18,19,20,22\rangle, S_{23} = \langle 7,8,10,11\rangle, S_{45} = \langle 7,8,17,18,19,20\rangle, S_{456} = \langle 7,15,16,17,18,19,20\rangle, S_4 = \langle 7,15,17,33\rangle, S_{345} = \langle 7,10,15,16,18,19\rangle, S_{3456} = \langle 7,16,18,20,22,24,26\rangle, S_{34} = \langle 7,8,10,19\rangle, S_{2345} = \langle 7,15,18,24,26,34\rangle, S_{23456} = \langle 7,24,25,27,30,36,40\rangle$$

实现每一种这样的分解长度区间。

此外，除了与备注3.1和定理 3.5一致外，计算证据还表明，以下猜想对$m = 8$也成立。事实上，通过采用与得出例3.6–3.8时类似的搜索方法，如果猜想3.9成立，那么它就构成了$m = 8$ 情形下对分解长度的唯一限制。

猜想3.9。 固定一个重数为 $m = 2k$ 且 $k \in \mathbb{Z}$ 的数值半群 S。若 S 有一个长度为 j 的分解，其中 $k < j < m$，则 S 有一个长度为 $j - 1$ 的分解。

$T(20)$	0									11	12	13	14	15	16	17	18	19			21	$\to$					
$I(20)$	0					8				11			13	14	15	16	17	18	19			21	$\to$				
$T(21)$	0									11	12	13	14	15	16	17	18	19	20			22	$\to$				
$I(21)$	0	2	4	6	8	10				12			14			16			18		20		22	$\to$			
$T(22)$	0										12	13	14	15	16	17	18	19	20	21			23	$\to$			
$I(22)$	0			4			8				12	13			15	16	17			19	20	21		23	$\to$		

表1. 若干形如$T(F)$ 和$I(F)$的半群的元素。

4. 普通数值半群

回顾一下，重数为m 的普通数值半群是

$$H_m = \langle m, m+1, \ldots, 2m-1 \rangle = \mathbb{Z}_{\geq 0} \setminus \{1, 2, \ldots, m-1\}$$

并且有$\mathrm{F}(H_m) = m-1$、$\mathrm{SG}(H_m) = [\frac{1}{2}m, m-1] \cap \mathbb{Z}$，以及 $|\mathrm{SG}(H_m)| = \lfloor \frac{1}{2}m \rfloor$。在本节中，我们构造$H_m$ 的不可约分解，表明不同长度的个数渐近趋近于 $|\mathrm{SG}(H_m)|$。

我们首先描述将要使用的不可约分量。定义

$$T(F) = \mathbb{Z}_{\geq 0} \setminus ([1, \tfrac{1}{2}F] \cup \{F\}),$$

并给定j，$F \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 满足$F = 2^j(2k+1)$ 的$k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$，定义

$$I(F) = (\langle 2^{j+1} \rangle + T(F)) \setminus \{2^j(2k'+1) : 0 \leq k' \leq k\}.$$

表 1 给出了$T(F)$ 和$I(F)$的几个例子。直观地说，$I(F)$ 是从$T(F)$ 中移除一些元素 $n \in (\frac{1}{2}F, F) \subseteq T(F)$，随后再添加每个$F-n$而得到，从而保持不可约性。下面的引理 4.1 保证所得集合仍对加法封闭。特别要注意，对于任意奇数F，$I(F) = \langle 2, F+2 \rangle$。

引理 4.1。给定上述 j 和 F，有如下结论：
(a) $I(F)$ 是一个数值半群，且$\mathrm{F}(I(F)) = F$；*(b)* 当 $j = 0$ 时，$I(F)$ 是对称的，否则是伪对称的；*(c)* 当且仅当 $a \not\equiv 2^j$ 模 2^{j+1} 时，每个 $a \in (\frac{1}{2}F, F]$ 都属于 $I(F)$。

证明。令 $A = \{2^j \cdot (2k'+1) : 0 \leq k' \leq k\} = \{2^j, 2^j \cdot 3, \ldots, F - 2^{j+1}, F\}$。我们先简要证明 (c)：注意到 $T(F) \subseteq \langle 2^{i+1} \rangle + T(F)$，因此 $I(F)$ 在 $(\frac{1}{2}F, F]$中的任何间隙都必定属于A。

现在，已知$T(F)$ 是一个数值半群，因此显然 $\langle 2^{j+1} \rangle + T(F)$ 也是一个数值半群。要证明$I(F)$ 对加法封闭，只需固定$a, b \in I(F)$ 并证明$a + b \notin A$。为此，考虑以下几种情况：

- 若 $a, b > F/2$，则 $a + b > F = \max A$；

• 若 $a < F/2$ 且 $b > F/2$，则 $2_j{}^{+1} \mid a$ 和 $b \not\equiv 2_j \bmod 2_j{}^{+1}$，因此我们有$a + b \equiv b \bmod 2_j{}^{+1}$，从而 $a + b \notin A$；并且

• 若 a，$b < F/2$，则 $2_j{}^{+1} \mid a,b$，因此 $2_j{}^{+1} \mid (a + b)$，从而 $a + b \notin A$。

这证明了$I(F)$ 是一个数值半群，并且由于 $\mathrm{F}(T(F)) = F = \max A$，我们有 $\mathrm{F}(I(F)) = F$，从而验证了 (a)。

这就剩下 (b) 了。注意，I(F) = (T(F) \ A) ∪(F − A)，且 F(I(F)) = F(T(F))。因此，I(F) 和 T(F) 具有相同的亏格和弗罗贝尼乌斯数。由于 T(F) 不可约，根据 [10,推论 4.5]，I(F) 也不可约。□

例4.2。 定理4.3的证明还给出了H_{28}的若干分解：

$$\begin{aligned} H_{28} &= I(16) \cap I(24) \cap I(20) \cap I(26) \cap I(27) \\ &= I(16) \cap I(24) \cap I(20) \cap I(26) \cap I(25) \cap T(27) \\ &= I(16) \cap I(24) \cap I(20) \cap I(22) \cap I(25) \cap T(27) \cap T(26) \\ &= I(16) \cap I(24) \cap I(20) \cap I(22) \cap I(23) \cap T(27) \cap T(26) \cap T(25) \\ &= I(16) \cap I(20) \cap I(22) \cap I(23) \cap T(27) \cap T(26) \cap T(25) \cap T(24). \end{aligned}$$

上面的第一个分解相当于对

$$\mathrm{SG}(H_{28}) = \{16\} \cup \{24\} \cup \{20\} \cup \{14, 18, 22, 26\} \cup \{15, 17, \ldots, 27\}$$

按每个元素的2进赋值进行划分，之后的每个分解都会将最后一个元素从某个块中分离出来。唯一的例外是最后一行，其中$I(24)$ 在纳入$T(24)$ 后便是冗余的，因为二者都只避开了 $24 \in \mathrm{SG}(H_{28})$。

定理4.3。 普通数值半群 H_m 存在长度为 $[n_m, 12m]$, *where* $n_m = \lfloor \log_2(\frac{1}{3}(m-1)) \rfloor + 2$ 的不可约分解。

证明。我们首先展示一个长度为所述最小值的分解。Let

$$J = \{i \in \mathbb{Z}_{\geq 0} : 2^i(2k+1) \in \mathrm{SG}(H_m) \text{ for some } k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}.$$

我们断言 $|J| = n_m$。考虑以下情形。

• 若对于某个$j \in \mathbb{Z}$有 $2_j \leq \mathrm{F}(H_m) < 2_j + 2_j{}^{-1}$，则我们断言$J = \{0, 1, \ldots\ldots, j-2, j\}$。事实上，$2_j \in \mathrm{SG}(H_m)$ 意味着$j \in$ J</style}，

$$2^{j-1} < \min \mathrm{SG}(H_m) \leq \max \mathrm{SG}(H_m) < 3 \cdot 2^{j-1}$$

这意味着$j - 1 \notin$ *J</style}*；并且对于每个$i \leq j - 2$，形如$2^i(2k+1)$ 且$k \in \mathbb{Z}$ 的正整数构成公差为 2^{i+1} 的等差数列。因此，由于 $\mathrm{SG}(H_m)$ 是长度为 $12m \geq 2^{j-1}$ 的区间，我们得出$i \in$ *J</style}*。现在已经证明J 具有所声称的形式，由于 $2^j \leq m - 1 \leq 2^j + 2^{j-1}$，我们看到

$$2^{j-2} \leq \tfrac{1}{3}(m-1) < 2^{j-1},$$

因此 $n_m = (j-2) + 2 = j = |J|$。

• 在所有剩余情况下，我们必有 $2_j + 2_j{}^{-1} \leq \mathrm{F}(H_m) < 2_j{}^{+1}$ 对某个$j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$成立；通过类似的论证，$J = \{0, 1, \ldots\ldots, j\}$ 以及 $|J| = n_m$。接下来，对每个 $j \in J$，令

$$F_j = \max(\{g \in \mathrm{SG}(H_m) : g = 2^j(2k+1) \text{ for some } k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}).$$

我们断言

$$H_m = \bigcap_{j \in J} I(F_j),$$

根据引理 4.1(b)，其中的每个分量都是不可约的。事实上，对于每个j,

$$\mathrm{F}(I(F_j)) = F_j \leq m - 1 = \mathrm{F}(H_m),$$

因此，每个分量都包含 H_m。根据 J 的定义，每个特殊间隙 $\mathrm{g} \in \mathrm{SG}(\mathrm{H}_m)$ 都可写成 $\mathrm{g} = 2^j(2\mathrm{k}+1)$ 的形式，其中某个 $\mathrm{k} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$和 $\mathrm{j} \in \mathrm{J}$；由于 $\mathrm{g} \geq \frac{1}{2}\mathrm{m} \geq \frac{1}{2}\mathrm{F}j$且 $\mathrm{g} - 2^j \bmod 2^{j+1}$，由引理 4.1(c)可知 $\mathrm{g} \not\in \mathrm{I}(\mathrm{F}j)$。根据 (2.5)，这就证明了所断言的等式。注意，H_m 的每个特殊间隙恰好是上述构造的分解中某一个分量的间隙：若对于某个正整数 t 有 $\mathrm{g} = 2^j(2\mathrm{t}+1)$，则 $\mathrm{g} \not\in \mathrm{I}(\mathrm{F}j)$，并且它属于其余分量。

记 $\mathrm{SG}(H_m) = \{g_1 > g_2 > \cdots\}$。对于每个 $\ell \leq \frac{1}{2}(m-1) = |\mathrm{SG}(H_m)|$，记$D_\ell$ 为分解

$$H_m = \left(\bigcap_{j \in J'} I(F'_j)\right) \cap \left(\bigcap_{i=1}^{\ell} T(g_i)\right),$$

其中

$$J' = \{j : 2^j(2k+1) \in \{g_{\ell+1}, g_{\ell+2}, \ldots\} \text{ for some } k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$$

且对于每个 $j \in J'$,

$$F'_j = \max(\{g \in \{g_{\ell+1}, g_{\ell+2}, \ldots\} : g = 2^j(2k+1) \text{ for some } k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}.$$

为证明这是一个分解，我们比较 D_ℓ 与 $\mathrm{D}\ell{+}1$，其中 D_0 表示在证明的第一部分中构造的分解。注意，D_ℓ 和 $\mathrm{D}\ell{+}1$只有两处不同：(i) 后者多了一个分量 $\mathrm{T}(\mathrm{g}\ell{+}1)$；(ii) 当 $\mathrm{F}'_j = \mathrm{g}\ell{+}1$ 时，D_ℓ 中的分量 $\mathrm{I}(\mathrm{F}'_j)$ 会被 $\mathrm{D}\ell{+}1$中的 $\mathrm{I}(\mathrm{F}'_j - 2^{i+1})$ 替换，或者被省略，具体取决于 $\mathrm{F}'_j - 2^{i+1} \in \mathrm{SG}(\mathrm{H}_m)$ 是否成立。特别地，$\mathrm{SG}(\mathrm{H}_m)$ 的每个元素都由 D_ℓ 和 $\mathrm{D}\ell{+}1$ 中的同一个分量覆盖，除了 $\mathrm{g}\ell{+}1$；而它在 $\mathrm{D}\ell{+}1$中仍然被覆盖。根据归纳法，我们得出每个 D_ℓ 都是 H_m的一个分解。

最后，我们考察D_ℓ的长度。对于每个 ℓ，分解$D\ell{+}1$ 的D_ℓ 分量数要么相同，要么恰好多一个。此外，最终的分解是

$$H_m = \bigcap_{g \in \mathrm{SG}(H_m)} T(g),$$

它有 $|\mathrm{SG}(H_m)| = \lfloor \frac{1}{2}m \rfloor$ 个分量。至此证明完成。 □

注4.4. 分解

$$H_{28} = I(27) \cap I(26) \cap \langle 7, 11, 12, 17\rangle \cap \langle 9, 10, 13, 16, 17, 21\rangle,$$

表明，定理4.3中构造的分解未必能达到可能的最小分解长度。事实上，通过计算可以验证，$m = 28$ 是出现这一现象的最小重数，并且

$$H_{56} = I(55) \cap I(54) \cap \langle 8, 15, 19, 41\rangle \cap \langle 7, 15, 23, 31, 39, 47\rangle$$

这是第一个例子，其中定理4.3中的最短分解比可能的最小长度至少多出2。注意，根据 [2, 定理2.5], ，H_m 的最小分解长度在$m \to \infty$增大时无界。

参考文献

[1] A. A. Antoniou，S. Tringali，关于循环群中幂幺半群和和集的算术，Pac. J. Math. **312** (2021)，279–308。[2] T. Bogart，S. A. Seyed Fakhari，不可约数值半群的不可约分解无界性，Comm. Algebra **53** (2025)，1361–1364。[3] L. Cossu，S. Tringali，抽象分解定理及其在幂等分解中的应用。Isr. J. Math.**263** (2024)，349–395。[4] M. Delgado，P. A. Garcia-Sanchez，J. Morais，NumericalSgps，数值半群软件包，1.4.0 dev版（2024），经同行评审的GAP软件包，https://gap-packages.github.io/ numericalsgps。[5] GAP团队，GAP——群、算法与编程，4.12.2版（2022），https: //www.gap-system.org。[6] P. A. Garc´ıa-S´anchez，分解为不可约数值半群，Commun. Korean Math. Soc. **40** (2025) 587–592。[7] A. Geroldinger，Q. Zhong，交换幺半群中的分解理论，《半群论坛》**100**(2020)，22–51。[8] J. C. Rosales，关于数值半群，《半群论坛》**52** (1996)，307–318。[9] J. C. Rosales 和 M. B. Branco，数值半群作为不可约数值半群之交的分解，Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin **9** (2002)，373–381。[10] J. Rosales 和 P. Garc´ıa-S´anchez，数值半群，《数学进展》第20卷，施普林格出版社，纽约，2009年。

´代数与 IMAG 系，格拉纳达大学，格拉纳达，西班牙电子邮件地址：pedro@ugr.es

数学系，圣迭戈州立大学，圣迭戈，加利福尼亚州 92182电子邮件地址：cdoneill@sdsu.edu