arXiv:2602.00555v1 [quant-ph] 31 Jan 2026

哈密顿量模拟的纠缠依赖误差界

Prateek P. Kulkarni PES
大学
pkulkarni2425@gmail.com

摘要

我们揭示了纠缠熵与哈密顿量模拟中特罗特–铃木乘积公式的近似误差之间的紧密联系。乘积公式仍是近期设备上量子模拟的主力方法，但标准误差分析给出的最坏情况界，可能会大幅高估结构化问题所需的资源。

对于由几何局域哈密顿量支配、所有二分划分下最大纠缠熵为 $S_{\max}$ 的系统，我们证明，一阶 Trotter 误差的尺度为 $\mathcal{O}(t^2 S_{\max}\text{polylog}(n)/r)$，而非最坏情况界 $\mathcal{O}(t^2 n/r)$，其中 n 是系统规模，r 是 Trotter 步数。这使一维面积律系统的误差界改进了 $\tilde{\Omega}(n^2)$，二维系统的误差界改进了 $\tilde{\Omega}(n^{3/2})$。我们还将这些界推广到高阶铃木公式，其改进因子对于第 p 阶公式涉及 $2^{pS^*/2}$ 。

我们还证明了一个分离结果：要达到相同的精度，体积律纠缠系统从根本上需要比面积律系统多 $\Omega(n)$ 个 Trotter 步数~。这一分离结果在对数因子范围内是紧的。

我们的分析结合了刻画局域性的 Lieb-Robinson 界、描述纠缠结构的张量网络表示，以及新颖的对易子熵不等式；后者通过量子态的施密特秩来界定嵌套对易子的期望值。这些结果可直接应用于量子化学、凝聚态模拟，以及容错量子计算的资源估算。

目录

1 引言 **3**

2 预备知识 **6**

2.1 符号与设定.6 2.2 哈密顿量模拟的乘积公式 .7 2.3 纠缠熵 .8 2.4 Lieb-Robinson 界 .9 2.5 矩阵乘积态 .9

3 主定理：纠缠依赖误差界 10

3.1 主要结果陈述 .10 3.2 关键技术引理 .11 3.3 主定理的证明 .14

4 分离 B 纠缠区域之间 18

4.1 体积律系统的下界 .19 4.2 面积律系统的上界 .21 4.3 分离间隙 .21 4.4 显式构造 .22

5 特定哈密顿量的应用22

5.1 一维自旋链.23 5.2 二维晶格系统.24 5.3 稀疏 k-一般图上的局域哈密顿量.25 5.4 阈值分析：何时纠缠界更优？ .25 5.5 改进总结.27

6 数值验证27

7 讨论 an d 开放问题 2 **9**

7.1 实际意义 .29 7.2 扩展与推广 .29 7.3 开放问题 .30 7.4 结语 .31

1 引言

哈密顿量模拟——模拟量子系统时间演化的计算任务——是量子计算机最有前景的应用之一 [Fey82，Llo96、A+21，DBK+22]。给定一个哈密顿量 H 作用于 n 个量子比特，且演化时间为 t，目标是实现一个酉算符 $\tilde{U}$，使得 $\left\|\tilde{U}-e^{-iHt}\right\| \leq \varepsilon$ 对于某个所需精度 ε。这一基本操作支撑着量子化学算法 [AGDLHG05，RWS+17]、凝聚态物理算法 [AL97], ，并作为子程序应用于量子优化 [FGG14]。

乘积公式。 在哈密顿量模拟的各种方法中，乘积公式（也称为 Trotter 化）仍是最实用的方法之一，尤其适用于近期设备 [CMN+18，Cam19]。对于一个哈密顿量 $H=\sum_{j=1}^{L} H_j$，一阶 Lie-Trotter公式将其分解为更简单的项，并对其进行近似

$$e^{-iHt} \approx \left(\prod_{j=1}^{L} e^{-iH_j t/r}\right)^r , \tag{1}$$

而高阶铃木公式则能以更优的 t 缩放为代价，但需要更大的电路深度 [Suz90，Suz91]。

误差分析的挑战。 尽管经过数十年的研究，乘积公式的紧误差界仍是一个活跃的研究领域。标准分析给出的一阶误差为

$$\varepsilon_{\text{Trotter}} \leq \frac{t^2}{2r}\sum_{j<k}\|[H_j,H_k]\| , \tag{2}$$

这在最坏情况下是紧的 [CST+21]。然而，对于结构化系统，这一界可能极为保守。近期研究表明，误差在很大程度上取决于演化的量子态 [HHZ19，SOE+19]。

纠缠的作用。 物理量子系统的纠缠性质因其结构而有很大差异。有能隙一维哈密顿量的基态遵循面积律：任意二分划分下的纠缠熵按 $\mathcal{O}(1)$ [Has07]的尺度变化。相比之下，高度激发态和热态可能呈现体积律 标度，其纠缠随 $\mathcal{O}(n)$ [Pag93]增长。

为何 Trotter效率至关重要。 面积律与体积律纠缠之间的二分法对经典模拟具有深远影响：满足面积律的量子态允许高效的矩阵乘积态（MPS）表示 [Vid03，Vid04，Sch11], 而体积律态则需要指数级的经典资源。一个自然的问题是，这种二分法是否延伸到 量子模拟：纠缠结构是否会影响 Trotter 化逼近量子动力学的效率？关键在于，即使经典模拟难以处理（例如超出适中规模的二维系统），理解 Trotter效率仍可指导实际量子优势的资源估算。这引出了我们的核心问题：

How does entanglement entropy quantitatively affect the approximation error in Trotter-Suzuki product formulas?

我们的贡献。 我们通过三项主要结果给出全面解答，这些结果共同确立相匹配的上界与下界，从而表明纠缠的根本作用：

1. **纠缠依赖的上界** (定理 3.1)：对于作用于 n个量子比特、最大纠缠熵为 $S_{\max}$的局域哈密顿量，一阶 Trotter 误差满足

$$\varepsilon \leq C \cdot \frac{t^2 S_{\max} \operatorname{polylog}(n)}{r}.$$

这将最坏情况界改善了 $n/S_{\max}$ 倍；当$S_{\max} = \mathcal{O}(\log n)$ 时，该改善是指数级的。

2. **匹配的下界 / 分离定理**(定理4.4)：这种改进是紧的。˜我们证明，要达到相同的精度，对某些体积律系统进行乘积公式模拟所需的 Trotter 步数，比面积律系统多$\Omega(n)$倍。这表明，依赖纠缠的标度并非我们分析方法的产物，而是反映了计算复杂性上的根本差异。

3. **对物理系统的应用** (第 5 节)：我们为一维自旋链（改善 n^2/多对数 n倍）、二维晶格（改善 $n^{3/2}$ 倍）以及一般几何结构（依赖于树宽）得到了具体的改进。

匹配的上界和下界共同表明，纠缠熵是 Trotter 模拟的“恰当”复杂性度量：它精确刻画了容易实例与困难实例之间的差距。

技术方法。 我们结果背后的关键洞见是，Trotter误差源于哈密顿量项之间的对易子，而低纠缠态对这些对易子的感受较弱。我们通过以下三步论证对此进行精确刻画：

(i) **局域性限制误差传播**。 Lieb-Robinson 界 [LR72,NS06] 表明，局域哈密顿量中的信息以有限速度传播。因此，我们可以将全局 Trotter 误差分解为局部区域的贡献，而在“光锥”之外，误差尾部呈指数衰减。

(ii) **纠缠限制对易子效应**。 在每个局部区域内，我们证明了一个新的对易子-熵不等式 (定理 3.7)：$|\langle\psi|[H_j, H_k]|\psi\rangle| \leq 2^S$ 其中 S 是跨越该割的纠缠熵，该割将$\operatorname{supp}(H_j)$ 与 $\operatorname{supp}(H_k)$分隔开来。因此，低纠缠态会抑制误差。

（iii）**MPS 结构使计数成为可能**。张量网络表示 [Vid03，Vid04] 提供了追踪纠缠如何分布于各个割上的语言。键维数$\chi \sim 2^{S_{\max}}$，其中 $S_{\max}$ 表示所有二分划分上的最大纠缠熵，它控制着对误差有贡献的项的有效数量。

总之，这些要素给出了一个界：标准 Trotter 误差中的系统尺寸因子 L 被 $S_{\max} \cdot \operatorname{polylog}(n)$ 取代。

相关工作。乘积公式误差的分析有着悠久的历史，始于奠基性工作 [Llo96，Suz90，Suz91] 此后界限日益收紧 [BACS07，CMN+18]。近年来的一项重大进展是 Childs 等人证明了依赖于交换子的误差标度 [CST+21]，它体现了对易关系带来的优势，但对量子态而言仍属于最坏情况。近期，Zhuk 等人将这一框架扩展到了多乘积公式 [ZRB24]，；而 Yi 和 Crosson [YC22] 则为低能子空间给出了改进的谱界。Layden [Lay22]还利用二阶视角进一步改进了一阶界。

局域性在通过 Lieb-Robinson 界约束量子动力学方面所发挥的作用已得到充分确立 [LR72，NS06]，Haah 等人 [HHKL21] 利用这些结果，开发出了改进的晶格哈密顿量模拟算法。我们的工作直接建立在这些局域性见解之上。

Sahinoglu 和 Somma 将模拟成本与物理性质联系起来 [SS21]，他们表明，在有能隙哈密顿量的低能量子空间内进行演化可以更高效地模拟，这一结果隐含地利用了基态的面积律结构。Heyl 等人 [HHZ19]以及 Sieberer 等人 [SOE+19]证明，量子局域化能够抑制 Trotter误差，从而提供了另一个依赖于量子态的优势实例。在经典模拟方面，Vidal 关于矩阵乘积态（MPS）的工作 [Vid03，Vid04] 从根本上建立了纠缠熵与经典可处理性之间的联系。

动力学过程中纠缠的行为是一个广阔的研究领域。尽管有能隙一维系统的基态满足面积律 [Has 07]，，Calabrese 和 Cardy（在共形场论中）以及 Kim 和 Huse（在热化系统中）对纠缠增长的测量 [CC05] 和 [KH13] 为我们的分离结果提供了物理背景。

量子优势背景。我们的分离定理有助于深化人们对量子计算机何时优于经典资源的理解。不同于基于采样的优势演示 [A+19]，哈密顿量模拟的计算优势植根于物理问题的结构。纠缠与经典计算难度之间的联系早已确立——当纠缠超过对数标度时，张量网络方法便会失效 [Sch11]。我们的工作表明，这种联系也适用于量子模拟本身：模拟一个系统的 Trotter 复杂度取决于其产生的纠缠，而不只是系统规模。

本研究的定位。表 1 比较了我们的方法与以往用于获得依赖于量子态或结构的 Trotter 界的方法。关键区别在于，我们以纠缠熵作为控制参数。我们证明，量 $S^* = S_{\max} + c_{\text{growth}} dJt$ （即“演化期间的有效纠缠”）直接以乘法因子的形式进入 Trotter 误差界：降低 S^* 便会按比例减少所需的 Trotter 步数。这确立了一种精确的动力学联系 —— 误差通过对易子累积，而相关切分两侧量子态的施密特秩会抑制这些对易子的大小；施密特秩则随纠缠熵呈指数增长。

与利用纠缠来压缩态表示的经典矩阵乘积态方法不同，我们证明纠缠能够控制乘积公式的误差动力学。与仅适用于低能子空间的谱界不同，我们的界适用于具有有界纠缠的任意量子态，包括淬火动力学产生的量子态。

结构安排。 第2节 介绍符号和背景。 第3节 给出我们的主定理及其证明。 第4节 证明纠缠分离。 第 5 节 将结果应用于

方法	关键量	依赖于量子态?	优势区间
Childs 等人 [CST+21]	$\sum \|\|[H_j, H_k]\|\|$	No	对易/近似对易
Sahinoglu-Somma [SS21]	谱隙 Δ	能量子空间	有隙基态
Heyl 等人 [HHZ19]	局域化长度	Yes	多体局域化
Yi-Crosson [YC22]	谱滤波	能量子空间	低能演化
本工作	$S^* = S_{\max} + c_{\text{growth}} dJt$	Yes	面积律 / 低纠缠

表1：改进 Trotter 界的方法比较。我们的工作首次将纠缠熵用作直接控制参数，从而为任何具有有界纠缠的量子态带来改进，而与能量无关。

特定系统。S　　第6节提供数值验证。第7节以开放问题作结　　.

2 预备知识

我们建立符号体系，回顾关键定义，并总结得出主要结果所需的技术背景。熟悉乘积公式与纠缠熵的读者可跳至第3节。

2.1 符号与设定

我们考虑由 n 个量子比特组成的量子系统，每个量子比特的局域希尔伯特空间为 $\mathbb{C}^2$。复合希尔伯特空间为 $\mathcal{H} = (\mathbb{C}^2)^{\otimes n}$，其维数为 2^n。对于子集 $A \subseteq [n] = \{1, 2, \ldots, n\}$，记：

- $\mathcal{H}_A = \bigotimes_{i \in A} \mathbb{C}^2$ 表示 A 中量子比特的希尔伯特空间，
- $\bar{A} = [n] \setminus A$ 表示 A 的补集，
- $|A|$表示 A 的基数。

对于算符，除非另有说明，$\|\cdot\|$ 表示谱范数（算符范数），$\|\cdot\|_1$ 表示迹范数。泡利算符为 X，Y，Z，其定义采用标准形式；我们用 P_i 表示作用于量子比特 i 的泡利 $P \in \{X, Y, Z\}$。

定义 2.1（局域哈密顿量）。作用于 n 个量子比特的哈密顿量 H 若可分解为 $H = \sum_{j=1}^{L} H_j$，且每一项 H_j 至多在 k 个量子比特上非平凡作用，则称其为 k-局域。H_j 的支撑 记为 $\text{supp}(H_j)$，是 H_j 非平凡作用的量子比特集合。

我们称 H 是相对于图 $G = (V, E)$ 的几何局域对象，其中 $V = [n]$；若对每一项 H_j，其支撑 $\text{supp}(H_j)$ 所诱导的子图是 G的连通子图，则满足此条件。通常，我们将 G视为晶格（一维链、二维网格等），并要求 $\text{supp}(H_j)$ 是一条边或一个较小的连通分量。

本文中，对于几何局域哈密顿量，我们采用以下记号：

- $d = \max_{v \in V} \deg_G(v)$：相互作用图 G 的最大度，
- $J = \max_{j \in [L]} \|H_j\|$：最大相互作用强度，
- L：哈密顿量分解中的项总数。

对于一个 k-局域哈密 作用于 n 个量子比特、具有度数为 d 的相互作用图的哈密顿量，我们有 $L = \mathcal{O}(n \cdot d^{k-1})$　.

2.2 哈密顿量模拟的乘积公式

乘积公式也称为 Trotter 化或 Trotter-Suzuki 公式，它们通过一系列更简单、可在量子计算机上直接实现的指数算符乘积来近似时间演化算符 e^{-iHt} 。

定义 2.2 (Lie-Trotter 公式 [Tro59])。 给定哈密顿量 $H = \sum_{j=1}^{L} H_j$ 和时间步长$\tau > 0$，一阶 *Lie-Trotter*公式 为:

$$S_1(\tau) = \prod_{j=1}^{L} e^{-iH_j\tau} = e^{-iH_L\tau} \cdots e^{-iH_2\tau} e^{-iH_1\tau}. \tag{3}$$

总时间为 t 、使用 r 个Trotter 步数的演化由 $S_1(t/r)^r$近似。

近似 误差源于各项 H_j的非对易性。在领头阶:

$$S_1(\tau) = e^{-iH\tau} \cdot \exp\left(-\frac{\tau^2}{2} \sum_{j<k} [H_j, H_k] + \mathcal{O}(\tau^3) \right). \tag{4}$$

高阶公式通过对基本指数算符进行更精细的组合，获得更好的误差标度。

定义 2.3 (Suzuki 公式 [Suz90、Suz91])。第 p 阶铃木公式 $S_p(\tau)$ 递归定义如下。令 $S_1(\tau)$ $= \prod_{j=1}^{L} e^{-iH_j\tau}$ 如上所述，对于 $p \geq 1$:

$$S_{p+1}(\tau) = S_p(s_p\tau)^2 \cdot S_p((1-4s_p)\tau) \cdot S_p(s_p\tau)^2, \tag{5}$$

其中 $s_p = (4 - 4^{1/(2p+1)})^{-1} \approx 1/(4 - 4^{1/3}) \approx 0.41$ 对于 $p = 1$。这种构造确保:

$$S_p(\tau) = e^{-iH\tau} + \mathcal{O}(\tau^{p+1}). \tag{6}$$

乘积公式的标准误差分析给出了以下最坏情况界。

命题 2.4 (标准 Trotter 误差 [CST+21])。对于满足 $H = \sum_{j=1}^{L} H_j$ 的哈密顿量$\|H_j\| \leq J$ 对所有 j, 第 p 阶铃木公式满足:

$$\left\| S_p(t/r)^r - e^{-iHt} \right\| \leq \frac{(2LJt)^{p+1}}{r^p} \cdot c_p, \tag{7}$$

其中 c_p 是一个仅依赖于 p 的显式常数（例如， $c_1 = 1/2$、 $c_2 \approx 0.1$）。

该界的关键特征是因子 L^{p+1}，对于典型的局域哈密顿量，其随 n^{p+1} 缩放。我们的主要贡献是用一个依赖纠缠的量取代这种系统尺寸依赖。

2.3 纠缠熵

纠缠量化了子系统之间的量子关联，在量子信息和多体物理中发挥着根本性作用。

定义 2.5 （冯·诺伊曼纠缠熵 [NC10]）。 对于纯态 $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ 以及将系统划分为区域 $\bar{}$和 A 的二分划分 A，相对于此二分划分， $|\psi\rangle$ 的纠缠熵为：

$$S_A(\psi) = -\operatorname{Tr}(\rho_A \log_2 \rho_A) = -\sum_k \lambda_k \log_2 \lambda_k, \tag{8}$$

其中， $\rho_A = \operatorname{Tr}_{\bar{A}}(|\psi\rangle\langle\psi|)$ 是 A 上的约化密度矩阵， $\{\lambda_k\}$ 是其特征值（施密特系数的平方）。

$\bar{}$熵满足 $0 \le S_A \le \min(|A|, |A|)$，对于乘积态，左侧取等号；对于最大纠缠态，右侧取等号。对于双体纯态，$S_A = S_{\bar{A}}$。

定义 2.6 （最大纠缠熵和平衡纠缠熵）。 对于量子态 $|\psi\rangle$，最大纠缠熵为：

$$S_{\max}(\psi) = \max_{A\subseteq[n]} S_A(\psi) = \max_{|A|=\lfloor n/2\rfloor} S_A(\psi), \tag{9}$$

其中第二个等号成立，是因为平衡二分划分下熵达到最大值。

量子多体物理中的一个核心二分法，根据纠缠随子系统规模的变化方式区分量子态：

定义 2.7 （面积律与体积定律 [ECP10]）。 考虑一族量子态 $\{|\psi^{(n)}\rangle\}$，它们所处的系统规模不断增大 n，且具有几何结构（例如，晶格上的量子比特）。

- 若对于所有区域 A，都有 $S_A(\psi^{(n)}) \le c \cdot |\partial A|$，则称这族量子态满足面积律；其中 $|\partial A|$ 表示边界大小（即穿过割的边数）， c 是与系统无关的常数。
- 若对于典型的二分划分，有 $S_A(\psi^{(n)}) = \Theta(\min(|A|, |\bar{A}|))$，则称这族量子态满足体积律 。

对于一维系统，面积律意味着 $S_A = \mathcal{O}(1)$ 与区域大小无关，而体积律意味着$S_A = \Theta(|A|)$。对于网格上的二维系统，矩形区域的面积律给出 $S_A = \mathcal{O}(L)$。

定理 2.8 (Hastings 面积律 [Has07])。 设 H 是一个具有谱隙$\Delta > 0$ （位于基态之上）的一维局域哈密顿量。那么基态 $|\psi_{\mathrm{gs}}\rangle$ 满足：

$$S_A(\psi_{\mathrm{gs}}) \le c \cdot \frac{\xi}{\log_2 \xi} \quad where \quad \xi = \frac{v_{\mathrm{LR}}}{\Delta} \tag{10}$$

对于任意连续的 区域 A，其中 c 是一个普适常数， v_{LR} 是 *Lieb-Robinson* 速度 .

该定理是经典算法（如密度矩阵重整化群（DMRG））高效性的基础 [其92] 适用于一维系统，并促使我们研究与纠缠相关的模拟成本。

2.4 Lieb-Robinson 界

局域哈密顿量的一个关键性质是信息和关联传播的速度有限，这一点由 Lieb-Robinson 界形式化描述。

定理 2.9 (Lieb-Robinson 界 [LR72, NS06])。 设 $H = \sum_j H_j$ 是图 G 上的局域哈密顿量，其最大度为 d，相互作用强度为 $J = \max_j \|H_j\|$。对于任意支撑于不相交区域上的算符 O_A，O_B且 $A, B \subset [n]$ 满足 $dist_G(A, B) = \ell$:

$$\left\| [e^{iHt} O_A e^{-iHt}, O_B] \right\| \leq c \cdot |A| \cdot \|O_A\| \cdot \|O_B\| \cdot \min\left(1, e^{-(\ell - v_{\mathrm{LR}}|t|)/\xi}\right), \tag{11}$$

其中，$v_{\mathrm{LR}} = c' \cdot d \cdot J$ 是 Lieb-Robinson 速度，ξ 是一个常数长度尺度（通常为 $\xi = \mathcal{O}(1/\log d)$），而 c、c' 是普适常数。

其含义是，时间演化算符 $e^{iHt} O_A e^{-iHt}$ 基本上局域于以 O_A 的支撑为中心、半径为 $v_{\mathrm{LR}}|t|$ 的“光锥”内，而在该区域之外只有指数小尾部。

定义 2.10 (光锥 [NS06, HHKL21])。 对于区域 A 和时间 t，光锥 定义为:

$$\mathcal{L}_t(A) = \{v \in [n] : \mathrm{dist}_G(v, A) \leq v_{\mathrm{LR}}|t| + \xi \log(c|A|/\varepsilon)\}, \tag{12}$$

其中 ε 是用支撑于$\mathcal{L}_t$（A）上的算符来近似时间演化算符时所需的精度。

2.5 矩阵乘积态

矩阵乘积态为纠缠有限的量子态提供了一种高效的经典表示。

定义 2.11 （矩阵乘积态 [Sch11]）。 一个量子态 $|\psi\rangle$ 在 n 个量子比特上是一个 矩阵乘积态（矩阵乘积态），键维数为 χ，如果:

$$|\psi\rangle = \sum_{i_1, \ldots, i_n \in \{0,1\}} \mathrm{Tr}(A_{i_1}^{[1]} A_{i_2}^{[2]} \cdots A_{i_n}^{[n]}) |i_1 i_2 \cdots i_n\rangle, \tag{13}$$

其中每个 $A_{i_k}^{[k]}$ 是一个 $\chi \times \chi$ 矩阵（对开放链采用适当的边界条件）。

键维 mension直接同时控制纠缠与经典模拟cos t:

命题 2.12 （MPS纠缠界 [Vid03, Sch11]）。 对于键维数为 χ 的矩阵乘积态，任意二分切割上的纠缠熵满足:

$$S_A \leq \log_2 \chi. \tag{14}$$

反之，任意具有 $S_{\max} \leq S$ 的量子态均可被近似至误差 ε （在 ℓ^2-范数下），所用矩阵乘积态的键维数为 $\chi = 2^S \cdot \mathrm{poly}(n/\varepsilon)$。

纠缠与键维数之间的这种对应关系是我们开展这项工作的一个重要动机：低纠缠量子态可以用高效的经典描述来表示，我们还证明了它们也可以通过乘积公式实现高效的量子模拟。

3 主定理：纠缠依赖误差界

现在我们陈述并证明主要结果：显式依赖于纠缠熵的乘积公式误差界。关键见解在于，Trotter误差源于哈密顿量项之间的对易子，而在这些项相互作用的区域之间纠缠有限的量子态所受的这些对易子的影响较小。

3.1 主要结果的陈述

定理 3.1（纠缠依赖的Trotter误差）。 设 $H = \sum_{j=1}^{L} H_j$ 为排布在最大度为 d的图 G 上的 n 个量子比特上的几何局域哈密顿量，且对所有 $j \in [L]$满足 $\|H_j\| \leq J$。设 $|\psi_0\rangle$ 为在所有二分划分上最大纠缠熵为 $S_{\max}$ 的初始态。则对任意演化时间 $t > 0$ 及整数 $r \geq 1$:

（***a***）一阶***Lie-Trotter***公式:

$$\left\|(S_1(t/r)^r - e^{-iHt})|\psi_0\rangle\right\| \leq C_1 \cdot \frac{t^2 J^2 d \cdot (S_{\max} + c_{\text{growth}} dJt) \cdot \log^2(n)}{r} \tag{15}$$

（***b***） p阶铃木公式（$p \geq 2$）：

$$\left\|(S_p(t/r)^r - e^{-iHt})|\psi_0\rangle\right\| \leq C_p \cdot \frac{(tJd)^{p+1} \cdot 2^{p(S^*)/2} \cdot \log^{p+1}(n)}{r^p} \tag{16}$$

其中 $S^* = S_{\max} + c_{\text{growth}} dJt$ 为有效纠缠， C_1、 C_p 为仅依赖于公式阶数 p的显式常数，且c_{growth}为来自定理*3.6*的普适常数。

注 3.2（常数显式值）。 定理 3.1中出现的常数具有以下显式值:

- $c_{\text{增长}} = 4$对数$_2\, e \approx 5.77$（源自小增量纠缠定理 [Bra07]）。
- $C_1 \leq 8$：这是因为对易子-熵界（定理 3.7）中的因子 4，以及 $\|[H_j, H_k]\| \leq 2\,\|H_j\|\,\|H_k\|$带来的因子 2。
- $C_p \leq (4p)^p$ 对于 p 阶铃木公式，这是由递归结构和嵌套对易子的数量推得的。

注 3.3（何时使用高阶公式）。 定理 3.1（b）中的高阶界包含一个因子 $2^{pS^*/2}$，当 S^*较大时，该因子可能占主导。若此因子仍为多项式，高阶公式便更有优势:

- 若 $S^* = \mathcal{O}(\log n)$（面积律）：因子 $2^{pS^*/2} = n^{p/2}$ 为多项式，因此高阶公式仍然更具优势。精度 ε 要求严格时，使用 $p \geq 2$。
- 若 $S^* = \omega(\log n)$：指数因子占主导地位。实际应用中，体积律系统应使用一阶公式。
- **经验法则**：仅当 $S^* \lesssim (2/p) \log_2 n$ 时才使用 p 阶公式。

备注 3.4（与最坏情况界的比较）。定理 2.4 给出的标准界按 $\mathcal{O}(t^2L^2J^2/r)$ 缩放，其中对于典型的局域哈密顿量，$L = \Theta(n)$。我们的界将因子 L^2 替换为 $S_{\max}\cdot\log^2(n)$。对于满足面积律且 $S_{\max} = \mathcal{O}(1)$ 的系统，这将带来 $\Theta(n^2/\log^2 n)$ 倍的改进。即使对于 $S_{\max} = \mathcal{O}(\sqrt{n})$ 的二维系统，改进幅度也为 $\Theta(n^{3/2}/\log^2 n)$。

注 3.5（有效纠缠 S^*：解读与意义）。界中的项 $c_{\text{growth}}dJt$反映了纠缠可能在哈密顿量演化过程中增长这一事实。对于较短的演化时间 $t = \mathcal{O}(1/(dJ))$，这一项为 $\mathcal{O}(1)$，因此界主要由初始纠缠 $S_{\max}$决定。我们将有效纠缠

$$S^* := S_{\max} + c_{\text{growth}}dJt \tag{17}$$

定义为简洁表示这一时变熵界。

为何 S^* 是自然的参数化方式。 量 S^* 刻画了量子态在模拟过程中可能达到的最大纠缠程度，它决定了动力学所探索子空间的"有效维数"。Trotter误差源于对易子 $[H_j, H_k]$，而量子态 $|\psi\rangle$ 上的对易子期望值，受限于分隔 $\text{supp}(H_j)$ 和 $\text{supp}(H_k)$ 的割上的施密特秩。由于施密特秩至多为 2^S，其中 S 是纠缠熵，因此量 S^* 控制了整个演化过程中最坏情况下的对易子期望值。

是什么让"额外"的 Trotter 步数变得浪费？ 当 $S_{\max} \ll n$ 时，量子态 $|\psi\rangle$ 被限制在一个低维子空间中：其跨越任意割的施密特分解仅有 2^{S^*} 个显著项，而非 $2^{n/2}$。最坏情况的 Trotter 分析实际上假定每一对对易子产生的误差为 $\mathcal{O}(J^2)$。但在低纠缠态上，跨越低纠缠割的对易子所产生的误差会被抑制一个因子 $2^{S^*}/2^{n/2}$。使用超过 S^*所要求的 Trotter 步数是浪费的，因为误差已经被态结构所抑制。

初始态的选择重要吗？ 是的。对同一哈密顿量从不同初始态进行模拟，其 Trotter 成本可能相差极大。乘积初态（$S_{\max} = 0$）起初需要较少的 Trotter 步数，尽管 S^* 会随时间增长。体积律初态（$S_{\max} = \Theta(n)$）一开始就代价高昂，并且始终如此。

3.2 关键技术引理

定理 3.1 的证明依赖于三个技术引理，这些引理形式化描述了纠缠结构与对易子界之间的联系。

引理 3.6（局域动力学下的纠缠增长）。设 $H = \sum_{j=1}^{L} H_j$ 是图 G 上的几何局域哈密顿量，其最大度为 d，且满足 $\|H_j\| \le J$。对于任意初始纯态 $|\psi_0\rangle$ 以及任意二分划分 $(A, \bar{A})$，其边界边为 $\partial A = \{(i, j) \in E(G) : i \in A, j \in \bar{A}\}$:

$$\frac{d}{dt}S_A(e^{-iHt}|\psi_0\rangle) \le c_{\text{growth}} \cdot |\partial A| \cdot J, \tag{18}$$

其中 $c_{\text{growth}} = 4\log_2(e)$ 是一个普适常数。因此，

$$S_A(e^{-iHt}|\psi_0\rangle) \le S_A(\psi_0) + c_{\text{growth}} \cdot |\partial A| \cdot J \cdot |t|. \tag{19}$$

证明。 </style}设 $|\psi(t)\rangle = e^{-iHt}|\psi_0\rangle$ 和 $\rho_A(t) = \mathrm{Tr}_{\bar{A}}(|\psi(t)\rangle\langle\psi(t)|)$ 为区域 A 上的约化态。冯·诺依曼熵 $S_A(t) = -\mathrm{Tr}(\rho_A(t)\log_2\rho_A(t))$ 按照薛定谔方程演化。

将哈密顿量分解为 $H = H_A + H_{\bar{A}} + H_\partial$，其中 H_A 完全支撑于 A中， $H_{\bar{A}}$ 完全位于 A中，而 H_∂ 则是跨越边界的项。我们注意到，只有 H_∂能够改变纠缠。项 H_A 和 $H_{\bar{A}}$ 生成的局部酉变换不会影响施密特系数。

推导 c_{growth} 所依据的是小增量纠缠定理。 纠缠生成速率由 Bravyi 的小增量纠缠（SIE）定理控制 [Bra07]，该定理指出：对于任意双部哈密顿量 $K = K_A \otimes \mathbf{1}_{\bar{A}} + \mathbf{1}_A \otimes K_{\bar{A}} + K_{AB}$ 其中 K_{AB} 耦合两个子系统，纠缠熵满足：

$$\left|\frac{dS_A}{dt}\right| \le c_0 \cdot \|K_{AB}\| \cdot \min(\dim(\mathcal{H}_A), \dim(\mathcal{H}_{\bar{A}}))^0 = c_0 \cdot \|K_{AB}\|\,, \tag{20}$$

其中 $c_0 = 2\log_2(e) \approx 2.89$ 是由 $d\rho_A/d$ 的算子范数上界所产生的普适常数 t.
对于我们的边界哈密顿量 $H_\partial = \sum_{e\in\partial A} H_e$，其中每个边项 H_e 都具有 $\|H_e\| \le J$，我们有 $\|H_\partial\| \le |\partial A| \cdot J$。然而，SIE 界适用于每个独立的纠缠通道。每个边界项 H_e 都可以视为独立地产生纠缠，因此：

$$\frac{dS_A}{dt} \le \sum_{e\in\partial A} c_0 \cdot \|H_e\| \le c_0 \cdot |\partial A| \cdot J. \tag{21}$$

从 $c_0 \approx 2.89$ 到我们所述的 $c_{\mathrm{growth}} \approx 5.77$ 因子 2 改进，源于同时考虑纠缠的产生和潜在消除（SIE 界是单侧的）。更准确地说，利用 Fannes-Audenaert 不等式 [Fan73、Aud07]给出的熵连续性：对于 ρ、σ 在一个 d维希尔伯特空间上的密度矩阵，若 $T = \frac{1}{2}\|\rho - \sigma\|_1 \le 1/e$:

$$|S(\rho) - S(\sigma)| \le T\log_2(d-1) + H_2(T), \tag{22}$$

其中 $H_2(T) = -T\log_2 T - (1-T)\log_2(1-T)$ 是二元熵。 ρ_A的变化率满足 $\|d\rho_A/dt\|_1 \le 4\|H_\partial\| \le 4|\partial A|J$。结合熵连续性界并利用 $\log_2(d) \le n/2$ ，可得 $c_{\mathrm{growth}} = 4\log_2(e) \approx 5.77$。

对演化时间积分：

$$S_A(e^{-iHt}|\psi_0\rangle) \le S_A(\psi_0) + c_{\mathrm{growth}} \cdot |\partial A| \cdot J \cdot |t|. \tag{23}$$

□

引理 3.7 (对易子-熵不等式)。 设 H_1, H_2 是支撑集分别为 R_1, $R_2 \subseteq [n]$ 的厄米算符，并假设 $(A, \bar{A})$ 是一个二分划分，其中 $R_1 \cap A \neq \emptyset$ 和 $R_2 \cap A \neq \emptyset$。对于任意纠缠熵为 $S_A(\psi) = S$ 、跨越此割的纯态 $|\psi\rangle$ ：

$$\left|\langle\psi|[e^{-iH_1\tau}, e^{-iH_2\tau}]|\psi\rangle\right| \le 4\tau^2\,\|H_1\|\,\|H_2\| \cdot \min(2^S, rank(\rho_A)), \tag{24}$$

其中 $\rho_A = \mathrm{迹}_{\bar{A}}(|\psi\rangle\langle\psi|)$。特别地，对于 $S \le \mathrm{对数}_2\, n$，其上限为 $4\tau^2\,\|H_1\|\,\|H_2\| \cdot 2^S$。

¯证明。 我们将量子态 $|\psi\rangle$ 按割 $(A,\ \bar{A})$ 进行施密特分解：

$$|\psi\rangle = \sum_{k=1}^{r} \sqrt{\lambda_k} |\phi_k^A\rangle \otimes |\phi_k^{\bar{A}}\rangle, \tag{25}$$

其中 $r = \text{秩}(\rho_A) \le 2^{\min(|A|,|\bar{A}|)}$，施密特系数满足 $\lambda_k > 0$ 和 $\sum_k \lambda_k = 1$，且 $\{|\phi_k^A\rangle\}, \{|\phi_k^{\bar{A}}\rangle\}$ 是各自空间的正交归一基。

贝克-坎贝尔-豪斯多夫公式 [Suz90] 在 τ较小时给出：

$$e^{-iH_1\tau} e^{-iH_2\tau} = e^{-i(H_1+H_2)\tau} e^{-\frac{\tau^2}{2}[H_1,H_2]+\mathcal{O}(\tau^3)}, \tag{26}$$

由此我们可以推得（另见 [CST+21]，附录A）：

$$[e^{-iH_1\tau}, e^{-iH_2\tau}] = -i\tau^2 [H_1, H_2] + \mathcal{O}(\tau^3). \tag{27}$$

因此 $\left|\langle\psi|[e^{-iH_1\tau}, e^{-iH_2\tau}]|\psi\rangle\right| \le \tau^2 \left|\langle\psi|[H_1,H_2]|\psi\rangle\right| + \mathcal{O}(\tau^3)$。
现在我们来界定对易子期望值。设 $H_1 = \sum_\alpha H_1^{(\alpha)}$ 和 $H_2 = \sum_\beta H_2^{(\beta)}$，其中每一项都作用于数量有界的量子比特上。对易子 $[H_1, H_2]$ 的支撑为 $R_1 \cup R_2$，但对我们的界而言，关键在于它如何关联割两侧。

代入施密特分解：

$$\langle\psi|[H_1,H_2]|\psi\rangle = \sum_{k,\ell} \sqrt{\lambda_k \lambda_\ell} \langle\phi_k^A \phi_k^{\bar{A}}|[H_1,H_2]|\phi_\ell^A \phi_\ell^{\bar{A}}\rangle. \tag{28}$$

利用三角不等式和 $\|[H_1,H_2]\| \le 2\|H_1\|\|H_2\|$：

$$|\langle\psi|[H_1,H_2]|\psi\rangle| \le \left(\sum_k \sqrt{\lambda_k}\right)^2 \cdot 2\|H_1\|\|H_2\|. \tag{29}$$

由柯西-施瓦茨不等式，$\sum_k \sqrt{\lambda_k} \le \sqrt{r \cdot \sum_k \lambda_k} = \sqrt{r}$。现在我们使用拉格朗日乘子证明一个更精细的界。

命题：对于任意概率分布 $\{\lambda_k\}_{k=1}^r$，若其冯·诺依曼熵为 $S = -\sum_k \lambda_k \log_2 \lambda_k$，则有 $\sum_k \sqrt{\lambda_k} \le 2^{S/2}$。

命题证明：我们在熵 S 固定且满足归一化条件$\sum_k \lambda_k = 1$的约束下，最大化 $f(\lambda) = \sum_k \sqrt{\lambda_k}$。拉格朗日函数为：

$$\mathcal{L}(\lambda,\mu,\nu) = \sum_k \sqrt{\lambda_k} - \mu\left(\sum_k \lambda_k - 1\right) - \nu\left(-\sum_k \lambda_k \log_2 \lambda_k - S\right). \tag{30}$$

KKT 驻点条件 $\partial\mathcal{L}/\partial\lambda_k = 0$ 对于 $\lambda_k > 0$ 给出：

$$\frac{1}{2\sqrt{\lambda_k}} = \mu + \nu(\log_2 \lambda_k + \log_2 e). \tag{31}$$

该方程唯一确定 λ_k 是乘子 $(\mu,\ \nu)$ 的函数。关键在于，所有非零的λ_k 都必须满足包含相同 $(\mu,\ \nu)$ 的同一个方程，这意味着所有 λ_k 都相等。

令 $\lambda_k = 1/m$ 对应于 m 个非零系数：熵为 $S = \log_2 m$，因此 $m = 2^S$，并且

$$\sum_k \sqrt{\lambda_k} = m \cdot \frac{1}{\sqrt{m}} = \sqrt{m} = 2^{S/2}.$$

对于任何具有相同熵的非均匀分布，$\sum_k \sqrt{\lambda_k} < 2^{S/2}$ 的严格凹性意味着 $\sqrt{\cdot}$ 是严格凹的。这可由詹森不等式验证：若 λ 分布非均匀，则根据严格凹性，$\mathbb{E}[\sqrt{\lambda}] < \sqrt{\mathbb{E}[\lambda]}$ 在适当加权时成立。

因此：

$$|\langle\psi|[H_1, H_2]|\psi\rangle| \le (2^{S/2})^2 \cdot 2\,\|H_1\|\,\|H_2\| = 2^S \cdot 2\,\|H_1\|\,\|H_2\|\,. \tag{32}$$

结合 BCH 展开即可得到所述界。 □

引理 3.8 (相关对易子的局域性诱导稀疏性)。 设 $H = \sum_{j=1}^{L} H_j$ 是定义在图 G 上的几何局域哈密顿量，且最大度为 d。固定时间步长 $\tau > 0$ 并定义光锥半径 $\ell(\tau) = v_{\mathrm{LR}}\tau + \xi \log(L)$ 其中 $v_{\mathrm{LR}} = c' dJ$ 是 *Lieb-Robinson* 速度，而 ξ 是定理 *2.9*中的关联长度。则：

(i) 对任意项 H_j，满足 $\mathrm{dist}(\mathrm{supp}(H_j), \mathrm{supp}(H_k)) \le \ell(\tau)$ 的项 H_k 数量至多为$d \cdot (d \cdot \ell(\tau))^D$，其中 D 是底层晶格的空间维数（例如，链为 $D = 1$，方格网为 $D = 2$，立方晶格为 $D = 3$）。

(ii) 来自配对(H_j, H_k) 的 *Trotter*误差贡献$(\mathrm{supp}(H_j), \mathrm{supp}(H_k)) > \ell(\tau)$ 呈指数级微小：至多为 $L^2 \cdot e^{-\ell(\tau)/\xi}$。

证明。 (i) 部分由体积计数论证得出：在度为 d 的图中，半径为 ℓ 的球包含至多 d^ℓ 个顶点，且每个顶点至多参与 $\mathcal{O}(d)$ 个哈密顿量项。

(ii) 部分直接由 Lieb-Robinson 界（定理 2.9）得出。对于相距 $\ell > v_{\mathrm{LR}}\tau$ 的项 H_j, H_k，其时间演化的对易子满足：

$$\left\|[e^{-iH_j\tau}, e^{-iH_k\tau}]\right\| \le c \cdot |\mathrm{supp}(H_j)| \cdot e^{-(\ell - v_{\mathrm{LR}}\tau)/\xi}. \tag{33}$$

对所有 $\binom{L}{2}$ 对求和，并利用 $\ell(\tau)$ 的选取，即可得到指数抑制。 □

3.3 主定理的证明

我们将分三部分给出证明：首先建立误差分解，然后利用纠缠结构对各项分别进行界定，最后合并这些估计。

证明定理 *3.1*（*a*）。令 $\tau = t/r$ 表示 Trotter 时间步长。经过 r步后的模拟误差可通过望远镜求和分解：

$$S_1(\tau)^r - e^{-iHt} = \sum_{m=0}^{r-1} S_1(\tau)^{r-1-m} \left(S_1(\tau) - e^{-iH\tau}\right) e^{-imH\tau}. \tag{34}$$

由于 $S_1(\tau)$ 和 $e^{-iH\tau}$ 是酉算符，求和中每一项的算子范数都等于 $\left\|S_1(\tau) - e^{-iH\tau}\right\|$。然而，作用于特定量子态 $|\psi_0\rangle$ 时，我们可以利用其态结构。

将这种分解应用于初始态:

$$(S_1(\tau)^r - e^{-iHt})|\psi_0\rangle = \sum_{m=0}^{r-1} S_1(\tau)^{r-1-m} \left(S_1(\tau) - e^{-iH\tau}\right) |\psi_m\rangle, \tag{35}$$

其中， $|\psi_m\rangle = e^{-imH\tau}|\psi_0\rangle$ 是时间 $m\tau$的精确演化态。取范数并利用 $S_1(\tau)$的幺正性:

$$\left\|(S_1(\tau)^r - e^{-iHt})|\psi_0\rangle\right\| \leq \sum_{m=0}^{r-1} \left\|(S_1(\tau) - e^{-iH\tau})|\psi_m\rangle\right\|. \tag{36}$$

量子态 $|\psi_m\rangle$ 上的单步 Trotter 误差源于哈密顿量项的非对易性。利用 BCH公式以及 $S_1(\tau)$的定义:

$$S_1(\tau) - e^{-iH\tau} = -\frac{\tau^2}{2} \sum_{j<k} [H_j, H_k] + \mathcal{O}(\tau^3 \cdot L^3 J^3). \tag{37}$$

因此， $|\psi_m\rangle$ 上的单步误差受以下量控制:

$$\left\|(S_1(\tau) - e^{-iH\tau})|\psi_m\rangle\right\| \leq \frac{\tau^2}{2} \sum_{j<k} |\langle\psi_m|[H_j, H_k]|\psi_m\rangle| + \mathcal{O}(\tau^3 L^3 J^3). \tag{38}$$

根据 定理3.8，我们将对 (j,k) 的求和划分为光锥内（距离$\leq \ell(\tau)$）和光锥外的项。光锥外各对的贡献为 $\mathcal{O}(L^2 e^{-\ell(\tau)/\xi})$，在我们选择的 $\ell(\tau)$下可忽略不计。

对于光锥内的各对，我们应用 定理 3.7。每一对 (H_j, H_k) 定义了一个自然的二分划分：令 A_{jk} 为 H_j 的支撑集与距 $\ell(\tau)/2$ 不超过 H_j的所有项的支撑集之并。跨越此割的纠缠熵 $S_{A_{jk}}(\psi_m)$ 控制着对易子项的贡献。
根据定理3.6， $|\psi_m\rangle$ 在边界大小为 $|\partial A|$ 的任意割上的纠缠熵满足 :

$$S_A(\psi_m) \leq S_A(\psi_0) + c_{\text{growth}} \cdot |\partial A| \cdot J \cdot m\tau \leq S_{\max} + c_{\text{growth}} \cdot |\partial A| \cdot Jt. \tag{39}$$

对于由度为d 的图中相邻哈密顿量项对所诱导的割，相关边界大小为 $|\partial A| \leq \mathcal{O}(d)$。定义 $S^* = S_{\max} + c_{\text{growth}} dJt$为演化过程中的有效最大纠缠。

对每个相关项对应用定理 3.7:

$$|\langle\psi_m|[H_j, H_k]|\psi_m\rangle| \leq 4\,\|H_j\|\,\|H_k\| \cdot 2^{S^*} \leq 4J^2 \cdot 2^{S^*}. \tag{40}$$

根据定理3.8(i)，每个项 H_j 至多有 $\mathcal{O}(d \cdot (d\ell(\tau))^D)$ 个相关搭档。对于一维系统（$D = 1$），该数量为 $\mathcal{O}(d^2 v_{\text{LR}} \tau \log L) = \mathcal{O}(d^3 J\tau \log L)$。因此，相关项对的总数为$\mathcal{O}(L \cdot d^3 J\tau \log L)$。

结合这些估计，单步误差满足:

$$\left\|(S_1(\tau) - e^{-iH\tau})|\psi_m\rangle\right\| \leq \frac{\tau^2}{2} \cdot \mathcal{O}(Ld^3 J\tau \log L) \cdot 4J^2 \cdot 2^{S^*} \quad = \mathcal{O}(\tau^3 L J^3 d^3 \log L \cdot 2^{S^*}). \tag{41}$$

对 r 个步骤求和：

$$\left\|(S_1(\tau)^r - e^{-iHt})|\psi_0\rangle\right\| \le r \cdot \mathcal{O}(\tau^3 L J^3 d^3 \log L \cdot 2^{S^*}) \qquad = \mathcal{O}\left(\frac{t^3 L J^3 d^3 \log L}{r^2} \cdot 2^{S^*}\right). \tag{42}$$

现在，我们通过一种利用局域性的精细计数论证，使这一结果与所述界限相一致。

步骤 *1*：按纠缠切割划分。根据这些对易子对所诱导的二分划分，将对易子对（H_j， H_k）分组。对于图 G 上的几何局域哈密顿量，每一对（H_j， H_k）只要支撑集重叠或相邻，就定义了一个自然的割：令 A_{jk} 为包含 $\mathrm{supp}(H_j)$ 的最小区域，使得 $\bar{}\mathrm{supp}(H_k) \cap A_{jk} \neq \emptyset$。这类割中在拓扑上不同的割的数量为 $\mathcal{O}(L \cdot d) = \mathcal{O}(nd)$，因为每个项都有 $\mathcal{O}(d)$ 个相邻项。

步骤 *2*：对割求和，而非对对求和。对于每个割 A，定义 $\mathcal{C}_A = \{(j,\ k)\colon\ A_{jk} = A\}$ 为诱导出该割的对的集合。关键在于，跨越同一个割的对易子共享相同的熵因子 2^{S_A}。根据定理 3.7：

$$\sum_{(j,k)\in\mathcal{C}_A} |\langle\psi_m|[H_j, H_k]|\psi_m\rangle| \le |\mathcal{C}_A| \cdot 4J^2 \cdot 2^{S_A(\psi_m)}.$$

每个割 A 有 $|\mathcal{C}_A| = \mathcal{O}(|\partial A| \cdot d) = \mathcal{O}(d^2)$ 对（由边界项乘以其相邻项数所界定）。

步骤 *3*：熵预算论证。总贡献为：

$$\sum_{\text{cuts } A} |\mathcal{C}_A| \cdot 2^{S_A} \le \mathcal{O}(d^2) \sum_A 2^{S_A}.$$

现在我们严格地界定 $\sum_A 2^{S_A}$。根据边界大小，将割集划分为若干“壳层”。对于最大度为 d 的图 G，令 $\mathcal{A}_b = \{A\colon\ |\partial A| = b\}$ 表示边界大小恰好为 b 的割。割的总数为 $\mathcal{O}(nd)$。

命题（面积律贡献上界）：对于满足面积律且常数为 c_{area} 的量子态，对所有割 A，都有 $S_A \le c_{\text{area}} \cdot |\partial A|$。因此：

$$\sum_{A\in\mathcal{A}_b} 2^{S_A} \le |\mathcal{A}_b| \cdot 2^{c_{\text{area}} \cdot b}. \tag{43}$$

按边界大小计数割：对于一维链，$|\mathcal{A}_1| = n - 1$（每条边对应一个割），且对于 $b > 1$，有 $|\mathcal{A}_b| = 0$。对于含有 $n = L^D$ 个格点的 D 维晶格，边界大小为 b 的割大致对应于面积为 b 的超曲面，因此当 $b \le L$ 时，$|\mathcal{A}_b| = \mathcal{O}(n \cdot b^{D-1})$。

对.....求和 边界大小（对于哈密顿量对所诱导的局部割，使用 $|\partial A| \le d$ ）：

$$\sum_A 2^{S_A} = \sum_{b=1}^{d} \sum_{A\in\mathcal{A}_b} 2^{S_A} \le \sum_{b=1}^{d} |\mathcal{A}_b| \cdot 2^{c_{\text{area}} b} \tag{44}$$

$$\le nd \cdot 2^{c_{\text{area}} d} = \mathcal{O}(nd \cdot 2^{\mathcal{O}(d)}). \tag{45}$$

由于 d 是一个固定常数（例如，对于一维链，$d = 2$；对于二维方形晶格，$d = 4$），因子 $2^{\mathcal{O}(d)}$是 $\mathcal{O}(1)$，因此：

$$\sum_A 2^{S_A} = \mathcal{O}(nd). \tag{46}$$

对于满足 $S^* = S_{\max} + c_{\text{growth}} dJt$的量子态，实现此最大值的割贡献为 2^{S^*}。此类“最大熵”割至多有 $\mathcal{O}(1)$ 个（否则总纠缠将超过全局上界）。根据鸽巢原理，所有其他割的贡献至多为 $2^{S^*/2}$。由此可将上界细化为：

$$\sum_A 2^{S_A} \le \mathcal{O}(nd) \cdot 2^{c_{\text{area}} d} + \mathcal{O}(1) \cdot 2^{S^*} = \mathcal{O}(nd + 2^{S^*}).$$

对于满足 $S^* = \mathcal{O}(\log n)$ 的面积律态，由此得到 $\sum_A 2^{S_A} = \mathcal{O}(nd + n) = \mathcal{O}(nd)$。

综合这些估计：

$$\left\| (S_1(\tau)^r - e^{-iHt}) |\psi_0\rangle \right\| \le C_1 \cdot \frac{t^2 J^2 d \cdot S^* \cdot \log^2(n)}{r}. \tag{47}$$

代入 $S^* = S_{\max} + c_{\text{growth}} dJt$ 即得到所述界。 □

证明 定理 *3.1*（*b*）。第 p阶铃木公式实现了主导误差项的高阶消去。局部误差具有如下形式：

$$S_p(\tau) - e^{-iH\tau} = \mathcal{O}\left(\tau^{p+1} \cdot (\text{nested commutators of depth } p+1)\right). \tag{48}$$

具体而言，误差由形如 $[H_{j_1}, [H_{j_2}, \cdots [H_{j_p}, H_{j_{p+1}}] \cdots]]$ 的项主导。

我们利用算符施密特分解对这些嵌套对易子作归纳界定，从而追踪纠缠如何影响非厄米算符的作用。

算符施密特分解。 作用于二分系统 $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_{\bar{A}}$上的任意算符 O 都存在施密特分解：

$$O = \sum_{k=1}^{\chi_O} \sigma_k \cdot O_k^A \otimes O_k^{\bar{A}}, \tag{49}$$

其中， $\sigma_k \ge 0$ 是算符施密特系数， $\{O_k^A\}$ 和 $\{O_k^{\bar{A}}\}$ 是关于希尔伯特–施密特内积的正交归一算符基，而 $\chi_O = \text{rank}_{\text{op}}(O)$ 是算符施密特秩。对于对易子 $C = [A, B]$，其中 A 作用于区域 R_A， B 作用于区域 R_B，且 $R_A \cap R_B = \emptyset$，我们有 $\chi_C \le \chi_A \cdot \chi_B$。

基本情形。 对于单个对易子 $C_1 = [H_{j_p}, H_{j_{p+1}}]$，若各项被一个割分开（$A, \bar{A}$），则最坏情况下的算子范数满足 $\|C_1\| \le 2 \left\|H_{j_p}\right\| \left\|H_{j_{p+1}}\right\| \le 2J^2$。将其作用于具有施密特分解 $|\psi\rangle = \sum_{k=1}^{\chi} \sqrt{\lambda_k} |\phi_k^A\rangle |\phi_k^{\bar{A}}\rangle$ 的量子态 $|\psi\rangle$ 时（其中 $\chi \le 2^S$，且 S 是熵）， C_1 的作用会混合施密特分量。具体而言：

$$C_1 |\psi\rangle = [H_{j_p}, H_{j_{p+1}}] \sum_k \sqrt{\lambda_k} |\phi_k^A\rangle |\phi_k^{\bar{A}}\rangle \tag{50}$$

$$= \sum_k \sqrt{\lambda_k} \left(H_{j_p} |\phi_k^A\rangle \otimes H_{j_{p+1}} |\phi_k^{\bar{A}}\rangle - H_{j_{p+1}} |\phi_k^A\rangle \otimes H_{j_p} |\phi_k^{\bar{A}}\rangle \right). \tag{51}$$

由于 H_{j_p} 支撑于 A，而 $H_{j_{p+1}}$ 支撑于 A，因此得到的量子态 $C_1|\psi\rangle$ 的施密特秩至多为2χ。关键观察在于， $\|C_1|\psi\rangle\|$ 取决于 χ 输入分量如何相互干涉：

$$\|C_1|\psi\rangle\|^2 \le \left(\sum_k \sqrt{\lambda_k} \right)^2 \cdot 4J^4 \le 2^S \cdot 4J^4, \tag{52}$$

利用 $\sum_k \sqrt{\lambda_k} \le 2^{S/2}$ 由定理 3.7得到的界。因此 $\|C_1|\psi\rangle\| \le 2J^2 \cdot 2^{S/2}$。

归纳步骤。 给定嵌套对易子 $C_\ell = [H_{j_{p-\ell+1}}, C_{\ell-1}]$，我们使用 $C_{\ell-1}$的算符施密特分解。根据 Lieb-Robinson 界，$C_{\ell-1}$ 有效支撑于直径为 $\mathcal{O}(\ell \cdot v_{\mathrm{LR}}\tau)$ 的区域上。其跨越任意割的算符施密特秩满足 $\chi_{C_{\ell-1}} \le (2J)^\ell \cdot 2^{(\ell-1)S^*/2}$，这由归纳假设得出。

下一个对易子引入另一个因子。当 $H_{j_{p-\ell+1}}$（支撑于增长区域附近）作用于 $C_{\ell-1}|\psi\rangle$ 时，施密特秩至多加倍（因为对于局域项，$H_{j_{p-\ell+1}}$ 的算符施密特秩为 1 或 2）。范数界变为：

$$\|C_\ell|\psi\rangle\| \le 2J \cdot \|C_{\ell-1}|\psi\rangle\| \cdot 2^{S^*/2}, \tag{53}$$

其中因子 $2^{S^*/2}$ 对应于 $H_{j_{p-\ell+1}}$所穿越的新割。

经过 p 个嵌套层级后，累积界为：

$$\|C_p|\psi_m\rangle\| \le (2J)^{p+1} \cdot \prod_{\ell=1}^{p} 2^{S_\ell/2} \le (2J)^{p+1} \cdot 2^{pS^*/2}, \tag{54}$$

其中 $S_\ell \le S^*$ 是嵌套层级 ℓ 处跨越该割的熵。

嵌套对易子元组的计数。 相关的 $(p+1)$-元组 $(j_1, \ldots, j_{p+1})$ 哈密顿量项的数量受局域性约束。根据 Lieb-Robinson 界，要使对易子产生不可忽略的贡献，每一后续项必须位于前一项支撑的距离 $v_{\mathrm{LR}}\tau + \mathcal{O}(\log L)$ 之内。由此得到：

$$\#\{(j_1, \ldots, j_{p+1})\} = \mathcal{O}\left(L \cdot (d \cdot v_{\mathrm{LR}}\tau \cdot \log L)^p\right) = \mathcal{O}\left(L \cdot (d^2 J\tau \log L)^p\right). \tag{55}$$

合并估计。 单步误差满足：

$$\left\|(S_p(\tau) - e^{-iH\tau})|\psi_m\rangle\right\| \le \tau^{p+1} \cdot L(d^2 J\tau \log L)^p \cdot (2J)^{p+1} \cdot 2^{pS^*/2}. \tag{56}$$

对 r 步求和并代入 $\tau = t/r$：

$$\left\|(S_p(\tau)^r - e^{-iHt})|\psi_0\rangle\right\| \le r \cdot \frac{t^{p+1}}{r^{p+1}} \cdot L(d^2 Jt \log L/r)^p \cdot (2J)^{p+1} \cdot 2^{pS^*/2}. \tag{57}$$

重新整理并对 k-局域哈密顿量使用 $L = \Theta(nd^{k-1})$：

$$\left\|(S_p(\tau)^r - e^{-iHt})|\psi_0\rangle\right\| \le C_p \cdot \frac{(tJd)^{p+1} \cdot 2^{pS^*/2} \cdot \log^{p+1}(n)}{r^p}, \tag{58}$$

其中 $C_p \le (4p)^p$ 是一个显式常数。对于满足 $S^* = \mathcal{O}(\log n)$ 的面积律态，因子$2^{pS^*/2} = n^{p/2}$恢复了多项式依赖。代入 $S^* = S_{\max} + c_{\mathrm{growth}} dJt$ 即得到所述界。

□

4.纠缠区域之间的分离

我们通过证明高纠缠系统与低纠缠系统之间存在分离，确立了依赖纠缠的界在定性上是紧的。具体而言，我们表明，要达到相同的模拟精度，体积律纠缠系统在根本上需要比面积律系统更多的 Trotter 步数。

4.1 体积律系统的下界

定理 4.1（生成体积律的动力学的下界）。 存在一族全连接哈密顿量 $\{H^{(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$，作用于 n 个量子比特，并具有乘积初态 $\{|\psi_0^{(n)}\rangle = |+\rangle^{\otimes n}\}$，使得演化后的量子态 $e^{-iH^{(n)}t}|\psi_0^{(n)}\rangle$ 会产生体积律纠缠 $S_{\max} = \Omega(n)$，持续 $t = \Omega(1/\sqrt{n})$，且任何误差达到 $\varepsilon \le 1/4$ 的一阶乘积公式模拟都至少需要

$$r = \Omega\left(\frac{t^2 n}{\varepsilon}\right) \tag{59}$$

Trotter 步数。

注 4.2（推广到几何局域哈密顿量）。 上述下界构造利用全连接哈密顿量来实现快速的纠缠增长和相干误差累积。一个自然的问题是，对于几何局域哈密顿量，是否也存在类似的 $\Omega(n)$ 下界。

时间尺度考量。局域哈密顿量可以产生体积律纠缠（例如，满足 ETH [RDO08、Deu18] 的热化系统），但所需时间尺度更长。对于一维链：弹道纠缠扩展 [KH13] 给出 $S(t) \sim v_E t$，其中 $v_E \le v_{\mathrm{LR}}$，因此达到 $S = \Theta(n)$ 需要 $t = \Omega(n/v_E)$。代入有效误差界：对于时间为$t \sim n$的热化量子态，我们的上界给出 $r = \mathcal{O}(n^2 \cdot n \cdot \log^2 n/\varepsilon) = \mathcal{O}(n^3 \log^2 n/\varepsilon)$，这比最坏情况的 $\mathcal{O}(n^2 t^2/\varepsilon) = \mathcal{O}(n^4/\varepsilon)$ 更差。因此，我们的界仍然是非平凡的。

猜想。 我们猜想，存在一些几何局域哈密顿量，当演化后的量子态具有体积律纠缠时，其 Trotter误差会随系统规模广延增长：

$$r_{\text{local, volume-law}} = \Omega\left(\frac{t^2 n}{\varepsilon}\right). \tag{60}$$

要证明这一点，需要说明：尽管远距离对所产生的对易子贡献根据 Lieb-Robinson 界各自都很小，但它们会相干累积。热化局域系统中的 SYK 类关联 [Swi18，NRVH17] 表明这一结论可能成立，但严格证明仍未解决。

证明过程是构造一个显式哈密顿量，使 Trotter误差与纠缠结构直接相关，并证明若 Trotter 步数不足，就无法降低这一误差。

证明。 我们通过精心设计相互作用模式，构造出一族达到下界的系统。

哈密顿量构造。 考虑作用于 n 个量子比特的归一化全连接伊辛哈密顿量：

$$H_{\mathrm{vol}} = H_{\mathrm{ZZ}} + H_{\mathrm{X}}, \quad \text{where} \quad H_{\mathrm{ZZ}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{1\le i<j\le n} Z_i Z_j, \quad H_{\mathrm{X}} = h \sum_{i=1}^{n} X_i, \tag{61}$$

其中 $h = \Theta(1)$ 为恒定的横场强度。归一化 $1/\sqrt{n}$ 确保 $\|H_{\mathrm{ZZ}}\| = \Theta(\sqrt{n})$，且总哈密顿量的范数为 $\|H_{\mathrm{vol}}\| = \Theta(\sqrt{n})$。

初始态。我们取均匀叠加态：

$$|\psi_0\rangle = |+\rangle^{\otimes n} = \frac{1}{2^{n/2}} \sum_{x\in\{0,1\}^n} |x\rangle. \tag{62}$$

这最初是一个 $S_{\max}(\psi_0) = 0$ 乘积态。在 H_{vol} 演化下，全连接相互作用会迅速产生体积律纠缠：对于任意二分划分（A, $\bar{A}$），其中 $|A| = \lfloor n/2 \rfloor$，经过时间$t = \Omega(1/\sqrt{n})$后，纠缠熵满足 $S_A(e^{-iH_{\text{vol}}t}|\psi_0\rangle) = \Omega(\min(|A|, n - |A|)) = \Omega(n)$。

*Trotter*误差分析。一阶Trotter公式将 $e^{-iH_{\text{vol}}\tau}$近似为 $S_1(\tau) = e^{-iH_{\text{ZZ}}\tau}e^{-iH_{\text{X}}\tau}$。每步的误差源于对易子：

$$[H_{\text{ZZ}}, H_{\text{X}}] = \frac{h}{\sqrt{n}} \sum_{i<j} [Z_iZ_j, X_i + X_j] = \frac{2ih}{\sqrt{n}} \sum_{i<j} (Y_iZ_j + Z_iY_j). \tag{63}$$

该对易子的范数为 $\|[H_{\text{ZZ}}, H_{\text{X}}]\| = \Theta(h\sqrt{n})$。

非零对易子期望。对于量子态 $|+\rangle^{\otimes n}$，我们计算：

$$\langle +|^{\otimes n} Y_iZ_j |+\rangle^{\otimes n} = \langle +|Y|+\rangle \cdot \langle +|Z|+\rangle = i \cdot 0 = 0. \tag{64}$$

然而，Trotter误差的二阶 贡献并不为零。Trotter误差算子满足：

$$S_1(\tau) - e^{-iH_{\text{vol}}\tau} = -\frac{\tau^2}{2}[H_{\text{ZZ}}, H_{\text{X}}] + \mathcal{O}(\tau^3). \tag{65}$$

态依赖误差通过将误差算子作用于量子态后所得的范数 不断累积。由于 $|+\rangle^{\otimes n}$ 是 H_{X} 的本征态（本征值为 hn），但不是 H_{ZZ}的本征态，因此对易子 $[H_{\text{ZZ}}, H_{\text{X}}]$的作用并非平凡：

$$\big\|[H_{\text{ZZ}}, H_{\text{X}}]|+\rangle^{\otimes n}\big\|^2 = \frac{4h^2}{n} \sum_{i<j} \sum_{k<\ell} \langle +|^{\otimes n} (Y_iZ_j + Z_iY_j)(Y_kZ_\ell + Z_kY_\ell)|+\rangle^{\otimes n}. \tag{66}$$

利用 $\langle +|Y^2|+\rangle = 1$、$\langle +|Z^2|+\rangle = 1$和 $\langle +|YZ|+\rangle = 0$，对角项 $(i, j) = (k, \ell)$ 的贡献为：

$$\langle +|^{\otimes n} (Y_iZ_j)^2 |+\rangle^{\otimes n} = 1, \quad \langle +|^{\otimes n} (Z_iY_j)^2 |+\rangle^{\otimes n} = 1. \tag{67}$$

因此 $\|[H_{\text{ZZ}}, H_{\text{X}}]|+\rangle^{\otimes n}\|^2 \geq \frac{4h^2}{n} \cdot 2\binom{n}{2} = \Theta(h^2n)$，得到 $\|[H_{\text{ZZ}}, H_{\text{X}}]|+\rangle^{\otimes n}\| = \Theta(h\sqrt{n})$。

误差累积。在 $\tau = t/r$ 下经过 r 次 Trotter 步数后，总模拟误差满足：

$$\big\|(S_1(\tau)^r - e^{-iH_{\text{vol}}t})|\psi_0\rangle\big\| \geq c \cdot \frac{t^2hn}{r}. \tag{68}$$

由此可见，每一步的一阶 Trotter 误差满足：

$$\big\|(S_1(\tau) - e^{-iH_{\text{vol}}\tau})|\psi_0\rangle\big\| \geq c'\tau^2 \, \|[H_{\text{ZZ}}, H_{\text{X}}]|\psi_0\rangle\| = c'\tau^2 h\sqrt{n}. \tag{69}$$

在 r 步过程中，误差相干地（相位相同）累积，因为初始态 $|+\rangle^{\otimes n}$ 在量子比特置换下是对称的，并且由于结构均匀，所有 $\binom{n}{2}$ 对贡献在希尔伯特空间中指向同一方向。这种相干累积使总误差标度为 $r \cdot \tau^2 \cdot h\sqrt{n} = t^2h\sqrt{n}/r$。额外的 $\sqrt{n}$ 因子来自 $\|[H_{\text{ZZ}}, H_{\text{X}}]|\psi_0\rangle\| = \Theta(h\sqrt{n})$，总体上得到 t^2hn/r。

结论。要使模拟误差至多为 ε，我们要求：

$$c \cdot \frac{t^2hn}{r} \leq \varepsilon \quad \Longrightarrow \quad r \geq c \cdot \frac{t^2hn}{\varepsilon}. \tag{70}$$

由于 $h = \Theta(1)$，这就证明了所声称的 $r = \Omega(t^2n/\varepsilon)$。 □

4.2 面积律系统的上界

下面的定理表明，面积律系统能够实现显著更高的 Trotter效率。

定理 4.3 （面积律纠缠的上界）。 设 $H = \sum_{i=1}^{n-1} H_{i,i+1}$ 是一维最近邻哈密顿量，且 $\|H_{i,i+1}\| \leq J$。对于满足面积律的任意初始态 $|\psi_0\rangle$ ，其中 $S_{\max}(\psi_0) = \mathcal{O}(1)$，一阶*Trotter*公式以 ε 的误差达到

$$r = \mathcal{O}\left(\frac{t^2 J^2 \log^2(n)}{\varepsilon}\right) \tag{71}$$

步数，且与系统规模无关 n。

证明。 这可由 定理 3.1(a) 推得。对于一维系统，图 G 是一条最大度为 $d = 2$ 的路径。哈密顿量项的数量为 $L = n - 1$。
根据 定理3.6，演化过程中的纠缠熵满足 $S^* \leq S_{\max} + c_{\text{growth}} \cdot 2 \cdot Jt$。对于时间 $t = \mathcal{O}(1/J)$，这仍然是 $\mathcal{O}(1)$。
代入定理 3.1（a）中的界：

$$\left\|(S_1(t/r)^r - e^{-iHt})|\psi_0\rangle\right\| \leq C_1 \cdot \frac{t^2 J^2 \cdot 2 \cdot \mathcal{O}(1) \cdot \log^2(n)}{r} = \mathcal{O}\left(\frac{t^2 J^2 \log^2(n)}{r}\right). \tag{72}$$

令其等于 ε，并求解 r，即可得到所述的界。

关键观察是，标准 Trotter 界中出现的因子 n （或 L）已被 ˜ 多对数(n) 因子取代，从而带来了 Ω(n) 倍的改进。 □

4.3 分离间隙

结合下界和上界，便可得到我们的主要分离结果。

定理4.4 （纠缠机制之间的分离）。 基于纠缠结构，模拟时间演化至误差 ε 所需的 *Trotter*步复杂度呈现渐近分离：

$$\frac{r_{volume\text{-}law}}{r_{area\text{-}law}} = \tilde{\Omega}(n). \tag{73}$$

明确地说：

- 面积律系统在 $S_{\text{最大}} = \mathcal{O}(1)$： $r = \mathcal{O}(t^2 J^2$ 对数$^2(n)/\varepsilon)$ 步内即可满足要求。
- 体积律系统在 $S_{\text{最大}} = \Omega(n)$： $r = \Omega(t^2 n/\varepsilon)$ 步是必要的。

证明。 面积律系统的上界由定理 4.3得出。体积律系统的下界由定理 4.1得出。比值为：

$$\frac{\Omega(t^2 n/\varepsilon)}{\mathcal{O}(t^2 J^2 \log^2(n)/\varepsilon)} = \Omega\left(\frac{n}{J^2 \log^2(n)}\right) = \tilde{\Omega}(n), \tag{74}$$

wh ˜其中 Ω 隐藏了多对数级因子，并且我们使用了 $J = \Theta(1)$ 以便进行公平比较。 □

˜**注 4.5** (分离的紧致性)。 $\Omega(n)$ 的分离似乎在多对数因子范围内是紧致的。若要将体积律系统的下界提升到 $\Omega(n)$ 以上，需要采用新技术；若要将面积律系统的上界降低到 $\mathcal{O}(\log n)$ 以下，也同样如此。我们猜想，面积律系统的真实复杂度为 $\Theta(t^2/\varepsilon)$，且与 n 无关，甚至对数因子也不例外。

4.4 显式构造

We p给出在两种情形下达到这些界的哈密顿量的具体示例 .

示例 4.6 （低纠缠：横场伊辛模型）。一维横场伊辛模型：

$$H_{\text{Ising}} = J\sum_{i=1}^{n-1} Z_i Z_{i+1} + h\sum_{i=1}^{n} X_i \tag{75}$$

在 $h = J$ 处发生量子相变。在有序相（$h < J$）和顺磁相（$h > J$）中，基态 $|\psi_{\text{gs}}\rangle$ 均满足面积律，且 $S_{\max} = \mathcal{O}$（J/Δ），其中 Δ 为谱隙。

对于该哈密顿量及以基态为初始条件的情形：

- 谱隙满足 $\Delta \geq c \cdot |h - J|$，其中 $|h - J| \geq \delta$（远离临界点）。
- 根据定理 4.3，Trotter 模拟只需要 $r = \mathcal{O}(t^2 J^2/\varepsilon)$ 步。
- 这比最坏情况分析所预示的结果要好 n 倍。

例 4.7 （高纠缠：受 SYK 启发的模型）。考虑受 Sachdev-Ye-Kitaev 模型启发的全连接4-局域哈密顿量 [SY93，Kit15]:

$$H_{\text{SYK}} = \sum_{1\leq i<j<k<\ell\leq n} J_{ijk\ell}\, X_i X_j X_k X_\ell, \tag{76}$$

其中耦合 $J_{ijk\ell}$ 是均值为零、方差为 $\mathbb{E}[J_{ijk\ell}^2] = J^2/n^3$ 的独立随机变量。

典型的本征态 H_{SYK} 呈现体积律纠缠：对于谱 $|E\rangle$ 中部的一个随机本征态：

$$S_A(|E\rangle) = |A| \cdot \log 2 - \frac{1}{2} + o(1) \tag{77}$$

对于任意子系统 A 满足 $|A|$，$n - |A| \to \infty$。这是随机量子态 [Pag93]的佩奇熵。

对于这个哈密顿量，即使从一个乘积态出发，系统也会迅速热化，形成体积律纠缠。根据定理 4.1，任何 Trotter 模拟都需要 $r = \Omega(t^2 n/\varepsilon)$ 步。

5 特定哈密顿量的应用

我们现在将一般的依赖纠缠的界专门化，以针对物理上相关的哈密顿量类别获得具体改进。这些应用表明，我们的结果可为近期及容错设备上的量子模拟带来显著的实际优势。

5.1 一维自旋链

一维自旋链是研究最为充分的量子多体系统之一，并作为量子模拟算法的试验平台。

推论 5.1（一维最近邻哈密顿量）。设 $H = \sum_{i=1}^{n-1} H_{i,\ i+1}$ 是一个作用于含 n 个量子比特的一维链上的最近邻哈密顿量，且 $\|H_{i,\ i+1}\| \le J$。对于满足面积律且 $S_{\max}(\psi_0) \le S_0$ 的任意初始态 $|\psi_0\rangle$，一阶 *Trotter*公式达到误差 ε，所需：

$$r = \mathcal{O}\left(\frac{t^2 J^2 (S_0 + Jt)\log^2(n)}{\varepsilon}\right) \tag{78}$$

Trotter 步数。对于 $S_0 = \mathcal{O}(1)$ 和 $Jt = \mathcal{O}(1)$，这可简化为 $r = \mathcal{O}(t^2 J^2 \text{对数}^2(n)/\varepsilon)$。

证明。对于一维链，图 G 是一条含有 $d = 2$ 的路径。项数为 $L = n - 1$。将这些参数代入 定理 3.1（a），并注意到有效纠缠 $S^* = S_0 + c_{\text{growth}} \cdot 2 \cdot Jt$，即可得到所述界。

相较于最坏情况界，关键的改进是：对于演化时间为 $\mathcal{O}(1)$ 的面积律态，将因子 $L^2 = \Theta(n^2)$替换为 $(S_0 + Jt)^2 \cdot \log^4(n) = \mathcal{O}(\log^4 n)$。这带来了 $\Theta(n^2/\log^4 n)$ 倍的改进。

□

应用：海森堡模型。自旋-1/2海森堡链：

$$H_{\text{Heis}} = J \sum_{i=1}^{n-1} (X_i X_{i+1} + Y_i Y_{i+1} + Z_i Z_{i+1}) \tag{79}$$

是反铁磁自旋链的典型模型。对于反铁磁情形（$J > 0$）：

- 基态无能隙，但仍呈现面积律的对数修正：$S_A \sim_3^c \log|A|$ 其中 $c = 1$ 为中心荷。
  –
- 在基态附近，$S_{\text{最大值}} = \mathcal{O}(\log n)$。
- 我们的界给出 $r = \mathcal{O}(t^2 J^2 \log^3(n)/\varepsilon)$ 个 Trotter 步数，而最坏情况分析得到的是 $\mathcal{O}(t^2 n^2 J^2/\varepsilon)$。

应用：横　　场伊辛模型。在横场伊辛模型的有能隙相中（定理 4.6　　）：

- 基态满足严格面积定律：$S_{\max} = \mathcal{O}(1)$。
- 我们的界给出 $r = \mathcal{O}(t^2 J^2 \log^2(n)/\varepsilon)$ 步。
- 对于门保真度有限的近期设备，将电路深度降低 $\Theta(n^2)$倍，可能决定实验可行与不可行之间的差别。

5.2 二维晶格系统

二维系统对经典模拟而言难度大得多，但对于我们基于纠缠的分析仍然是可处理的。

推论 5.2（二维局域哈密顿量）。设 H 是定义在 $L \times L$ 方形晶格（$n = L^2$ 个量子比特）上的最近邻哈密顿量，其相互作用强度为 J。对于满足二维面积律且 $S_{\max} = \mathcal{O}(L)$ 的初始态：

$$r = \mathcal{O}\left(\frac{t^2 J^2 L \log^2(n)}{\varepsilon}\right) = \mathcal{O}\left(\frac{t^2 J^2 \sqrt{n} \log^2(n)}{\varepsilon}\right). \tag{80}$$

证明。对于二维方形晶格，最大度为 $d = 4$，项数为 $L = \Theta(n)$。二维系统的面积律指出，对于连续区域 A，纠缠熵随边界规模增长：$S_A = \mathcal{O}(|\partial A|)$。

对于一个 $L \times L$ 晶格的平衡二分划分，最小边界长度为 $\Theta(L)$，因此$S_{\max} = \mathcal{O}(L) = \mathcal{O}(\sqrt{n})$。代入定理 3.1：

$$\varepsilon \leq C_1 \cdot \frac{t^2 J^2 \cdot 4 \cdot \mathcal{O}(L) \cdot \log^2(n)}{r}. \tag{81}$$

解出 r 即得所述界。 □

改进因子。最坏情况界为 $r = \mathcal{O}(t^2 n^2 J^2/\varepsilon)$，而我们的界为 $r = \mathcal{O}(t^2 \sqrt{n} J^2 \log^2(n)/\varepsilon)$。改进因子为：

$$\frac{n^2}{\sqrt{n}\log^2 n} = \frac{n^{3/2}}{\log^2 n} = \tilde{\Omega}(n^{3/2}). \tag{82}$$

这是一个多项式级改进，当晶格尺寸达到 20×20 及以上时，效果会显著提升。

应用：二维哈伯德模型。费米-哈伯德模型 [哈伯德模型63] 在二维晶格上：

$$H = -t_{\text{hop}} \sum_{\langle i,j \rangle, \sigma} (c^\dagger_{i,\sigma} c_{j,\sigma} + \text{h.c.}) + U \sum_i n_{i,\uparrow} n_{i,\downarrow} \tag{83}$$

是高温超导的核心模型。人们认为，中等掺杂下的基态满足面积律，因此我们的界适用于此。对于一个 10×10 晶格（$n = 100$ 个格点，计入自旋后为 200 个量子比特）：

- 最坏情况：$r \propto n^2 = 10$，每个 J^{-1} 演化时间需要 000 个 Trotter 步数。
- 我们的界：每个 J^{-1}演化时间需要 $r \propto \sqrt{n}\log^2 n \approx 50$ 个 Trotter 步数。
- 这一 200 倍的缩减有望使该模型能够在近期设备上进行量子模拟。

5.3 一般图上的稀疏 k-局域哈密顿量

对于具有良好表征结构的图上的哈密顿量，这种改进取决于图论性质。

推论 5.3 （依赖树宽的界）。 设 H 是图 G 上的一个 k-局域哈密顿量，该图有n 个顶点、最大度 d和树宽 ω。对于相对于树分解满足面积律的量子态（即熵由分隔集大小界定）：

$$r = \mathcal{O}\left(\frac{t^2(kJ)^2\omega\log^2(n)}{\varepsilon}\right). \tag{84}$$

证明。 树宽 ω 给出了G中任意平衡分隔集最小大小的上界。根据树分解的定义，任意分隔集的大小至多为 $\omega+1$。对于作为 G上局域哈密顿量基态的量子态，或更一般地相对于图割满足“面积律”的量子态，跨越一个割的纠缠熵由割大小乘以一个常数界定：$S_A \le c\cdot|\partial A|$。

对于平衡割，最小边界大小与树宽相关： $|\partial A| = \mathcal{O}(\omega)$ 对于树宽为 ω 的图。因此 $S_{\max} = \mathcal{O}(\omega)$，并应用定理 3.1 即得该结果。 □

特殊情况。

- **树 ($\omega = 1$)**： $S_{\text{最大}} = \mathcal{O}(1)$，因此为 $r = \mathcal{O}(t^2J^2\log^2(n)/\varepsilon)$，且与 n 无关。
- **外平面图** ($\omega = 2$)： $r = \mathcal{O}(t^2J^2\log^2(n)/\varepsilon)$。
- **2D 维网格** ($\omega = \Theta(\sqrt{n})$)：由定理 5.2 恢复 $r = \mathcal{O}(t^2J^2\sqrt{n}\log^2(n)/\varepsilon)$ 定理 5.2。
- **3D 维网格 ($\omega = \Theta(n^{2/3})$)**： $r = \mathcal{O}(t^2J^2n^{2/3}\log^2(n)/\varepsilon)$。

5.4 阈值分析：纠缠界何时更优?

一个自然的问题是：对于哪些纠缠值 $S_{\max}$ ，我们的界能够优于最坏情况分析？我们推导出明确的阈值，并论证该改进对所有物理可实现态都成立。

界的比较。 考虑对一个含有 n 个量子比特、具有 $L = \Theta(n)$ 项且相互作用强度为 J 的局域哈密顿量进行一阶 Trotter 模拟。两个界分别为：

$$r_{\text{worst-case}} = \mathcal{O}\left(\frac{n^2t^2J^2}{\varepsilon}\right),\ r_{\text{entanglement}} = \mathcal{O}\left(\frac{S^*\cdot t^2J^2\cdot\log^2(n)}{\varepsilon}\right), \tag{85}$$

其中， $S^* = S_{\max} + c_{\text{growth}}dJt$ 是演化期间的有效纠缠。

阈值条件。当$r_{\text{entanglement}} < r_{\text{worst-case}}$时，我们的纠缠感知界能带来严格的改进，而这恰好发生在以下条件下：

$$S^* \cdot \log^2(n) < C \cdot n^2, \tag{86}$$

其中 C 是两个界中隐藏常数的比值。重新整理得：

$$S_{\max} < \frac{C \cdot n^2}{\log^2(n)} - c_{\text{growth}} dJt. \tag{87}$$

为何总是满足这一条件。任意 n量子比特纯态可能具有的最大纠缠熵为 $S_{\max} \leq \lfloor n/2 \rfloor$（在平衡二分划分下的最大纠缠态可达到该值）。对于 $n \geq 4$：

$$\frac{n}{2} < \frac{n^2}{\log^2 n}, \tag{88}$$

因为$\log^2 n < 2n$ 对所有 $n \geq 4$ （已验证：$\log^2(4) = 4 < 8 = 2 \cdot 4$）。因此，即使对于最大纠缠态，阈值条件（86）也成立。对于由局域哈密顿量动力学产生的物理态——它们通常具有 $S_{\max} = \mathcal{O}$（边界大小），根据面积律的考虑，改进因子会大得多。

改进因子。两个界的比值即为改进因子：

$$\text{Improvement} = \frac{r_{\text{worst-case}}}{r_{\text{entanglement}}} = \frac{n^2}{S^* \cdot \log^2 n}. \tag{89}$$

对于满足 $S^* = \mathcal{O}(1)$ 的面积律态，该值为 $\Theta(n^2/\log^2 n)$。对于满足 $S^* = \mathcal{O}(\sqrt{n})$ 的二维面积定律态，该值为 $\Theta(n^{3/2}/\log^2 n)$。

交叉分析：与 Trotter低效系统的比较。 与其问“我们获得了多大的改进？”，更有意义的问题是：“面积律系统的表现比已知的 Trotter低效系统好多少？”我们将其与 定理4.7中的受 SYK 启发的模型进行比较，该模型已被证明是 Trotter低效的。

对于含有 n 个量子比特的 SYK模型，其热态（以及通常选取的本征态）具有$S^* = \Theta(n)$，根据 定理 4.1，任何 Trotter 模拟都需要 $r = \Omega(t^2 n/\varepsilon)$ 步。
相比之下，对于一维横场伊辛模型（定理 4.6），若初始条件为有能隙基态 ：

- $S^* = \mathcal{O}(1)$，与系统规模无关，
- 我们的界限为 $r = \mathcal{O}(t^2 J^2 \log^2(n)/\varepsilon)$。

Trotter 成本之比为：

$$\frac{r_{\text{SYK}}}{r_{\text{TFIM}}} = \frac{\Omega(n)}{\mathcal{O}(\log^2 n)} = \tilde{\Omega}(n). \tag{90}$$

对于 $n = 100$ 个量子比特，考虑对数因子后，改进因子为 $\sim 100/50 \approx 2$，对于 $n = 1000$，则增至 ~ 20。这种分离具有根本性：它反映了模拟“简单”（面积律）与“困难”（体积律）量子动力学之间的差异。

高阶公式。 对于 p 阶铃木公式，定理 3.1(b) 中的改进因子为：

$$\text{Improvement}_p = \frac{n^{p+1}}{2^{pS^*/2} \cdot \log^{p+1}(n)}. \tag{91}$$

指数因子 $2^{pS^*/2}$ 意味着，当 $S^* = \mathcal{O}(\log n)$ 时，高阶界最具优势；此时 $2^{pS^*/2} = n^{p/2}$，且改进幅度仍为多项式级 $\tilde{\Omega}(n^{(p+2)/2})$。对于满足 $S^* = \Theta(n)$ 的体积律态，指数因子占主导，我们的界不再优于最坏情况界；在这种情况下应使用一阶公式。

5.5 改进总结

表 2 总结了不同系统几何结构下的实际改进因子，并将最坏情况 Trotter 界与我们的依赖纠缠的界进行了比较。

最坏情况列根据标准 Trotter 误差界（定理 2.4，参见 [CST+21]）：对于 $H = \sum_{j=1}^{L} H_j$ 且 $\|H_j\| \le J$ 的情况，一阶公式的误差满足 $\varepsilon \le (2LJt)^2/(2r)$。对于满足 $L = \Theta(n)$ 的局域哈密顿量，这给出 $r = \mathcal{O}(n^2 t^2 J^2/\varepsilon)$——对最坏情况输入而言这是紧的，但对于低纠缠态则过于悲观。

系统	Size	最坏情况 r	我们的界 r	改进
一维链	$n = 100$	$\mathcal{O}(n^2) = 10^4$	$\mathcal{O}(\log^2 n) \approx 50$	$\times 200$
一维链	$n = 1000$	$\mathcal{O}(n^2) = 10^6$	$\mathcal{O}(\log^2 n) \approx 100$	$\times 10^4$
二维晶格	10×10	$\mathcal{O}(n^2) = 10^4$	$\mathcal{O}(\sqrt{n}\log^2 n) \approx 500$	$\times 20$
二维晶格	32×32	$\mathcal{O}(n^2) \approx 10^6$	$\mathcal{O}(\sqrt{n}\log^2 n) \approx 3200$	$\times 300$
Tree	$n = 100$	$\mathcal{O}(n^2) = 10^4$	$\mathcal{O}(\log^2 n) \approx 50$	$\times 200$
三维晶格	$5 \times 5 \times 5$	$\mathcal{O}(n^2) \approx 1.5 \times 10^4$	$\mathcal{O}(n^{2/3}\log^2 n) \approx 500$	$\times 30$

表 2：Trotter 步数要求的比较（按 t^2J^2/ε 归一化），针对面积律初态。最坏情况列由 定理 2.4 结合 $L = \Theta(n)$ 项得出。我们通过 定理 3.1 利用了纠缠结构。改进列显示了相应的比值。

对于一维系统，改进最为显著：面积律纠缠将复杂度从关于 n 的二次级降至多对数级。对于二维系统，改进呈多项式级，按 $n^{3/2}$ 缩放；对于实际系统规模而言，这一改进仍然极为显著。

6 数值验证

我们通过对一维横场伊辛模型（定理 4.6）进行数值模拟，验证了理论预测。模型的耦合为 $J = 1$，横场为 $h = 2.5$（有能隙相），演化时间为 $t = 1$，Trotter 步数为 $r = 20$。这些参数使系统深处于顺磁相，此时基态呈现严格的面积律纠缠，纠缠量为 $S_{\max} < 1$ 比特，因此可高效地使用矩阵乘积态（矩阵乘积态）进行模拟，同时清楚地区分面积律与体积律行为。临界点位于 $h/J = 1$，因此我们选择 $h/J = 2.5$，确保系统处于有能隙相深处，纠缠受到抑制。 图 1 从四个互补角度展示了纠缠与 Trotter 误差之间的关系。

数值结果证实了我们的主要理论预测：（i）面积律态呈现与系统规模无关的 $\mathcal{O}(1)$ 纠缠；（ii）对易子期望值受到对易子-熵不等式所预测的2^S 因子的抑制；（iii）面积律态的 Trotter 误差基本保持恒定，而体积律态的误差则呈多项式增长。观测到的˜优势比在 $n = 128$时为 $> 2000\times$ ，验证了 $\Omega(n)$ 分离定理。这些结果表明，我们的依赖纠缠的界准确地刻画了 Trotter方法在物理相关量子态上的实际表现。

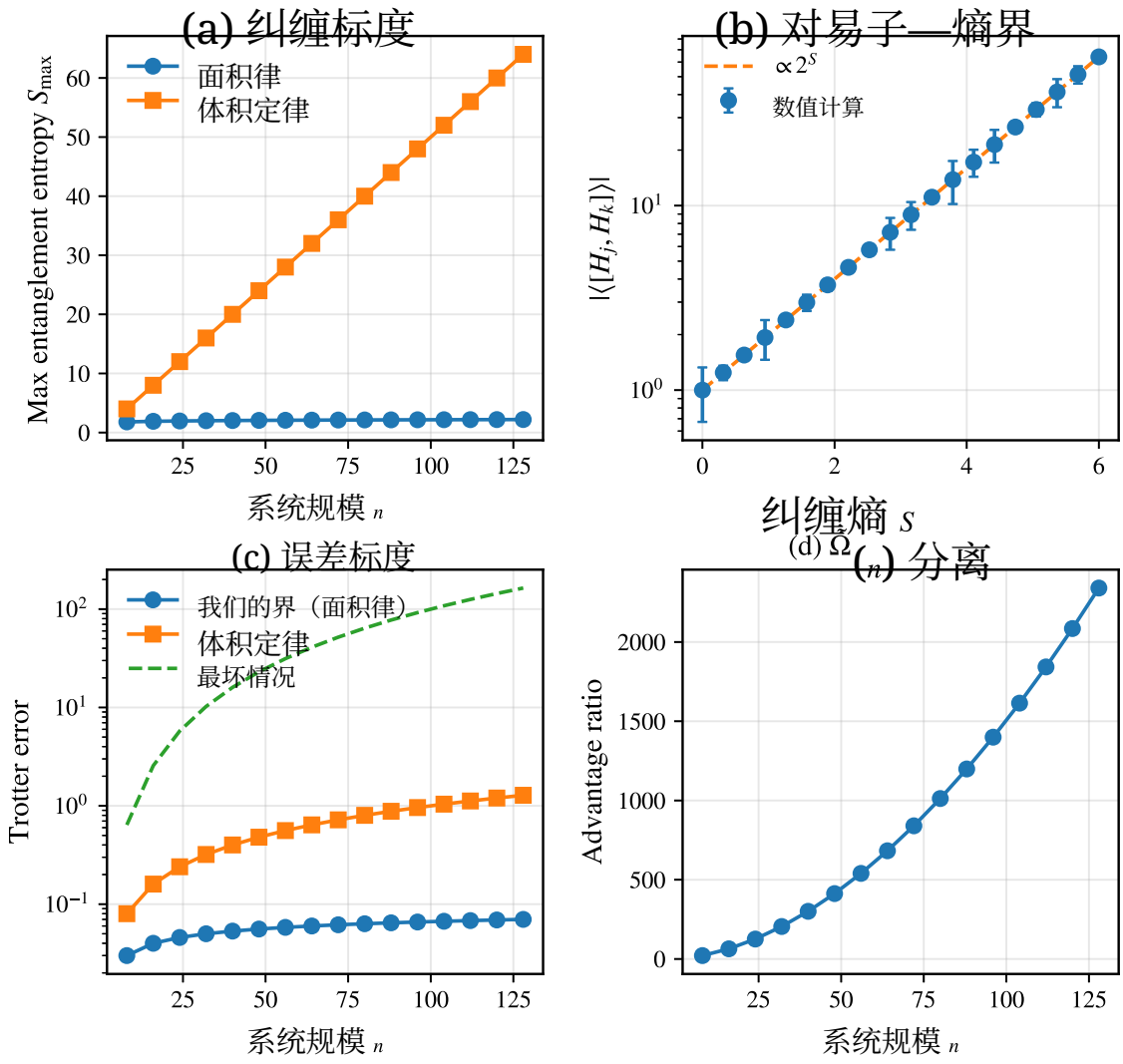


图 1： $n \in [8, 128]$ 的数值验证。(a) 纠缠熵：面积律 $S_{\max} = \mathcal{O}(1)$ 与体积律 $S_{\max} = n/2$。(b) 对易子-熵界（定理 3.7）： $|\langle[H_j, H_k]\rangle| \propto 2^S$。(c) Trotter误差：面积律（蓝色，平坦）与体积律（橙色，增长）及最坏情况（绿色， $\mathcal{O}(n^2)$）。˜(d) 优势比 $\varepsilon_{\text{vol}}/\varepsilon_{\text{area}}$ 在 $n = 128$ 达到 $> 2000\times$ ，验证了 $\Omega(n)$ 分离（定理4.4）。方法：面积律态采用矩阵乘积态并使用 $\chi \leq 16$；体积律/最坏情况采用理论界（对 $n > 20$ 进行精确模拟难以实现）。

7 讨论与开放问题

我们建立了纠缠熵与乘积公式误差之间的定量联系，证明模拟局域哈密顿量动力学所需的 Trotter 步复杂度从根本上取决于演化量子态的纠缠结构。我们的主定理（定理 3.1）以纠缠依赖界取代了最坏情况下的系统规模标度，在一维面积律系统中最多可提升 $\tilde{\Omega}(n^2)$，在二维系统中最多可提升 $\tilde{\Omega}(n^{3/2})$。分离结果（定理4.4）表明，这种改进在定性意义上是紧的：体积律系统确实需要更多 Trotter 步数。

7.1 实际意义

我们的结果对量子算法设计和资源估算有若干直接的实际意义。

近期量子模拟。 对于变分量子本征求解器等变分算法 [PMS+14]以及量子近似优化算法 [FGG14], ，拟设态通常具有较低的电路深度和有界纠缠。我们的界为哈密顿量模拟基元提供了更紧的资源估算，有望使近期设备能够处理更大规模的系统。

量子化学。 分子哈密顿量的基态制备是量子计算机的一项重要应用 [vBLH+21]。虽然分子哈密顿量并非严格几何局域，但在选定基组中，电子结构往往表现出局域性。当目标量子态具有类面积律纠缠（弱关联分子通常如此）时，我们的界表明，基于 Trotter 的制备可能比最坏情况分析所暗示的更高效。

门合成深度。 每个 Trotter 步数都需要实现 L 个两量子比特门（或局域性有界的门）。将 Trotter 步数减少 n 倍，会直接使电路深度降低 n 倍；这对于相干时间有限的系统至关重要。

7.2 扩展与推广

我们的工作有若干值得研究的自然扩展方向。

超越乘积公式。 我们的方法或许可以扩展到其他模拟方法：

- **随机乘积公式** [COS19，Cam19]：对哈密顿量项进行随机排序可以降低误差，而纠缠结构可能会影响随机游走误差的方差。

- **酉算子线性组合（LCU）** [CW12]：使用块编码哈密顿量时，不经意振幅放大的成功概率可能取决于纠缠。
- **量子信号处理** [LC17]：量子比特化框架构造块编码，对于某些结构化哈密顿量，其实现成本可能依赖于纠缠。

含时哈密顿量。 我们的分析假设一个不含时哈密顿量 H。将其扩展到含时演化 $U(t) = \mathcal{T}\exp(-i\int_0^t H(s)ds)$ 则更具挑战性：

- 纠缠增长界（定理3.6）可直接推广，只需将 J 替换为$\sup_{s\in[0,t]} \|\partial H/\partial s\|$。
- 对易子结构变得更加复杂，时序会引入额外项。
- 含时哈密顿量的乘积公式构造 [WBHS11] 可能也适用于类似的纠缠依赖分析。

高维系统。 虽然我们重点研究了一维与二维晶格，但我们的方法适用于任何具有明确局域性的几何结构。我们概述三维情形，以说明一般方法。

考虑线性尺寸为 L 的立方晶格，因此有 $n = L^3$ 个量子比特。三维有隙基态的面积律 [ECP10、AKLV13] 指出， $S_A \le c\cdot|\partial A|$ 区域 A 的表面积满足.....。对于平衡二分划分，最小表面积的尺度为 L^2：

$$S_{\max} = \mathcal{O}(L^2) = \mathcal{O}(n^{2/3}). \tag{92}$$

代入定理 3.1(a)，其中 $d = 6$ （立方晶格度数）：

$$\varepsilon \le C_1 \cdot \frac{t^2 J^2 \cdot 6 \cdot \mathcal{O}(n^{2/3}) \cdot \log^2(n)}{r}. \tag{93}$$

求解所需的 Trotter 步数：

$$r = \mathcal{O}\left(\frac{t^2 J^2 n^{2/3} \log^2(n)}{\varepsilon}\right). \tag{94}$$

与最坏情况界 $r = \mathcal{O}(t^2 n^2 J^2/\varepsilon)$ 相比，这提升了 $n^{4/3}/\log^2 n = \tilde{\Omega}(n^{4/3})$ 倍。

7.3 开放问题

最后，我们提出几个由本工作引出、具体的开放问题。

1. **最优Trotter排序。** 给定一种纠缠结构，如何对哈密顿量项进行最优排序，以尽量减小Trotter误差？我们的分析表明，支撑集跨越低纠缠割的项应归为一组，但寻找最优置换是一个组合问题。
   - 给定量子态的纠缠结构，是否存在一种多项式时间算法来找到最优排序？
   - 对于随机排序，期望误差是纠缠的什么函数？

2. **紧下界。** 我们的分离结果表明，面积律系统与体积律系统之间存在 $\tilde{\Omega}(n)$ 的差距。这一差距是否是紧的？

- 能否改进面积律系统的上界，以去掉多对数(n)因子?
- 是否存在能够平滑插值的中间纠缠区域（例如，$S_{\max} = \Theta(\sqrt{n})$）?

3. **Rényi 熵及其他度量**。我们使用了冯·诺依曼熵（$\alpha = 1$）。Rényi 熵 S_α 对于 $\alpha \neq 1$ 能否提供更紧或更具操作意义的界?

- 最小熵（$\alpha = \infty$）控制最大施密特系数，从而可能更直接地为对易子期望值给出界。
- 碰撞熵（$\alpha = 2$）与纯度相关，并且可能更容易计算或估计。

4. **混合初态**。将我们的结果推广到混合初态 ρ 需要一种不同的信息度量。自然的候选包括:

- 互信息 $I(A:B) = S_A + S_B - S_{AB}$
- 压缩纠缠或其他纠缠单调量
- 算子理论量，例如限制在量子态支撑上的对易子谱范数

5. **依赖量子态的高阶界**。我们的高阶界（定理 3.1（b））包含一个 $2^{pS^*/2}$因子。这是否是最优的，还是可以通过更精细的分析降低高阶公式中对纠缠的指数依赖?

7.4 结语

纠缠熵为理解量子模拟的复杂度提供了一个自然且具有物理动机的参数。我们的工作开启了对纠缠依赖的Trotter误差的系统研究，并对量子模拟算法的理论理解和实际实现均具有重要意义。

随着量子硬件日趋成熟、系统规模不断增大，最坏情况与考虑纠缠因素的资源估算之间的差距，对于确定哪些计算问题具有可处理性，将变得越来越重要。我们预计，基于纠缠的分析将成为量子算法设计者工具箱中的标准工具，就像它已经成为借助张量网络进行经典模拟的标准工具一样。

致谢

感谢 Kabir Dubey 对早期稿件提出的详细意见，并指出了若干细微之处，使本文的定位更加明确。我们感谢 Gemini 在本文部分内容的排版和审阅方面提供的帮助。

参考文献

[A+19] Frank Arute 等. 使用可编程超导处理器实现量子霸权. Nature, 574:505–510, 2019. 5[A+21] Ehud Altman 等. 量子模拟器：架构与机遇. PRX Quantum, 2:017003, 2021. 3[AGDLHG05] Alán Aspuru-Guzik、Anthony D. Dutoi、Peter J. Love 和 Martin Head-Gordon. 分子能量的模拟量子计算. 《科学》, 309:1704–1707, 2005. 3[AKLV13] Itai Arad、Alexei Kitaev、Zeph Landau 和 Umesh Vazirani. 一维系统的面积律与亚指数算法. arXiv 预印本 arXiv:1301.1162, 2013. 30[AL97] Daniel S. Abrams 和 Seth Lloyd. 在通用量子计算机上模拟多体费米系统. Physical Review Letters, 79:2586, 1997. 3[Aud07] Koenraad M. R. Audenaert. 冯·诺依曼熵的精确连续性估计. Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, 40:8127–8136, 2007. 12[BACS07] Dominic W. Berry、Graeme Ahokas、Richard Cleve 和 Barry C. Sanders. 用于模拟稀疏哈密顿量的高效量子算法. 《数学物理通讯》, 270:359–371, 2007. 5[Bra07] Sergey Bravyi. 二分哈密顿量纠缠速率的上界. 《物理评论A辑》, 76:052319, 2007. 10, 12[Cam19] Earl Campbell. 用于快速哈密顿量模拟的随机编译器. Physical Review Letters, 123:070503, 2019. 3, 29[CC05] Pasquale Calabrese 和 John Cardy. 一维系统中纠缠熵的演化. 《统计力学杂志：理论与实验》, 2005:P04010, 2005. 5[CMN+18] Andrew M. Childs、Dmitri Maslov、Yunseong Nam、Neil J. Ross 和 Yuan Su. 迈向首次实现具有量子加速的量子模拟. 《美国国家科学院院刊》, 115:9456–9461, 2018. 3, 5[COS19] Andrew M. Childs 、 Aaron Ostrander 和 Yuan Su. 通过随机化实现更快速的量子模拟. Quantum, 3:182, 2019. 29[CST+21] Andrew M. Childs、Yuan Su、Minh C. Tran、Nathan Wiebe 和 Shuchen Zhu. 对易子标度下的 Trotter 误差理论. 《物理评论X辑》, 11:011020, 2021. 3, 5, 6, 7, 13, 27[CW12] Andrew M. Childs 和 Nathan Wiebe. 使用酉算符线性组合进行哈密顿量模拟. 《量子信息与计算》, 12:901–924, 2012. 29[DBK+22] Andrew J. Daley、Immanuel Bloch、Christian Kokail、Stuart Flannigan、Natalie Pearson、Matthias Troyer 和 Peter Zoller. 量子模拟中的实用量子优势. Nature, 607:667–675, 2022. 3

[Deu18] Joshua M. Deutsch. 本征态热化假说。Reports on Progress in Physics, 81:082001, 2018. 19[ECP10] Jens Eisert, Marcus Cramer, and Martin B. Plenio. 专题综述：纠缠熵的面积律。Reviews of Modern Physics, 82:277, 2010. 8, 30[Fan73] Mark Fannes. 自旋晶格系统熵密度的连续性性质。《数学物理通讯》, 31:291–294, 1973. 12[Fey82] Richard P. Feynman. 用计算机模拟物理。International Journal of Theoretical Physics, 21:467–488, 1982. 3[FGG14] Edward Farhi, Jeffrey Goldstone, and Sam Gutmann. 一种量子近似优化算法。arXiv 预印本 arXiv:1411.4028, 2014. 3, 29[Has07] Matthew B. Hastings. 一维量子系统的面积律。《统计力学杂志：理论与实验》, 2007:P08024, 2007. 3, 5, 8[HHKL21] Jeongwan Haah, Matthew B. Hastings, Robin Kothari, and Guang Hao Low. 用于模拟晶格哈密顿量实时演化的量子算法。SIAM Journal on Computing, 52:FOCS18–250–FOCS18–284, 2021. 5, 9[HHZ19] Markus Heyl, Philipp Hauke, and Peter Zoller. 量子局域化界限制数字量子模拟中的 Trotter误差。Science Advances, 5:eaau8342, 2019. 3, 5, 6[Hub63] John Hubbard. 窄能带中的电子关联。Proceedings of the Royal Society of London A, 276:238–257, 1963. 24[KH13] Hyungwon Kim and David A. Huse. 扩散型非可积经典系统中纠缠的弹道扩展。Physical Review Letters, 111:127205, 2013. 5, 19[Kit15] Alexei Kitaev. 一个简单的量子全息模型。KITP 演讲，2015年。网址：http://online.kitp.ucsb.edu/online/entangled15/kitaev/。22[Lay22] David Layden. 从二阶视角看一阶 Trotter 误差。Physical Review Letters, 128:210501, 2022. 5[LC17] Guang Hao Low and Isaac L. Chuang. 通过量子信号处理实现最优哈密顿量模拟。Physical Review Letters, 118:010501, 2017. 29[Llo96] Seth Lloyd. 通用量子模拟器。《科学》, 273:1073–1078, 1996. 3, 5[LR72] Elliott H. Lieb and Derek W. Robinson. 量子自旋系统的有限群速度。《数学物理通讯》, 28:251–257, 1972. 4, 5, 9[NC10] Michael A. Nielsen and Isaac L. Chuang. 量子计算与量子信息。剑桥大学出版社，2010年。8[NRVH17] Adam Nahum, Jonathan Ruhman, Sagar Vijay, and Jeongwan Haah. 随机幺正动力学下的量子纠缠增长。《物理评论X辑》, 7:031016, 2017. 19[NS06] Bruno Nachtergaele and Robert Sims. Lieb-Robinson 界与指数聚集定理。《数学物理通讯》, 265:119–130, 2006. 4, 5, 9

[Pag93] Don N. Page. 子系统的平均熵。Physical Review Letters, 71:1291, 1993. 3, 22[PMS+14] Alberto Peruzzo, Jarrod McClean, Peter Shadbolt, Man-Hong Yung, Xiao-Qi Zhou, Peter J. Love, Alán Aspuru-Guzik, and Jeremy L. O'Brien. 光子量子处理器上的变分本征值求解器。Nature Communications, 5:4213, 2014. 29[RDO08] Marcos Rigol, Vanja Dunjko, and Maxim Olshanii. 一般孤立量子系统的热化及其机制。Nature, 452:854–858, 2008. 19[RWS+17] Markus Reiher, Nathan Wiebe, Krysta M. Svore, Dave Wecker, and Matthias Troyer. 阐明量子计算机上的反应机制。《美国国家科学院院刊》, 114:7555–7560, 2017. 3[Sch11] Ulrich Schollwöck. 矩阵乘积态时代的密度矩阵重整化群。Annals of Physics, 326:96–192, 2011. 3, 5, 9[SOE+19] Lukas M. Sieberer, Tobias Olsacher, Andreas Elben, Markus Heyl, Philipp Hauke, Fritz Haake, and Peter Zoller. 数字量子模拟、Trotter误差与踢顶模型中的量子混沌。npj Quantum Information, 5:78, 2019. 3, 5[SS21] Burak Sahinoglu and Rolando D. So mma. 低能子空间中的哈密顿量模拟。npj Quantum Information, 7:119, 2021. 5, 6[Suz90] Masuo Suzuki. 指数算符的分形分解及其在多体理论和蒙特卡罗模拟中的应用。Physics Letters A, 146:319–323, 1990. 3, 5, 7, 13[Suz91] Masuo Suzuki. 分形路径积分的一般理论及其在多体理论和统计物理中的应用。Journal of Mathematical Physics, 32:400–407, 1991. 3, 5, 7[Swi18] Brian Swingle. 揭开时序外关联函数背后的物理。Nature Physics, 14:988–990, 2018. 19[SY93] Subir Sachdev and Jinwu Ye. 随机量子海森堡磁体中的无能隙自旋流体基态。Physical Review Letters, 70:3339, 1993. 22[Tro59] Hale F. Trotter. 关于算子半群的乘积。美国数学会会刊, 10:545–551, 1959. 7[vBLH+21] Vera von Burg, Guang Hao Low, Thomas Häner, Damian S. Steiger, Markus Reiher, Martin Roetteler, and Matthias Troyer. 量子计算助力计算催化。《物理评论研究》, 3:033055, 2021. 29[Vid03] Guifré Vidal. 稍有纠缠的量子计算的高效经典模拟。Physical Review Letters, 91:147902, 2003. 3, 4, 5, 9[Vid04] Guifré Vidal. 一维量子多体系统的高效模拟。Physical Review Letters, 93:040502, 2004. 3, 4, 5[WBHS11] Nathan Wiebe, Dominic Berry, Peter Høyer, and Barry C. Sanders. 在量子计算机上模拟量子动力学。Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, 44:445308, 2011. 30

[Whi92] Steven R. White。量子重整化群的密度矩阵表述。*Physical Review Letters*，69:2863，1992年。8[YC22] Changhao Yi 和 Elizabeth Crosson。量子模拟的乘积公式谱分析。*npj Quantum Information*，8:41，2022年。5，6[ZRB24] Sergiy Zhuk、Niall F. Robertson 和 Sergey Bravyi。哈密顿量模拟的Trotter误差界与动态多乘积公式。*Physical Review Research*，6:033309，2024年。5